

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM
COMPUTACIONAL
DOUTORADO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

Igor Michel Santos Leite

Viabilidade fotovoltaica residencial: uma abordagem envolvendo volatilidade
estocástica e opções evolucionárias

Juiz de Fora

2023

Igor Michel Santos Leite

Viabilidade fotovoltaica residencial: uma abordagem envolvendo volatilidade estocástica e opções evolucionárias

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Modelagem Computacional. Área de concentração: Sistemas Computacionais Aplicados

Orientador: Prof. D.Sc. Leonardo Goliatt da Fonseca

Coorientadora: Prof. D.Sc. Fernanda Finotti Cordeiro

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Leite, Igor Michel Santos.

Viabilidade fotovoltaica residencial: uma abordagem envolvendo volatilidade estocástica e opções evolucionárias / Igor Michel Santos Leite. – 2023.

158 f. : il.

Orientador: Leonardo Goliatt da Fonseca

Coorientadora: Fernanda Finotti Cordeiro

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional. DOUTORADO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL, 2023.

1. Simulação de Monte Carlo. 2. Computação Evolucionista. 3. Opções Reais.

Igor Michel Santos Leite

Viabilidade fotovoltaica residencial: uma abordagem envolvendo volatilidade estocástica e opções evolucionárias

Tese apresentada ao
Programa de Pós-
Graduação em
Modelagem
Computacional
da Universidade
Federal de Juiz de
Fora como requisito
parcial à obtenção do
título de Doutor em
Modelagem
Computacional. Área
de concentração:
Modelagem
Computacional.

Aprovada em 06 de setembro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Leonardo Goliatt da Fonseca - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof.^a Dr.^a Fernanda Finotti Cordeiro - Coorientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Marco Antônio Guimarães Dias
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Luiz Eduardo Teixeira Brandão
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Wanderlei Malaquias Pereira Junior

Universidade Federal de Catalão

Prof. Dr. Carlos Cristiano Hasenclever Borges

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 29/08/2023.



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Goliatt da Fonseca, Professor(a)**, em 14/09/2023, às 18:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Cristiano Hasenclever Borges, Professor(a)**, em 15/09/2023, às 08:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marco Antonio Guimarães Dias, Usuário Externo**, em 19/09/2023, às 13:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wanderlei Malaquias Pereira Junior, Usuário Externo**, em 19/09/2023, às 16:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **LUIZ EDUARDO TEIXEIRA BRANDAO, Usuário Externo**, em 20/09/2023, às 18:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fernanda Finotti Cordeiro Perobelli, Professor(a)**, em 21/09/2023, às 19:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1439268** e o código CRC **6F81BF9B**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade de terminar mais esta fase da minha carreira.

Obrigado pelos milagres que Ele fez nessa caminhada.

Agradeço aos meus pais por me ensinarem desde pequeno que aprender nunca é demais e sempre incentivarem a continuar estudando.

A tia Nilza pelas eternas palavras de sabedoria e acolhimento nos momentos mais críticos dessa trajetória.

Agradeço aos meus professores e orientadores por tudo que passaram para levar adiante os meus devaneios. Ao prof. Leonardo pela disponibilidade e sugestões ao longo deste caminho. À Prof. Fernanda pela sabedoria ímpar e estar sempre presente ao me fazer encorajar a coragem para continuar, uma mãe. Ao Prof. Marco Antonio Guimarães Dias por sempre estar presente e nunca ter esquecido dos seus alunos. Ao Prof Carlos Patrício Samanez (in memoriam) por ter dado o pontapé inicial, ainda em 2016, para que desenvolvesse este doutorado.

Aos amigos e colegas de trabalho da Indra Comercializadora de Energia por sempre serem compreensivos e terem acreditado nesta ideia. Em especial aos amigos Vinicius Henning, Ruan Medina e Yuri Moreira por estarem presentes e me fazerem rir tornando essa etapa mais agradável possível.

Agradeço à UFJF e ao Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional pela estrutura necessária para o andamento das minhas atividades durante essa etapa. Agradeço aos professores pelos ensinamentos, aos técnicos pelos cuidados, aos colegas pelo convívio, à CAPES e à FAPEMIG pelo suporte financeiro concedido sem o qual tornaria esse projeto impossível.

A todos que estão comigo nesta jornada, meu muito obrigado!

"Algo só é impossível até que alguém duvide e prove o contrário."

(Albert Einstein)

RESUMO

O desenvolvimento de usinas elétricas baseadas em fontes renováveis deu origem a novos paradigmas para a geração de energia no mundo. Todavia, apesar dos benefícios desta modalidade de geração, as incertezas quanto ao futuro mitigam um maior crescimento do setor, cabendo aos governos o fomento destes projetos. As leis do setor elétrico no Brasil passaram por uma reformulação nos últimos anos e entrou em vigor em 2023, onde passaram a onerar os retornos dos agentes, em especial os produtores residenciais, ganhando a alcunha “taxa do sol”. Esse novo marco regulatório semeou a pergunta aos novos ingressantes na geração solar residencial: "devo ou não investir no projeto solar e sob quais condições?". Assim, resta ao agente decisor a avaliação de cenários e análise das flexibilidades gerenciais inerentes ao processo, como por exemplo, realizar o investimento de forma total ou parcial, adiar e/ou considerar um investimento em ativo de risco do mercado financeiro. Portanto, este trabalho avalia a iniciativa de se investir em sistema fotovoltaico adotando a Teoria de Opções Reais para representar de forma mais fidedigna este contexto de decisão no Brasil, considerando a ótica de um consumidor residencial que consome em média 360kWh/mês e de suas flexibilidades gerenciais. Assim, desenvolve-se uma ferramenta maleável e dinâmica que visa minimizar o sumpto do agente considerando as incertezas relacionadas e que pode ser replicada para agentes com consumo energético maior ou em diversos outros contextos. A abordagem metodológica utilizada neste trabalho consiste em simular processos estocásticos e otimizar o conjunto de decisão por metaheurísticas evolutivas. Inicialmente, compara-se os resultados de *benchmark* da literatura com as curvas de gatilhos considerando diferentes combinações genotípicas e criadas para diferentes algoritmos otimizadores. Posteriormente, modela-se as incertezas considerando e comparando as soluções por aplicação dos modelos de Heston e MGB (Movimento Geométrico Browniano) com Jumps para a representação do preço da energia elétrica e aplicação do modelo MGB para a representação do índice IVVB11 (iShares S&P 500 FIC de Fundo de Índice IE). Para calibrar os parâmetros de Heston foi desenvolvida uma abordagem baseada em DeepONet. Os resultados demonstram um impacto da ordem de 20% a 30% na economia obtida pelo agente, a depender da abordagem estocástica considerada na avaliação do projeto. Cada abordagem estocástica gera comportamentos distintos no conjunto de decisão, contudo concordam na recomendação de postergar o exercício das opções. Isso indica que a nova política Brasileira deve desacelerar o crescimento do setor fotovoltaico residencial, mas não é capaz, por si só, de inviabilizar tais investimentos.

Palavras-chave: Opções Reais. Simulação de Monte Carlo. Computação Evolucionista. Volatilidade Estocástica. Regra de decisão.

ABSTRACT

The development of power plants based on renewable sources gave rise to new paradigms for energy generation in the world. However, despite the benefits of this type of generation, uncertainties about the future mitigate further growth in the sector, leaving governments to promote these projects. The laws of the electricity sector in Brazil underwent a reformulation in recent years and came into force in 2023, when they began to burden the returns of agents, especially residential producers, earning the nickname “sun tax”. This new regulatory framework raised the question for newcomers to residential solar generation: "Should I or should I not invest in the solar project and under what conditions?" Thus, it remains for the decision-maker to evaluate scenarios and analyze the managerial flexibilities inherent to the process, such as, for example, carrying out the investment in full or in part, postponing and/or considering an investment in a risky asset in the financial market. Therefore, this work evaluates the initiative of investing in a photovoltaic system, adopting the Theory of Real Options to more faithfully represent this decision-making context in Brazil, considering the perspective of a residential consumer who consumes an average of 360kWh/month and its flexibility managerial. Thus, a malleable and dynamic tool is developed that aims to minimize the agent's sum by incorporating related uncertainties and that can be replicated for agents with higher energy consumption or in several other contexts. The methodological approach used in this work consists of simulating stochastic processes and optimizing the decision set by evolutionary metaheuristics. Initially, benchmark results from the literature are compared with trigger curves considering different genotypic combinations created for different optimizer algorithms. Subsequently, the uncertainties are modelled considering and comparing the solutions by applying the Heston and MGB+Jumps models to represent the price of electricity and applying the MGB model to represent the IVVB11 index. To calibrate Heston's parameters, an approach based on DeepONet was developed. The results demonstrate an impact of around 20% to 30% in the savings obtained by the agent, depending on the stochastic approach considered in the project evaluation. Each stochastic approach generates different behaviours in the decision set, however, they agree on the delay in the moment of exercising the options. This indicates that the new Brazilian policy should slow down the growth of the residential photovoltaic sector, but it is not capable, by itself, of making such investments unfeasible.

Keywords: Real Options. Monte Carlo simulation. Evolutionary Computing. Stochastic Volatility. Decision rule.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – LCOE histórico	21
Figura 2 – Potencial Global para produção de energia via recurso solar	21
Figura 3 – Composição da tarifa de energia elétrica no Brasil	24
Figura 4 – Exemplo perfil de cargas para consumo e geração instantânea	26
Figura 5 – Metodologias de solução para opções reais	45
Figura 6 – Esquema básico de evolução	48
Figura 7 – Exemplo de cruzamento	49
Figura 8 – Exemplo da regra de decisão para o caso de uma variável estocástica: linhas cinza são os possíveis caminhos para o ativo base V	62
Figura 9 – Exemplos de cromossomos para a precificação de opções	62
Figura 10 – Esquemas de paralelização baseado no indivíduo para a abordagem SMC + CE	66
Figura 11 – Esquemas de paralelização baseado na simulação para a abordagem SMC + CE	67
Figura 12 – Esquema de decisão do problema	74
Figura 13 – Fluxograma das etapas de avaliação do projeto fotovoltaico	75
Figura 14 – Exemplo de perfis de radiação e valores respectivos em <i>HSP</i>	76
Figura 15 – Série mensal de irradiância solar	77
Figura 16 – Metodologia adotada para identificação do processo estocástico	80
Figura 17 – Evolução do preço da energia elétrica em Minas Gerais	82
Figura 18 – Evolução da razão de variância para a energia elétrica	82
Figura 19 – Regressão GJR-GARCH para o preço da energia elétrica	86
Figura 20 – Evolução do IVVB11	86
Figura 21 – Evolução Razão de Variância IVVB11	87
Figura 22 – Regressão IVVB11 para estimação de parâmetros	87
Figura 23 – Exemplo de <i>timing</i> com mais de uma possibilidade de decisão	91
Figura 24 – Representação dos gatilhos	92
Figura 25 – Pseudocódigo para avaliação de Fitness do candidato	98
Figura 26 – Function <code>Check_entry_points()</code>	99
Figura 27 – MSE para Experimento I $V(t = 0) = 110$	102
Figura 28 – Gatilhos para Experimento I $V(t = 0) = 110$	103
Figura 29 – Número de exercícios por período Experimento I	104
Figura 30 – MSE para Experimento II $V(t = 0) = 70$	110
Figura 31 – MSE para Experimento II $V(t = 0) = 80$	110
Figura 32 – MSE para Experimento II $V(t = 0) = 90$	110
Figura 33 – MSE para Experimento II $V(t = 0) = 100$	111
Figura 34 – MSE para Experimento II $V(t = 0) = 110$	111

Figura 35 – MSE para Experimento II $V(t = 0) = 120$	111
Figura 36 – Representação DeepOnet	112
Figura 37 – Metodologia para estimação de parâmetros com DeepONet	113
Figura 38 – Evolução Treinamento na DeepONets	115
Figura 39 – MSE na estimativa dos parâmetros com diferentes abordagens	117
Figura 40 – Histograma das simulações em diferentes passos - Heston	120
Figura 41 – Histograma das simulações em diferentes passos - MGB + <i>Jumps</i>	120
Figura 42 – Comparação de trajetórias nas simulações Heston \times MGB + <i>Jumps</i>	121
Figura 43 – Distribuição dos resultados para os casos considerados	123
Figura 44 – Distribuição dos resultados para Estado 1 como única opção	125
Figura 45 – Variação dos parâmetros dos gatilhos	128
Figura 46 – Lógica de decisão otimizada para preço energia	131
Figura 47 – Lógica de decisão otimizada para preço IVVB11	132
Figura 48 – Tempos até a tomada da primeira decisão	134
Figura 49 – Relação dos resultados com taxa livre de risco	137
Figura 50 – Variação parâmetros de gatilho	138

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Esquemas de truncamento	41
Tabela 2 – Pacotes Python	59
Tabela 3 – Hiperparâmetros dos algoritmos testados	69
Tabela 4 – Características da Opção - Experimento I	69
Tabela 5 – Valor da opção e V^* para a opção descrita na Tabela 4	70
Tabela 6 – Valores <i>benchmark</i> para Experimento II	70
Tabela 7 – Parâmetros macro para o modelo de avaliação fotovoltaico	79
Tabela 8 – Parâmetros do modelo de Heston para Energia Elétrica (a.m.)	85
Tabela 9 – Estatísticas do retorno para IVVB11	88
Tabela 10 – Correlação de Pearson entre as variáveis consideradas	88
Tabela 11 – Resultado da decomposição de Cholesky	89
Tabela 12 – Resultado da decomposição de Cholesky para o caso MGB com saltos	89
Tabela 13 – Gatilhos das opções	92
Tabela 14 – Descontos TUSD sobre a energia injetada por ano	95
Tabela 15 – Valores críticos obtidos via método da Bisseção	96
Tabela 16 – Resultados para o Experimento I	101
Tabela 17 – MSE para o Experimento I	101
Tabela 18 – Resultados para o Experimento II	108
Tabela 19 – MSE para o Experimento II	109
Tabela 20 – Descrição dos resultados para avaliação de projeto fotovoltaico	124
Tabela 21 – Descrição dos resultados para Estado 1 como única opção	126
Tabela 22 – Valores médios para gatilhos V_EXP no problema de investimento no projeto solar	128
Tabela 23 – Probabilidade de decisões(%)	132
Tabela 24 – Gatilhos de decisão por ano considerando modelo Heston	135
Tabela 25 – Gatilhos de decisão por ano considerando modelo MGB+ <i>Jumps</i>	135

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

IDH	Índice de desenvolvimento Humano
GEEs	Gases do Efeito Estufa
COP	Conferências das Nações Unidas sobre as Mudanças Climáticas
SG	<i>Smart Grids</i>
LCOE	<i>Levelized cost of electricity</i>
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
CE	Computação Evolucionista
IC	Inteligência Computacional
TSUD	Tarifa de Uso do Sistema de Distribuição
NMGD	Novo Marco da Geração Distribuída
RNA	Redes Neurais Artificiais
FCD	Fluxo de Caixa Descontado
VPL	Valor Presente Líquido
TIR	Taxa Interna de Retorno
TOR	Teoria de Opções Reais
ETF	<i>Exchange-traded fund</i>
CAPEX	<i>Capital Expenditure</i>
OPEX	<i>Operational Expenditure</i>
CAPM	<i>Capital Asset Pricing Model</i>
MGB	Movimento Geométrico Browniano
MRM	Movimento de Reversão à Média
BS	Bjerkstrand and Stensland
CIR	Cox-Ingersoll-Ross
EMV	Estimativa por Máxima Verossimilhança
MLE	<i>Maximum likelihood estimation</i>
GMM	<i>Generalized Method of Moment</i>
GARCH	<i>Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity</i>
RNA	Redes Neurais Artificiais
EKF	<i>extended Kalman filter</i>
CEKF	<i>consistent extended Kalman filter</i>
NMLE	<i>normal maximum likelihood estimation</i>
LSM	<i>Least squares Monte Carlo</i>
CE	Computação Evolucionista
GA	Algoritmo Genético
DE	<i>Differential Evolution</i>
SSA	<i>Social Spider Algorithm</i>
PSO	<i>Particle Swarm Optimisation</i>
CRR	Cox-Ross-Rubestain
ROA-ABDM	Modelo de Difusão Baseada em Agente com Suporte de Análise de Opções Reais

EDP	Equações Diferencial Parciais
SMC	Simulação de Monte Carlo
CPU	<i>Central Processing Unit</i>
GPU	<i>Graphics Processing Unit</i>
ABC	<i>Artificial Bee Colony</i>
IHS	<i>Improved Harmony Search</i>
SADE	<i>Self-Adaptive Differential Evolution</i>
CMA-ES	<i>Evolution Strategy with Covariance Matrix Adaptation</i>
<i>HSP</i>	Horas de Sol Pleno
IPCA	Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo
MSE	<i>Mean Squared Error</i>
ANOVA	Análise de Variância

SUMÁRIO

	LISTA DE ILUSTRAÇÕES	8
1	INTRODUÇÃO	15
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	15
1.2	O SETOR ELÉTRICO BRASILEIRO E A ENERGIA SOLAR FOTOVOLTAICA	19
1.2.1	O aumento da capacidade em sistemas fotovoltaicos residenciais	26
1.3	O ASPECTO DA MODELAGEM COMPUTACIONAL	27
1.4	CONTRIBUIÇÃO	28
1.5	OBJETIVOS	29
1.6	ESTRUTURA DO TEXTO	30
2	REFERENCIAL TEÓRICO	31
2.1	AVALIAÇÃO DE PROJETOS EM AMBIENTE DE INCERTEZA	31
2.1.1	Teoria de Opções Reais	31
2.1.1.1	<i>Movimento Geométrico Browniano</i>	35
2.1.1.2	<i>Movimento de Reversão à Média</i>	36
2.1.1.3	<i>Movimento com Saltos</i>	38
2.1.1.4	<i>Movimentos com volatilidade estocástica</i>	39
2.1.1.5	<i>Estimação de parâmetros para o Modelo de Heston</i>	42
2.1.2	Apreçamento de Opções Reais	44
2.2	COMPUTAÇÃO EVOLUCIONISTA	48
2.2.1	O Algoritmo de Aranhas Sociais	50
2.2.2	O algoritmo Big Bang-Big Crunch	51
2.2.3	Evolução Diferencial	52
2.3	PESQUISAS RECENTES	54
3	METODOLOGIA	59
3.1	AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DO MODELO MCS + CE	59
3.1.1	O problema de precificar uma opção do tipo americana via SMC e metaheurísticas	59
3.1.2	Estratégias de paralelização e <i>speedup</i> para a metodologia SMC + CE	64
3.1.3	Metodologia de teste e <i>Benchmark</i> da literatura	68
3.1.3.1	<i>Experimento I</i>	69
3.1.3.2	<i>Experimento II</i>	70
3.1.3.3	<i>Métodos de Avaliação</i>	70
3.2	AVALIAÇÃO PROJETO FOTOVOLTAICOS	71
3.2.1	Dimensionamento do sistema fotovoltaico residencial	74
3.2.2	Parâmetros do projeto Solar	76

3.2.3	Dados utilizados e modelagem de Incerteza	78
<i>3.2.3.1</i>	<i>Identificação dos processos estocásticos</i>	79
<i>3.2.3.2</i>	<i>Dados Energia Elétrica</i>	81
<i>3.2.3.3</i>	<i>Dados IVVB11</i>	84
<i>3.2.3.4</i>	<i>Simulação de Monte Carlo com múltiplas variáveis</i>	88
3.2.4	Modelagem populacional para avaliação de projetos	90
3.2.5	Modelagem do fluxo de caixa das opções	92
<i>3.2.5.1</i>	<i>Metodologia de cálculo preço crítico na expiração</i>	95
3.2.6	Modelagem Computacional do Problema	96
4	RESULTADOS	100
4.1	AVALIAÇÃO DO MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES VIA CE	100
4.1.1	Experimento I	100
4.1.2	Experimento II	103
4.2	CALIBRAÇÃO DO MODELO DE HESTON VIA APRENDIZADO DE MÁQUINA	111
4.3	AVALIAÇÃO DE PROJETOS FOTOVOLTAICOS	118
4.3.1	O Aspecto da simulação na modelagem de incertezas	118
4.3.2	Avaliação do problema de decisão	122
<i>4.3.2.1</i>	<i>Análise do timing de decisão</i>	127
<i>4.3.2.2</i>	<i>Análise para a variação da taxa livre de risco</i>	136
<i>4.3.2.3</i>	<i>Considerações finais</i>	138
5	CONCLUSÃO	141
5.1	TRABALHOS FUTUROS	144
	REFERÊNCIAS	145

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Os adventos proporcionados pela energia elétrica são conhecidos por todas as pessoas, seja pelo progresso social vinculado ao mesmo ou pelo avanço econômico, disseminação de informações e conhecimento. Imagine um plano anacrônico e paralelo onde possamos comparar o avanço da civilização antes de depois do advento da energia elétrica. Assim, a essencialidade deste setor para todas as nações é ímpar, sendo que o consumo de energia um dos fatores para que o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) seja calculado (ZUBA, 2017).

A expansão e massificação da energia elétrica revolucionou a vida das pessoas e no ímpeto do progresso aumentou o consumo e a demanda por um bem cada vez mais essencial na sociedade. Neste contexto, os seres humanos iniciaram e desenvolveram os alicerces energéticos baseados em energia fóssil, principalmente o carvão e petróleo. No entanto, o consumo acelerado de fontes fósseis produziu toneladas de gases do efeito estufa (GEEs) por décadas, o que tornou o aquecimento global o próximo grande desafio da humanidade (TIAN et al., 2017)

Na contramão do cataclismo global, a Conferências das Nações Unidas sobre as Mudanças Climáticas (COP) ocorre anualmente com líderes globais ocorrem para que metas de redução de temperatura, mitigação das emissões de gases estufa, ETC, sejam negociadas (ZHANG et al., 2022). Essas conferências demonstram a crescente pressão social para diminuir as emissões e também enfatizam a necessidade urgente de transformar o sistema de energia atual em um modelo de baixo ou zero carbono baseado em fontes de energia renováveis.

Em outras palavras, a ascensão e crescente penetração dos conceitos de energia renovável para todas as camadas sociais criam paradigmas relacionados à sustentabilidade e confiança energética. Os consumidores finais, movidos por preocupações ambientais e uma grande demanda de energia, estão solicitando a substituição das usinas tradicionais de alto carbono por usinas de baixo ou zero carbono (SCHACHTER; MANCARELLA, 2016)

Neste sentido, os especialistas no setor atribuem a denominação *Smart Grid* (SG) aos sistemas de energia elétrica que se utiliza da tecnologia da informação para fazer com que o sistema seja mais eficiente em termos financeiros e energéticos. O ápice desta representação é a permissividade das redes elétricas para integração das fontes de energia renovável à malha de distribuição, facilitando e fomentando a inserção de pequenos produtores geradores de energia elétrica ou geração distribuída, impulsionando a confiança e sustentabilidade do modelo. Logo, as SGs representam a evolução das redes elétricas (TIAN et al., 2017).

Apesar da confluência na necessidade ambiental e tecnologia, a transição para um modelo energético de zero carbono é lenta devido à necessidade de investimento, ou seja, a migração só faz sentido se for financeiramente atrativa para os agentes. Neste âmbito, a promoção de energia renovável é considerada uma abordagem chave na política energética de qualquer governo ao fomentar os projetos de baixo carbono no portfólio energético futuro (ZHANG et al., 2022). Chebotareva, Strielkowski e Streimikiene (2020) destacam a relevância dos incentivos e fomento governamental na política de expansão das fontes renováveis, não sendo restrito à esfera financeira, mas sim via leis, regulamentos e programas que mitigam a inércia inicial de novos investimentos em projetos para geração de energia renovável.

No contexto brasileiro, a força motriz energética se apoia em matrizes provenientes de fontes renováveis, predominantemente as usinas hidrelétricas, garantindo ao Brasil uma posição privilegiada em termos de sustentabilidade no fornecimento de energia. No entanto, a baixa diversificação desta matriz mostrou-se negativa em algumas situações, como no racionamento de eletricidade entre jun/2001 e fev/2002, ocasionado pela dependência do volume das chuvas para realimentar os reservatórios de água nas hidrelétricas (FONTOURA, 2011).

Como consequência, novas usinas termelétricas foram instaladas, além da venda pública da reserva de energia, realizada para aumentar a robustez do sistema elétrico brasileiro (FONTOURA, 2011). A contrapartida foi o aumento das tarifas de energia na seca para os clientes finais, aumentando o peso desta despesa no orçamento familiar. A forma de indicar ao consumidor a ativação ou não das termelétricas foi a adoção do sistema de bandeiras tarifárias, instaurado em fevereiro de 2015 após nova baixa nos níveis dos reservatórios por um período de estiagem prolongada. Desde a implementação das bandeiras tarifárias a receita extra alcançou o patamar do R\$ 35,42 bilhões de reais (AMATO, 2020).

Atualmente, um significativo número de residências está aderindo aos sistemas fotovoltaicos residenciais (PV ou ainda telhados solares) dado o impacto do custo da eletricidade na renda da maioria das famílias no Brasil, visando a minimização dos dispêndios. Todavia, essa tendência não tem como prelúdio apenas da vontade dos consumidores, sendo que esse movimento só ficou viável devido à resolução n.º 482/2012 da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) (ANEEL, 2012) que autorizou o modelo de compensação de energia elétrica para microgeração distribuída¹, formalmente denominado *net metering*.

Essa regulamentação garante a injeção do excedente de produção elétrica na rede e o desconto na fatura², evitando o custo dos bancos de baterias, e aumentando a viabilidade

¹ Até 75kW de potência instalada.

² O crédito pela energia excedente possui validade de 6 anos.

dos telhados solares. Em outras palavras, a resolução permite que durante o dia o telhado injete energia elétrica para a rede (gerando saldo positivo) e no período da noite consome energia da rede (saldo negativo), ao final do mês o balanço entre injetado e consumido é feito. Mais detalhes sobre as nuances relacionadas a relação de injeção e consumo são apresentadas na Seção 1.2.

Ao passo que a regulamentação permite a injeção de energia na rede elétrica, a mesma limita o tamanho máximo do sistema ao consumo do agente, pois o teto para o desconto está limitado ao que for consumido da rede elétrica. Esse mecanismo faz com que o superdimensionamento do sistema não seja uma escolha ótima, uma vez que o mesmo não aumenta o desconto recebido. Residências que utilizam desse modelo são comumente denominados sistemas *on-grid*. Já os sistemas *off-grid* são aqueles completamente desconectados do sistema de distribuição. Ou seja, tais sistemas devem ser auto-suficientes para suprir seu consumo, como exemplo, regiões isoladas e sem acesso à rede de distribuição e que não são afetadas diretamente pela legislação, não sendo o foco neste trabalho.

O conceito de autogerador de eletricidade por meio do sol é oriunda da simplicidade de aquisição e instalação, baixo custo de manutenção dos equipamentos por parte dos agentes (clientes elétricos residenciais). Além disso, vincula-se a queda vertiginosa nos preços dos sistemas fotovoltaicos nos últimos anos, massificando tal opção. Apesar do prognóstico positivo para o cenário da energia solar, uma nova diretriz regulatória começou a vigorar no Brasil no início de 2023. A nova regulamentação tributa a eletricidade injetada na rede para remunerar o uso do sistema de distribuição das concessionárias (BRASIL, 2022). Em outras palavras, os pequenos produtores precisam remunerar as distribuidoras por usarem os sistemas elétricos das mesmas.

O novo ambiente aumenta a hesitação dos possíveis novos investidores, que se sentem inseguros, minando sua confiança e credibilidade para colocar o dinheiro neste tipo de investimento. Considerando que outros fatores de risco permanecem no escopo da decisão. Como exemplo: i) o alto dispêndio inicial; ii) evolução da demanda elétrica, iii) avanços tecnológicos dos painéis solares; iv) preços de eletricidade da rede e sua volatilidade, v) novas possibilidades de ambiente regulatório (ZHANG et al., 2022).

Apesar dos benefícios proporcionados pelo governo brasileiro, o problema de decidir sobre o investimento no sistema solar está vinculado a cenários de riscos, em especial as incertezas associadas as mudanças na política de gerenciamento dos preços da energia ou nas guinadas na legislação federal sobre os incentivos ao setor, etc. Adicionalmente, tem-se a agregação limitada de informação sobre mercado e negociações futuras por parte dos agentes para a tomada de decisão, uma vez que os agentes não possuem acesso à informação sobre contratos futuros de energia elétrica.

A complexidade do novo cenário que fez com que novas pesquisas fossem lançadas analisando o impacto e contramedidas para essa nova realidade, um exemplo é o trabalho

de [Costa et al. \(2022\)](#) que analisa holisticamente as consequências de longo prazo desta nova lei para regular a geração distribuída renovável *on-grid* no Brasil, mostrando que a nova lei mitiga com sucesso os aumentos tarifários e reduz a desigualdade social, que são seus principais objetivos.

Nesse contexto de ambiente decisório, o investimento em um projeto fotovoltaico pode colocar o retorno do investimento ao consumidor residencial de energia elétrica (agente investidor/decisor) mais longínquo, possivelmente inviabilizando o projeto caso tais incertezas não sejam adequadamente mensuradas na tomada de decisão. Portanto, os agentes possuem em suas mãos um conjunto de escolhas a serem feitas, tendo informação limitada sobre o futuro e buscam sempre a minimização de seus sumptos, considerando que em muitas vezes o agente deve pensar entre renunciar a suas economias pessoais e/ou emergenciais em prol de uma possível economia/retorno futuro. [Ideal \(2019\)](#) e [Ideal \(2018\)](#) ratificam essa percepção ao apontar que a manutenção de aproximadamente 32% dos projetos residenciais fotovoltaicos são pagos de forma integral no ato da aquisição, sem a necessidade de financiamento ou parcelamento.

Após essa contextualização do problema, o caso analisado considera a situação onde o agente deve decidir ao longo do tempo se investe em um sistema fotovoltaico que supra integralmente seu consumo elétrico residencial, ou se realiza a instalação parcial do sistema fotovoltaico, ou ainda mantém o valor do *CAPital EXpenditure* (CAPEX) investido em uma aplicação de risco. Neste caso, temos que todas as opções mencionadas são comunicáveis entre si. Em outras palavras, o agente pode iniciar parcialmente o projeto solar enquanto aloca o valor residual do CAPEX no ativo de risco e no futuro finaliza o projeto solar dependendo das condições do mercado ou não, sendo esta as opções disponíveis e exequíveis para o agente e possuindo interdependência entre as mesmas, mais detalhes são introduzidos no Capítulo 3.

Apesar da instalação fracionada do projeto fotovoltaico residencial não ser usual, a mesma é perfeitamente possível de ser executada, devendo ser considerado para avaliação, especialmente, em ambientes de incertezas. A ideia que permeia um investimento fracionado para pequenos projetos é o da diversificação dos riscos de um portfólio de investimento. Pode-se entender essa abordagem como uma inovação no conjunto de decisão do agente.

Um possível exemplo do perfil de pessoas que seria beneficiada pela instalação fracionada é de um micro empresário que compartilha recursos entre as figuras da empresa e pessoal, onde neste caso investir no projeto solar implica em retirar recursos utilizados na empresa, sendo a decisão relacionada ao custo de oportunidade da empresa. Outro exemplo é o da pessoa física com aplicações de baixo rendimento, temeroso com as recentes baixas nos preços da energia elétrica, acredite que o investimento possa se mostrar não vantajosos, e que não deseja utilizar de suas economias de forma instantânea para investir

no projeto solar.

Apesar deste trabalho considerar a aplicação para o caso do pequeno consumidor, a modelagem proposta não está limitada à aplicação descrita aqui. Em outras palavras, o mesmo modelo de avaliação também é aplicável para caso maiores, como a instalação de grandes usinas solares que devem atender a demanda elétrica de milhares de casas.

O aumento na complexidade de decisão requer uma ferramenta capaz de responder a mesma altura, seja no intuito de mitigar ou no adequado gerenciamento das incertezas associadas à decisão. Para tanto, se faz necessário uma ferramenta de avaliação financeira (ferramenta) que represente de forma mais fidedigna o contexto de decisão de um agente no Brasil, servindo como balizador para a tomada de decisão dos mesmos e respondendo questões de quando e qual a viabilidade de tais investimentos.

Neste âmbito, a análise de investimento sob incerteza tem como estado da arte a Teoria de Opções Reais (TOR). Todavia, modelar problemas com múltiplas incertezas, múltiplas possibilidades de decisão e considerando o *timing* para o início do investimento é um desafio, não possuindo uma forma trivial. Uma possível e promissora solução para esse problema foi apresentada por [Dias \(2001\)](#) e posteriormente [Lazo \(2004\)](#) e [Pacheco e Vellasco \(2009\)](#), onde a TOR é combinada com os Computação Evolucionista (CE). O resultado desta sinergia é um *framework* poderoso e que não sofre com as limitações vinculadas ao tipo de modelo estocástico ou ao seu número, apesar de ser uma abordagem ainda pouco explorada.

A relevância de se adotar modelos estocásticos mais fidedignos a realidade é apresentado por [Schachter e Mancarella \(2016\)](#), ao criticar as abordagens tradicionais pelo TOR por assumir que as incertezas seguem os modelos mais simples da literatura. Além disso, [Schachter e Mancarella \(2016\)](#), também, complementa tal aspecto e lista outros pontos a serem melhorados para uma adequada abordagem por opções, destacando: a possibilidade de atrasar o investimento, modelagem de portfólio de opções, modelagem de múltiplas incertezas, identificação do *timing* de investimento sob múltiplas incertezas. Os pontos citados também são abordados por [Lazo e Watts \(2023\)](#) ao analisar as mais recentes publicações da literatura sobre opções reais na avaliação de projetos fotovoltaicos.

1.2 O SETOR ELÉTRICO BRASILEIRO E A ENERGIA SOLAR FOTOVOLTAICA

Segundo [SolarPower \(2022\)](#), no panorama global, a geração fotovoltaica é liderada pela China a uma taxa média de crescimento de 14% ao ano, contando com o dobro da capacidade do segundo maior produtor, os Estados Unidos da América. Atualmente, estima-se que a produção solar alcançou a marca de 940 GW ao final de 2021, galgando a uma taxa de crescimento na casa dos 22% ao ano desde 2018, enquanto um cenário pessimista projeta o total de 1991 GW até 2026 ([SOLARPOWER, 2022](#)), indicando a projeção que o setor deve tomar nos próximos anos.

O crescimento observado no setor deve-se a simbiose vários fatores, sendo os principais: i) a queda inconteste nos custos de investimento que viabilizaram financeiramente o início dos projetos de usinas solares; ii) os programas governamentais de estímulo a geração solar que disponibilizam a ligação dos pequenos produtores as redes de distribuição e transmissão, denominados sistemas *on-grid* e iii) da mudança na mentalidade das pessoas.

A Figura 1 apresenta a evolução do custo nivelado de energia solar (LCOE)³ e corrobora com o primeiro item citado no parágrafo anterior e ressaltando como reflexo da curva de aprendizagem, concomitante há o surgimento de novas tecnologias e dos ganhos de escalabilidade, ou seja, uma leitura inversamente proporcional.

O segundo ponto citado anteriormente também é destacada por [Chebotareva, Strielkowski e Streimikiene \(2020\)](#), o referido artigo descreve a relevância dos incentivos governamentais, financiamento para fomento dos projetos de energia renováveis, não restrito apenas à esfera financeira, mas também através do aparato governamental para desenvolver políticas, regulamentos e programas para contornar a inércia inicial deste tipo de investimento citando o caso da Rússia.

De forma complementar, [Nogueira \(2016\)](#) sugere uma visão do setor de energia renováveis como mais dependente do estado, ao considerar o setor fortemente orientado por políticas públicas de fomento, de modo que o retrato do mercado mundial é altamente correlacionado com o enfraquecimento, modificação ou aprofundamento do uso de incentivos públicos. Por conseguinte, a necessidade de intervenção do Estado é incontestável, sendo que o grau de suporte necessário é estritamente proporcional ao grau de desenvolvimento e maturidade do setor.

O contexto brasileiro é descrito com comportamento tímido na comparação com outros grandes países para tal fonte de energia, principalmente para o mercado descentralizado⁴, mas com potencial significativo a ser inexplorado ([IDEAL, 2019](#)). A Figura 2 apresenta o potencial energético global, apesar do Brasil possuir uma produção energética solar mediana, o país está em uma zona geográfica que proporciona uma irradiação mais estável ao longo do ano e temperaturas mais estáveis⁵.

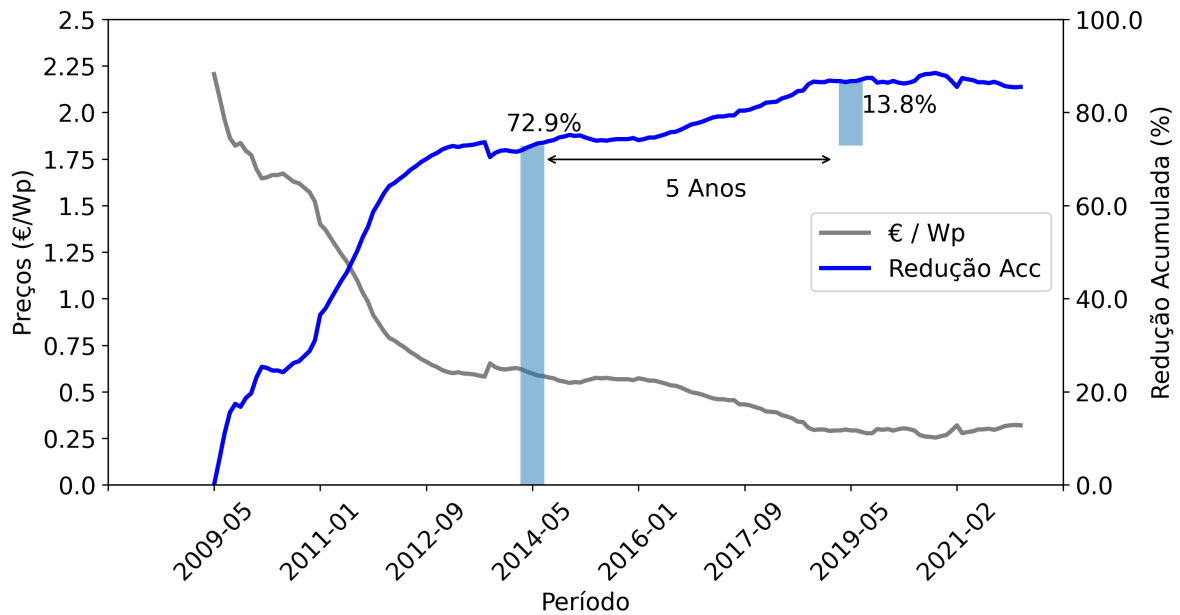
[SolarPower \(2022\)](#) coloca o Brasil como o 5º mercado mais promissor no mundo para projetos solares no próximo triênio, estimando uma taxa de crescimento de 39% ao ano, sendo que hoje o Brasil detém 43% de toda a capacidade solar na América Latina. Um dos mais completos relatórios sobre o setor fotovoltaico é disponibilizado por [GREENER \(2023\)](#), no mesmo é ilustrado o crescimento acentual da energia fotovoltaica, alcançando a marca de 16.6 GW de capacidade instalada, sendo 49% desta energia proveniente de

³ Indicador dos custos relacionados a produção de energia para determinada fonte geradora.

⁴ Produção residencial de energia com injeção do excedente diretamente na rede de distribuição.

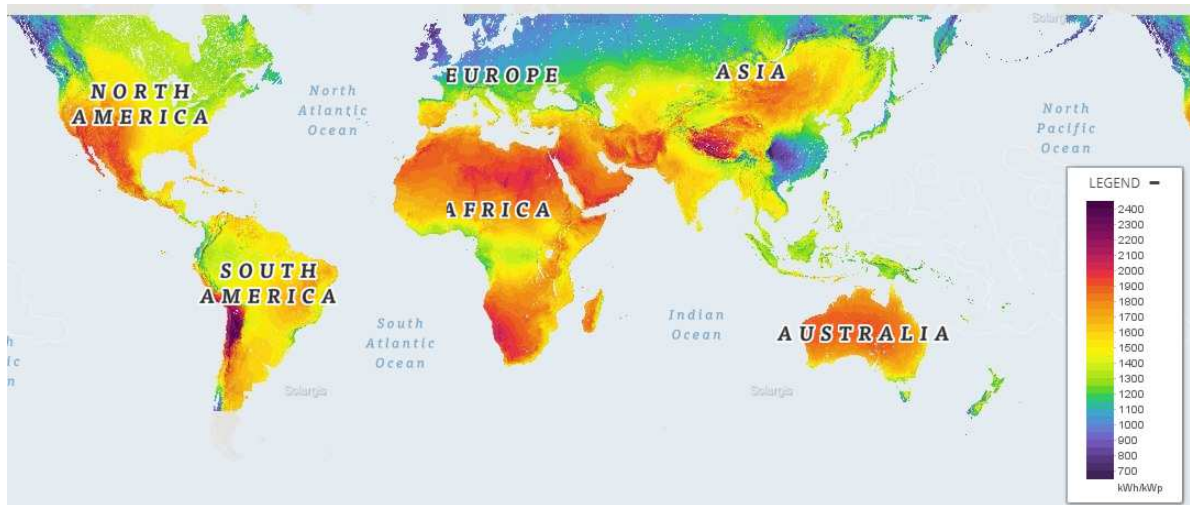
⁵ A temperatura das placas influenciam o desempenho das mesmas, locais mais quentes tendem a gerar menos energia do que locais com mesma irradiância e mais frios.

Figura 1 – LCOE histórico



Fonte adaptada: [pvxchange](https://pvxchange.com/) (2023)

Figura 2 – Potencial Global para produção de energia via recurso solar



Fonte adaptada: Global Solar Atlas - <https://globalsolaratlas.info/>

projetos residenciais enquanto o mesmo representa 79% do número de instalações.

Tais valores indicam a predominância de projetos solares para instalações residenciais, vis a simplicidade de se converter um telhado comum em uma mini usina solar. Em outras palavras, a principal vantagem dos sistemas de energia solar é a possibilidade de transformar um simples telhado residencial em várias unidades microgeradoras. Deste modo, quase todas as casas podem produzir eletricidade, como uma fonte de produção distribuída⁶ e injetá-la nas redes elétricas locais, como múltiplas células geradoras suprimindo a demanda elétrica local.

⁶ O conceito de produção/geração distribuída advém do conceito de pequenas unidades produtoras dispersas pela região, não concentradas.

As inerentes vantagens naturais que o país possui reforçam a visão da geração distribuída de energia fotovoltaica (doravante PV) como uma parcela importante no incremento da participação das fontes renováveis, reforçando a segurança de matriz energética, além de poder melhorar a renda de famílias em situações críticas.

No cenário brasileiro, o primeiro marco histórico para a energia solar ocorreu com a Resolução Normativa n.º 482 (REN 482/2012) da ANEEL (2012) estabelecendo o sistema de *net metering*, ou sistema de compensação de energia elétrica. Este sistema permite o consumidor instalar pequenas usinas⁷, injetar a energia gerada na rede, ceder essa energia a título de empréstimo gratuito à distribuidora e compensar o montante emprestado com o consumo próprio de energia elétrica num prazo de 60 meses.

Em outras palavras, o agente gera a energia com seus painéis, injeta na rede nos momentos onde sua produção é maior que o consumo, enquanto o mesmo consome e eletricidade quando contrário, pagando apenas pela diferença entre consumido e injetado na rede no final do ciclo de faturamento. Em meses onde o consumo for menor do que a produção, ocorre um excedente injetado na rede e tal valor fica como crédito para os meses onde o consumo for maior do que a produção. Caso o consumo seja maior do que o injetado ocorre o resgate de valores que ficaram como crédito, caso o saldo para resgate seja insuficiente para cobrir todo o consumo, apenas a diferença final será cobrada.

Apesar do *net metering* ser instituído no Brasil, o mesmo não é o mais usual em outros países, sendo demonstrado que as metodologias *feed-in* são mais eficientes (MA et al., 2021; NETO et al., 2022). Em especial a *feed-in-tariff* que remunera seus agentes pelo valor corrente da tarifa energética acrescido de um bônus pela geração limpa (denominado tarifa-prêmio) (NOGUEIRA, 2016).

A expansão do setor fotovoltaico no Brasil é apontada no relatório apresentado pela consultoria Greener (GREENER, 2023), (GREENER, 2019), sobre o mercado de geração distribuída no Brasil, indicando um salto de 0.4 Gw para 16,6 GW na potência instalada entre 2018 e o final de 2022, enquanto o número de unidades geradoras conectadas a rede de distribuição aumentou de 56 mil para 1.6 milhões no mesmo período, sendo 79% unidades residenciais.

Um ponto importante apontado por Ideal (2019) e Ideal (2018) corresponde a forma de pagamento do sistema completo pelos clientes, reduzindo os pagamentos a prazo e aumentando o número de financiamentos bancários, na comparação de 2018 para 2019. Todavia, o pagamento à vista possui expressiva representatividade, indicando que os agentes estão renunciando a reservas pessoais ou outros investimentos para aplicarem nos descontos da tarifa de energia elétrica. Atualmente a premissa citada continua válida, sendo apontado por GREENER (2023) uma queda significativa na aquisição dos sistemas solares residências via financiamento, devido principalmente: i) a alta taxa de juros e ii)

⁷ Não restritivo as usinas solares, mas no Brasil são as maiores beneficiados pelo sistema.

incertezas regulatórias e políticas para financiamento a longo prazo.

Apesar dos avanços no setor, ainda existem incertezas relacionadas ao futuro deste meio de geração. Pois, discussões iniciadas entre 2018 e 2019 sobre a forma de tarifação do *net metering* reascendeu o questionamento sobre a viabilidade e a rentabilidade de se investir em energia solar residencial para mitigar os dispêndios com energia elétrica.

O embate entre produtores e distribuidoras iniciam com alegação das companhias distribuidoras sobre o atual modelo de *net metering* não possibilitar a adequada remuneração pelo uso da rede de distribuição, transferindo seus custos operacionais aos demais usuários, haja vista que a Tarifa de Utilização de Serviços de Distribuição (TUSD) não é cobrada pelas distribuidoras devido ao uso dos seus equipamentos e redes. Além disso, existe a diferença existente entre o horário de produção, durante o dia, e disponibilidade de rede para o máximo consumo, que corresponde de 16h às 20h e 59min, denominado período de ponta.

Diante da discussão e da necessidade de definir uma forma de valoração da energia injetada na rede pelo micro ou mini gerador e visando manter a sustentabilidade do *net metering*, a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) apresentou alternativas⁸ para o atual modelo do sistema de compensação de energia elétrica.

Após discussão na Câmara dos Deputados e Senado Federal, a resolução final, sob a forma de lei, foi publicada em 2022 (BRASIL, 2022). Nessa nova Lei, ficou definido a cobrança parcial da TUSD (Tarifa de Uso do Sistema de Distribuição), mais especificamente na parcela referente ao Fio B e escalonada para as novas unidades residenciais geradoras cuja autorização de funcionamento ocorra após o início de 2023, essa diretriz é conhecida como o Novo Marco da Geração Distribuída (NMGD), apesar de tratar especificamente sobre a ótica residencial, o NMGD abrange uma parcela significativa dos produtores de energia, não estando limitada ao grupo alvo deste trabalho.

A Tarifa de Energia TUSD representa o valor cobrado na conta de energia referente ao uso do sistema de distribuição de energia elétrica, sendo o objetivo da mesma cobrir os custos com as instalações, equipamentos e componentes da rede de distribuição utilizados para levar a eletricidade até os consumidores finais. A TUSD é subdividida em encargos, perdas e transporte, sendo esta última ainda subdividida em Fio A e Fio B. A parcela vinculada ao Fio A está relacionado aos custos vinculados à manutenção e operação das linhas de transmissão, enquanto Fio B está relacionado a todos os custos da utilização da infraestrutura da rede de distribuição local.

A Figura 3 apresenta a composição da tarifa de energia elétrica no Brasil para consumidores residenciais, mais especificamente o Grupo B, subgrupo B1⁹. Note que dos

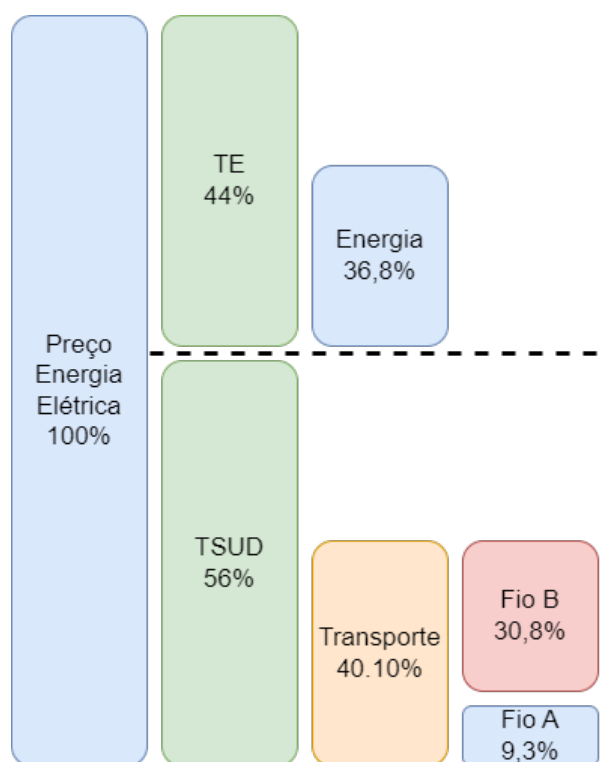
⁸ Mais detalhes sobre as propostas de tarifação do *net metering* podem ser apreciadas em ANEEL (2018).

⁹ De forma breve, existem dois grandes grupos no que diz respeito às modalidades tarifárias

percentuais apresentados são referentes ao preço final da energia elétrica. Assim, o valor total pago apenas pela energia elétrica no Brasil representa 36.8% do valor final, enquanto os 7.2% restantes são perdas, encargos e outras parcelas menores, totalizando, no preço final, a participação de 44% relacionados a tarifa de energia.

A segunda parcela da composição tarifária corresponde aos 56% representados pela TUSD, do qual 40% refere-se ao transporte da energia elétrica dos geradores até os consumidores finais, sendo o transporte subdividido em Fio A e Fio B com 9.3% e 30.8% respectivamente, sendo este último o alvo da nova lei. Portanto, de forma brevíssima, o novo regulamento fará um desconto progressivo na parcela relativa ao Fio B, 15% em 2023, 30% em 2024, 45% em 2025, 60% em 2026, 75% em 2027, 90% em 2028 e 100% após 2029. Ou seja, se um PV gerar 100 kW em 2023 no mês, o desconto na conta de luz será equivalente a 95.38 kW (e 69.2 kW em 2029), e a diferença, 4.62 kW (30.8 kW em 2029), será utilizado como a remuneração pelo uso da rede (NEOSOLAR, 2022).

Figura 3 – Composição da tarifa de energia elétrica no Brasil



Fonte adaptada: GREENER (2022)

Nesse novo contexto, uma bifurcação ocorreu para aqueles que regularizam seus projetos fotovoltaicos antes do final de 2022 e aqueles após o início de 2023. Para os antecessores de 2023 a regulamentação antiga irá vigorar até 2045, ou seja, não haverá incidência de imposto (descontos) sobre a energia injetada pelos sistemas fotovoltaicos.

no Brasil, o Grupo A (consumidores atendidos em alta tensão) e o Grupo B (consumidores atendidos em baixa tensão). Cada grupo mencionado possui sua própria subdivisão, sendo que o Grupo B é subclassificação em B1, B2, B3 e B4, onde as tarifas elétricas são aplicáveis apenas sobre o consumo dos agentes

Para os projetos regularizados após o início de 2023, a nova legislação irá vigorar, então a taxaço sobre a energia injetada será realizada mensalmente, sendo está uma remuneração as distribuidoras pelo serviço de distribuir da energia gerada até as residências consumidoras.

Em termos práticos, ao considerar que haverá um desconto sobre o montante injetado na rede e tendo que o desconto fornecido na conta de energia é limitada ao consumo mensal da unidade ocorrerá um deslocamento no ponto de equilíbrio financeiro e portanto as condições de viabilidade. Em outras palavras, instalar PV superdimensionado é sub-ótimo, pois, o *net metering* dá um desconto e não uma recompensa pelo excesso injetado na rede, sendo o retorno sobre o investimento mitigado, ainda, pelo descontos do NMGD. Essas condições movem a viabilidade financeira para outro ponto, (GREENER, 2022; MARKETS; TECHNOLOGY, 2022) sugerem que PV é viável para investir no Brasil. No entanto, não existem considerações sobre a volatilidade do mercado elétrico no Brasil ou avaliação das flexibilidades em torno desse investimento e as pesquisas sobre o novo paradigma no Brasil são escassas.

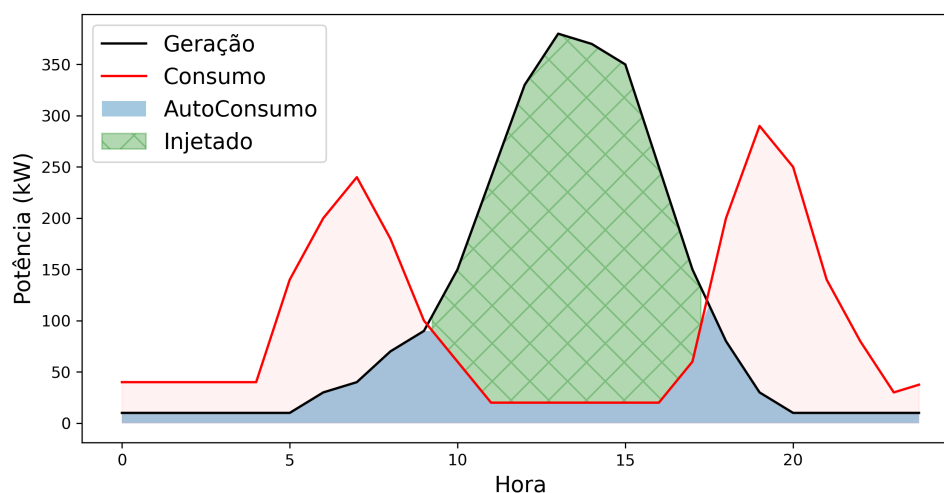
Outro ponto importante é chamado de fator de simultaneidade, o mesmo representa a relação entre produção e consumo instantâneo de energia. O fator de simultaneidade é definido como a razão entre a energia consumida no intervalo da geração e a energia total gerada no mesmo intervalo (autoconsumo). Para entendermos esse conceito se faz necessário analisar o comportamento horário de uma unidade consumidora e compreender os momentos onde a unidade está consumindo energia oriunda da rede, injetando eletricidade ou produzindo aquilo que consome.

A Figura 4 apresenta o perfil hipotético de geração e consumo para um cliente qualquer ao longo de um único dia. Note que os horários onde ocorre o pico de consumo é distinto do momento onde ocorre o pico de produção, isso é importante, pois, o exemplo retrata o padrão de consumo da maioria das residências no Brasil, onde a máxima utilização do sistema elétrico acontece ao amanhecer e ao anoitecer, horários onde as pessoas estão saindo ou chegando em casa. Considerando o exemplo, para o caso anterior a legislação vigente, bastava analisar a diferença de áreas abaixo da linha preta (produção) e vermelha(consumo), mas para o cenário corrente a área azul da imagem representa a parcela de energia consumida de forma instantânea oriunda da geração na unidade, enquanto a área verde representa a energia produzida e injetada na rede, sendo esta parcela sujeita a nova tarifaço para desconto. Em outras palavras, a área verde sofrerá o desconto referente ao Fio B e o resultante dessa subtraço será considerado para o abatimento do consumo.

A dinâmica apresentada cria possibilidade para a revisão na forma como os consumidores podem consumir a energia elétrica, mudando o padrão de consumo para que os mesmos se encaixem dentro da dos momentos de máxima produção solar e mitiguem

o efeito da nova legislação.

Figura 4 – Exemplo perfil de cargas para consumo e geração instantânea



Fonte: O Autor

1.2.1 O aumento da capacidade em sistemas fotovoltaicos residenciais

Um dos pontos citados anteriormente refere-se à instalação do sistema solar que atenda de forma parcial ao consumo do agente decisor. Apesar de não usual, esta possibilidade é plenamente factível, tanto do ponto de vista de engenharia/técnico, quanto do ponto de vista legal. Não há legislação que restrinja o aumento do tamanho do sistema fotovoltaico, salvo os aumentos que não são comunicados e/ou homologados pela distribuidora e os aumentos que ultrapassem os 75 kW de produção, o que sairia do conceito de microgerador (ANEEL, 2012).

A homologação é uma das etapas do projeto de instalação de sistemas fotovoltaicos e consiste na validação dos requisitos de segurança e do projeto para geração por parte da distribuidora da energia, sendo que apenas após essa etapa o sistema fotovoltaico estará apto a injetar eletricidade na rede. Assim, esta etapa é necessária e faz parte do ritual de instalação do sistema e pode ser repetido caso seja necessário.

Sobre a ótica da engenharia, considerando que o sistema fotovoltaico estudado está enquadrado no conceito de microgerador, para ser aumentada a potência de um sistema fotovoltaico, além da aquisição de novos painéis solares, também se faz necessário avaliar a capacidade do inversor¹⁰ instalado. Portanto, a ampliação é possível através da adição de novos painéis solares ao sistema existente, usando o mesmo inversor, com a compra de um novo inversor e novos painéis ou a compra de um novo sistema completo.

¹⁰ O inversor solar é o componente do sistema fotovoltaico que converte a energia elétrica gerada pelos painéis de corrente contínua (CC) para corrente alternada (CA), possibilitando o uso da energia elétrica gerada pelos painéis nos equipamentos elétricos comuns.

Em outras palavras, independe de como foi feito o projeto original, é possível aumentar o tamanho do sistema fotovoltaico já instalado, sendo necessário apenas a aquisição dos novos equipamentos e posteriormente repetir o processo de homologação do sistema junto a distribuidora de energia, para ser comunicado que mais energia será entregue na rede elétrica.

1.3 O ASPECTO DA MODELAGEM COMPUTACIONAL

A ascensão da modelagem computacional em problemas reais para os mais diversos setores obteve uma larga aceitação com o passar dos anos. Tal crescente advém da evolução/otimização e popularização dos computadores em um espaço de tempo reduzido, seguindo duas vertentes simultaneamente: i) evolução de *softwares*, com a evolução das ferramentas de análise e exploração, além da inserção de novas diretrizes para pesquisas/estudos em diversos setores; ii) desenvolvimento dos *hardwares*, através do incremento na relação entre as taxas de FLOPS (*FLoating-point Operations Per Second*)¹¹ e valores financeiros.

Atividades estas que há 10 anos eram intangíveis, dada a complexidade matemática ou os custos computacionais envolvidos, hoje podem ser comumente tratadas em máquinas residenciais a valores financeiros reduzidos, tornando-os acessíveis aos pesquisadores e ao mercado na totalidade.

Portanto, os novos paradigmas da Inteligência Computacional (IC) estão despondo nos últimos anos com abordagens mais eficazes e eficientes, para a modelagem computacional de fenômenos complexos. Tais paradigmas são capazes de otimizar, reconhecer comportamentos, classificar, agrupar, criar conjuntos de decisões, etc. Além de serem permissivos ao ponto de considerar restrições e características especiais para a maioria dos problemas conhecidos, em outras palavras, podem ser adotados, com sucesso, nas mais diversas áreas do conhecimento.

Ao considerar o campo financeiro, novas pesquisas são frequentemente realizadas com a adoção da IC e possuem resultados promissores, mas o avanço desta linha de pesquisa ainda é tímida enquanto o campo de aplicação é vasto e pouco explorado.

O principal ganho gerado por estas ferramentas podem ser verificadas nas mais recentes pesquisas científicas ao apontarem a melhor adequação de modelos baseados em IC aos modelos tradicionalistas em finanças. A vantagem nestes resultados estão em adaptar o modelo aos dados, não induzindo uma condicionamento do modelo para a estimação de parâmetros. Enquanto, como contraponto fica a redução na interpretabilidade humana, sendo esta a principal queixa dos pesquisadores mais conservadores desta área.

¹¹ O termo FLPOS refere-se a medida de desempenho computacional ou precisamente o número de operações com ponto flutuante (operações decimais) em um intervalo de tempo.

Contudo, apesar dos questionamentos, é inegável os ganhos gerados pela combinação harmoniosa entre a IC e a modelagem de problemas financeiros, sejam pela melhor acurácia nos resultados ou pelo *bypass* nos problemas corriqueiros da área, como otimização não-linear, multidimensionalismo, correlação, causalidade, etc., ou seja, pode-se simplificar a resolução de problemas complexos matematicamente mantendo ou melhorando o nível de acurácia.

Por conseguinte, novas abordagens baseadas nos modelos exploratórios da IC expande as formas de conhecimento sobre a resolução de um problema considerado difícil ou mesmo impossível no campo financeiro. Pode-se assim construir novas formas de entendimento a partir da resolução de cenários do interesse financeiro, expandido as fronteiras do conhecimento ao adotar novas formulações e metodologias para a tomada de decisão conjuntamente com a construção de novos cenários decisórios.

Dentro do campo financeiro, a TOR é um primoroso campo para adoção da IC em plenitude, apesar de pouco explorado. Neste contexto e considerando a abordagem dada a este trabalho, a modelagem computacional pode trazer uma grande contribuição para os avanços em pesquisas relacionadas ao campo financeiro. O problema de identificação do *timing* investimento é representado como um problema de otimização estocástico das variáveis de decisão (fontes de incerteza) e passiva de otimização por via da Computação Evolucionista. Aqui almeja-se identificar os valores para a energia elétrica que maximizam, em cada instante de tempo, o retorno de cada decisão no horizonte de expiração da decisão.

Além da aplicabilidade da Computação Evolucionista (CE), pode-se também utilizar outros conceitos de IC, como Redes Neurais Artificiais (RNA) na forma de ferramenta para estimar parâmetros de modelos estocásticos. Essa abordagem simplifica de forma substancial como o processo de calibração é feito. Todavia, ainda é um caminho pouco explorado, mas com potencial de ser retumbante no setor e expandir as formas de se adotar e modelar incertezas.

1.4 CONTRIBUIÇÃO

A principal contribuição científica desta pesquisa está relacionada ao desenvolvimento e validação dos modelos de Opções Reais combinados com a metodologia de Computação Evolucionista, além do estudo relacionado a nova política vinculada ao *net metering*. Desta forma, oferecendo aos agentes uma ferramenta completa e pode ser utilizada nos mais diversos cenários, situações e com mais flexibilidade nas decisões, sendo o mesmo modelo apto a ser utilizado em outros contextos de avaliação. Além disso, inicia-se uma linha de estudos voltado a utilização de *machine learning* para calibrar processos estocásticos.

Portanto, este trabalho inova em três frentes: a primeira delas ao se posicionar na lacuna existente entre os principais trabalhos relacionados a TOR, i) ao considerar a

abordagem baseada na computação evolucionista com objetivo de otimizar o conjunto de decisão do agente buscando a maximização do valor da opção, ii) considerar múltiplos processos estocásticos como fonte de incerteza, iii) analisar o impacto no resultado ao examinar uma modelagem via o modelo de volatilidade estocástica de Heston (HESTON, 2015) e iv) adotar um sistema complexo de possibilidades de escolhas para o agente. Estes pontos estão diretamente explicitados em Lazo e Watts (2023) e Schachter e Mancarella (2016) como as necessidades para novas abordagens baseadas em opções reais.

A segunda inovação advém de considerar a nova legislação vigente no Brasil para o sistema *net metering* e avaliar seu impacto sob a luz de uma ferramenta moderna e poderosa, contraponto com o cenário de manutenção da versão anterior do *net metering* aos projetos solares.

Adicionalmente, a metodologia empregada aqui pode ser replicada para quaisquer tamanhos de projetos solares residenciais e em qualquer região do país, ou seja, o modelo de avaliação não é limitado caso considerado para análise, tornando-o está uma ferramenta flexível para adaptação em diversos cenários.

A terceira inovação surge sob a forma de uma RNA para calibrar o modelo de Heston, baseados unicamente em uma série temporal. Ou seja, sem usar dados relacionados a contratos futuros ou opções, sendo essa uma boa representação da realidade para a maioria dos agentes que possuam interesse no projeto inicial, mas não limitado aos mesmos. Um ponto importante reside no fato que o *framework* adotado possui flexibilidade suficiente para a modelagem que outros processos estocásticos.

Então, desenvolve-se uma ferramenta que otimiza o processo de tomada de decisão no investimento de energia fotovoltaica ao modelar, resolver e analisar os resultados considerando os processos dinâmicos que agregam incertezas na avaliação, sem descartar as restrições e características inerentes a este tipo de problema, não sendo limitado ao tipo de incerteza ou a quantidade. Combinado a isso, os conceitos de *machine learning* são explorados para mitigar o problema de estimação de parâmetros em processos sanar um potencial obstáculo ao problema original.

1.5 OBJETIVOS

O objetivo geral da tese é avaliar e identificar, com o auxílio da computação evolucionista, as condições de viabilidade financeira para agentes microgeradores distribuídos a partir da energia fotovoltaica no Brasil considerando a nova legislação vigente. Para tanto, os objetivos específicos são apresentados abaixo.

- Analisar a combinação de diferentes metaheurísticas e formulações genotípicas para o conjunto de decisão via *benchmark* da literatura;

- Comparar os resultados da precificação de opções via computação evolucionista com os resultados obtidos pelo *Least Squares Monte Carlo*;
- Avaliar modelagem baseada em volatilidade estocástica de Heston e comparar os resultados outros modelos mais comuns na literatura;
- Analisar as ferramentas para a estimação de parâmetros para o modelo de Heston;
- Analisar os limites de decisão, *timing* ou gatilhos, para cada situação que o agente possa exercer suas opções através dos conceitos da computação evolucionista;

1.6 ESTRUTURA DO TEXTO

O trabalho está estruturado em 5 capítulos. No Capítulo 1 foi feita a contextualização, uma explicação sobre o setor elétrico brasileiro, o aspecto da modelagem computacional, a contribuição científica deste trabalho e os objetivos do estudo.

No Capítulo 2 é feita a introdução sobre os conceitos teóricos relacionados ao trabalho, divididos em uma explicação sobre a avaliação de projetos sob incerteza, destacando a Teoria de Opções Reais e os principais processos estocásticos utilizados, bem como as ferramentas de precificação. Adicionalmente, o tópico sobre Computação Evolucionista descreve de forma brevíssimo sobre a otimização via metaheurísticas, destacando os algoritmos Big Bang-Big Crunch e Aranha Sociais, por serem pouco conhecidos e possuírem um potencial pouco explorado no problema, por fim é feito um *overview* sobre as mais recentes pesquisas na área.

O Capítulo 3 descreve a metodologia utilizada na tese, subdividida em duas partes: i) a primeira analisa a metodologia de precificação via Computação Evolucionista, descreve formas de aumentar a velocidade de execução do problema e compara a metodologia adotada com as ferramentas da literatura via valores *benchmark*. ii) A segunda parte descreve os detalhes pertinentes sobre a avaliação de projetos fotovoltaicos, bem como detalhe a forma de modelar o fluxo de caixa das opções, além de apresentar as fontes de incertezas consideradas e sua modelagem estocástica.

O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos para as partes i e ii descritas anteriormente e discute sobre tais valores. Adicionalmente, são apresentadas as metodologias de calibração de parâmetros para o modelo de Heston baseados em redes neurais. Por fim, o Capítulo 5 manifesta as considerações finais sobre o trabalho, bem como detalhes os trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O objetivo deste capítulo é apresentar o embasamento teórico da pesquisa. Por se tratar de um tema interdisciplinar e com detalhes importantes relacionadas aos temas, optou-se por destinar uma Seção para a descrição da Teoria de Opções Reais, os modelos estocásticos considerados neste trabalho. A segunda seção explica sobre os principais conceitos da computação evolucionista, além de introduzir as principais meta-heurísticas consideradas. A terceira seção apresenta as pesquisas mais recentes sobre o tema.

2.1 AVALIAÇÃO DE PROJETOS EM AMBIENTE DE INCERTEZA

2.1.1 Teoria de Opções Reais

Atualmente é o consenso que empresas buscam a geração de valor e o crescimento de suas atividades. Contudo, [Trigeorgis e Reuer \(2017\)](#) explicam que a obtenção de tais objetivos depende da qualidade da análise econômica de seus projetos de investimento, sendo tal análise, um importante fator para consecução de vantagens competitivas frente aos concorrentes dadas suas características para o gerenciamento estratégico.

A abordagem tradicional de análise de projetos de investimento trata os mesmos como oportunidades isoladas, sendo estas apenas aceitas ou rejeitadas ([FONTOURA, 2011](#)), ou seja, decide-se entre a realização ou não durante a fase de planejamento inicial e sua sobrevivência depende da expectativa futura de retorno sobre o dispêndio inicial e de manutenção. [Brealey, Myers e Allen \(2010\)](#) discorre sobre a como é feita a análise dos indicadores financeiros que relacionam retornos futuros e dispêndios, destacando os que utilizam o Fluxo de Caixa Descontado (FCD), o Valor Presente Líquido (VPL) e a Taxa Interna de Retorno (TIR). Aqui vale ressaltar a utilidade e versatilidade do VPL, descrito na Eq. (2.1) onde FC_t represente o fluxo de caixa no período t e i a taxa de desconto ([SANTOS et al., 2014](#)).

$$VPL = \sum_{t=0}^n \frac{FC_t}{(1+i)^t} \quad (2.1)$$

Todavia, tais abordagens são consideradas estáticas por não incluírem a flexibilidade gerencial, baseando-se apenas nas informações disponíveis no instante de decisão de investimento e inferindo que as mesmas seguindo um padrão conhecido, podendo ser previstos com exatidão a longo prazo. Nessas metodologias, a incerteza do projeto e as reações estratégicas da gestão, para mudanças de condições e cenários, são tratadas de forma determinística. Assim, em situações em que a incerteza e as relações estratégicas da gestão são importantes, a técnica tradicional é capaz de levar a decisões equivocadas ([DIXIT; PINDYCK, 1994](#)).

Quando o FCD considera a incerteza, ela resume a incerteza no valor esperado dos fluxos de caixa e colocando um prêmio de risco na taxa de desconto. O FCD não explicita os cenários das incertezas e nem considera as ações ótimas em cada cenário, como faz a Teoria de Opções Reais (TOR).

Dias (2015) explica que a TOR, ou apenas opções reais, é a técnica apropriada para cenários de incerteza, pois, a mesma enfatiza a relação intrínseca entre a “flexibilidade” gerencial e incertezas¹. A metodologia de opções reais preconiza a avaliação dos ativos a existência de flexibilidades gerenciais, muitas delas oriundas das variáveis incertas, aumentando o valor da oportunidade de investimento, visto que atribui valor para possíveis decisões futuras capazes de aumentar o valor do ativo a partir da capitalização de futuras oportunidades, bem como mitigar as perdas em cenários desfavoráveis (GASTALDI, 2012).

Dixit e Pindyck (1994) argumenta são necessários três sustentáculos vinculados a incerteza para que as opções reais tenham valor: i) desconhecimento do seu valor futuro, ii) irreversibilidade uma vez executado, mesmo que parcialmente, e iii) possibilidade do agente tomador de decisão agir em prol da mudança do caminho futuro do projeto (flexibilidade gerencial em resposta a resolução das incertezas.).

Para um melhor entendimento sobre a TOR é necessário um embasamento sobre sua origem nas opções financeiras. Em meados dos anos 70, Black, Scholes e Merton² lançaram no meio acadêmico a metodologia para valoração analítica de opções financeiras que abriu novos caminhos para pesquisas em precificação de ativos financeiros e concomitantemente contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento da teoria de opções reais, haja vista a analogia direta entre ambas.

As opções são instrumentos financeiros que dão ao detentor o direito, não a obrigação, de comprar ou vender um ativo-objeto, a um valor pré-determinado e em um dia específico, como o seguro/garantia (DETEMPLE, 2005). O objetivo principal é definir o preço de uma opção e o regime de decisão ótima associada. A relevância deste instrumento pode ser observada todos os dias no mercado financeiro. Por exemplo, Ngai, Valle e Longley (2019) e Roschnotti e Vasquez (2019) destacam sua utilidade na avaliação de riscos, orientação na tomada de decisão e características de proteção contra a flutuação no mercado à vista.

Hull (2017) classifica as opções conforme o tipo, compra e venda, e quanto ao tipo de exercício, estilo europeu e o estilo americano. A compra garante, ao seu detentor, o direito de comprar o ativo subjacente (ativo-objeto) a um preço específico (preço de exercício) durante o período de vigência do contrato (tempo de expiração ou maturidade),

¹ Dias (2015) discorre sobre a diferença entre risco e incerteza, mas neste trabalho ambas são consideradas análogas

² Mais detalhes em Trigeorgis (1996), Wilmott (2007), E., Antikarov e Copeland (2001), Hull (2017) e Brealey, Myers e Allen (2010)

enquanto a venda garante o direito de vender o ativo subjacente a outra parte. Portanto, ao contrário de outros contratos, as opções não criam a obrigação de execução por parte do seu detentor.

A classificação quanto ao tipo de opções diz como a execução pode ocorrer, se o exercício das opções ocorra apenas no vencimento do contrato ela é denominada europeia. Caso a possa ocorrer em qualquer data dentro do intervalo de vencimento, ela é classificada como americana.

Opções americanas, geralmente, são mais valiosas que sua contraparte europeia, pois, possuem maior flexibilidade de execução. Entretanto, a precificação de opções americanas é um caso especial e matematicamente complexo, conhecido como problema de parada ótima (ou problema de fronteira livre), que consiste em identificar um conjunto de decisões ótimas para que um agente escolha entre parar uma determinada atividade ou continuar com a execução até um momento posterior. Assim, tal conjunto deve conter os parâmetros de decisão pertinentes para o agente, informando-o se o retorno obtido no instante atual é superior ao retorno esperado futuro: i) caso positivo encerra sua decisão e realiza o ganho, ii) caso negativo ele aguarda a chegada de novas informações para decidir no futuro. Portanto, a avaliação de uma opção americana é um problema de otimização, que deve ser solucionado enquanto a opção é valorada, mais detalhes serão apresentados no próximo na Seção [2.1.2](#).

Em extensão aos conceitos e diretrizes de uma opção financeira, [Myers \(1977\)](#) propôs a vinculação com processos reais, neste caso a possibilidade de uma empresa executar uma oportunidade de investimento poderia ser considerada como uma opção de compra de ativos reais, forma similar ao qual uma opção financeira garante direitos de decisão sobre um ativo financeiro, então maturou-se a terminologia "opção real".

Portanto, a inferência entre a opção real e financeira é factível, onde uma opção real possui como ativo-objeto o valor bruto do projeto ou seu fluxo de caixa, sendo seu preço de exercício o investimento requerido para implementá-lo e a maturidade o período que a decisão de investir pode ser postergada, ou seja, as opções reais são investimentos em ativos reais que conferem a empresa o direito, mas não a obrigação, de adotar certas ações no futuro ([FONTOURA, 2011](#)).

Ao analisar [Dixit e Pindyck \(1994\)](#) pode-se concluir que para que uma opção real tenha valor, algumas condições relacionadas ao ativo subjacente devem ser satisfeitas: i) valor futuro incerto; ii) irreversibilidade total ou parcial do projeto; iii) existência de flexibilidade gerencial frente as incertezas. Então, percebe-se que a essência da TOR está na vinculada à adequada modelagem das incertezas inerentes ao projeto.

[Schachter e Mancarella \(2016\)](#) destacam a adequada modelagem estocástica como fundamental para a avaliação de opções reais. Considerando que todo projeto está sujeito há algum grau de incerteza, tanto inerente a si (endógena) quando externa (exógena),

tem-se que a correta modelagem desta incerteza na avaliação de projetos é fundamental para sua avaliação ([KACOWICZ, 2012](#)).

A seguir são descritos os principais modelos estocásticos adotados da literatura, bem como versões mais modernas e sofisticadas para a modelagem de incertezas.

Conceitualmente, um processo estocástico descreve o comportamento de uma variável cujas mudanças são probabilísticas ao longo do tempo, dependendo apenas do estado atual, em outras palavras, um processo markoviano ([DIAS, 2015](#)). Essa formulação é comumente aplicada em cenários onde se deseja modelar incertezas exógenas ao processo em avaliação, em geral, preços. Nos primórdios das análises considerava-se o preço *spot* das variáveis de decisão como um movimento geométrico browniano, tal como na modelagem de Black-Sholes para opções. Essa abordagem simplificava a modelagem de parâmetros e os cálculos relacionados às opções, como dito anteriormente. Porém, essa metodologia não é satisfatória para modelar o comportamento real dos preços e não reproduzem os fatos estilizados sobre séries temporais financeiras, onde as negociações ocorrem seguindo as leis da oferta e da demanda, requerendo modelagem específica ([ARAÚJO, 2016](#)).

A partir de [Kacowicz \(2012\)](#) podemos inferir mais claramente sobre a modelagem adequada de uma incerteza a um comportamento estocástico e sua relação com a valoração de uma opção, devendo ser consideradas as características econômicas, horizonte de tempo para análise entre outros fatores.

A relevância fica clara ao analisar os padrões comportamentais dos processos estocásticos descritos em [Dixit e Pindyck \(1994\)](#) e [Aiube \(2013\)](#), haja vista que tais modelos possuem tendência a divergência ou convergência no tempo, fazendo com que os resultados possíveis no horizonte de planejamento sejam substancialmente alterados.

Portanto, a adequada identificação de um processo mais consentâneo à fonte de incerteza será de grande valia para a precificação da opção, principalmente em casos onde o horizonte de planejamento for longo, tornando o trabalho analítico e estatístico frente aos dados históricos estudados uma necessidade intrínseca ([FONTOURA, 2011](#)).

Em uma análise mais aprofundada sobre os movimentos estocásticos mais comuns da literatura é possível observar que um grande diferencial destas abordagens está na singularidade das premissas de normalidade e otimalidade de estimação via regressão linear simples. Tais movimentos são descritos nas seções [2.1.1.1](#) e [2.1.1.2](#) além da análise dos termos de média e variância e do processo de estimação dos respectivos parâmetros, por inferência indireta³, são apresentados em [Dixit e Pindyck \(1994\)](#)[Cap.2].

O aprofundamento dos principais modelos estocásticos adotados na literatura são detalhados a seguir, sendo eles: Movimento Geométrico Browniano, Movimento de Reversão à Média, Movimento com Saltos, e Movimento com Volatilidade Estocástica. Para

³ Mais detalhes em [Gourieroux, Monfort e Renault \(1993\)](#)

mais informações e detalhes recomenda-se a leitura de Hull (2017), Bastian-Pinto et al. (2021) Aiube (2013), Glasserman (2010), Brigo e Mercurio (2006), Korn, Korn e Kroisandt (2010), Gatheral (2012) e Dias (2015).

Uma abordagem brevíssima sobre estes processos estocásticos, tem-se o interesse em modelar tais funções dada as características das séries a serem analisadas. Como exemplo: séries com saltos abruptos nas oscilações caracterizariam a presença de *jumps* na série. Outro caso seriam os núcleos de volatilidades ou oscilação irregular nas séries anunciam a presença de volatilidade não constante no tempo remetendo aos casos de modelos com volatilidade estocástica.

2.1.1.1 Movimento Geométrico Browniano

O Movimento Geométrico Browniano (MGB) é a mais comum escolha para modelagem de incerteza estocástica associada a uma opção (BASTIAN-PINTO, 2009). Sua alta aceitação ocorre devido à simplicidade intrínseca, requerendo apenas o termo de tendência e volatilidade, ambos constantes no tempo, e do preço corrente do ativo em análise quando o objetivo for simular os preços futuros (FONTOURA, 2011).

O MGB é matematicamente descrito pela Eq. (2.2), onde X_t é valor da variável aleatória no instante t , α termo de *drift*, dt a variação instantânea do tempo, σ a volatilidade do ativo analisado e dz um processo de Wiener (DIXIT; PINDYCK, 1994). No MGB X_t segue uma distribuição log-normal enquanto dX_t/X_t segue uma distribuição normal com média αdt e variância $\sigma^2 dt$.

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dz \quad (2.2)$$

Conforme mencionado anteriormente, a facilidade para a modelagem dos parâmetros, compreensão e característica de imprevisibilidade e divergência no horizonte de tempo a torna adequada para modelagem de preços de ações, algumas commodities e ativos financeiros, etc. No âmbito matemático, o MGB tem o 0 como uma barreira absorvente, pois, uma vez esse valor alcançado o mesmo permanecerá impossibilitando arbitragens, sendo impossível assumir valores negativos.

A versão discreta do MGB já considerando a mudança de medida neutra ao risco⁴ é apresentada na Eq. (2.3)⁵, onde $\Delta t = t_i - t_{i-1} = \frac{T-t_0}{N} : \{i \leq N \mid N \in \mathbb{N}\}$ é o intervalo de tempo entre duas observações consecutivas, π o prêmio de risco e $N(0, 1)$ é uma distribuição normal padrão.

⁴ Mais detalhes sobre processos estocásticos neutros ao risco e o Teorema de Girsanov podem ser encontrados em (DIAS, 2015)[Cap. 13].

⁵ De forma brevíssima, o Teorema de Girsanov possibilita a alteração de tendência de um processo sob uma medida de probabilidade (\mathbb{P}) mudando-a para uma medida de probabilidade artificial (\mathbb{Q}) sob a qual o processo derivado descontado é um martingale, $\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{Q}$

Hull (2017) descreve a relevância da avaliação neutra ao risco para a análise de derivativos. Pois, em um mundo neutro a risco utiliza-se a taxa livre de risco como fator de desconto do processo, uma vez que a taxa de desconto real é desconhecida *a priori*. Ou seja, significa que podemos assumir que o retorno esperado da ação é a taxa de juros livre de risco e, então, descontar os retornos esperados à taxa de juros livre de risco.

$$X_t = X_{t-\Delta t} \cdot \exp \left[\left(\alpha - \pi - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot N(0, 1) \right] \quad (2.3)$$

Seja $X_t = \ln(x_t)$ e aplicando essa definição na Eq. (2.3), temos a seguinte igualdade:

$$\ln(x_t) - \ln(x_{t-\Delta t}) = \left(\alpha - \pi - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot N(0, 1)$$

$$\ln(x_t) - \ln(x_{t-\Delta t}) = a + \epsilon$$

Onde a representa a primeira parcela da equação (termo de tendência) e ϵ o restante da mesma ou o erro da regressão e que $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$, assim a volatilidade e o *drift* são estimados a partir do cálculo do valor esperado e da variância:

$$\text{Var}[\ln(x_t) - \ln(x_{t-\Delta t})] = \text{Var}[\epsilon]$$

$$\text{Var}[\ln(x_t) - \ln(x_{t-\Delta t})] = \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}[\ln(x_t) - \ln(x_{t-\Delta t})]}$$

$$E[\ln(x_t) - \ln(x_{t-\Delta t})] = E \left[\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right]$$

$$E[\ln(x_t) - \ln(x_{t-\Delta t})] = \left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2} \right)$$

$$\alpha = E[\ln(x_t) - \ln(x_{t-\Delta t})] + \frac{\sigma^2}{2}$$

2.1.1.2 Movimento de Reversão à Média

O Movimento de Reversão à Média (MRM), ao contrário do MGB, é adotado em cenários onde a convergência do preço é intuída. Pois, o sentido e intensidade do componente de tendência variam com o tempo, oscilando em torno de um nível de equilíbrio.

A lógica por trás de um MRM é oriunda dos conceitos microeconômicos de oferta e demanda (DIAS, 2015). Em outras palavras, em momentos onde os preços estão reduzidos, abaixo de um patamar de “normalidade”, a demanda desse produto tende a aumentar, ao passo que sua produção tende a diminuir, reduzindo a oferta, buscando um equilíbrio. Sendo a recíproca é verdadeira, análogo ao caso de aplicação de força em um sistema massa-mola.

A Eq. (2.4) descreve o padrão comportamental de um MRM mais comum na literatura, também chamado de modelo Aritmético de Ornstein-Uhlenbeck, também conhecido

como modelo de Vasicek (WILMOTT, 2007) e (BRIGO; MERCURIO, 2006), onde η é o caracterizador da velocidade de reversão à média e \bar{X} o nível de equilíbrio de longo prazo, enquanto as demais variáveis são comuns ao MRM e MGB.

$$dX_t = \eta(\bar{X} - X_t)dt + \sigma dz \quad (2.4)$$

Ainda na Eq. (2.4) é importante ressaltar que a intensidade do termo de tendência é uma função crescente da diferença ($\bar{X} - X_t$). Ou seja, quanto maior a distância em relação a \bar{X} , maior a reversão para a média de longo prazo ponderados pelo termo de velocidade $\eta > 0$. Portanto, ao contrário do MGB onde a variância cresce de forma ilimitada⁶ com o horizonte de análise, o MRM tende ao equilíbrio \bar{X} com o avanço do tempo.

Assim como no MGB, a discretização do MRM considerando a neutralidade ao risco é apresentada na Eq. (2.5).

$$X_t = X_{t-\Delta t} \cdot e^{-\eta\Delta t} + \left[\bar{X} - \frac{\pi}{\eta} \right] (1 - e^{-\eta\Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2\eta\Delta t})}{2\eta}} \cdot N(0, 1) \quad (2.5)$$

Onde π/η é o prêmio de risco normalizado, ou seja, no processo neutro ao risco os valores reverterem para um nível inferior aquele do processo real, e a diferença entre estes é o prêmio de risco normalizado (BASTIAN-PINTO, 2009).

A calibração dos parâmetros para o MRM ocorre através da reescrita Eq. (2.3), suprimindo π/η , obtendo:

$$X_t - X_{t-\Delta t} = \bar{X}(1 - e^{-\eta\Delta t}) + (e^{-\eta\Delta t} - 1)X_{t-\Delta t} + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2\eta\Delta t})}{2\eta}} \cdot N(0, 1)$$

renomeando as variáveis, temos:

$$\begin{aligned} a &= \bar{X}(1 - e^{-\eta\Delta t}) \\ (b - 1) &= (e^{-\eta\Delta t} - 1) \\ \epsilon &= \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2\eta\Delta t})}{2\eta}} \cdot N(0, 1) \\ X_t - X_{t-\Delta t} &= a + (b - 1)X_{t-\Delta t} + \epsilon \end{aligned}$$

sendo esta última a expressão do processo autorregressivo de primeira ordem. Desta forma, podemos calibrar os parâmetros do processo em questão fazendo uma regressão linear sobre as séries X_t e comparando a variância dos erros da regressão com ϵ . Reorganizando novamente as equações é possível estimar os parâmetros do MRM, sendo σ_e^2 a

⁶ Exceto nos raros casos em que o drift é muito negativo, ver (DIAS, 2015)[pg 47-48].

variância dos erros da regressão:

$$\begin{aligned}\eta &= -\ln(b)/\Delta t \\ \bar{X} &= -\frac{a}{b-1} \\ \sigma &= \sigma_e \sqrt{\frac{2\ln(b)}{(b^2-1)\Delta t}}\end{aligned}$$

Um parâmetro útil e inerente ao MRM é denominado como tempo de “meia vida”. Este parâmetro representa o tempo no qual o valor esperado da variável autorregressiva reduz a distância pela metade com relação ao nível de equilíbrio. A meia vida é calculada conforme Eq. 2.6.

$$T_m = -\frac{\ln 2}{\ln b} \cdot \Delta t \quad (2.6)$$

Note que o tempo de meia vida é diretamente relacionado ao coeficiente angular do processo autoregressivo de primeira ordem, sendo este é inversamente proporcional ao logaritmo natural da velocidade de reversão. Portanto, quanto mais negativo o coeficiente angular, mais intenso será a característica de reversão. Dada a característica do logaritmo natural na Eq. 2.6, é esperado valores de b variando entre 0 e 1.

2.1.1.3 Movimento com Saltos

Em determinadas situações os modelos citados anteriormente não são capazes de capturar como um todo as peculiaridades intrínsecas dos dados, como exemplos em momentos onde surtos de volatilidade fazem com que as variáveis financeiras possuam um comportamento errático com maior intensidade (excesso de curtose), tornam as séries históricas dotadas de picos e vales com significativas discrepâncias quando comparadas ao restante da série (SCARCIOFFOLO; PEROBELLI; CHIMELI, 2018). Formalmente tem-se quem a distribuição empírica possui mais curtose quando comparada a distribuição normal.

Uma maneira de modelar o excesso de curtose na série é através da inclusão de saltos nos modelos padrões, tal inclusão objetiva povoar os extremos das distribuições de retorno (AIUBE, 2013). Comumente os modelos com saltos são ligados ao MRM, conforme descrito em Pessoa (2011). Todavia, o acoplamento com um MGB também é factível, apesar do incremento nas características de divergência, explosão, no tempo.

Em geral, é assumido que os eventos de saltos são não correlacionados com o mercado, tornando o prêmio de risco dos saltos igual a zero, sendo desnecessário a mudança na medida de probabilidade tornar o processo de salto neutro ao risco. A Eq. (2.7) descreve o acoplamento do processo de Poisson dq ao processo escolhido.

$$dX_t = \begin{cases} \eta(\bar{X} - X_t)dt + \sigma X_t dz + dq, & \text{caso MRM} \\ \alpha X_t dt + \sigma X_t dz + dq, & \text{caso MGB} \end{cases} \quad (2.7)$$

Já a Eq. (2.8) descreve a variação de dq , onde p é a taxa média de ocorrência de um evento (salto positivo ω) em um determinado intervalo de tempo dt resultando na probabilidade $p \cdot dt$, j é a taxa média de chegada de um evento (salto negativo ψ) em um determinado intervalo de tempo dt resultando na probabilidade $j \cdot dt$. Enquanto a probabilidade de não-ocorrência do evento é dada pelo complemento $1 - p \cdot dt - j \cdot dt$, com restrições em $p \cdot dt \in [0, 1]$, $j \cdot dt \in [0, 1]$ e $p \cdot dt + j \cdot dt \leq 1$.

$$dq = \begin{cases} 0 & , \text{ com probabilidade } 1 - p \cdot dt - j \cdot dt \\ \omega & , \text{ com probabilidade } p \cdot dt \\ \psi & , \text{ com probabilidade } j \cdot dt \end{cases} \quad (2.8)$$

Os processos de Poisson podem ser ainda de dois tipos: homogêneos e não homogêneos, os homogêneos possuem incrementos independentes e estacionários, e com o número de saltos no tempo tendo uma distribuição de Poisson. Já um processo não homogêneo não requer a premissa de incrementos estacionários e a frequência destes saltos é uma função do tempo (PESSOA, 2011, pg.43).

Por se tratar de eventos raros, a calibração deste tipo de evento pode sofrer com a escassez de dados e dificuldade para estimação dos parâmetros, existindo na literatura a recomendação da adoção de filtro de partículas ou mesmo a checagem de excesso de eventos (série de retornos) que estão fora do intervalo médio $\pm 2 \cdot$ desvios classificados como *jumps* (DIAS, 2015).

2.1.1.4 Movimentos com volatilidade estocástica

Enquanto os modelos com duplo ou triplo fator consideram que o termo determinístico (tendência do modelo) esteja sujeito a aleatoriedade, a introdução de volatilidade estocástica traz complexidade ao modelo por permitir que algumas características observadas no contexto real, como o surgimento de núcleos de volatilidade do mercado, efeitos de assimetria e a volatilidade *smile* (TEIXEIRA, 2017).

Estudos empíricos mostraram que a distribuição log-retorno de alguns ativos não são Gaussianos, sendo que a representação de caudas pesadas e altos picos (leptocúrticos) é uma característica da mistura de distribuições com diferentes variações, implicando na volatilidade variante no tempo (GATHERAL, 2012), Aiube (2013) também reforça a inferência ao associar excesso de curtose ao comportamento estocástico da volatilidade. Tang

e [Chen \(2009\)](#) comentam sobre os efeitos e relação da heterocedasticidade nas funções de difusões, apresentando seus efeitos no valor esperado e variância do processo.

Neste âmbito, tem-se a percepção que a modelagem dessas características podem ser realizadas via processos com saltos ou via modelagem de volatilidades estocásticas, onde são considerados um processo estocástico para o ativo subjacente acoplado a volatilidade que possui uma dinâmica própria ([AIUBE, 2013](#)). Assim, como nos modelos anteriores, as variantes destes modelos pressupõem que um conjunto de processos dê realismo cada vez maior aos mesmos ao passo que a complexidade também é aumentada. [Engle e Lee \(1996\)](#) detalha a formulação adotada para os casos de modelos com volatilidade estocástica, conforme Eq. (2.9).

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha X_t dt + X_t \sqrt{v} dz_X \\ dv_t &= \eta(\bar{v} - v_t) dt + v_t^\gamma \sigma dz_v \\ \text{Cov}(dz_X, dz_v) &= \rho \cdot dt \end{aligned} \tag{2.9}$$

Onde X_t como preço do ativo segue um MGB e \sqrt{v} como o termo de volatilidade estocástica instantânea, η a velocidade de reversão da variância, \bar{v} a variância de longo prazo e dz_X e dz_v são processos de Weiner correlacionados (com correlação ρ), enquanto σ representa a volatilidade da volatilidade. Caso $\gamma = 0$ tem-se o modelo de Vasicek, para $\gamma = 1$ tem-se modelo geométrico de Ornstein-Uhlenbeck modificado. Para o modelo da Eq. (2.9) dois casos especiais da literatura são conhecidos:

- i. o caso onde $\gamma = 1/2$ é conhecido na literatura como modelo de Heston ([HESTON, 2015](#));
- ii. o caso onde $\gamma = 3/2$ é conhecido na literatura como modelo 3/2 ([GUDMUNDSSON; VYNCKE, 2019](#)).

Considerando o caso mais famoso ($\gamma = 1/2$, o qual será utilizado no restante do trabalho), a representação da volatilidade instantânea é conhecida como processo de difusão de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), mais detalhes são apresentados em [Moodley \(2005\)](#) e [Gatheral \(2012\)](#).

Diferentemente dos modelos anteriores, a abordagem considerando a volatilidade estocástica requer uma atenção especial para a discretização das equações e posterior simulação, devido à existência de uma restrição que deve ser satisfeita. Tal condição refere-se a $\sigma > 0$, que sempre é satisfeita caso a condição de Feller ($2\eta\bar{v} > \sigma^2$) seja atendida ([ALBRECHER et al., 2007](#)). Contudo, metodologias de discretização mais modernas e precisas podem relaxar a restrição para $4\eta\bar{v} > \sigma^2$, como a discretização de Haskl-Jackel descrita em [Teixeira \(2017\)](#).

Teixeira (2017) ainda argumenta que são raros os casos onde a restrição do modelo de Heston é atendida, exigindo um esquema de truncamento/absorção ou reflexão para adoção do modelo. Além disso, Mrázek e Pospíšil (2017) também apresenta esquemas de truncamento/reflexão para o modelo de Heston, onde f_1 , f_2 e f_3 da Eq. (2.10) são as funções de truncamento/reflexão, detalhadas na Tabela 1. Neste trabalho foi adotado o esquema de truncamento total.

Tabela 1 – Esquemas de truncamento

Esquema	$f_1(v)$	$f_2(v)$	$f_3(v)$
reflexão	$ v $	$ v $	$ v $
Truncamento Parcial	v	v	$\max(v, 0)$
Truncamento Total	v	$\max(v, 0)$	$\max(v, 0)$

Fonte adaptada: Teixeira (2017)

A Eq. (2.10) apresenta a versão discreta do modelo de Heston, N_1 e N_2 são distribuições normais padrão para o processo da volatilidade e para o ativo subjacente. Diferentemente dos processos estocásticos descritos anteriormente, a mudança da medida para a versão neutra ao risco é diferenciada, nos modelos descritos anteriormente. Shreve (2004) comenta que enquanto apenas a parcela relativa ao ativo for de fato negociada, pode-se criar uma família de um parâmetro de medidas neutras ao risco alterando parâmetros em uma parcela do modelo sem que seja necessária alterar a outra. Autores como Gilli, Maringer e Schumann (2011), Teixeira (2017), Wang et al. (2017), Wang et al. (2018) e Mrázek e Pospíšil (2017) consideram a versão neutra a risco para o modelo de Heston, substituindo α pela taxa livre de risco rf . A explicação que possibilita essa premissa é descrita em Gatheral (2012), em termos compendiosos é assumido uma a relação linear entre o preço do risco e na variância instantânea v , com isso o ajuste de parâmetros gera a medida neutra ao risco global, de modo que o preço de mercado do risco da volatilidade seja definido como zero, não afetando a precificação de opções.

$$\begin{aligned}
 v_t &= f_1(v_{t-\Delta t}) + \eta(\bar{v} - f_2(v_{t-\Delta t}))\Delta t + \sigma_v \sqrt{f_3(v_{t-\Delta t}) \cdot \Delta t} \cdot N_1(0, 1) \\
 \phi &= \sqrt{\Delta t \cdot v_{t-\Delta t}} \left(\rho \cdot N_1(0, 1) + (1 - \rho^2) \cdot N_2(0, 1) \right) \\
 \theta &= (rf - v_{t-\Delta t}/2)\Delta t + \phi \\
 X_t &= X_{t-\Delta t} \cdot \text{EXP}(\theta)
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Apesar de modelos discretos mais sofisticados existirem na literatura, optou-se por utilizar o esquema de Euler-Maruyama com truncamento por apresentar uma boa performance nos resultados (TEIXEIRA, 2017), enquanto não sacrifica em demasia o desempenho computacional quando comparado a outros modelos de discretização.

2.1.1.5 Estimação de parâmetros para o Modelo de Heston

Diferente dos modelos estocásticos citados anteriormente (MGB e MRM), o modelo de Heston apresenta uma dificuldade ímpar de calibração e significativamente onerosa quando comparada a uma implementação com *jumps* (AIUBE, 2013).

A literatura descreve dois caminhos possíveis de calibrar os cinco parâmetros do modelo de Heston:

1. caso de volatilidades conhecidas;
2. caso de volatilidades desconhecidas.

No primeiro caso, a literatura é escassa porque as volatilidades geralmente não são diretamente observáveis no mercado real. Essas restrições restringem a aplicação de abordagens tradicionais baseadas na Estimativa por Máxima Verossimilhança (EMV), maiores detalhes são apresentados em Tang e Chen (2009).

Para o caso de volatilidades desconhecidas, as pesquisas sugerem ferramentas alternativas: Gallant e Tauchen (GALLANT; TAUCHEN, 1996) com o algoritmo *Generalized Method of Moment* (GMM), que depende da seleção de um modelo auxiliar. Jacquier, Polson e Rossi (1994) propuseram o método Markov Chain Monte Carlo (MCMC), que possui como base a inferência bayesiana para estimar os parâmetros de volatilidade. Cape et al. (2015) utilizaram o MCMC para estimar os parâmetros dos modelos de Heston e Bates. Enquanto Márkus e Kumar (2021) observa que o processo de estimação de variância por MCMC tem limitações e distorções, sendo que a principal desvantagem é a necessidade do conhecimento *a priori* das distribuições de parâmetros para implementação desse algoritmo e o além do custo computacional.

Rouah (2013, Cap. 6) apresenta uma abordagem para estimar os parâmetros baseada na minimização de uma função de perda entre preços de opções cotados no mercado e modelos de precificação ou entre preços de mercado e *volatilidades implícitas*⁷.

Mais recentemente, Mrázek e Pospíšil (2017) calibram o modelo de volatilidade estocástica de Heston para dados de mercado reais (opções DAX). No entanto, a grande limitação dessa metodologia é a viabilidade de acesso a informações sobre negociações, opções, contratos futuros, etc., sendo esta abordagem imprópria quando o agente possui uma série temporal observável devido a restrições práticas.

Considerando as situações onde apenas uma série temporal é conhecida, Engle e Lee (1996) descreveram uma metodologia para estimar o parâmetro no Modelo de Heston (exceto correlação) baseado em Gourioux, Monfort e Renault (1993) ao adotar o *Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity* (GARCH) para aproximar os parâmetros que regem os dados. Maslova (2008) também utilizou o GARCH para estimar

⁷ Veja Hull (2017)[Capítulo 15, Seção 11] para mais detalhes sobre volatilidade implícita

os parâmetros de Heston. [Lewis \(2000\)](#) evitou a ausência no termo de correlação adotando o GJR-GARCH⁸ para estimar os principais parâmetros de modelos de volatilidade estocástica com poucas ressalvas quando a aproximação para o modelo de Heston.

A Eq. (2.11) apresenta a formulação do GJR-GARCH, onde $r_t = \log(X_t/X_{t-1})$ é o retorno logarítmico de um período, I_{t-1} é uma variável *dummy*, z_t é uma sequência de variáveis independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância unitária, enquanto μ , β e γ precisam ser estimadas com base na série temporal.

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \varepsilon_t, & \varepsilon_t &= z_t \sqrt{h_t} \\ h_t &= \omega + (\beta_1 + \gamma I_{t-1}) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_2 h_{t-1} \\ I_{t-1} &= \begin{cases} 0, & \text{se } r_{t-1} \leq 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

A relação entre a Eq. (2.10), substituindo α por rf , e a Eq. (2.11) é mostrada na Eq. (2.12). Todavia, [Lewis \(2000\)](#) não explicita como é feita a relação entre as equações, não se baseando apenas comparação entre os termos das mesmas como é feito na calibração do MRM.

$$\begin{aligned} \alpha &= \mu, & \eta &= \frac{1}{\Delta t} \left(1 - \beta_1 - \beta_2 - \frac{1}{2}\gamma \right), & \bar{v} &= \frac{\omega}{\Delta t \left(1 - \beta_1 - \beta_2 - \frac{1}{2}\gamma \right)}, \\ \sigma_v &= \sqrt{\frac{1}{\Delta t} (2\beta_1^2 + 2\beta_1\gamma + \frac{5}{4}\gamma^2)} & \text{e} & & \rho &= -\frac{\gamma}{\sqrt{\pi(\beta_1^2 + \beta_1\gamma + \frac{5}{8}\gamma^2)}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Além disso, alguns autores exploram métodos de filtragem para rastrear as volatilidades desconhecidas e posteriormente o processo de estimação, como em [Javaheri, Lautier e Galli \(2003\)](#) e [Aihara, Bagchi e Saha \(2009\)](#) com filtro de Kalman estendido (EKF - *extended Kalman filter*) e filtro de partículas (PF) respectivamente. Em [Hirsa \(2013, Cap. 7\)](#), essas abordagens são revisadas e aprimoradas com abundância de detalhes.

[Wang et al. \(2017\)](#) implementaram uma variação do EMV (PMLE - *pseudo-Maximum likelihood estimation*) combinada com o filtro de Kalman estendido consistente (CEKF - *consistent extended Kalman filter*) de forma síncrona, enquanto [Wang et al. \(2018\)](#) adotou uma Estimativa de Máxima Verossimilhança Normal (NMLE - *normal maximum likelihood estimation*) combinada com CEKF e comparou os resultados com PMLE-CEKF.

A calibração do modelo de Heston com Redes Neurais Artificiais (RNA) foi estudada em [Tomas \(2018\)](#), o trabalho citado seguiu um caminho similar ao introduzido

⁸ O modelo GJR-GARCH é uma versão do GARCH que anexa a relação entre choques negativos e positivos ao retorno.

em [Hernandez \(2015\)](#) com a adição de preços de opções e considerando os modelos de Heston, Bergomi e Bergomi para estimação. [Liu et al. \(2019\)](#) desenvolve uma estrutura de calibração genérica para estimar os parâmetros do modelos de Heston e Bates por um esquema complexo envolvendo o treinamento de uma RNA para retornar os preços das opções e a volatilidade implícita e posteriormente inverter a rede neural já treinada condicionada a uma entrada certamente conhecida.

[Pironneau \(2019\)](#) estimou os parâmetros do modelo de Heston com preços sintéticos de opções de compra/venda correspondentes a uma matriz de valores para o exercício e o vencimento e a partir de valores de ativo e sua respectiva volatilidade, obtidos de dados no mercado real, vale ressaltar que apenas uma camada oculta com 1000 neurônios foi considerada neste trabalho e esta obteve um desempenho melhor que a rede mais complexas, exemplo rede convolucional.

No entanto, os trabalhos citados com a abordagem de RNA têm o mesmo pressuposto, o acesso a dados de mercado e, conseqüentemente, os mesmos problemas mencionados anteriormente. Essa situação restringe a adoção dessas ferramentas em alguns cenários, como a abordagem de opções reais onde alguns ativos não possuem informação/negociação completa no mercado.

Por outro lado, [Xie et al. \(2007\)](#) comparou diferentes arquiteturas para MLP baseadas apenas em séries temporais para um modelo estocástico simplificado. Os autores concluíram que o MLP fornece uma abordagem robusta de estimativa de parâmetros para modelos simplificados, mas é limitado em cenários com altos níveis de difusão e poucas amostras. [Moysiadis, Anagnostou e Kandhai \(2019\)](#) consideraram convolução e redes neurais recorrentes para calibrar a velocidade de reversão à média no modelo de Hull-White.

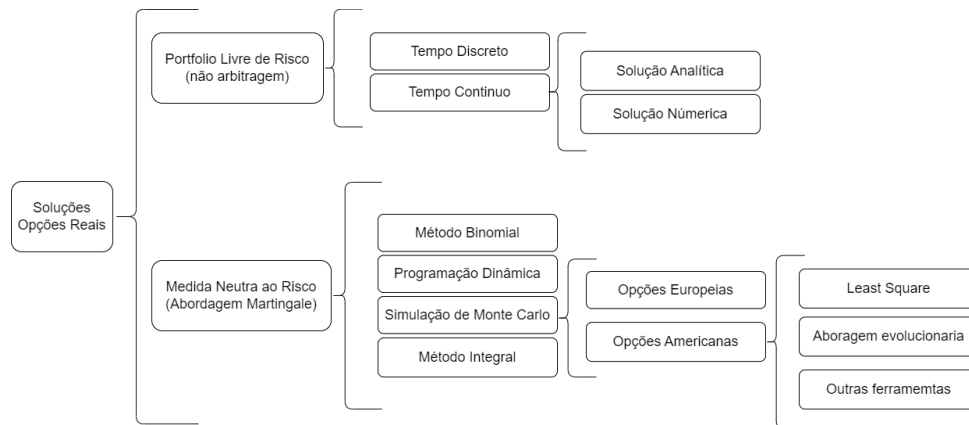
[Leite, Yamim e Fonseca \(2021\)](#) desenvolveram uma metodologia baseada em RNA onde foi adotado a rede DeepONet, desenvolvida por [Lu et al. \(2021\)](#), para estimar os parâmetros do modelo de Heston, comparando os resultados entre as versões *stacked* e *unstacked* com os resultados obtidos via GACH e considerando uma RNA padrão, apresentando uma evolução na forma como estimar tais parâmetros. Mais detalhes sobre está abordagem serão apresentadas na Seção [4.2](#).

2.1.2 Apreçamento de Opções Reais

Resumidamente, as formas de se resolver o problema de uma opção, precificar derivativos, são divididas em dois grandes grupos, a abordagem baseada no portfólio livre de risco que assume o retorno do portfólio não pode ser diferente da taxa livre de risco, caso contrário existiria uma possibilidade de arbitragem. Já o método da medida neutra ao risco assume a mudança matemática na distribuição de probabilidade como forma de penalizar o retorno esperado do ativo, alterando o retorno μ (na medida real de probabi-

lidade) para r (medida artificial de probabilidade). Ou seja, ambas as abordagens usam a taxa livre de risco como taxa de desconto e geram os mesmos resultados. A Figura 5 apresenta os principais métodos de solução de RO, dando destaque as ferramentas voltadas a mudança de medida devido a aplicação das mesmas neste trabalho, mais detalhes podem ser encontrados em [Dias \(2014\)](#).

Figura 5 – Metodologias de solução para opções reais



Fonte adaptada: [Dias \(2011\)](#)

Na teoria moderna de precificação de opções, a determinação do valor de uma opção conforme a estratégia ideal de exercício antecipado atraiu consideráveis esforços científicos. Enquanto opções do tipo europeia possuem solução analítica para alguns casos, exemplo da equação de Black-Sholes-Merton, sua contraparte, tipo americana, possui propriedades que a tornam de complexa resolução. A complexidade é acentuada para os casos de opções reais onde a sofisticação das funções de pagamento e multidimensionalidade estocástica tornam alguns modelos inviáveis ([BROADIE; DETEMPLE, 1997](#)), como os baseados em árvores, exigindo metodologias de precificação mais flexíveis ([MUSHOFF; HIRSCHAUER, 2010](#)) e ([LAZO; WATTS, 2023](#)).

Considerando esse contexto, a SMC é aplicável, mas limitado ao para o caso de opções no estilo europeu. Para o caso americano, a natureza *forward* da SMC com o avanço para o caminho do ativo subjacente não considera previamente o exercício em possíveis datas anteriores ao vencimento. Em outras palavras, um problema de decisão dinâmica estocástica para a determinação da melhor estratégia de exercício precisa ser resolvida antes da avaliação da opção.

Como exemplo, considere X uma variável de decisão que flutua no tempo (estocástica). Como é possível finalizar o processo antecipadamente se faz necessário criar um conjunto de decisão baseados em X que diga: se X menor que tal valor no tempo t aguarde, ou caso contrário, compre/venda imediatamente.

[Longstaff e Schwartz \(2015\)](#) propuseram o *Least squares Monte Carlo* (LSM), baseando-se na utilização de regressões (valor da espera \times valor de exercício) para identificação da estratégia ótima para todas as possibilidades de exercício. O modelo proposto

tem como base a avaliação *backward* da opção até o tempo presente, utilizando-se do arcabouço da programação dinâmica, onde a cada instante anterior à data de vencimento, o agente deve comparar o *payoff* do exercício imediato com a expectativa de ganho futura, para assim tomar uma decisão ótima.

O *insight* do LSM é relacionar a expectativa condicional futura com os preços correntes das opções *in-the-money* via *cross-section* na simulação usando o método dos mínimos quadrados para a regressão. Em outras palavras, i) calcule o valor da opção para cada caminho simulado na expiração (T), ii) em $T - n$, $n \in [0, T]$ identifique os caminhos simulados onde a opção esteja *in-the-money* e faça a regressão destes preços $(x) \times$ o valor da opção ($f(x)$) no instante seguinte para o respectivo caminho, iii) com $f(x)$ calcule o valor da continuação para cada x e compare com o valor das opções para o exercício imediato, iv) caso o valor de continuação seja inferior ao do exercício imediato, a opção é exercida imediatamente em $T - n$, v) repetir os passos de ii-iv até $n = 0$.

O Algoritmo 1 apresenta o pseudocódigo para o método LSM, onde H é a matriz que contém o valor da opção para cada simulação e h a função de pagamento da opção dada a simulação j no instante t , r é a taxa de desconto, Δt intervalo de tempo entre as observações. Mais detalhes sobre o modelo LSM e Simulação de Monte Carlo podem ser encontrados em Korn, Korn e Kroisandt (2010) e Glasserman (2010).

Algorithm 1: Algoritmo LSM

```

1 Criar caminhos randômicos  $j = 1, \dots, N$ 
2 Dividir o intervalo  $[0, T]$  in passos  $t_0, \dots, t_M$ 
3 Simular  $S_j(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, M$ 
4 Fazer  $H_j \leftarrow h(S_j(t_M))$ ,  $\forall j$ 
5 for  $t \leftarrow t_{M-1}$  to  $t_{-1}$  do
    /* iterar ao longo do tempo de forma recursiva */
6    $\gamma \leftarrow$  Encontrar os caminhos  $j$  onde  $h(S_j(t)) > 0$ 
7   Seja  $x_j = S_j(t)$  e  $y_i = e^{-r\Delta t} H_j$  para  $j \in \gamma$ 
8    $f(x) \leftarrow$  Regressão de  $x, y$ 
9    $C(S_j(t)) \leftarrow$  Calcular valor de continuação
10  for  $j \leftarrow 1$  to  $N$  do
    /* iterar em cada caminho simulado */
11   if  $j \in \gamma$  E  $h(S_j(t)) > C(S_j(t))$  then
12      $H_j \leftarrow h(S_j(t))$ 
13   else
14      $H_j \leftarrow e^{-r\Delta t} h(S_j(t+1))$ 
    /* Usar a média de  $H_j$  como valor da opção */
15    $optionValue \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{j=1}^M e^{-r\Delta t} H_j$ 
16 return  $optionValue$ 

```

Létourneau e Stentoft (2019) explicam que a região de exercício, *timing*, da opção é encontrada igualando função de *payoff* imediato e a expectativa de *payoff* condicional, para o caso em que há apenas uma variável de incerteza.

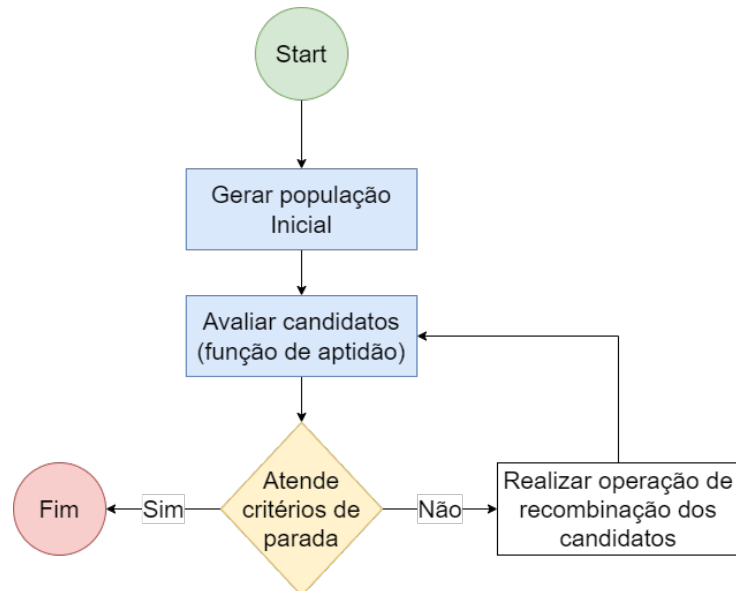
Mais detalhes e resultados sobre a influência do tipo de regressão e o impacto das mesmas, o modelo LSM pode ser visto em Koenigsdorf (2009) ou ainda Lima e Samanez (2016). Entretanto, a literatura aponta controvérsias sobre as características de viés nos resultados e instabilidade numérica. Mais detalhes sobre estas situações são apresentados na Seção 2.3.

Alternativamente, Dias (2001) apresentou o modelo baseado na otimização da estratégia de decisão via Algoritmo Genético. O modelo consiste em gerar estratégias de decisão aleatórias e avaliá-las através da SMC, posteriormente o Algoritmo Genético combina tais estratégias e repete-se a avaliação buscando o conjunto resposta que maximize o valor final da opção. Este método é o mais flexível e versátil por não necessitar de condições de contorno ou premissas estritas para as condições de exercício, apesar dos custos computacionais elevados (MUSSHOFF; HIRSCHAUER, 2010). Mais detalhes sobre esta metodologia serão apresentados na seção 3.1.1.

2.2 COMPUTAÇÃO EVOLUCIONISTA

A Computação Evolucionista (CE) é um ramo da inteligência computacional e da computação natural que busca otimizar globalmente um problema através do uso de candidatos iniciais a solução do problema e atualização iterativa dos mesmos, baseada em uma função de aptidão que vincula o candidato ao resultado do problema estudado (SUCUPIRA, 2004). Em outras palavras, um grupo subótimo de possíveis soluções é re combinado com outros candidatos e aqueles com melhores características (melhor avaliação na função objetivo) devem ser escolhidos para novas recombinações até um determinado momento, critério de parada. Entende-se como re combinado como a evolução ocorre dentro do grupo de candidatos. A Figura 6 apresenta o fluxo básico de passos de um algoritmo evolutivo.

Figura 6 – Esquema básico de evolução



Fonte: O Autor

Duarte (2019) comenta que os algoritmos populacionais, como também são chamados os elementos pertinentes a CE, são alternativas viáveis para otimização de problemas complexos, sendo que seu grande chamariz decorre da baixa exigência de conhecimento prévio sobre o problema como diferenciabilidade ou convexidade. (DUARTE, 2019) ainda comenta que a maioria das metaheurísticas deste grupo possuem como núcleo gerador os fenômenos naturais⁹.

O Algoritmo Genético (GA em inglês), proposto por Holland (1973), foi desenvolvido com base na teoria da seleção natural de Charles Darwin, sendo também um dos algoritmos evolutivos mais famosos e utilizados na literatura nos mais diversos campos de pesquisa (BODENHOFER, 2003).

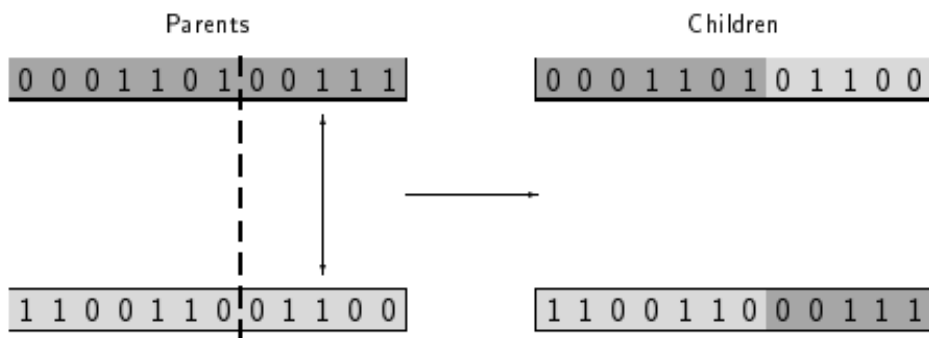
⁹ Sucupira (2004) classifica com maiores detalhes os tipos de metaheurísticas evolutivas.

A metodologia de busca do GA simula a evolução de uma espécie por um certo número de gerações. Para tal, o GA é dotado de 3 operações: seleção, cruzamento e mutação. O intuito está em selecionar para reprodução os indivíduos que apresentem a melhor aptidão, aqueles com as melhores características para o ambiente e que, conseqüentemente, possuem maiores sucessos de produzirem uma prole mais apta para sobreviver no futuro.

Assim, os indivíduos selecionados são cruzados e geram novos filhos (que contém material genético de ambos os pais), enquanto a operação de mutação imita a ocorrência esporádica de alterações genéticas em alguns indivíduos da população.

Em termos numéricos/matemáticos, o indivíduo é apresentado por um vetor, sendo que cada posição do vetor representa um elemento do problema a ser otimizado. A Figura 7 exemplifica (de forma binária) o funcionamento do cruzamento no GA, onde a mutação seria o equivalente à seleção de uma posição aleatória do vetor de um dos filhos e mudar o valor de 0 para 1 ou vice-versa.

Figura 7 – Exemplo de cruzamento



Fonte: [Bodenhofer \(2003\)](#)

Então, repete-se o processo de seleção, cruzamento e mutação até que a evolução seja encerrada. A importância abordada está na sua representatividade, pois, mesmo as metaheurísticas mais modernas e recentes possuem algumas das características fundamentais do GA, como exemplo, a representação de um indivíduo na forma de vetor é mantida, enquanto as operações de seleção, cruzamento e mutação são modificadas em função da inspiração natural adotada. Outras metaheurísticas bem exploradas na literatura são: a *Differential Evolution* (DE), proposta por [Storn e Price \(1997\)](#) e o *Particle Swarm Optimisation* (PSO) de [Eberhart e Kennedy \(1995\)](#). As próximas subseções descrevem os algoritmos de Aranhas Sociais, *Big Bang-Big Crunch* e a Evolução diferencial, sendo os dois primeiros apresentados por serem abordagens pouco vistas na literatura, enquanto a Evolução Diferencial é a principal meta-heurística considerada neste trabalho.

2.2.1 O Algoritmo de Aranhas Sociais

(YU; LI, 2015) propuseram uma metaheurística bio-inspirada e populacional chamado Algoritmo de Aranhas Sociais ou *Social Spider Algorithm* (SSA) para resolver problemas de otimização global. A inspiração para a SSA veio da estratégia de forrageamento de aranhas sociais que, no que lhe concerne, interagem com outras aranhas que vivem na mesma malha por meio do compartilhamento de suas informações pessoais por vibrações na malha e, assim, constroem um conhecimento coletivo.

O SSA trata o domínio do problema de otimização como uma teia de aranha hiperdimensional que representa o espaço de pesquisa, onde vivem N aranhas artificiais. Supõe-se que a aranha esteja na teia de aranha e a função de condicionamento físico seja uma representação da possibilidade/probabilidade de encontrar presas nessa posição de origem (DUARTE; LEMONGE; FONSECA, 2017).

Duarte, Lemonge e Fonseca (2017) comenta que durante a movimentação de uma aranha, para uma nova posição, a mesma transmite uma vibração transportada pela teia para as outras em diferentes intensidades, dependendo das distâncias entre cada par de aranhas.

Seja $P_s(k)$, ou simplesmente P_s , a posição de uma aranha ($s = 1, 2, \dots, N$) na iteração g e $I(P_j, P_h, g)$ a intensidade da vibração detectada pela aranha h na posição P_h gerada pela aranha j na posição P_j na g -ésima iteração, I é uma matriz $N \times N$ com os elementos i_{jh} dados por:

$$i_{jh}(g) = \begin{cases} \log\left(\frac{1}{f(P_j)+C} + 1\right) & , \quad j = h \\ I(P_j, P_j, g) \cdot \exp\left(-\frac{D(P_j, P_h)}{\sigma \cdot r_a}\right) & , \quad j \neq h \end{cases} \quad (2.13)$$

onde $D(P_j, P_h) = \|P_j - P_h\|_1$ é a distância entre as aranhas j e h , definida pela norma L_1 , $f(P_j)$ é o valor da função objetivo produzido por P_j , C é uma constante, σ é o desvio padrão médio ao longo de cada dimensão de todas as posições da aranha e $r_a \in [0, \infty]$ é a taxa de atenuação da intensidade da vibração ao longo da distância, como citado em (ELSAYED et al., 2016).

Em outras palavras, a matriz I transmite informação sobre os candidatos ao longo da teia com um esquema de atenuação através da ponderação da relação distância e desvio entre os candidatos nas respostas, evitando uma convergência acelerada para o ponto de melhor resposta.

Na fase de inicialização do SSA, o mesmo gera uma população com aranhas N aleatoriamente no espaço de pesquisa, ou seja, N vetores com a mesma dimensão do problema. Assim, calculam-se os valores de aptidão de cada candidato, enquanto a matriz I é atualizada.

Seja $v_{s,g-1}^{tar}$ a vibração alvo de cada aranha na $(g - 1)$ -ésima iteração, cada aranha

recebe as vibrações na $(g - 1)$ -ésima iteração, selecionando o mais forte como $(v_{s,g}^{best})$ e prossegue para atualizar o alvo. Se a intensidade de $v_{s,g}^{best} \geq v_{s,g-1}^{tar}$, a aranha s atualizará $v_{s,g}^{tar}$ por $v_{s,g}^{best}$, caso contrário, $v_{s,g-1}^{tar}$ é mantido.

O algoritmo manipula cada aranha s para executar uma caminhada aleatória em direção a $v_{s,g}^{tar}$ usando uma máscara de dimensão para guiar. A máscara é uma matriz $s \times d$ com valores binários, onde d representa a dimensão do problema e cada linha representa uma aranha correspondente s . Inicialmente, todos os valores na máscara são 0 e, a cada iteração, tem uma probabilidade $p_c \in [0, 1]$ a ser alterada em 1. Uma nova posição P_n^s é gerada com base na máscara e cada uma delas é coordenada $ii \subset d$ é dada por:

$$P_{s,i}^n = \begin{cases} P_{s,ii}^{tar} & , \text{if } m_{s,ii} = 0 \\ P_{s,ii}^r & , \text{if } m_{s,ii} = 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

onde $P_{s,ii}^{tar}$ é a posição atual produzida por v_s^{tar} , $P_{s,ii}^r$ é a posição de uma aranha aleatória r escolhido para a coordenada ii , $m_{s,ii}$ é o valor de ii -ésima coordenada de m_s . Este passo pode ser entendido como a mutação do GA.

Portanto, o movimento de cada aranha s para cada iteração é dado por:

$$P_s(g + 1) = P_s(g) + \underbrace{(P_s(g) - P_s(g - 1)) \cdot \alpha + (P_s^n(g) - P_s(g)) \otimes R}_{\text{termo de movimento}}, \quad (2.15)$$

onde $P_s(g + 1)$, $P_s(g)$, $P_s(g - 1)$ são a posição da aranha s na próxima iteração, a iteração atual e a iteração anterior, respectivamente. α é um número aleatório uniforme gerado para a aranha s . R é um vetor $1 \times d$ de números aleatórios distribuídos uniformemente entre zero e um e \otimes indica multiplicação por elementos a elemento. Os benefícios da utilização do SSA são descritos por (DUARTE; LEMONGE; FONSECA, 2017) e (ELSAIED et al., 2016).

Assim, pode-se afirmar que a lógica adotada pelo SSA é de percorrer o espaço de busca em várias direções, mas com caminho preferencial no sentido da melhor resposta, podendo traçar caminhos alternativos dependendo da “distância”, fator ponderado pela taxa de atenuação, entre os candidatos com melhor aptidão. Ao analisar o fator “distância”, pode-se observar o mesmo como uma forma de se evitar mínimos locais na fase de busca do SSA.

2.2.2 O algoritmo Big Bang-Big Crunch

O algoritmo de otimização Big Bang-Big Crunch (BB-BC) foi desenvolvido por Erol e Eksin (2006) tendo como inspiração a teoria da evolução do universo. O núcleo da otimização são as populações de corpos celestes que carregam todas as características

que se deseja avaliar, como o algoritmo genético para trabalhar com números de ponto flutuante, através da contração e expansão do universo.

O passo a passo do algoritmo BB-BC, segundo [YAO et al. \(2013\)](#), são: i) (Big Bang) seja X o conjunto de S estrelas (candidatos) com d características/parâmetros a serem evoluídos, $X \in \mathbb{R}^{S \times d}$, sendo $s \in S$ a representação de cada candidato, semelhante aos outros algoritmos de pesquisa evolutiva, ii) avaliação das soluções candidatas pela função de aptidão, iii) (Big Crush) O operador de convergência é aplicado, Eq. (2.16), calculando o centro de massa no sistema, iv) (Big Bang) Novos candidatos são gerados em torno do ponto identificado na etapa anterior após a Eq. (2.17), v) Retornar para etapa 2 até que o critério de parada seja atendido.

$$X_c(g) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} X_i(g) \cdot f_i^k(X_i(g))}{\sum_{i=0}^{N-1} f_i^k(X_i(g))} \quad (2.16)$$

$$X_i(g+1) = (1 - \beta) \cdot X_c(g) + \beta \cdot X^{best} + rand \cdot \gamma \cdot \frac{X_{max} - X_{min}}{1 + g} \quad (2.17)$$

Onde $rand$ é o vetor com dimensão $1 \times d$ aleatório com distribuição normal padrão, g o passo da iteração, X_{max} e X_{min} são os limites superior e inferior para os parâmetros respectivamente, $X_c(g)$ é a posição do centro na g -ésima iteração, $f_i(g)$ é o valor da função de aptidão do candidato i na g -ésima iteração, β o parâmetro que controla a influência da melhor solução, sendo $\beta = 0$ na proposição original de [Erol e Eksin \(2006\)](#), X^{best} obtida até o momento e γ é o parâmetro que limita o espaço de pesquisa.

A utilidade do BB-BC e variantes foram testadas por [Prayogo et al. \(2018\)](#) em problemas matemáticos de referência e engenharia de construção, [Sedighzadeh, Esmaili e Eisapour-Moarref \(2017\)](#) na estratégia ideal de controle de potência em micro-redes autônomas, [Camp \(2007\)](#) na otimização da estrutura, [Desai e Prasad \(2014\)](#) com derivada integral proporcional de ordem fracionária, [YAO et al. \(2013\)](#) em sistemas de reconhecimento de comportamento humano, [GUPTA et al. \(2017\)](#) para otimizar controladores em indústrias, [SAIDALA, DEVARAKONDA e KAMARAIUGADDA \(2018\)](#) para resolver problemas de agrupamento de dados e outras aplicações. Essas evidências sugerem a capacidade de otimização da metaheurística BB-BC em diferentes aplicações, pois, apresentam boas características de exploração em muitos campos de pesquisa.

2.2.3 Evolução Diferencial

A Evolução Diferencial é um dos algoritmos populacionais mais utilizados na literatura ([DUARTE, 2019](#)) e ([ZAHARIE; MICOTA, 2017](#)). O processo de busca do DE é dado pela realização de recombinação de vetores entre as soluções candidatas por um número de iterações ou até que não haja mais variação entre as etapas evolutivas.

Assim como em outras metaheurísticas, o DE requer um conjunto inicial de candidatos a soluções ao problema composto por N vetores com D dimensões, onde D representa o número de parâmetros a serem otimizados e N a quantidade de candidatos a serem evoluídos. A estrutura de otimização proposta no DE tem como base três operações: mutação, cruzamento e seleção. Na mutação cada candidato x_i será produzido um vetor mutante v_i dado por:

$$v_i = x_{r1} + F \times (x_{r2} - x_{r3}), \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \quad (2.18)$$

Onde $r1, r2, r3 \in 1, 2, \dots, N$ são índices de soluções candidatas do conjunto, escolhidos aleatoriamente, mutuamente diferentes e também diferentes de i , $F \in (0, 2[$ é o parâmetro que controla a amplificação da variação diferencial e é definido pelo usuário (DUARTE, 2019).

No cruzamento, o material produzido por v_i será combinado a x_i dando origem a u_i , sendo o objetivo deste passo promover a diversificação no conjunto de soluções. Todavia, a geração de u_i é dada de forma randômica dado por:

$$u_i, j = \begin{cases} v_{i,j}, & \text{caso } \text{rand}(j) \leq \text{CR} \text{ ou } j = \text{rand}(i) \\ x_{i,j}, & \text{caso } \text{rand}(j) > \text{CR} \text{ e } j \neq \text{rand}(i) \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, D \quad (2.19)$$

Onde CR é a taxa de cruzando, sendo outro parâmetro do DE definido pelo usuário, representando a probabilidade do gene mutante ser inserido no candidato, enquanto $\text{rand}(j)$ é o j -ésimo valor real aleatório definido no intervalo $[0, 1]$ e $\text{rand}(i) \in 1, 2, \dots, D$ é um valor inteiro aleatório produzido para cada solução, como forma de garantir que ao menos um dos parâmetros de otimização do candidato x_i será modificado.

A última operação, seleção, é realizada após o cruzamento para decidir se qual dos candidatos será descartado u_i ou x_i , enquanto o restante fará parte do conjunto de candidatos a solução na próxima geração. Para tal aplica-se um critério guloso pelo qual os valores de função objetivo das referidas soluções são comparados, escolhendo o candidato que produzir o melhor resultado na função objetivo (STORN; PRICE, 1997). Exemplo, para um problema de minimização, se $f(u_i) < f(x_i)$, a solução x_i será substituída pela solução u_i , caso contrário, a solução x_i será mantida.

Adicionalmente, Storn e Price (1997) propôs um esquema para nomear variantes do DE, variantes estás visando melhorar a performance do mesmo em diferentes problemas. No referido esquema adota-se o padrão DE a/b/c, sendo que a determina o vetor que será perturbado, podendo ser “rand” que significa que um vetor da população foi escolhido aleatoriamente ou “best” que implica na escolha do melhor candidato até o momento para $r1$; b determina a quantidade de diferenças ponderadas utilizadas para a perturbação de x_{r1} , termo em parentese na Eq. (2.18); c especifica qual o tipo de cruzamento, podendo ser “exp” que significa exponencial ou “bin” que significa binomial, sendo estes parâmetros escolhidos pelo usuário.

2.3 PESQUISAS RECENTES

A avaliação dos benefícios econômicos do investimento em sistemas fotovoltaicos pela abordagem tradicional, como o FCD ou VPL, é extensa. Santos et al. (2014) reforçam esse conceito ao destacar o tempo de entrada nos projetos como incerto, flexível e a irreversibilidade parcial ou total do projeto como características distintivas dos investimentos em Energia e comparam os métodos de avaliação padrão com a TOR considerando o método binomial¹⁰ sob o MGB.

Guo, Min e Guo (2016) realiza uma abordagem semelhante ao trabalho anterior, diferenciando-se pela adoção da Simulação de Morte Carlo (SMC). Kim, Kim e Kim (2017) avalia uma instalação em Daejeon, Coreia do Sul, também adotando o modelo binomial e modelando a incerteza por um MGB.

Bertolini, D'Alpaos e Moretto (2018) adotou a solução implementada por Dixit e Pindyck (1994) para o caso de *Smart Grids* na Itália e concluiu que o ROA captou a flexibilidade gerencial para uma entrada em *Smart Grids* e ainda otimizou a regra de decisão para os prosumidores (Prosumidor é um neologismo criado com a junção dos termos produtor e consumidor, sendo uma referência no setor elétrico para as pessoas que consomem e produzem energia elétrica)^{11,12} exerçam a alternância entre consumir ou injetar energia na rede. Além disso, encontraram uma associação positiva entre o tamanho ideal do PV e o momento ideal de investimento.

Zhang et al. (2022) avaliam as estratégias de portfólio de investimento em diferentes tipos de projetos de energia renováveis (incluindo PV) sob a ótica do investidor desejando alocar dinheiro em projetos de energia renovável. Tian et al. (2017) adotaram a ligação do mercado de carbono combinada com o preço do carbono, preço da eletricidade e incerteza de subsídio sob MGB e precificando as opções por simulação de Monte Carlo de mínimos quadrados (LONGSTAFF; SCHWARTZ, 2015).

Zhang et al. (2022) adotaram o Modelo de Difusão Baseada em Agente com Suporte de Análise de Opções Reais (ROA-ABDM), onde a proposta é calibrada e validada com base no estudo de caso de adoção para a geração de energia fotovoltaica residencial em Cingapura, além de duas análises de cenário para investigar possíveis implicações políticas para alavancar a adoção da mesma. A exploração de áreas ociosas para desenvolver projetos fotovoltaicos na Coreia do Sul é o foco de Na et al. (2022). Para tanto, os autores consideraram o modelo CRR para avaliar as opções vinculadas ao projeto.

¹⁰ O método da árvore binomial foi introduzido por Cox, Ross e Rubinstein (CRR) em Cox, Ross e Rubinstein (1979)

¹¹ *Prosumer*, no original em inglês, é uma combinação das palavras *producer* e *consumer*.

¹² No Brasil é comum observar duas grafias para o termo, sendo elas: i) prosumidor ou ii) prosumidor. Neste trabalho foi adotada a grafia utilizada no projeto de Lei N.º 616/2020, disponível em: <<https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/fichadetramitacao?idProposicao=2238899>>

Detert e Kotani (2013) investigaram a atratividade entre manter a infraestrutura baseada em carvão e mudar para sistemas fotovoltaicos sob as incertezas dos preços do carvão. Esses estudos forneceram diretrizes para a avaliação do sistema fotovoltaico para subsídio e investimento em P&D, para que os formuladores de políticas possam alocar orçamentos de maneira eficaz para energia renovável. Zeng e Chen (2019) identificaram um intervalo efetivo de período de concessão para identificar um *spread* efetivo de um projeto fotovoltaico construir-operar-transferir sob Política de Incentivos.

Kim et al. (2020) estudaram a troca de uso da terra de plantações agrícolas ou sistemas fotovoltaicos comerciais sob preço da safra agrícola como fonte de incerteza, foi considerado o método binomial para precificação da opções. Moon e Baran (2018) exploraram, em análise teórica, a relação da volatilidade, desvio médio e benefício no limite ótimo de investimento, além disso, investigou os tempos de investimento esperados nos Estados Unidos, Alemanha, Japão e Coreia.

Zhang et al. (2019) analisaram a decisão de investimento e tempo de decisão para a transição de uma usina a base de carvão para uma usina fotovoltaica na China, considerando incertezas sobre o preço de mercado da eletricidade, custo de combustível fóssil, preço de dióxido de carbono, custo de investimento e mudanças na política *feed-in-tariff* associada às energias renováveis.

Embora exista diversidade nas pesquisas, em geral, a interceptação das mesmas ocorre no modelo estocástico e na ferramenta utilizada para resolver o problema, esse arcabouço limita a complexidade dos esquemas de decisão. Schachter e Mancarella (2016) fazem a análise crítica da utilização da TOR via análise da literatura sobre Opções Reais para a avaliação, flexibilidade e desenvolvimento das *Smart Grids*. Os autores apresentaram uma lista com dez características fundamentais para sistemas de energia, destacando a possibilidade de adiar o investimento para uma data posterior, modelar múltiplas incertezas simultaneamente, a interação de opções em múltiplos níveis, entender a simbiose entre elas ao longo do tempo e modelar cenários evitando a limitação do uso de processos estocásticos, se estes forem inadequados para representar as incertezas.

Em consonância com essas afirmações, Schöne (2015) demonstra a pertinência da escolha do processo estocástico para a avaliação via TOR. Ele mostrou inconsistências na modelagem dos modelos estocásticos mais comuns (MGB e MRM) com dados reais de mercado. Além disso, a modelagem equivocada pode subestimar o valor do projeto e levar ao adiamento excessivo do investimento sob a regra de decisão ótima relativa. Gatheral (2012) afirma que evidências empíricas induzem as volatilidades variantes no tempo, como características desse comportamento têm-se: i) o agrupamento de volatilidade; ii) a correlação negativa entre volatilidades e preços de ativos; iii) a distribuição das taxas de retorno possui caudas longas (curtose elevada); iv) a volatilidade das taxas de retorno com característica de reversão à média.

Induzidos pelo desafio da modelagem de volatilidade do mundo real, [Harikae, Dyer e Wang \(2021\)](#) estudaram a adoção de volatilidades variantes no tempo em TOR com base na árvore binomial implícita generalizada (IBT Generalizado). Os mesmos autores discutem a avaliação de opções reais complexas com múltiplas incertezas e comentam sobre a limitação de ferramentas para avaliar o projeto. Eles destacaram a inaplicabilidade das soluções baseadas em equações diferenciais parciais (EDP) de casos complexos combinados com múltiplas incertezas.

[Zhang et al. \(2020\)](#) consideram uma abordagem baseada volatilidade estocástica para analisar o investimento em geração de energia solar fotovoltaica (PV) na China, o trabalho propõe um modelo de árvore trinomial de recombinação estendida, onde a variação da volatilidade é usada para gerar probabilidades de transição, resultando na alteração do valor do projeto e execução antecipada dependendo do nível de volatilidade.

[Lazo e Watts \(2023\)](#) reforçam a necessidade de manipular múltiplas incertezas e cenários complexos de decisão. Além disso, o referido autor faz um compêndio com a caracterização dos trabalhos mais recentes na área de opções reais e avaliação de projetos fotovoltaicos e indicando a necessidade de aumentar o número de incertezas consideradas e, com isso, o número e a complexidade das opções, permitindo modelar estratégias mais flexíveis.

Adicionalmente, vale destacar outras soluções para o problema de precificar uma opção do tipo americana, como a aproximação de Barone-Adesi e Whaley ([BARONE-ADESI; WHALEY, 1987](#)), o gatilho *flat* de Bjerksund and Stensland (B&S) ([BRANKA; ZDRAVKA; TEA, 2014](#)), o Método da Malha Estocástica descrito por ([BROADIE; GLASSERMAN; HA, 2000](#)), a *Fast Fourier Transform* (FFT) de ([LORD et al., 2008](#)). Mais métodos para precificar as opções americanas são descritos em ([LIU; PANG, 2016](#)) e ([MUSSHOFF; HIRSCHAUER, 2010](#)).

Apesar dos avanços na modelagem da TOR, trabalhar com cenários complexos de decisão via EDP são difíceis e custosas de implementar, apesar da elegância matemática. Ou seja, resolver o problema de opções em situações com múltiplas incertezas, esquemas de decisão complexos e com múltiplas flexibilidades é um trabalho árduo.

Neste contexto, a Simulação de Monte Carlo (SMC) se destacou com o método LSM como um pináculo da abordagem de programação dinâmica ([NADARAJAH; MARGOT; SECOMANDI, 2017](#)), fazendo o *bypass* de problemas relacionados a dimensão, complexidade das estruturas de pagamento das opções e do processo estocástico utilizado. Entretanto, existem controvérsias na literatura sobre o modelo, como exemplo: na escolha da função de base ([ZHANG et al., 2019](#)), instabilidade numérica para casos de refinamento na discretização temporal, como aponta [Mostovyi \(2013\)](#), além da evidência de heterocedasticidade nas regressões realizadas para precificar tais opções sob diferentes modelos estocásticos, causando viés nos resultados ([FABOZZI; PALETTA; TUNARU,](#)

2017). Além disso, a recursividade do LSM a torna este método de difícil paralelização, assim o LSM pouco pode aproveitar dos recursos de múltiplos núcleos presentes nos computadores atuais.

Por outro lado, a Computação Evolucionista surgiu para demonstrar o poder da inspiração idiossincrática de alguns animais ou fenômenos naturais/físicos na otimização de problemas reais (BRABAZON et al., 2012). A imponência deste *framework* advém da mistura e compreensão de conceitos originários das mais eficientes e adaptadas existências no mundo natural, com décadas ou milênios de experiência, como animais e outros seres vivos, sendo eles: i) os sistemas de cooperação social onde os indivíduos são auto-organizáveis, trabalham em equipe, robustez, e com comunicação direta/indireta entre os membros, conhecido como *Social Computing* (KUMAR et al., 2009; SWAIN, 2017; SINGH; THULASIRAM; THULASIRAMAN, 2016); ii) a Computação Física inspira-se nos processos físicos do mundo natural (QODSI; TEHRANI; BASHIRI, 2015); iii) a CE baseada em princípios neodarwinianos com o conceito de sobrevivência do mais apto como o caso do Algoritmo Genético (POWELL, 2013); ou ainda, iv) Sistemas de Neurocomputação que replicam a propagação elétrica do cérebro humano Redes Neurais (TOMAS, 2018; GIEBEL; RAINER, 2013).

A combinação de SMC com NC (mais especificamente EC, Computação Social ou Computação Física) é uma abordagem promissora para contornar as limitações em torno do número de incertezas (maldição da dimensionalidade), modelar processos estocásticos sofisticados e desenvolver estruturas de decisão complexas e flexíveis. Essa combinação já pode ser observada no caso de ativos financeiros, como (MATHER et al., 2017), (SINGH; THULASIRAM; THULASIRAMAN, 2016), (THULASIRAM et al., 2016), (SHARMA; THULASIRAM; THULASIRAMAN, 2013), (LEITE; FONSCCECA, 2019) e (POWELL, 2013). No entanto, os casos para opções reais ainda são incipientes, com os passos iniciais apresentados por (DIAS, 2001), (LAZO, 2004), (PACHECO; VELLASCO, 2009) e (ZHANG; BABOVIC, 2011).

A maior desvantagem da combinação de SMC + CE era o custo computacional e o tempo de execução do modelo (MUSSHOFF; HIRSCHAUER, 2010). No entanto, na atualidade o poder computacional cresce exponencialmente com o tempo e somado a isso tem-se que os modelos de CE são naturalmente paralelizáveis (rodam em múltiplos núcleos) (MATHER et al., 2017). Assim, a combinação SMC + CE torna-se escalável e totalmente adaptável para aproveitar todos os recursos de computação, incluindo *multithreading* na CPU ou unidade de processamento gráfico (GPU)¹³. Portanto, a sinergia entre execuções EC e *multithread* é notória, e o pesquisador pode se valer dela para explorar o potencial ROA de forma completa e seguir as recomendações de Schachter e Mancarella

¹³ GPU são hardwares, mais especificamente as placas de vídeo, para paralelismo de alta eficiência para operações de ponto flutuante, sendo capazes de acelerar substancialmente a execução de tarefas.

(2016) e [Lazo e Watts \(2023\)](#) ao combinar várias fontes de incertezas, cenários complexos de combinação de opções, exercício do tipo americano, etc.

3 METODOLOGIA

Os experimentos deste trabalho se dividem em dois grandes blocos: o primeiro destinado a comparar o desempenho do modelo baseado em SMC + CE com os modelos referências da literatura. O objetivo deste primeiro experimento é verificar a eficácia e eficiência da metodologia considerada na comparação com as ferramentas tradicionais da literatura. Para tal, a Seção 3.1 introduz a lógica e nuances pertinentes à metodologia SMC + CE, sendo estritamente necessária para o segundo bloco deste trabalho.

O segundo bloco corresponde a utilização da metodologia descrita no primeiro bloco para analisar a viabilidade e o *timing* de entrada para um projeto solar residencial, considerando a situação onde o CAPEX está disponível para utilização e o agente possui a flexibilidade de decidir entre montar o sistema solar completamente (suprindo seu consumo) ou instalar 50% do projeto e/ou alocar os 50% restantes do CAPEX no ativo de risco IVVB11, ou ainda aguardar com 100% do CAPEX aplicado no ativo de risco. As fontes de incertezas consideradas são, o preço da energia elétrica e o IVVB11. Adicionalmente, dados, modelagem estocástica e metodologia para calibração dos parâmetros também são apresentados.

Todos os experimentos e análises numéricas foram realizados utilizando a linguagem Python 3.10.4 (majoritariamente) com as bibliotecas descritas na Tabela 2. Além da utilização dos conceitos de paralelização e otimização de execução escrevendo funções críticas em C (linguagem de alta eficiente computacional).

Tabela 2 – Pacotes Python

Pacote	Versão	Pacote	Versão	Pacote	Versão
numpy	1.17.4	matplotlib	3.1.2	xgboost	1.4.1
joblib	0.14.1	sklearn	0.22	tsfel	0.14
statsmodels	0.10.2	numba	0.46.0	PyMC3	3.11.5
cython	0.29.14	pygmo	2.19.5	tensorflow	2.12
pandas	0.25.3	math	3.8	DeepXDE	0.11.0
seaborn	0.9.0	selenium	3.141.0	CUDA Toolkit	11.6.124
scipy	1.3.2	arch	4.11	TSFEL	0.1.4

Fonte: O Autor

3.1 AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DO MODELO MCS + CE

3.1.1 O problema de precificar uma opção do tipo americana via SMC e metaheurísticas

Retomando a classificação das opções iniciadas na seção 2.1.1, uma opção financeira do tipo americana é classificada matematicamente como um problema de parada

ótima, devido à possibilidade do exercício antecipado da opção (KIM; MA; CHOE, 2013), sendo esta classificação análoga à questão de pesquisa deste trabalho. A teoria da parada ideal ou da parada ótima preocupa-se com o problema de escolher um momento para tomar uma ação específica, a fim de maximizar uma recompensa esperada ou minimizar um custo esperado. Parada ótima é uma classe particular da programação dinâmica em que a decisão é binária (parar ou não-parar). Portanto, precisamos resolver o problema definir o preço ótimo de exercício simultaneamente para cada oportunidade de exercício juntamente com a precificação da opção (CHUNG; HUNG; WANG, 2010).

Assim, considerando uma opção de compra, a solução para este tipo de problema passa por identificar uma regra ótima de exercício (V^*) (COMPANY; EGOROVA; JÓ-DAR, 2016), sendo V uma variável estocástica atrelada a decisão, é necessário identificar um conjunto ótimo de decisões do tipo: caso $V^*(t) > V(t)$ o *holder* compra o ativo, caso $V^*(t) < V(t)$ o *holder* aguarda até $t + 1$, onde $0 \leq t \leq T$ e T representa o tempo até o vencimento.

Chockalingam e Muthuraman (2015) apresenta em detalhes a complexidade matemática requerida para resolver tal tipo de problema, sendo que a maioria dos métodos aplicados a opções financeiras é limitado quanto ao tipo de modelo estocástico, número de dimensões e quanto a complexidade da função de pagamento. Apesar de todas as formas de resolução listadas na seção 2.3, poucas abordagens podem ser utilizadas para o caso de opções reais, como o LSM que apresenta problemas relacionadas a escolha da função base, entre outros, além de ser complexo para modelar para problemas com múltiplas opções ou onde exista uma interdependência entre as opções, ou seja, o exercício de uma opção pode gerar outra opção.

Contudo, atualmente, é possível utilizar o aparato das metaheurísticas evolutivas para resolver o problema de precificação de opções do tipo americana, devido à relação harmoniosa obtida entre as vantagens SMC na modelagem de qualquer processo estocástico e contornar a maldição da dimensionalidade.

Essa combinação já pode ser observada para o caso de ativos financeiros, conforme Mather et al. (2017), Singh, Thulasiram e Thulasiraman (2016), Thulasiram et al. (2016), Powell (2013), Leite e Fonseca (2019) e Leite, Duarte e Fonseca (2020). Contudo, os casos para opções reais ainda são insipientes, com os passos iniciais apresentados por Dias (2001), Lazo (2004) e Pacheco e Vellasco (2009). Mais detalhes e críticas à modelagem de opções reais por metaheurísticas pode ser vista em Musshoff e Hirschauer (2010). Assim, a relação entre esta metodologia para opções reais consiste na modelagem do fluxo de caixa do empreendimento e cálculo do VPL da opção, considerando as variáveis de decisões (estocásticas) estejam atreladas ao fluxo de caixa. Enquanto, que o processo de decisão é mantido em função do conjunto de decisões que maximizem o VPL da opção.

Para exemplificar a descrição do parágrafo anterior, considere uma opção finan-

ceira¹. Considere que o detentor possui o direito de comprar um ativo descrito por V pagando o valor fixo no contrato K até o vencimento T . No entanto, V é um processo estocástico e o tempo até o vencimento T é discretizado em τ partes igualmente espaçadas ($t_0 = 0, \dots, t_\tau = T$), onde $\Delta t = T/\tau$. Assim, o detentor precisa decidir a todo instante t se exerce a opção imediatamente ou aguarda a próxima oportunidade para decidir novamente.

Em outras palavras, a execução imediata implicaria que o detentor do direito deve analisar se comprar o ativo por K (também chamado de *strike*) e vendendo-o imediatamente por $V(t), 0 \leq t < T$ com o lucro descrito na Eq. (3.1) ou se aguarda a próxima oportunidade de decisão para avaliar o exercício da opção com lucro descrito na Eq. (3.2), onde \mathbb{E} representa a esperança matemática e r é a taxa de desconto. Desta forma, se $I(t) > f(t)$ o exercício imediato é superior à expectativa futura de resultado, então o agente exerce imediatamente, caso $I(t) < f(t)$ o agente deve aguardar e decidir em $t + \Delta t$.

$$I(t) = \max(V(t) - K, 0), \quad | \quad 0 \leq t \leq T, \quad K > 0 \quad (3.1)$$

$$f(t) = \mathbb{E}[I(t_{t+1})] \cdot \exp(-r \cdot \Delta t) \quad (3.2)$$

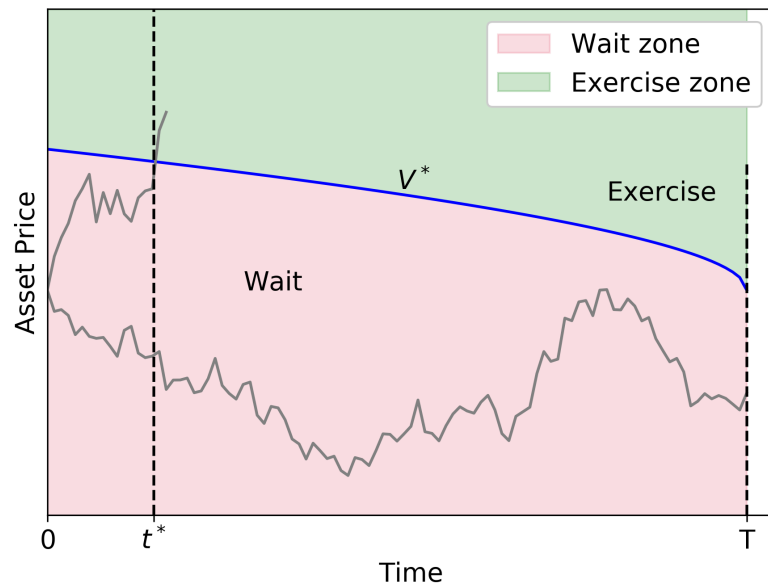
A solução consiste em identificar um conjunto de $V^*(t)$ otimizado que torna a Eq. (3.1) e a Eq. (3.2) iguais ($I(t) = f(t)$) para todo $0 \leq t \leq T$. V^* é a regra de decisão ou gatilho de exercício da opção, ou limite de indiferença e cria duas regiões: (i) abaixo de V^* onde o detentor espera o próximo passo de tempo e (ii) $V^* \geq V$ onde o exercício imediato é o ideal, executa a ação (KIM; MA; CHOE, 2013). Chung, Hung e Wang (2010) descreveu que a monotonicidade estrita de V^* , como restrição do problema.

A Figura 8 exemplifica o conceito supracitado, onde a cor verde indica a zona de exercício da opção, a cor rosa indica a zona de espera, a linha azul representa V^* , as linhas em cinza representam os caminhos possíveis para o ativo, a linha pontilhada (primeira da esquerda para a direita), em t^* , indica o ponto onde o preço do ativo cruzou V^* indicando que a opção deve ser exercida, por fim, a linha pontilhada mais a direita, em T indica a expiração da opção e o momento final para a decisão, sendo que neste ponto $V^* = K$.

A tradução de V^* para uma abordagem baseada em metaheurística implica em representar V^* sob a forma de vetor, *a priori* não existe uma regra fixa para tal passo, mas algumas sugestões disponíveis na literatura são: (i) a proposição original de Dias (2001), que considera a existência de 3 genes livres mais 2 genes que representariam os termos de uma equação logarítmica, Figura 9a, referida neste trabalho como V_LOG; (ii) a abordagem baseada que no cromossomo com dimensão igual a Δt , onde cada alelo do mesmo representa um gatilho isolado para o período t , conforme Powell (2013) e

¹ Mantendo a generalidade para opções reais.

Figura 8 – Exemplo da regra de decisão para o caso de uma variável estocástica: linhas cinza são os possíveis caminhos para o ativo base V

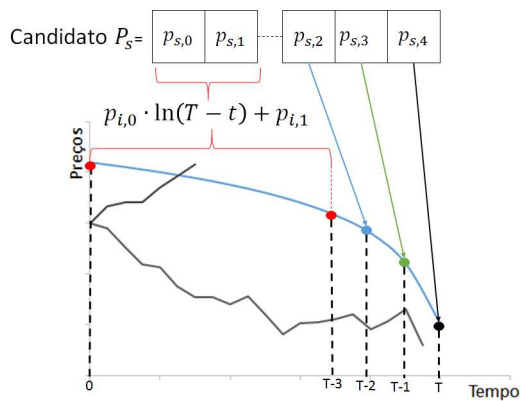


Fonte: O Autor

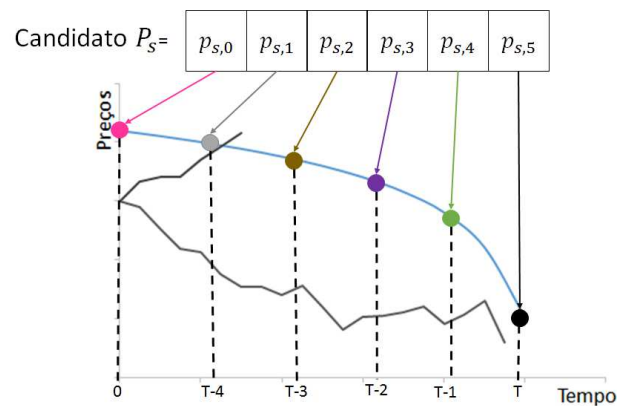
representado pela Figura 9b, referida neste trabalho como V_LIVRE ; (iii) abordagem baseada em Chockalingam e Muthuraman (2015) onde α_1 , α_2 e b_w , da Eq. (3.3), ou seja, 3 parâmetros a serem otimizados, referida neste trabalho como V_EXP .

Figura 9 – Exemplos de cromossomos para a precificação de opções

(a) *Timing* baseado em Dias (2001)



(b) *Timing* baseado em pontos livres



Fonte: O Autor

$$V^*(t) = Ke^{\alpha_1\sqrt{T-t}} + b_w e^{\alpha_2\sqrt{T-t}} \quad (3.3)$$

Considerando a restrição de monotonicidade do problema, todas as metaheurísticas receberam o acoplamento do tratamento de restrições proposto por Deb (2000), aplicável para os cromossomos V_LIVRE e V_LOG , onde (i) uma solução viável é preferível a uma inviável; (ii) entre duas soluções viáveis, é preferida aquela com melhor valor objetivo da função; (iii) entre duas soluções inviáveis, é preferida aquela com menor violação de

restrição. Em outras palavras, para este problema a existência de $\frac{dV^*}{dt} > 0$ representa uma violação da restrição. Uma forma de quantificar a magnitude da inviabilidade em uma possível solução é dada pelo somatório das diferenças positivas entre os segmentos subsequentes de V^* , em outras palavras, é feito a soma dos momentos onde $V^*(t) - V^*(t + \Delta t) > 0$ e o valor final desta soma é considerado a magnitude da violação do candidato.

Um ponto importante com relação a representação da solução via V_EXP está nos casos de descontinuidade da curva de gatilhos. Nos casos onde a taxa livre de risco é maior que a taxa de dividendos ($r > \delta$) a curva de gatilho é descontínua na data de expiração, a lógica que permeia tal caso surge da premissa que nunca é ótimo exercer antecipadamente se possui um retorno superior aos dividendos. Mais detalhes sobre esse fenômeno podem ser encontrado em [Detemple \(2005\)](#)[Chap.4, pg.57]. O mesmo também é válido para o caso de Opções Reais, onde a taxa de dividendos pode ser interpretada como o fluxo de caixa do projeto. Portanto, não é recomendado utilizar a representação do tipo V_EXP quando taxa livre de risco é maior que a taxa de dividendos.

A avaliação do valor da opção, que também representa a função de aptidão (*fitness*) para a metaheurística, é baseada na formulação apresentada por [Dias \(2001\)](#) e complementado por [Pacheco e Vellasco \(2009\)](#). Conforme o Algoritmo 2, onde Δt representa o intervalo de discretização adotado, s representam cada solução possível, $V_{s,t}^*$ é o valor de V^* no momento t com os parâmetros de s -ésimo candidato, iii representa cada caminho simulado, $v_{iii,t}$ o valor para iii -ésima simulação no momento t , $f(v, k)$ a função de pagamento da opção e e^{-rt} é o fator de desconto.

Algorithm 2: Avaliação de aptidão para opções

Data: Candidatos S , Simulações V
Result: Fitness

```

1 for  $s \leftarrow 1$  to  $N^o$  de candidatos do
  /* Iterar sobre cada indivíduo a ser avaliado */
2 for  $iii \leftarrow 1$  to  $N^o$  de Simulações do
  /* Iterar sobre cada simulação */
3    $t = 0$ ;
4   while  $V_{s,t}^* \geq v_{iii,t}$  or  $t \leq T$  do
  /* Iterar ao longo da discretização temporal */
5      $t+ = \Delta t$ ;
6     fitness[s]+ = max [ $f(v, k) \cdot e^{-rt}$ , 0];
7 fitness[s] = fitness[s]/ $N^o$  de Simulações;
```

Observe que o Algoritmo 2 encontra o primeiro valor superior a V^* para o candidato em cada simulação até T e calcula seu retorno, ao final da avaliação em todas as simulações o retorno médio é obtido para V^* , considerando a abordagem *forward*². O

² Uma explicação alternativa, sem termos financeiros, é comparar o problema como uma bar-

operador máximo garante que o exercício ocorra apenas em casos positivos, mantendo a racionalidade do titular para evitar situações desfavoráveis.

Uma vantagem desta metodologia está em evitar o problema da maldição da dimensionalidade ou a limitação pelo modelo estocástico empregado, viabilizando a modelagem com processos estocásticos de maior complexidade e/ou para problemas de opções reais com mais de duas variáveis de decisão. Além disso, torna factível a modelagem para esquemas de decisão complexos. Enquanto para outras abordagens tais considerações não são habilmente aplicadas.

A representação genotípica dos gatilhos V_EXP possui como ponto positivo a simplicidade e baixo número de termos, enquanto fixa o formato da curva. Já a representação V_LIVRE possui características opostas a anterior, pois, a codificação genotípica coincide com a fenotípica e o tamanho do cromossomo depende de T e da discretização Δt , podendo tornar o cromossomo com elevada dimensão (muitos parâmetros a serem otimizados quando a discretização temporal é significativa) e de difícil manutenção da restrição de monotonicidade, enquanto o aspecto positivo está em poder representar qualquer forma para o conjunto de decisão.

3.1.2 Estratégias de paralelização e *speedup* para a metodologia SMC + CE

O principal gargalo da abordagem SMC + CE está no tempo computacional gasto para a execução (MUSSHOFF; HIRSCHAUER, 2010). Analisando o Algoritmo 2 nota-se que todos os indivíduos devem ser avaliados (*loop* na linha 1) em todas as simulações disponíveis (*loop* da linha 2) iniciando no instante inicial até o momento onde o exercício aconteça (*loop* na linha 4) e o resultado seja assim computado para cada simulação. Adicionalmente, a cada nova iteração da evolução dos candidatos todas as etapas anteriores são repetidas, sendo visível o aumento da complexidade computacional como função do número de gerações, número de indivíduos na população, número de simulações e pelo número de passos em cada simulação (discretização temporal)³.

Apesar da complexidade vinculada ao tipo de solução, os recursos computacionais modernos permitem um acréscimo significativo de performance em algoritmos que até o início dos anos 2000 eram completamente inviáveis. O avanço neste quesito seguiu uma severa evolução no desempenho dos processadores, oriundas do avanço tecnológico tanto na arquitetura de processadores quanto no aspecto fabril. Tais avanços resultaram o aumento no número de instruções por ciclo de operação e redução nos tamanhos dos tran-

reira da partícula, onde a partícula segue o processo de difusão estocástica e precisamos maximizar a distância percorrida, considerando que a difusão pode fazer com que a partícula retorne próximo da origem.

³ Custo computacional da ordem de $\mathcal{O}(n^3)$ até $\mathcal{O}(n^4)$ dependendo do grau de discretização da simulação e do momento *timing* de execução, pois, a complexidade pode variar dependendo do momento onde a execução ocorrer (linha 4 no Algoritmo 2), sendo o pior caso quando mais próximo da expiração e o melhor caso quando mais próximo de $t = 0$

sistores, permitindo a adoção de processadores com múltiplos núcleos, além de melhorar o *trade-off* energético.

O conceito de múltiplos núcleos remete diretamente a ideia realizar o mesmo ciclo de instruções de forma simultânea no tempo, permitindo que uma tarefa grande possa ser **subdividida** e **distribuída** entre vários núcleos de processamento e ao final toda a informação processada seja unificada novamente. Todavia, essa divisão de tarefas implica na independência entre as múltiplas execuções, ou seja, uma tarefa não deve depender⁴ de outra para ser finalizada.

A forma mais simples de dividir uma tarefa entre diversos núcleos é através da paralelização de um *loop* de atividades. Entre os *loops* supracitados, a primeira possibilidade seria realizar a paralelização para o *loop* de evolução. Todavia, é inexequível fazer o mesmo, haja vista que está etapa é sequencialmente dependente, ou seja, a próxima iteração evolutiva é dependente do passo atual, sendo inviável dividir esta etapa.

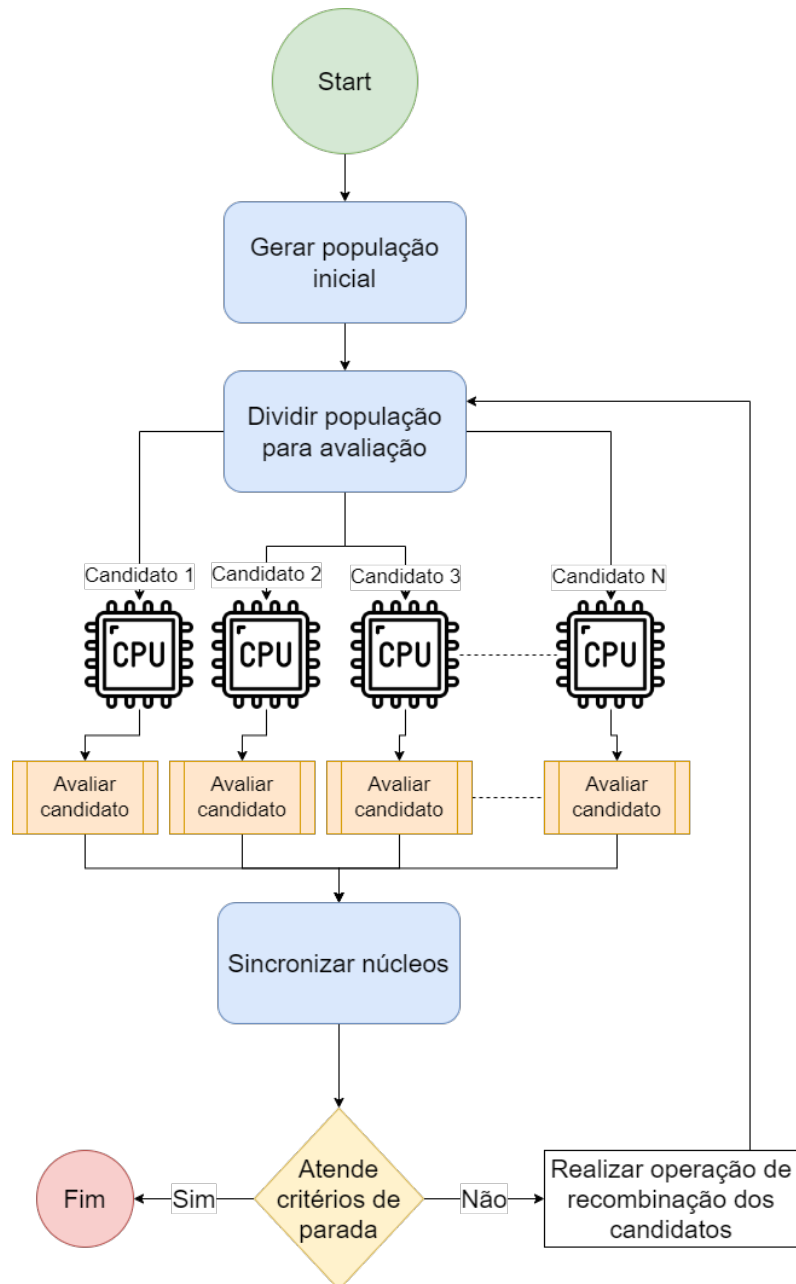
A segunda possibilidade de paralelização está em avaliar cada indivíduo/candidato de forma simultânea, uma vez que cada avaliação é independente das demais. Nessa abordagem [Thulasiram et al. \(2016\)](#) e [Mather et al. \(2017\)](#) utilizaram como parâmetro a relação número de indivíduos na população / número de núcleos. Em outras palavras, divide-se o processo de avaliar os indivíduos gerados pela evolução entre os núcleos do processador, paralelizando o processo de *loop* da linha 1 no Algoritmo 2, sendo está a paralelização da avaliação de indivíduos. A Figura 10 apresenta o esquema deste esquema de paralelização.

A terceira possibilidade consiste em paralelizar o *loop* da linha 2, ou paralelização das simulações, neste caso iríamos dividir as simulações entre em núcleos, diferente da abordagem anterior onde todos os núcleos iriam percorrer todas as simulações, nesta abordagem cada núcleo receberia a tarefa de avaliar um mesmo indivíduo em um conjunto limitado de simulações e retornar para a avaliação individual a parcela do vetor responsável pela avaliação no grupo de simulações. A Figura 11 apresenta o esquema deste esquema de paralelização, destacando que as etapas dentro da atividade “Avaliar candidatos” são repetidas para todos os indivíduos da população.

A escolha entre a paralelização da avaliação de indivíduos ou a paralelização das simulações depende do tipo de algoritmo evolutivo escolhido. A ideia que embasa cada opção vem de otimizar o tempo de avaliação do conjunto de candidatos (paralelização da avaliação de indivíduos) ou da otimização da avaliação de um único indivíduo (paralelização das simulações). Em linhas gerais, ambas as abordagens diminuem o tempo de execução do processo, mas a paralelização da avaliação de indivíduos tende a ser mais simples para implementação.

⁴ Existem formas de paralelizar processos com interdependência, mas são procedimentos mais complexos e não serão abordados neste trabalho.

Figura 10 – Esquemas de paralelização baseado no indivíduo para a abordagem SMC + CE

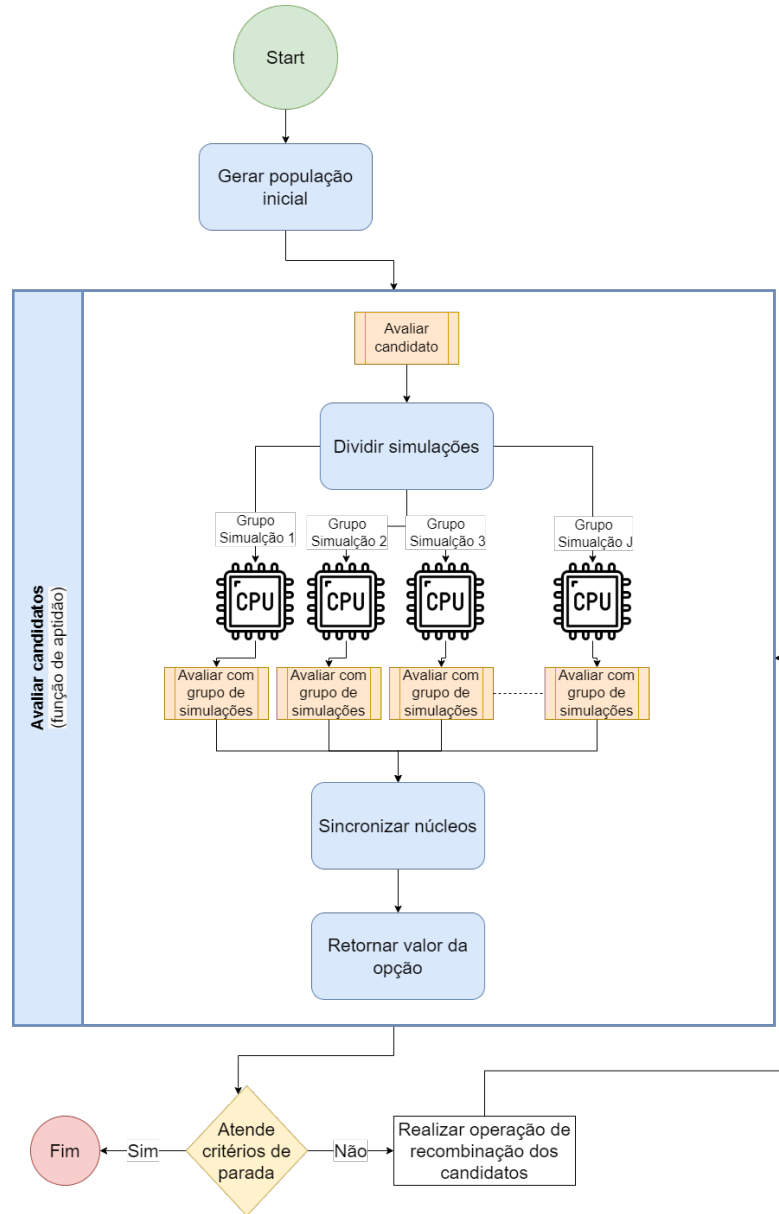


Fonte: O Autor

Outra possível combinação que objetiva diminuir o tempo de execução da referida abordagem ocorre da combinação entre o processador (CPU - *Central Processing Unit*) com uma placa de vídeo⁵ (GPU - *Graphics Processing Unit*). Para tanto, o esquema combina ambos os esquemas supracitados, onde o processador paraleliza os indivíduos enquanto a GPU irá paralelizar as simulações. Ou seja, cada núcleo do processador (CPU) recebe um indivíduo para avaliação e durante esta etapa cada processador recebe

⁵ GPU é um hardware voltado ao paralelismo de alta potência, eficiência para operações de ponto flutuante que podem acelerar substancialmente a execução de códigos, haja vista que GPUs modernas possuem milhares de núcleos.

Figura 11 – Esquemas de paralelização baseado na simulação para a abordagem SMC + CE



Fonte: O Autor

uma quantidade de núcleos de GPU (N° núcleos GPU / N° núcleos CPU) e divide todas as simulações entre os núcleos de GPU designado.

O ponto negativo desta abordagem está nos detalhes relacionados a programação com GPU, mais complexo quando comparado a linguagens mais usuais, além da limitação de memória RAM da GPU que exige mais atenção no momento da programação. O problema relacionado a quantidade de RAM na GPU ocorre principalmente nos casos com muitas simulações e alta taxa de discretização temporal.

Adicionalmente, devido ao processo de codificação do experimento em uma linguagem de alto nível (Python) pode-se extrair mais desempenho a partir da reescrita e

compilação do mesmo como códigos em linguagem de baixo nível (C, C++, Fortran, etc.)⁶. Na atualidade já existem ferramentas que facilitam o processo de conversão para uma linguagem de baixo nível, como exemplo a biblioteca numba do Python (LAM; PITROU; SEIBERT, 2015).

Portanto, é possível reescrever o código entre as linhas 2 a 6 no Algoritmo 2 para que o mesmo seja compilado em tempo de execução e gerando mais desempenho computacional. O processo de compilação pode ser utilizado tanto paralelização da avaliação de indivíduos quanto para a paralelização das simulações mantendo o código original em Python, mas realizando modificações relacionadas a declaração e tipagem de variáveis⁷.

3.1.3 Metodologia de teste e *Benchmark* da literatura

Conforme mencionado anteriormente, a primeira fase deste trabalho focou na análise de metaheurísticas alternativas ao GA, buscando melhorar a acurácia desta abordagem para a precificação de uma opção do tipo americana, foram testadas as metaheurísticas SSA, BBBC, *Particle Swarm Optimisation* (PSO) (EBERHART; KENNEDY, 1995); *Artificial Bee Colony* (ABC) (KARABOGA, 2005); DE; *Improved Harmony Search* (IHS) (MAHDAVI; FESANGHARY; DAMANGIR, 2007); *Self-Adaptive Differential Evolution* (SADE) (QIN; SUGANTHAN, 2005); *Evolution Strategy with Covariance Matrix Adaptation* (CMA-ES) (HANSEN; MÜLLER; KOUMOUTSAKOS, 2003), presentes no pacote pygmo(BISCANI; IZZO, 2020) (exceto SSA e BBBC). A escolha destas abordagens ocorre devido às características de intensificação e exploração que podem ser exploradas para produzirem resultados mais acurados do que os apresentados por (MUSSHOFF; HIRSCHAUER, 2010).

A Tabela 3 contém os hiperparâmetros adotados para cada algoritmo evolutivo, onde as siglas são: taxa de *crossover* = CR, taxa de mutação = M, coeficiente diferencial = F, coeficiente de inércia = ω , componente social = α_1 , componente cognitivo = α_2 , número de fonte de alimento artificial = SN, número de dimensões do problema = D, probabilidade de escolher da memória = PM, taxa de ajuste de passo mínimo = ppmin, taxa de ajuste de passo máximo = ppmax, taxa de aprendizado para o melhor elemento da matriz de covariância = c1, taxa de aprendizagem para a atualização rank-mu da matriz de covariância = cmu e tamanho inicial do passo = st.

Todos os experimentos destacados nas próximas seções foram comparados utilizados a Análise de Variância (ANOVA) e o teste da diferença significativa honesta Tukey, ou simplesmente Teste Tukey⁸.

⁶ Códigos compilados são eficientes e ágeis para computação de ponto flutuante.

⁷ Detalhes sobre o processo podem ser encontrado em: <<https://numba.pydata.org/>>

⁸ Mais detalhes sobre o Teste Tukey pode ser encontrado em Silva (2010).

Tabela 3 – Hiperparâmetros dos algoritmos testados

Algoritmo	Hiper-parametrização
BB-BC	$\beta = 0.3$ e $\gamma = 0.8$
SSA	$r_a = 1, p_c = 0.7, p_m = 0.1$
GA	CR = 0.95 (SBX), M = 0.05 (Uniforme), Seleção por Torneio.
PSO	$\omega = 0.72, \alpha_1 = 2.05, \alpha_2 = 2.05$
ABC	$limit = 0.5 \cdot SN \cdot D$
DE	CR = 0.95, F = 0.8, Variante = DE <i>best/1/exp</i>
IHS	PM = 0.95, ppmin = 0.35, ppmax = 0.99
SADE	Variante = <i>best/1/exp</i> , Variante Adaptativa = jDE
CMA-ES	c1 = 0.6, cmu = 0.6, st = 0.5

Fonte: O Autor

3.1.3.1 Experimento I

O teste da metodologia possui como *benchmark* os resultados apresentados em [Musshoff e Hirschauer \(2010\)](#), doravante Experimento I. A Tabela 4 contém as características da opção, onde K representa o valor de *strike* e todos os parâmetros são constantes no tempo, o ativo base segue um MGB padrão.

Tabela 4 – Características da Opção - Experimento I

Parâmetro	$V(t=0)$	K	σ	δ	r	T	Δt
Valor	110	100	20%	6%	6%	5	1
Unidade	\$	\$	a.a.	a.a.	a.a.	Anos	Anos

Fonte: [Musshoff e Hirschauer \(2010\)](#)

Os valores os para o gatilho de exercício (V^*) em cada instante de tempo e o valor da opção são baseados no trabalho de [Musshoff e Hirschauer \(2010\)](#) considerando o método binomial (*benchmark*), GA (doravante, Binomial-Musshoff e GA-Musshoff respectivamente) e pela abordagem de Bjerksund and Stensland (B&S) são apresentadas na Tabela 5. O método Binomial foi considerado como *benchmark*.

Os parâmetros das simulações foram mantidos nas mesmas condições do trabalho de referência: 50000 execuções da SMC para o MGB seguindo o esquema de discretização exata (independe do tamanho do Δt), conforme Eq. (3.4), onde $N(0, 1)$ representa uma Normal padrão. A hiperparametrização considerada já foi apresentada na Tabela 3. Vale ressaltar que todos os experimentos foram repetidos 100 vezes, com o total de 30 iterações e inicialização com o mesmo conjunto de soluções iniciais para todas as metaheurísticas.

$$V_{t+\Delta t} = V_t \cdot e^{(r-\delta-\sigma^2/2)\cdot\Delta t+\sigma\cdot\sqrt{\Delta t}\cdot N(0,1)} \quad (3.4)$$

Tabela 5 – Valor da opção e V^* para a opção descrita na Tabela 4

Tempo	Binomial- Musshoff	GA Musshoff	B&S
Caminho crítico - V^*			
0	145.27	144.57	152.82
1	142.50	140.69	152.82
2	138.96	134.24	152.82
3	133.56	128.59	146.04
4	125.11	121.94	146.04
5	100.00	100.00	100.00
Valor da opção			
	19.86	19.67	20.05

Fonte: [Musshoff e Hirschauer \(2010\)](#)

3.1.3.2 Experimento II

Para complementar os resultados apresentados, testou-se a metodologia deste trabalho, combinação da SMC + metaheurística de otimização, para as opções cujos valores são reportados apresentados por [Company, Egorova e Jódar \(2016\)](#), doravante Experimento II.

O Experimento II, análogo ao Experimento I, continua com adoção do MGB para modelagem de incerteza e avaliando uma opção de compra americana. Enquanto a parametrização da opção segue $\alpha = \pi = 0.03$, $\sigma = 0.4$, $T = 0.5$, $K = 100$, $r = 0.03$, $\Delta t = [0.005]$ e $V(t = 0) = [70, 80, 90, 100, 110, 120]$. Os resultados para o valor da opção no método binomial com $\Delta t = 3.3 \cdot 10^{-5}$, *benchmark*, para o método das diferenças finitas (FD) com $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$, são apresentados na Tabela 6. Para tal experimento foi considerada 50000 execuções da SMC para o MGB.

Tabela 6 – Valores *benchmark* para Experimento II

$V(t = 0)$	CRR	FD
70	1.1458	1.1459
80	3.0415	3.0414
90	6.3287	6.3285
100	11.1084	11.1066
110	17.2667	17.2664
120	24.5650	24.5654

Fonte adaptada: [Company, Egorova e Jódar \(2016\)](#)

3.1.3.3 Métodos de Avaliação

Para avaliar o desempenho de todos os métodos de otimização e combinações de codificação para os candidatos, foi considerado o *Mean Squared Error* (MSE) dado na

Eq. (3.5), onde N representa o número de observações, Y_i o valor real para o problema e \tilde{Y}_i o valor encontrado pelo método. Além disso, foram considerados a Análise de Variância (ANOVA) e o teste de significância honesta de Tukey ou simplesmente Teste de Tukey, considerando 95% de significância.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \tilde{Y}_i) \quad (3.5)$$

3.2 AVALIAÇÃO PROJETO FOTOVOLTAICOS

Esta seção descreve a metodologia e os dados considerados para a modelagem do problema de avaliar a viabilidade e o *timing*, via TOR, de investimentos fotovoltaicos residenciais, doravante PV, considerando o cenário onde o agente possui flexibilidade gerencial para decidir o momento de investir, se inicia o projeto parcialmente ou ainda se aguarda com o CAPEX aplicado em um ativo de risco, considerando ainda que a inexistência de mercado secundário para o PV, implicando na irreversibilidade dessa decisão.

Para esta análise foram consideradas como incertezas o preço da energia elétrica e o índice IVVB11 como ativo de risco, o IVVB11 é um *Exchange-traded fund* (ETF) que busca refletir a performance, antes das taxas e despesas, do Índice S&P 500 em reais (S&P 500 Brazilian Real Index). Ou seja, é um fundo de gestão passivo tendo em vista que replica uma carteira teórica de um índice do mercado. A escolha do mesmo ocorre devido a este ser uma forma de realizar investimentos em outros países sem necessariamente retirar o dinheiro no Brasil, sendo também considerado uma carteira com otimizada e com boa diversificação.

Aprofundando nas opções mencionadas anteriormente, foi analisado o caso onde o agente precisar tomar a decisão de investir ou não no sistema em um sistema fotovoltaico, considerando a legislação vigente, sendo que a instalação do sistema fotovoltaico pode ser realizada de forma parcial ou total, onde total refere-se a instalação solar capaz de suprir o consumo elétrico na totalidade (balanço entre produzido e consumido seja o mais próximo de 0 ao longo do ano) e parcial refere-se a instalação que supra 50% do seu consumo atual.

O Prosumidor, como já mencionado anteriormente, é um neologismo criado com a junção dos termos produtor e consumidor, sendo uma referência no setor elétrico para as pessoas que consomem e produzem energia elétrica. Ao longo deste trabalho será utilizado o termo prosumidor como representação do agente decisor. Ou seja, toda vez que o termo for utilizado, o mesmo faz referência ao agente que deseja instalar um sistema fotovoltaico e tomar proveito do sistema de compensação brasileiro.

Além dessas opções, o fato de investir parcialmente ou adiar a decisão gera mais opções, sendo estas relacionadas a alocação do CAPEX no ativo de risco. Neste caso, enquanto o agente aguarda para investir no projeto PV o CAPEX pode ser alocado no

investimento de risco, a alocação pode ser total ou parcial dependendo das decisões tomadas anteriormente. Ou seja, este modelo de TOR pode ser interpretado como um modelo de portfólio de opções reais interdependentes, mostrado em [Maier, Pflug e Polak \(2019\)](#), onde podemos transitar entre os estados como forma de mitigar o dispêndio total. Um paralelo pode ser feito com o trabalho de [\(BRANDÃO; FERNANDES; DYER, 2018\)](#), pois, algumas opções só passam a existir caso outra opção tenha sido exercida previamente.

A Figura 12 mostra a estrutura de decisão adotada no trabalho. Observe a estrutura de um problema multidimensional com composição de decisão multinível, onde cada estado permite a transição para outro. O Estado 1 representa o investimento no PV que supra 100% do consumo do agente, o Estado 2 representa a decisão de investir no projeto de PV parcialmente, enquanto o Estado 3 representa o investimento do CAPEX no ativo de risco. O Asterisco na imagem, marcação referente ao Estado 3, indica que existe mais um gatilho, sendo este vinculado ao IVVB11, e que não foi exibido na imagem. O esquema de decisão é descrito conforme as seguintes premissas:

Premissa 1. *Observe que o Estado 1 é um nó terminal (estado absorvente) quando esta opção é exercida é impossível de sair, indicando que não mais opções que possam ser exercidas, ou seja, irreversibilidade do investimento. A irreversibilidade também é aplicada ao Estado 2.*

Premissa 2. *Uma vez o estado qualquer ativado, o mesmo não pode ser ativado novamente. Exemplo, Caso o Estado 2 seja ativado/exercido em t^* , considerando a irreversibilidade, uma nova eventual ativação em $t^* + \Delta t$ será interpretado como não realizar nada e continuar com as decisões já tomadas. Exemplo, seja a sequência de decisões: *Início* \rightarrow Estado 2 \rightarrow Estado 3 \rightarrow Estado 2 \rightarrow *Inacabado* é equivalente a *Início* \rightarrow Estado 2 \rightarrow Estado 3 \rightarrow *Inacabado*.*

Premissa 3. *Os Estados 1 e 3 são diretamente incomunicáveis. Assim, o prosumidor precisa sair do investimento em IVVB11 e investir em meio PV para posteriormente concluir o processo ou aguardar a uma taxa livre de risco até investir em um PV completo. Em outras palavras, o Estado 2 necessita ser ativado entre os Estados 3 e 1 ou ser exercido previamente para que o prosumidor, mantendo a consonância com a Promissa 2.*

Premissa 4. *Embora a Figura 12 comece no Estado 4, é possível através das etapas de otimização que a lógica de decisão indique o exercício imediato em qualquer estado em $t = 0$.*

Premissa 5. *A sequência da decisão: *Início* \rightarrow Estado 2 \rightarrow Estado 3 \rightarrow *Abandono* é diferente de *Início* \rightarrow Estado 3 \rightarrow Estado 2 \rightarrow *Inacabado*. No primeiro, o modelo considerará que 50% do CAPEX será alocado em IVVB11 até o horizonte de tempo, enquanto no segundo o valor residual do CAPEX será alocado a uma taxa livre de risco.*

Adicionalmente, o Estado 4 é atingível entre a transição do Estado 2 \rightarrow Estado 3 ou vice-versa mantendo a mesma lógica de decisão.

Todos as possíveis decisões, considerando as premissas supracitadas, são:

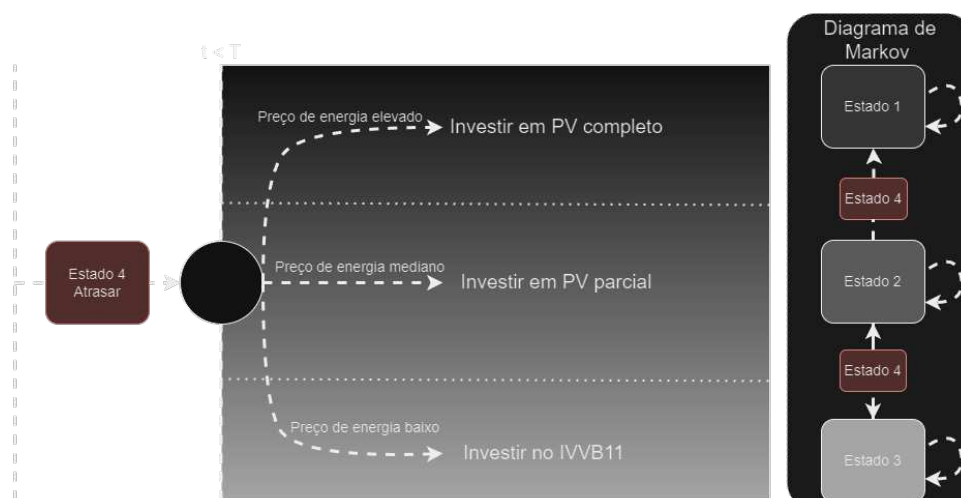
1. Início \rightarrow Estado 1 \rightarrow Acabado;
2. Início \rightarrow Estado 2 \rightarrow Inacabado;
3. Início \rightarrow Estado 3 \rightarrow Abandono;
4. Início \rightarrow Estado 2 \rightarrow Estado 1 \rightarrow Acabado;
5. Início \rightarrow Estado 2 \rightarrow Estado 3 \rightarrow Abandono;
6. Início \rightarrow Estado 3 \rightarrow Estado 2 \rightarrow Inacabado;
7. Início \rightarrow Estado 2 \rightarrow Estado 3 \rightarrow Estado 1 \rightarrow Acabado;
8. Início \rightarrow Estado 3 \rightarrow Estado 2 \rightarrow Estado 1 \rightarrow Acabado;

Os termos em vermelho acima indicam o fim da etapa de decisão e fornecem a situação do projeto PV, enquanto as setas indicam o fluxo de decisão e conseqüentemente o Estado 4. Em outras palavras, o modelo proposto deverá otimizar os momentos (*timing*) onde cada decisão deverá ser exercida buscando a minimização dos dispêndios com energia elétrica. Note que o esquema de decisão implica que o exercício da opção de ir para o Estado 3 ocorre apenas quando os preços da energia caem, indicando um relação de preferência pelo projeto solar ao investimento de risco, essa abordagem foi considerada para simplificar o modelo de decisão.

A configuração deste modelo de TOR considera flexibilidades nas múltiplas camadas de decisão, onde o agente pode i) adiar a decisão, ii) investir em 50% do projeto fotovoltaico, iii) adiar com remuneração acima a taxa livre de risco, iv) combinações dessas opções e v) investir no projeto de PV completamente. Assim, a combinação de incertezas possibilita capturar o valor da flexibilidade gerencial em instalações de sistemas fotovoltaicos e considerar que a postergação pode remunerar acima da taxa livre de risco é factível, estritamente próxima de aplicações reais onde o dinheiro para projetos está sempre sendo capitalizado.

A Figura 13 apresenta o fluxograma desta etapa do trabalho. O primeiro passo consiste em obter os dados relacionados ao projeto, selecionar o modelo estocástico com base nas características dos dados e estimar os respectivos parâmetros para gerar os caminhos pela SMC. A segunda etapa consiste em gerar uma população inicial com valores

Figura 12 – Esquema de decisão do problema



Fonte: O Autor

aleatórios para os gatilhos, a modelagem do fluxo de caixa, gerando o esquema de decisão⁹, codificando os gatilhos em forma de vetor e evoluindo (otimizando) essa população. Na etapa 3 ocorre a avaliação final da melhor solução encontrada na evolução considerando um novo conjunto de caminhos simulados.

As seções que seguem são destinadas a explicar as etapas, introduzir conceitos e apresentar valores considerados neste projeto, sendo as mesmas subdivididas conforme o fluxograma apresentado na Figura 13 em: Passo 1 nas Seções 3.2.1 com uma descrição sobre alguns conceitos relacionados ao dimensionamento de sistemas solares, a Seção 3.2.2 comentando sobre os parâmetros relacionados ao projeto solar considerado na análise e na Seção 3.2.3 descrevendo os dados considerados e os passos adotados para a modelagem das incertezas do projeto.

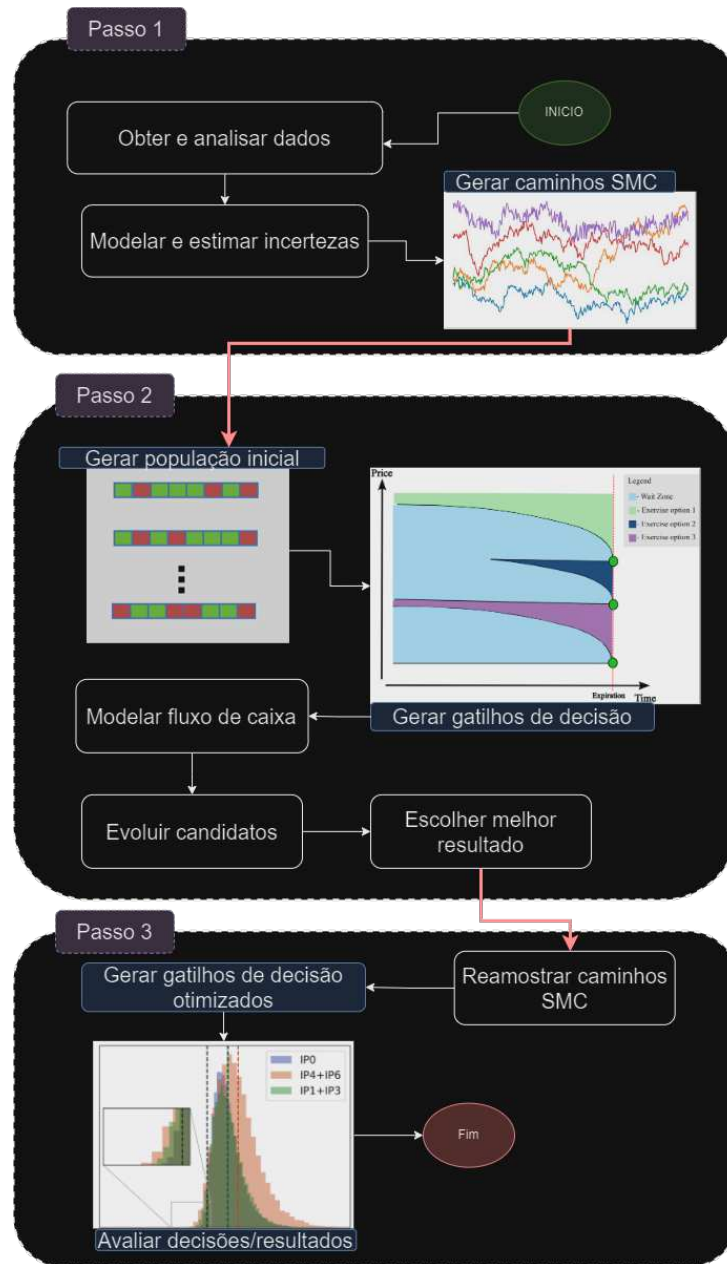
O Passo 2 é descrito ao longa da Seção 3.2.4 com a metodologia para codificar a regra de decisão na forma de vetor para a otimização via abordagem evolucionista, a Seção 3.2.5 contendo a modelagem do fluxo de caixa das opções e da Seção 3.2.6 contendo a lógica de programação considerada neste trabalho.

3.2.1 Dimensionamento do sistema fotovoltaico residencial

Considerando a proposta desse trabalho de valorar e identificar os momentos ótimos para investimento em um sistema fotovoltaico *on-grid* é importante ser entendido como é realizado o dimensionamento do sistema de geração (capacidade de geração). Ressalta-se que os detalhes pertinentes as engenharias civil e elétrica estão previamente satisfeitos (ex: esquema de ligação dos módulos, número de painéis, tamanho do inversor,

⁹ Os gatilhos (etapa 2) representam o esquema de decisão do modelo proposto, onde a cor azul claro define a zona de espera, enquanto as outras cores representam as zonas de exercício para outras decisões.

Figura 13 – Fluxograma das etapas de avaliação do projeto fotovoltaico



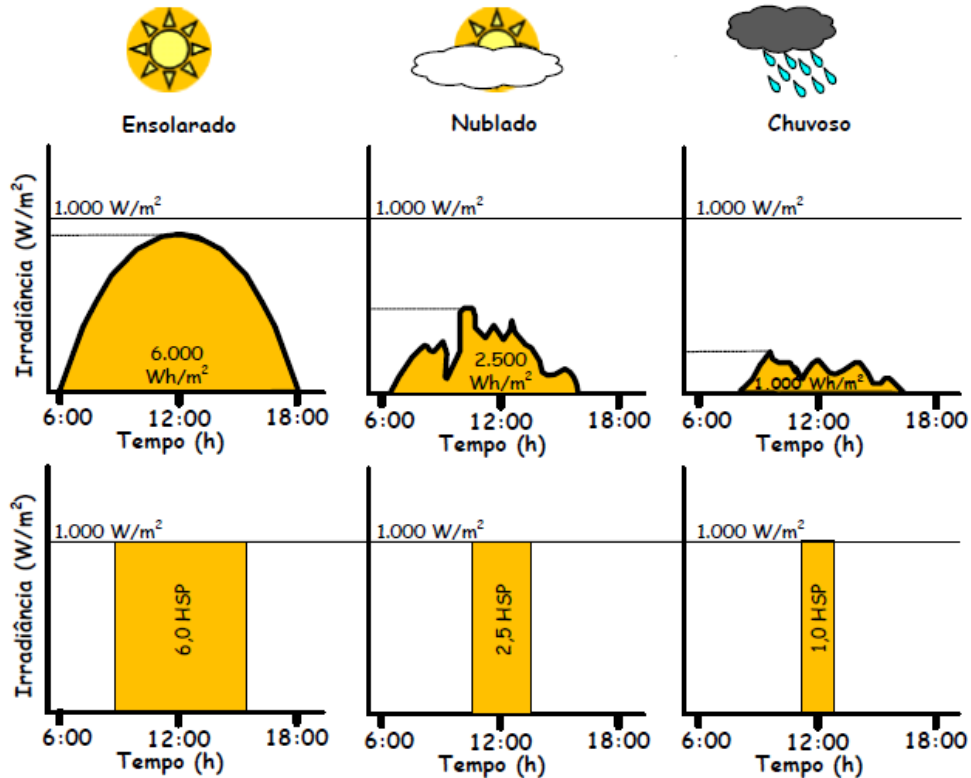
Fonte: O Autor

orientação, estruturas de apoio, etc.).

O primeiro passo para o dimensionamento é a avaliação do recurso solar disponível com base na localização. Assim, definido o local a ser instalado, diversos sites na internet¹⁰ fornecem as medidas para a irradiância solar média, medida em ($kWh/m^2.dia$), que são diretamente convertidos em Horas de Sol Pleno (*HSP*), que reflete o número de horas em que a irradiância solar é constante e igual a $1 kWh/m^2$, simplificando os cálculos. A Figura 14 ilustra tal conversão.

Posteriormente a este passo pode-se calcular o tamanho do sistema pela Eq. (3.6),

¹⁰ Exemplo: CRESESB SunData no *link*: <<http://www.cresesb.cepel.br/index.php?section=sundata&>>

Figura 14 – Exemplo de perfis de radiação e valores respectivos em *HSP*

Fonte: [Pinho e Galdino \(2014\)](#)

onde P_s representa a potência em kiloWatt-pico (kWp), E o consumo médio diário do local em kWh/dia , HSP_m a média de HSP do local e TD a taxa de desempenho do sistema.

$$P_s = \frac{E}{HSP_m * TD} \quad (3.6)$$

Existem divergências entre os autores sobre os valores de TD , pois, tal valor depende da temperatura das placas e do ambiente, pela tecnologia empregada no sistema e pela existência de sombras, etc., mas a recomendação é que para o Brasil o TD varie entre 70% e 80% ([PINHO; GALDINO, 2014](#)).

O dimensionamento correto do TD pode ser feito em *softwares* especializados neste tipo de aplicação, além de mensurar a quantidade de placas ligadas em série e paralelo, sendo recomendados para casos de grandes Usinas Solares. Todos os cálculos relacionados ao dimensionamento são feitos via implementação do próprio autor.

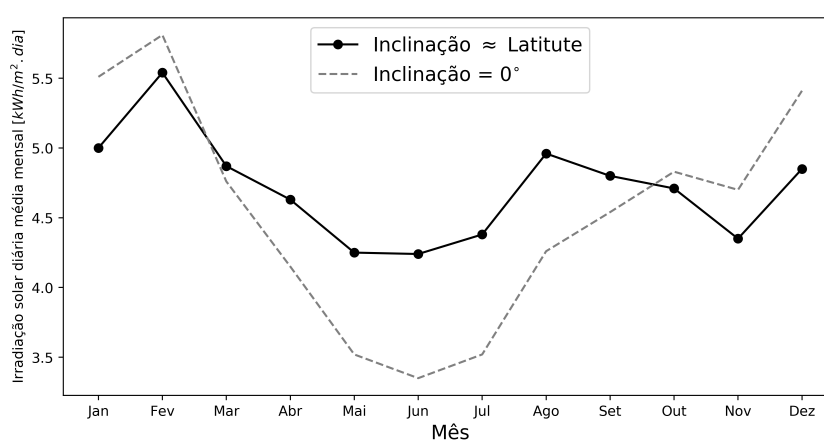
3.2.2 Parâmetros do projeto Solar

Neste trabalho foi considerado um sistema solar para um cliente residência com consumo mensal médio de 360 kWh , no sistema monofásico (com disponibilidade mínima

de 30kWh¹¹), cujo sistema a ser instalado encontra-se, atualmente, na cidade de Juiz de Fora sob a cobertura da companhia Cemig Distribuição.

Seguindo a metodologia apresentada na seção 3.2.1 e considerando os valores obtidos para incidência solarimétrica no local escolhido¹², tendo inclinação de igual à latitude escolhida e com o sistema voltado para o norte geográfico do planeta. A inclinação de sistema fotovoltaico próximo à latitude do local de instalação objetiva a redução na diferença de irradiância entre os meses de máxima e mínima, conforme exibido na Figura 15, o que se reflete em um sistema de produção com menor oscilação.

Figura 15 – Série mensal de irradiância solar



Fonte adaptada: [Cresesb SunData](#)

A mediana para a inclinação aproximada de 22° é de 4.701 [kWh/m².dia] ou HSP . Assim, considerando a Eq. (3.6) com $E = (360 - 30)/30 = 11$, $HSP_m = 4.705$ e $TD = 0.75$, tem-se o requerimento de um sistema solar com capacidade de 3.40kWp. Note que a produção acima do nível consumo não traria ganhos ao agente, dada a ausência de remuneração pela energia excedente ao consumo no *net metering* brasileiro.

Considerando os preços ao consumidor final de 4390.00 R\$/Wp apresentados em (GREENER, 2023), temos o CAPEX de R\$ 14926.0. No intuito de complementar e tal valor buscou-se a verificação dos preços praticados no mercado para o cliente final via empresas do setor que disponibilizam o orçamento do projeto via simulador fotovoltaico *online*.

A confirmação para o valor de CAPEX supracitado foi feita através consultas sobre preços de sistemas fotovoltaicos no site da empresa NeoSolar¹³ e da FAS ENERGIA SOLAR¹⁴.¹⁵

¹¹ Consumo mínimo para a unidade consumidora, sendo 50 e 100 kWh para sistemas bifásicos e trifásicos, respectivamente

¹² Dados obtidos no [Cresesb SunData](#) para Latitude: 21.801° Sul e Longitude: 43.349° Oeste

¹³ *link*: <<https://www.neosolar.com.br/simulador-solar-calculadora-fotovoltaica>>

¹⁴ *link*: <<https://fasenergiasolar.com.br/simulador/>>

¹⁵ Uma rotina computacional foi desenvolvida para extração de dados sobre sistemas fotovol-

Os valores coletados apresentaram como CAPEX um range de valores que varia entre R\$ 13,009.45 a R\$ 18,584.92 na NeoSolar e de R\$ 15,600.00 na FAS ENERGIA SOLAR. Reforçando o valor apresentado em (GREENER, 2023). Portanto, um sistema para suprir a demanda energética de um agente que consome, em média, 360 kWh está orçado em CAPEX = R\$ 14,926.30. Já os custos de manutenção ou *Operational Expenditure* (OPEX) foram fixados em 1% a.a. do valor do CAPEX, conforme (Esteves; Leite, 2017), enquanto a taxa de degradação dos módulos em 1% a.a..

A Tabela 7 apresenta as variáveis macro necessárias para modelar o sistema fotovoltaico e os parâmetros considerados no modelo de decisão. Observe que o modelo tinha um limite de tempo para decidir, enquanto o horizonte de tempo de avaliação é maior. Essa escolha decorre devido a Projeto de Lei 1917/2015 que dispõe sobre o ingresso dos pequenos em médios consumidores para o Mercado Livre de Energia¹⁶ a partir de 2027 (BRASIL, 2015). Caso aprovado, a dinâmica de decisão e preços mudará de forma significativa. Portanto, consideramos 60 meses um horizonte de decisão consistente para preservar a decisão lógica apresentada neste trabalho, enquanto 20 anos é a vida útil de um projeto solar.

Ressaltamos que geralmente adota-se a SELIC¹⁷ como a taxa livre de risco padrão. No entanto, o valor atual está próximo de 13% a.a., um valor alto para usar na modelagem de investimentos. Portanto, consideramos 6% a.a. um valor plausível para adotar. A elegibilidade deste valor pode ser verificada na comparação com a SELIC ao longo de 2018 até março/22, período no qual a média era de 4.86%.

Para efeitos mais realistas no modelo, foi simulado a produção de energia para cada instante de tempo da análise e considerando a degradação temporal das células fotovoltaicas. Quando a discretização temporal for menor que 1 mês, os pontos interiores são interpolados via Polinômio de Lagrange.

3.2.3 Dados utilizados e modelagem de Incerteza

Em continuidade a análise da possibilidade de investimento na geração de energia elétrica a partir do sol e na prerrogativa que o agente pode deferir o tal investimento e aplicar o CAPEX na carteira de mercado problema, considerou-se como incerteza inicial:

taicos na NeoSolar, permitindo a coleta de valores dentro de intervalo de interesse. Códigos e dados obtidos disponíveis em <https://github.com/igormsleite/data_code_get_solar>

¹⁶ O Mercado Livre de Energia é um ambiente de negociação de energia elétrica no Brasil onde os participantes podem negociar livremente (pouco intervenção, baseados na lei de oferta e demanda) todas as condições comerciais do acordo, como fornecedor, preço, quantidade de energia contratada, período de suprimento, pagamento, entre outras.

¹⁷ A SELIC é a taxa básica de juros da economia, sendo está o mecanismo com o qual o Banco Central do Brasil utiliza para controlar a inflação no país.

¹⁸ Disponível em <http://www.cresesb.cepel.br/index.php?section=sundata&> para Latitude -21.776050 e Longitude -43.372474)

¹⁹ Disponível em: <<https://portalrelatorios.aneel.gov.br/luznatarifa/basestarifas#!>>

Tabela 7 – Parâmetros macro para o modelo de avaliação fotovoltaico

Parameter	Value	Notations	Resources
Risk-Free (rf)	6%	a.a.	*
Horizonte de Decisão (t_h)	60	meses	*
Horizonte Total de Tempo (T)	240	meses	*
Número de simulações	50000	*	*
Discretização Temporal (Δt)	0.25	*	*
PV Performance Rate (rt)	75%	*	*
Incidência Solarimétrica	4.755	KWh/m ² · dia	* ¹⁸
Consumo Médio (AC)	360	KWh/m	*
CAPEX	14,926.30	R \$	(GREENER, 2023)
OPEX	1%	a.a.	(ESTEVEZ; LEITE, 2017)
Degradação da Célula Fotovoltaica (cf)	1%	a.a.	*
Fio B em Minas Gerais	26%	*	ANEEL ¹⁹
Start time (t0)	02-2023	*	*

Fonte: O Autor

o valor pago pelo agente sobre o preço da energia elétrica (ee). Os dados históricos do preço da energia elétrica foram obtidos na ANEEL (ANEEL, 2022) (agência reguladora) a partir de dados sobre a CEMIG-D e classe de consumo B1 (residencial). Já o Yahoo Finance²⁰ foi a fonte de dados para o IVVB11 e IBOVESPA. Todos os dados foram coletados a partir de 01-2010 até 01-2023 com frequência mensal para o IBOVESPA e entre 05-2014 até 01-2023 para o IVVB11, todos os valores são deflacionados pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA)²¹.

3.2.3.1 Identificação dos processos estocásticos

No intuito de contrapor as situações onde apenas os aspectos intuitivos dos agentes regem, a Figura 16 apresenta as diretrizes adotadas neste trabalho objetivando a identificação do processo estocástico mais aderente aos dados analisados, complementando a abordagem apresentada por Bastian-Pinto et al. (2021).

A descrição destes passos busca incluir mais fatores de incertezas, aos modelos-base, MGB e MRM. Inicialmente verifica-se na distribuição dos retornos os eventos que estão fora do limite composto por média $\pm 2 \times$ desvios. Assim, pode-se inferir as situações onde ocorram *jumps* ao longo das observações.

Posteriormente, os testes de raiz unitária buscam identificar presença de estacionariedade, enquanto o Teste da razão de variância mede o nível para o qual a variância de uma série cresce com a defasagem temporal, o teste é descrito pela Eq. (3.7), onde $Var(\cdot)$ representa a variância das séries de diferenças entre preços, com retardo de k períodos. Caso R_k aponte uma convergência para 1 com o aumento de k indica o comportamento de um MGB. Por outro lado, a presença de reversão à média é caracterizada pelo decai-

²⁰ <https://finance.yahoo.com/>

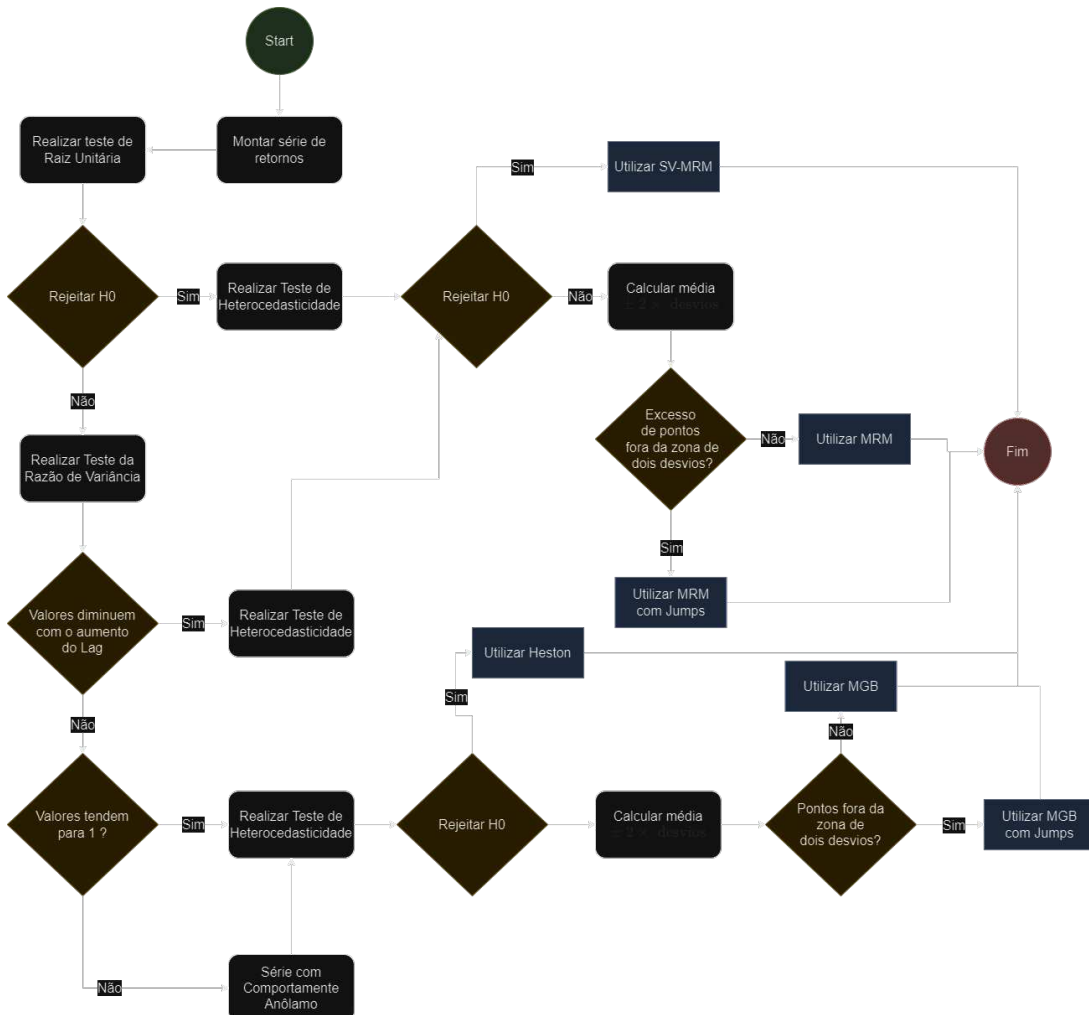
²¹ Dados relacionados a IPCA podem ser obtidos em: <http://www.ipeadata.gov.br/>

mento de R_k com o aumento da defasagem, indicando que as flutuações nos preços não são permanentes e reverts a um nível de equilíbrio.

Voltando a Figura 16, o teste de heterocedasticidades busca indicar a presença de flutuação na volatilidade (volatilidade não constante no tempo), servindo indicador uma adequação ao modelo de volatilidade estocástica ou para modelos com mais variáveis em casos mais complexos. Para o teste de heterocedasticidades foi considerada a regressão do logaritmo dos preços \times retorno.

$$R_k = \frac{1}{k} \cdot \frac{Var(P_{t+k} - P_t)}{Var(P_{t+1} - P_t)} \quad (3.7)$$

Figura 16 – Metodologia adotada para identificação do processo estocástico



Fonte: O Autor

Apesar de ser um tema pouco explorado, essa abordagem corrobora e fornece subsídios para o avanço na modelagem de incertezas para as opções reais, haja vista o impulso na melhor adequação do modelo aos dados históricos já observado na literatura para opções financeiras e pouco explorada para opções reais, um exemplo pode ser observado nos

modelos apresentados em [Scarcioffolo, Perobelli e Chimeli \(2018\)](#) que utiliza *dummies* para modelar sazonalidade.

Uma hipótese para a baixa adesão de modelos mais sofisticados para opções é a dificuldade de estimação dos parâmetros destes modelos, uma vez que processos estocásticos mais complexos dependem da existência de contratos e opções futuras em negociação para otimização dos parâmetros ([MAROTTA, 2011](#)). Tal suposição nem sempre é observado nas séries para opções reais²², requerendo esforço adicional a modelagem.

3.2.3.2 *Dados Energia Elétrica*

A Figura 17 exibe a evolução das tarifas de eletricidade e suas respectivas bandeiras (que estão incorporadas nos preços) em Minas Gerais. Destacam-se as mudanças rápidas e a transição no regime de compensação da tarifa elétrica. A volatilidade não permanece constante, sendo evidente uma baixa dispersão nos estágios iniciais, seguida de uma queda abrupta com o início do sistema de bandeiras.

A hipótese central do comportamento oscilatório decorre do tipo de regulação política no Brasil. Observe que entre 2010 e 2016, o Brasil foi um estado intervencionista que manipulou os preços para mitigar o impacto na população²³.

Em outras palavras, um paralelo entre as flutuações de preços e a orientação ideológica dos presidentes em exercício é possível de ser feito. Entre 2010 e 2015, o viés governamental é de maior controle/intervenção do Estado sobre as atividades. Meses após o 1º sistema de bandeiras ser implementado, o presidente brasileiro foi deposto e seu sucessor possuía um viés de menor intervenção do estado, mantendo essa linha até o final de 2022. Atualmente, hoje o regresso de um presidente que apoia a maior intervenção do Estado, então podemos que alguma indução pode ocorrer nos próximos anos. Todavia, vale ressaltar, o viés não é o único responsável pela flutuação nos preços.

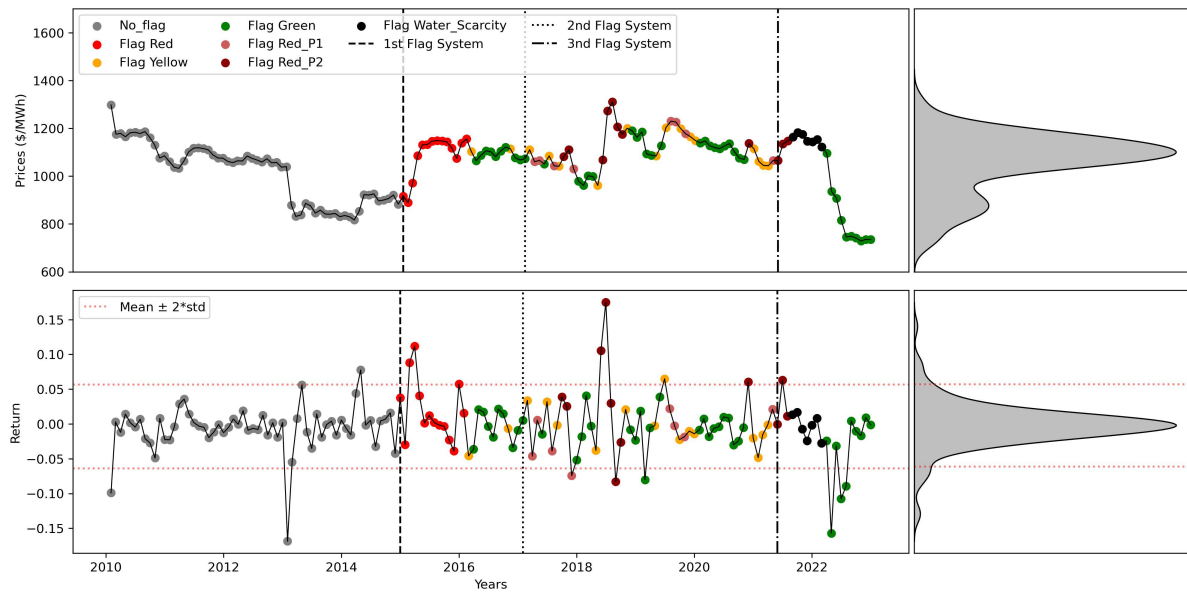
Com base no mencionado anteriormente e observando o retorno na Figura 17 é notório que há um espalhamento no padrão de retorno (dispersão), podendo inferir sobre uma volatilidade não constante no retorno. Tal inferência advém da observação dos momentos anteriores ao sistema de bandeiras ser implementado e posteriormente ao mesmo, onde analisando a dispersão dos retornos, percebe-se zonas de volatilidades distintas, que variam entre 2010 e 2016, 2016 até meados de 2020 e de 2021 até 2023.

A análise dos dados sobre a tarifa de energia elétrica começa com o teste de normalidade indicando a rejeição do mesmo, tanto no teste de Shapiro-Wilk quanto no teste de Kolmogorov-Smirnov a qualquer nível de confiança. Ao considerar a remoção dos

²² Onde os agentes físicos, nem sempre possui acesso à negociação de valores futuros

²³ Conforme pode ser observado em reportagem de [Barros \(2017\)](#), disponível em: <https://g1.globo.com/hora1/noticia/2017/02/divida-bilionaria-do-governo-provoca-aumento-nas-contas-de-luz-no-pais.html>

Figura 17 – Evolução do preço da energia elétrica em Minas Gerais

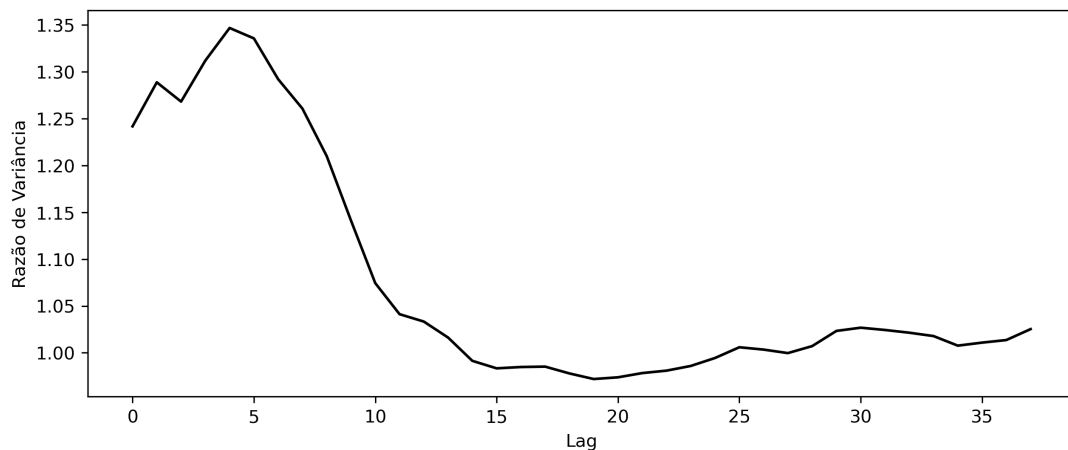


Fonte: O Autor

outliers (pontos fora do intervalo da média ± 2 desvios, apenas o teste de Shapiro-Wilk indica a normalidade no retorno com nível de confiança de 95% e a rejeição em 99%, sugerindo uma situação limítrofe.

Seguindo os passos introduzidos na Figura 16, o Teste de Raiz Unitária (testes de Dickey-Fuller aumentados e Phillips-Perron) indicaram a presença de raiz unitária, enquanto o teste de razão de variância tende para 1 com o aumento da defasagem, conforme Figura 18.

Figura 18 – Evolução da razão de variância para a energia elétrica



Fonte: O Autor

Por fim, os testes de White e Breusch-Pagan retornam um resultado positivo para a presença de heterocedasticidade, considerando 95% de significância. Com esses resultados a recomendação de processo estocástico é o modelo de Heston, como forma de modelar a volatilidade não constante no tempo, conforme a Eq.(3.8) já na forma discreta, onde ee

representa o preço da energia simulada. Todavia, como forma a complementar a análise, também foi considerando o MGB com *jumps*, conforme Eq.(3.9) já discretizada, para modelar a série de preços, sendo possível comparar o impacto da diferença na modelagem estocástica, onde μ é uma distribuição uniforme [0,1].

$$\begin{aligned}
v_{t+\Delta t} &= f_1(v_t) + \eta(\bar{v} - f_2(v_t))\Delta t + \sigma_v \sqrt{f_3(v_t)} \cdot \Delta t \cdot N_1(0, 1) \\
\phi &= \sqrt{\Delta t \cdot v_{t+\Delta t}} \left(\rho \cdot N_1(0, 1) + (1 - \rho^2) \cdot N_2(0, 1) \right) \\
A &= (\alpha - \pi_{ee} - v_{t+\Delta t}/2)\Delta t + \phi \\
ee_{t+\Delta t} &= ee_t \cdot \text{EXP}(A)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Conforme já explicado anteriormente, o modelo de Heston depende da calibração de cinco parâmetros. [Leite, Yamim e Fonseca \(2021\)](#) mostraram a dificuldade em estimar os parâmetros com base em apenas uma série temporal, sem uma data auxiliar para inferir no caso de volatilidades ou situação de volatilidades desconhecidas. No caso brasileiro, um prosumidor padrão não possui acesso a outros dados de mercado (como contratos futuros ou derivativos), sendo o acesso restrito às comercializadoras de energia elétrica que operam no chamado mercado livre de energia.

Considerando que as distribuidoras (como a própria CEMIG) participam das negociações no mercado livre, comprando e vendendo energia em tempo futuro, a inferência de correlação entre os preços negociados no livre mercado e os preços ao consumidor final é factível, possibilitando utilizar tais dados como uma *proxy*. Todavia, esse ambiente é velado para clientes para residenciais, sendo que tais negociações fazem parte da estratégia de precificação das empresas elétricas²⁴. Para esta situação, onde o prosumidor possui acesso apenas a série de energia elétrica, os principais modelos de calibração são i) baseados na abordagem de redes neurais (DeepONet), ii) baseados em Markov Chain Monte Carlo (MCMC) e iii) baseados no GARCH, mais especificamente o GJR-GARCH, discutido na Seção 2.1.1.5.

No intuito do melhor aproveitamento do trabalho do Autor em ([LEITE; YAMIM; FONSECA, 2021](#)), foi considerado que a estimação do parâmetro de tendência na parcela MGB de Heston e posteriormente feito o desconto do prêmio de risco (π_{ee}). O prêmio de risco foi calculado através do CAPM (*Capital Asset Pricing Model*), com $\beta = 1$, considerando o retorno da energia elétrica e como *proxy* do mercado o retorno do índice IBOVESPA.

²⁴ O Autor trabalha em uma comercializadora de Energia e possui acesso à mesa de negociação, mas o sigilo de acesso aos dados não permite com que os contratos futuros e opções sejam considerados para uma proxy

$$\begin{aligned}
A &= (\alpha - \pi_{ee} - \sigma/2)\Delta t + \sqrt{\Delta t} \cdot \sigma \cdot N(0, 1) \\
J &= \begin{cases} 0, & \text{se } p\Delta t + j\Delta t \leq \mu \leq 1 \\ \omega, & \text{se } j\Delta t < \mu \leq p\Delta t \\ \psi, & \text{caso contrário } 0 \leq \mu \leq j\Delta t \end{cases} \quad (3.9) \\
ee_{t+\Delta t} &= ee_t \cdot \text{EXP}(A + J)
\end{aligned}$$

A estimação de parâmetros seguindo a metodologia de MCMC²⁵ considerou como distribuição *a priori* a mesma utilizada em [Cape et al. \(2015\)](#). A abordagem de [Wang et al. \(2018\)](#)²⁶ também foi utilizada na estimação de parâmetros, mas sem sucesso devido a erros numéricos durante a execução do código. Detalhes sobre a abordagem utilizada em [Leite, Yamim e Fonseca \(2021\)](#) será abordada na Seção 4.2. A estimação via GARCH tem como base os valores apresentados na Figura 19, a mesma contém a regressão GJR-GARCH para a série de retornos deflacionados da energia elétrica.

A Tabela 8 sumariza os parâmetros utilizados para a modelagem do preço da energia elétrica, sendo ω a intensidade do salto positivo e p a sua probabilidade de ocorrência, ψ a intensidade do salto negativo com j a probabilidade de ocorrência. Analisando os parâmetros do modelo de Heston na Tabela 8 fica evidente a divergência obtida na abordagem baseada em MCMC para as demais, por tanto foi considerado como valor final a média dos parâmetros obtidos via GARCH e DeepONet. A hipótese para essa discrepância é fruto de uma falha na especificação da distribuição *a priori* das variáveis ou mesmo alguma falha de programação na implementação fornecida para o MCMC. O aprofundamento nesta metodologia não foi realizado devido a implementação do código fonte pertencer a terceiros e foi obtido contato com o autor original.

Analisando os valores obtidos para a calibração via MCMC na Tabela 8 e a relação fornecida pela Eq.2.12 é notável a possibilidade de existência de endogeneidade entre os principais parâmetros. Todavia, a relação entre os termos η e \bar{v} é notável, sendo esta uma hipótese para a alternância entre a magnitude dos valores entre estas duas variáveis.

3.2.3.3 Dados IVVB11

A Figura 20 apresenta a evolução do Índice IVVB11, sendo a queda em 2022 uma decorrência da interrupção contínua da cadeia de suprimentos que começou em 2020, o aumento da inflação, o atraso do Fed em iniciar seu programa de aperto de taxas na tentativa de conter a inflação, além de tensões geopolíticas, incluindo a guerra na Ucrânia,

²⁵ Uma versão do algoritmo está disponível em: <https://github.com/Imlerith/Jump-Diffusion-Calibrator>.

²⁶ Uma versão do algoritmo está disponível em: https://github.com/mac40/BEFD/blob/master/Project/Project_presentation.ipynb.

Tabela 8 – Parâmetros do modelo de Heston para Energia Elétrica (a.m.)

Modelo	Parâmetro	DeepONet	MCMC	GJR-GARCH	Final
Heston	α	0.0029	-0.0002	0.0036	0.0033
	η	0.8	0.035	0.99	0.895
	\bar{v}	0.0017	0.0347	0.0013	0.0015
	σ_v	0.0197	0.003	0.0221	0.0209
	ρ	-0.256	0.0068	-0.5623	-0.4092
MGB + jumps	ω		11.52%		
	ψ		12.80%		
	j		3.29%		
	p		2.63%		
	α		0.0031		
	σ		0.035637		
Geral	X_0		734.65 \$/MWh		
	v_0		0		
	π_{ee}		0.19%		

Fonte: O Autor

e o aumento de casos de COVID na China combinadas com incertezas sobre as relações Taiwan (WANG, 2022).

A modelagem do IVVB11 seguiu os mesmos passos descritos na Seção 3.2.3.1, mas os retornos indicam a presença de raiz unitária, todavia, o teste da razão tende para 1 com o aumento da defasagem, conforme observado na Figura 21, sendo está uma evidência de para a modelagem considerando um MGB.

Os testes de heterocedasticidade não detectaram a presença da mesma, indicando a homocedasticidade da regressão para o IVVB11, resultado este valido tanto o teste de White quanto no Teste de Breusch-Pagan. A série de retornos do IVVB11 apresentam 4 pontos que estão fora do intervalo da média $\pm 2 * \text{desvios}$, todavia como tais pontos representam menos de 4% do total de observações, optou-se por considerar a inexistência de saltos. A versão discretizada para o GBM já foi apresentada na Eq. (3.4).

A título de curiosidade, apesar de a modelagem para os preços IVVB11 ser o MGB, um ponto que chamou a atenção ocorre quando é feita a modelagem da série de retornos do IVVB11 como um MRM. No momento da análise da regressão linear para estimação dos parâmetros é realizada encontra-se o coeficiente de regressão < -1 , conforme Figura 22. Segundo Miller (2012)[Cap.9, pg. 203-204] e Dias (2015)[Cap.16, pg. 123], tal resultado indica um *overshooting*, onde o sistema é instável e incomum, não sendo adotado em aplicações práticas.

O *overshooting* faz ocorrer problemas na estimação de parâmetros do MRM, resultando em valores anômalos e problemas numéricos. Analisando em termos conceituais, quanto mais inclinada negativamente a regressão, mais intenso é o comportamento, então

Figura 19 – Regressão GJR-GARCH para o preço da energia elétrica

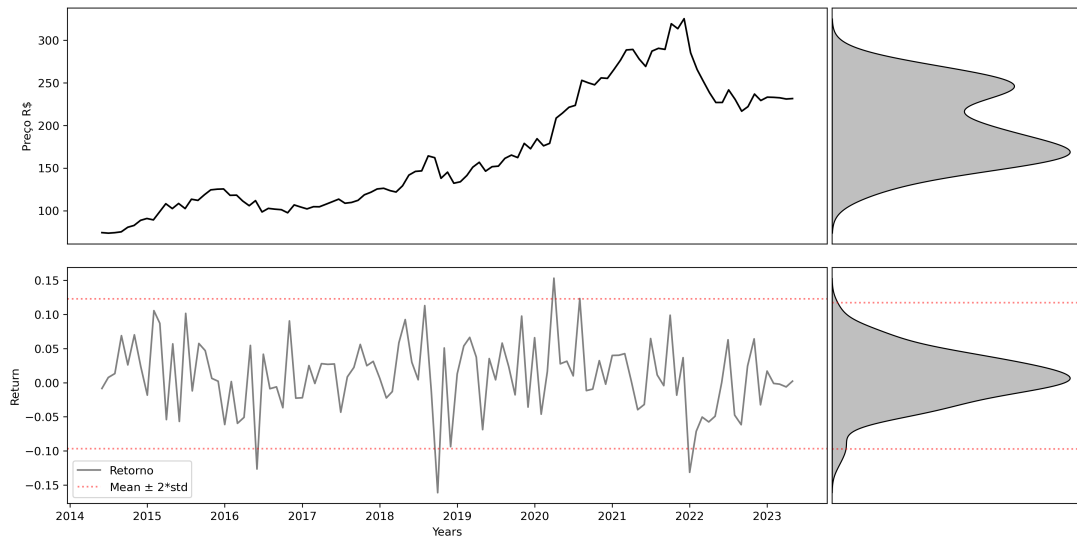
Constant Mean - GJR-GARCH Model Results					
Dep. Variable:	ee_defla	R-squared:	0.000		
Mean Model:	Constant Mean	Adj. R-squared:	0.000		
Vol Model:	GJR-GARCH	Log-Likelihood:	-96.2525		
Distribution:	Normal	AIC:	202.505		
Method:	Maximum Likelihood	BIC:	217.423		
Date:	Thu, Jun 08 2023	No. Observations:	146		
Time:	15:32:04	Df Residuals:	145		
		Df Model:	1		
Mean Model					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
mu	3.5941e-03	7.498e-02	4.794e-02	0.962	[-0.143, 0.151]
Volatility Model					
	coef	std err	t	P> t	95.0% Conf. Int.
omega	1.2856e-03	3.425e-04	3.754	1.742e-04	[6.143e-04, 1.957e-03]
alpha[1]	1.3012e-04	1.196e-04	1.088	0.277	[-1.042e-04, 3.645e-04]
gamma[1]	0.0197	9.685e-03	2.035	4.190e-02	[7.224e-04, 3.869e-02]
beta[1]	1.7437e-05	7.604e-03	2.293e-03	0.998	[-1.489e-02, 1.492e-02]

Covariance estimator: robust

Fonte: O Autor

pode-se inferir que o *overshooting* gere reversões mais intensas, essa característica faz com que os preços cruzem o valor médio com mais frequência, diminuindo o tempo de meia vida do processo.

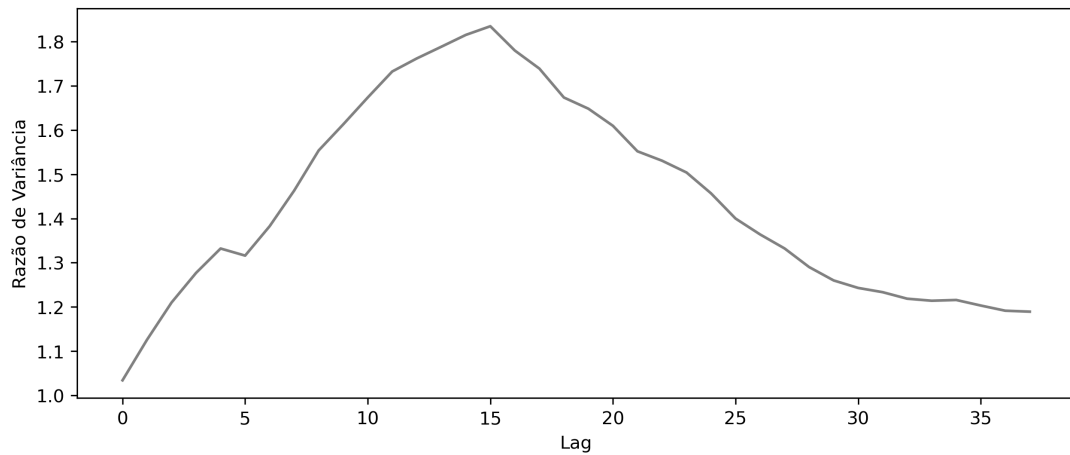
Figura 20 – Evolução do IVVB11



Fonte: O Autor

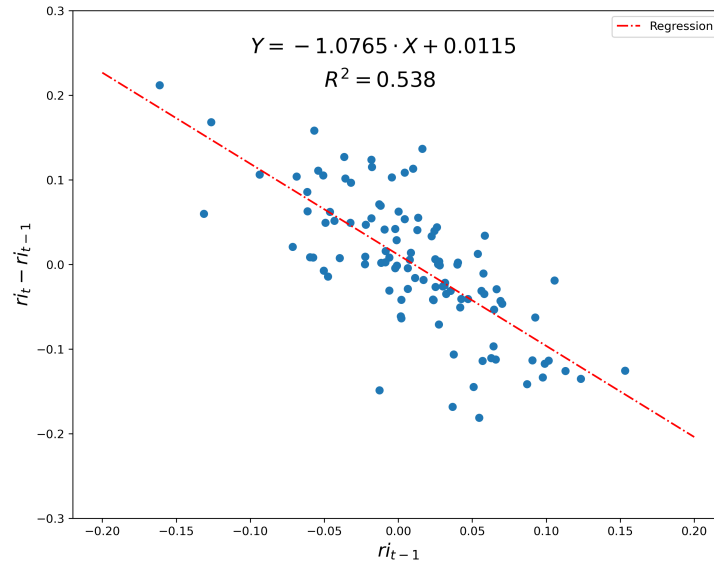
A Tabela 9 contém as principais estatísticas relacionadas a série de retorno do IVVB11. Uma característica interessante da série é sua assimetria negativa, onde mediana > média. Conforme a metodologia de estimação de parâmetros para o MGB apresentada

Figura 21 – Evolução Razão de Variância IVVB11



Fonte: O Autor

Figura 22 – Regressão IVVB11 para estimação de parâmetros



Fonte: O Autor

na Seção 2.1.1.1, considerando ri como IVVB11, têm-se: $ri_0 = 231.49$, $\alpha_r = 0.01305$, $\sigma_r = 0.053865$, e $\pi_r = 0.00602$. Lembrando que π_r foi calculado considerando o CAPM utilizando o IBOVESPA como *proxy* da carteira de mercado e considerando $\beta = 1$.

Tabela 9 – Estatísticas do retorno para IVVB11

Métrica	Valor
Média	0.011605
Std	0.053865
mediana	0.010028
min	-0.161248
max	0.1531
assimetria	-0.28031
curtose	0.7762

Fonte: O Autor

Apesar da escolha do IVVB11, qualquer outro ativo de risco pode ser considerado, até mesmo carteiras customizadas que possuam características de retorno mais atrativa ao prosumidor. Em outras palavras, é possível acoplar nesta metodologia quais ativos de risco para avaliação.

3.2.3.4 Simulação de Monte Carlo com múltiplas variáveis

Nesta seção serão sumarizadas as principais variáveis estocásticas e dado o tratamento de correlação entre as mesmas. O intuito para este passo é tonar o experimento realista ao se considerar a correlação existente entre as variáveis. Tradicionalmente a modelagem de correlação é feita considerando a decomposição de Cholesky para a geração de novas séries randômicas correlacionadas. A matriz de correlação (para os retornos dos ativos base) é apresentada na Tabela 10, onde ee representa a energia elétrica, v_{ee} a volatilidade da volatilidade da energia elétrica e ri representa o IVVB11.

Tabela 10 – Correlação de Pearson entre as variáveis consideradas

	(1)	(2)	(3)
(1) v_{ee}	1	-0.3424	0
(2) ee	-0.3424	1	-0.0665
(3) ri	0	-0.0665	1

Fonte: O Autor

A matriz de correlação da Tabela 10 é definida positiva, sendo seus autovalores 0.65120205, 1.34879795 e 1, respectivamente. A Tabela 11 contém a matriz triangular inferior resultante da decomposição de Cholesky.

Tabela 11 – Resultado da decomposição de Cholesky

	(1)	(2)	(3)
(1) v_{ee}	1	0	0
(2) ee	-0.3424	0.93955428	0
(3) ri	0	-0.07077824	0.99749208

Fonte: O Autor

A Eq. 3.10 apresenta a formulação final para a simulação considerando o caso onde o modelo de Heston será utilizado, onde $\theta_{i,j}$ representa a i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz triangular inferior resultante da decomposição de Cholesky. Observe que existem 3 distribuições normais padrão ($N_i(0, 1)$) independentes entre si, mas que se geram simulações correlacionadas para $v_{t+\Delta t}$, $ee_{t+\Delta t}$ e $ri_{t+\Delta t}$.

$$\begin{aligned}
v_{t+\Delta t} &= f_1(v_t) + \eta(\bar{v} - f_2(v_t))\Delta t + \sigma_v \sqrt{f_3(v_t) \cdot \Delta t} \cdot \theta_{1,1} \cdot N_1(0, 1) \\
\phi &= \sqrt{\Delta t \cdot v_{t+\Delta t}} \cdot (\theta_{2,1} \cdot N_1(0, 1) + \theta_{2,2} \cdot N_2(0, 1)) \\
A &= (\alpha - \pi_{ee} - v_{t+\Delta t}/2)\Delta t + \phi \\
ee_{t+\Delta t} &= ee_t \cdot \text{EXP}(A) \\
k &= (\theta_{3,2} \cdot N_2(0, 1) + \theta_{3,3} \cdot N_3(0, 1)) \\
ri_{t+\Delta t} &= ri_t \cdot e^{-\eta_r \Delta t} + \left[\bar{ri} - \frac{\pi_r}{\eta_r} \right] (1 - e^{-\eta_r \Delta t}) + \sigma_{ri} \sqrt{\frac{(1 - e^{-2\eta_r \Delta t})}{2\eta_r}} \cdot k
\end{aligned} \tag{3.10}$$

A Eq. 3.11 apresenta a formulação para o caso da análise considerando a energia elétrica como um MGB com saltos, ressaltando que os saltos são descorrelacionados com as demais variáveis. Com a remoção de $v_{t+\Delta t}$ e mantendo a correlação entre energia e IVVB11 em -0.1743, a Tabela 12 apresenta a decomposição de Cholesky para o caso supracitado.

Tabela 12 – Resultado da decomposição de Cholesky para o caso MGB com saltos

	(1)	(2)
(1) ee	1	0
(2) ri	-0.0665	0.99778643

Fonte: O Autor

Note que semelhante a Eq. 3.10, na Eq. 3.11 o valor $\theta_{i,j}$ representa a i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz triangular inferior resultante da decomposição de Cholesky da Tabela 12. Além disso, a matriz de correlação para o caso onde o preço da energia elétrica é modelado com saltos é definida positiva, sendo seus autovalores 1.0665 e 0.9335 para ee e ri respectivamente.

$$\begin{aligned}
A &= (\alpha - \pi_{ee} - \sigma/2)\Delta t + \sqrt{\Delta t} \cdot \sigma_{ee} \cdot N_1(0, 1) \\
J &= \begin{cases} 0, & \text{se } p\Delta t + j\Delta t \leq \mu \leq 1 \\ \omega, & \text{se } j\Delta t < \mu \leq p\Delta t \\ \psi, & \text{caso contrário } 0 \leq \mu \leq j\Delta t \end{cases} \\
ee_{t+\Delta t} &= ee_t \cdot \text{EXP}(A + J) \\
k &= (\theta_{2,1} \cdot N_1(0, 1) + \theta_{2,2} \cdot N_2(0, 1)) \\
ri_{t+\Delta t} &= ri_t \cdot e^{-\eta_r \Delta t} + \left[\bar{r}_i - \frac{\pi_r}{\eta_r} \right] (1 - e^{-\eta_r \Delta t}) + \sigma_{ri} \sqrt{\frac{(1 - e^{-2\eta_r \Delta t})}{2\eta_r}} \cdot k
\end{aligned} \tag{3.11}$$

3.2.4 Modelagem populacional para avaliação de projetos

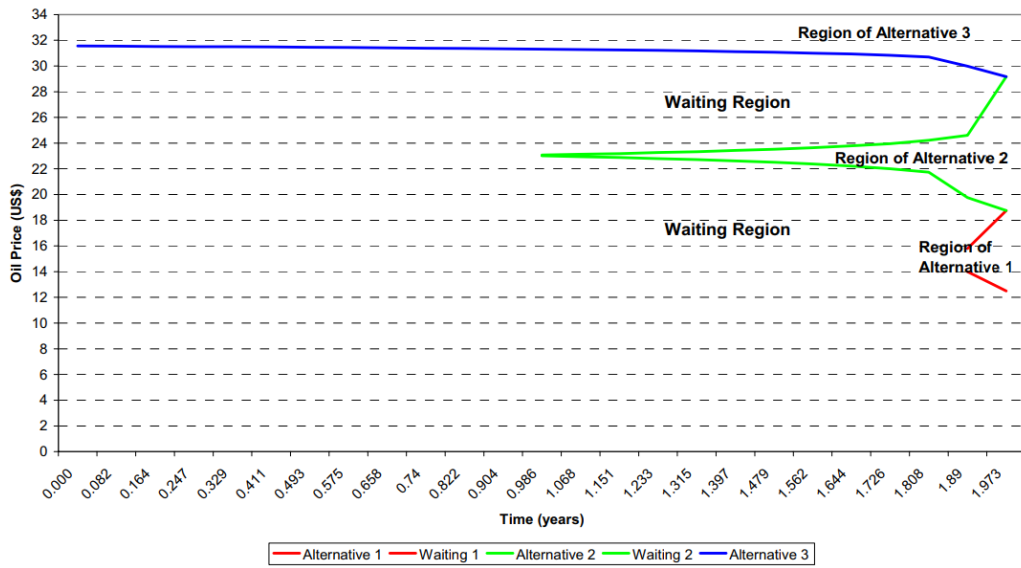
Uma parte crítica para a avaliação é a modelagem dos candidatos a soluções que serão evoluídos com o intuito de otimizar a função objetivo, minimizar o dispêndio do prosumidor com energia elétrica. Para tanto se faz necessário transformar o conjunto de decisão em uma forma vetorial que consiga representar todo o conjunto de possibilidades que serão avaliadas.

A Figura 9 apresenta exemplos de gatilho para o caso de múltiplas opções. A observação permite intuir que o a quantidade de gatilhos requeridos para o problema é definida pela relação entre o número de opções e número de variáveis associadas a está decisão. Como exemplo, o trabalho de Lazo (2004) decidiu entre 3 tipos de perfurações de poços baseadas no preço do petróleo, baseados no risco/retorno que cada tipo de investimento traria, conforme Figura 23. Assim, tem-se que cada decisão é vinculada ao preço do petróleo, gerando três curvas de decisão (uma para cada opção) e duas curvas de espera²⁷, sendo que esta última a representação do limiar de indiferença entre a exploração de duas opções de perfuração.

Um detalhe importante está no cruzamento de duas curvas de gatilhos implica em uma zona de espera, assim como adotado por Lazo (2004). Então, caso os gatilhos se cruzem em algum ponto do intervalo de decisão, a zona resultante será desconsiderada como investimento e passará a ser um período de espera, retornando padrão no momento em que os gatilhos não estiverem mais em interseção.

O caso estudado avalia o prosumidor que se baseando no preço da energia elétrica, conforme pode ser observado na Figura 12, irá decidir entre instalar o sistema fotovoltaico que supra 100% da sua demanda, instalar um sistema que supra 50% do seu consumo, investir o valor do CAPEX em um ativo de risco enquanto esperar por uma oportunidade melhor para investir no projeto solar. Além dessas opções, existem as combinações rela-

²⁷ Para estes casos a restrição é de monotonicidade é alterada para $\frac{dV^*}{dt} < 0$

Figura 23 – Exemplo de *timing* com mais de uma possibilidade de decisão

Fonte: Lazo (2004)

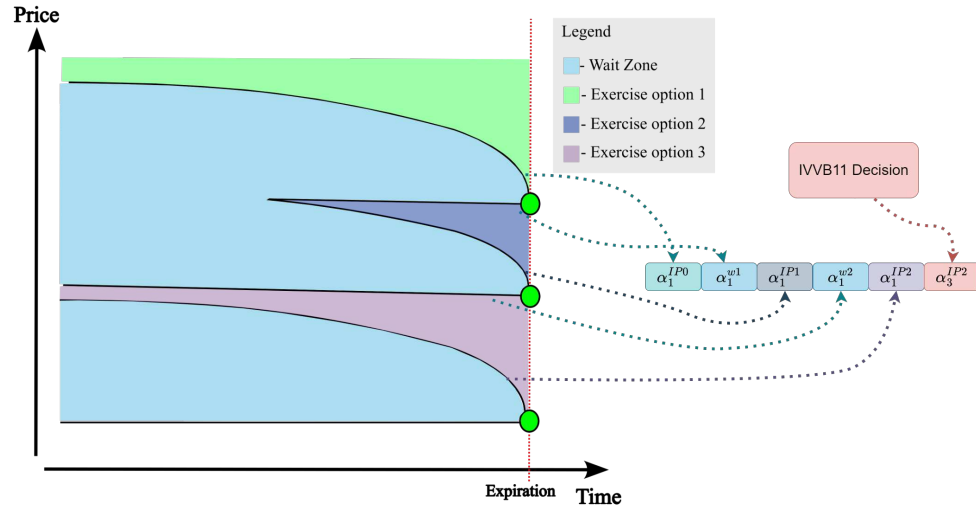
cionadas a investir no sistema com 50% da capacidade, onde o prosumidor pode finalizar o projeto solar ou mesmo desistir do mesmo e manter 50% do CAPEX restante no ativo de risco, entre outras combinações.

Deste modo, o esforço computacional é otimizar o conjunto de gatilhos que definem o *timing* de exercício das opções e, assim, maximizar o valor do conjunto de opções. Esta avaliação adotou a representação genotípica dos gatilhos via V_EXP , $ee^*(t) = ee \cdot e^{\alpha_1 \sqrt{T-t}} + b_w e^{\alpha_2 \sqrt{T-t}}$, onde α_1 é o parâmetro a ser otimizado, $b_w = 0$ devido ao horizonte de tempo finito e, portanto, α_2 é desnecessário neste modelo. A escolha deste formato de gatilho advém da sua simplicidade e boas características para a otimização, evitando problema com soluções inviáveis. Todavia, a mesma deixa de ter tais qualidades para as situações onde $r > \delta$.

Assim, considerando que o modelo de decisão proposto possui 3 possibilidades (investir em PV completo, investir em meio PV e investir em IBRX) são necessários 4 gatilhos, sendo 3 relacionados ao preço da energia e 1 gatilho relacionado a decisão de investir no ativo de risco. Além disso, são necessárias 2 zonas de espera no preço de energia para dividir a zona de interação entre as opções. Esta situação implica um esquema de decisão com 5 posições, onde cada posto representa um gatilho na avaliação do modelo, a Figura 24 exemplifica a região de decisão e a representação dos candidatos para avaliação e otimização.

A Tabela 13 sumariza os gatilhos, sua formulação e o intervalo de busca considerado para a otimização. Em outras palavras, seja $P_k = [\alpha_1^{IP0}, \alpha_1^{w1}, \alpha_1^{IP1}, \alpha_1^{w2}, \alpha_1^{IP2}]$ o k -ésimo indivíduo da população P, α_1 são os parâmetros que estão modelando o gatilho para o exercício das opções, sendo 3 gatilhos responsáveis para indicar o exercício de uma

Figura 24 – Representação dos gatilhos



Fonte: O Autor

opção e 2 gatilhos responsáveis por modelar a espera entre duas possibilidades de exercício. As variáveis $\tilde{e}e^{IP0}$, $\tilde{e}e^{IP1}$, $\tilde{e}e^{IP2}$ e $\tilde{e}e^{IP2}$ são o valor de exercício de cada opção na expiração (esferas verdes na Figura 12), Pacheco e Vellasco (2007)[Capítulo 5, pg. 204] denominam os mesmos pontos como preço crítico e calculam o mesmo através da equivalência dos VPLs das opções. Todavia, o referido modelo considera opções relacionadas a possibilidade de exploração de reservas de petróleo, sendo estas opções mutualmente excludentes, ao contrário das opções (Estados) abordadas nesse trabalho, onde as opções não mutualmente excludentes, exceto para o Estado 1. Portanto, foi adotado a premissa onde o VPLs das opções devem ser iguais aos VPL para o caso do agente não exercer nenhuma opção. Mais detalhe sobre essa etapa são descritas na Seção 3.2.5.

Tabela 13 – Gatilhos das opções

Posição	Estado	Opção	Gatilho	Fórmula	Intervalo
(1)	Estado 1	Investir PV completo	$\tilde{e}e^{IP0} \cdot e^{\alpha_1^{IP0} \cdot \sqrt{T-t}}$	α_1^{IP0}	[0,0.05]
(2)	Estado 4	Espera entre Estados 1 e 2	$\tilde{e}e^{IP0} \cdot e^{\alpha_1^{w1} \cdot \sqrt{T-t}}$	α_1^{w1}	[-0.05,0]
(3)	Estado 2	Investir PV 50%	$\tilde{e}e^{IP1} \cdot e^{\alpha_1^{IP1} \cdot \sqrt{T-t}}$	α_1^{IP1}	[0,0.05]
(4)	Estado 4	Espera entre Estados 2 e 3	$\tilde{e}e^{IP1} \cdot e^{\alpha_1^{w2} \cdot \sqrt{T-t}}$	α_1^{w2}	[-0.05,0]
(5)	Estado 5	Investir no IVVB11	$\tilde{e}e^{IP2} \cdot e^{\alpha_1^{IP2} \cdot \sqrt{T-t}}$	α_1^{IP2}	[0,0.05]
(5)	Estado 5	Investir no IVVB11	$\tilde{r}i^{IP2} \cdot e^{\alpha_3^{IP2} \cdot \sqrt{T-t}}$	α_3^{IP2}	[0,0.05]

Fonte: O Autor

3.2.5 Modelagem do fluxo de caixa das opções

A minimização do gasto é o objetivo da energia fotovoltaica residencial no Brasil, uma vez que não existem recebimentos além do desconto na fatura de energia elétrica das

distribuidoras²⁸. Dado o objetivo principal do prosumidor, minimizar o dispêndio com energia elétrica, a decisão deste modelo é interpretada como o gasto evitado com energia dado o investimento em PV ou não, ou seja, o objetivo é compara a diferença financeira entre o dispêndio total quando opção execução e o desembolso total quando nenhuma ação é executada.

Considerando a dinamicidade das decisões e as possibilidades de opções como uma função dos exercícios realizados previamente, optou-se por modelar o fluxo de caixa de forma dinâmica. As equações descritas a seguir constroem o fluxo de caixa de todas as opções possíveis. Um ponto de atenção está na diferença entre o horizonte de decisão t_h e o horizonte de tempo total (T), neste caso todo o fluxo de caixa após t_h será a continuidade das decisões tomadas. Em outras palavras, caso o prosumidor decida por investir no sistema fotovoltaico em $t < t_h$, o fluxo de caixa após t_h manterá a mesma estrutura, mantendo o fluxo de despesas/pagamentos após o encerramento da possibilidade de decisão.

Seja t^* e t^{**} o tempo para alternar entre as opções disponíveis no momento, C_{base} , Eq. (3.12), representa o gasto total até o exercício da primeira opção ou quando nada for exercício. Ou seja, a Eq. (3.12) representa o fluxo de caixa para o caso se o prosumidor esperar até $t^* = t_h$ e não exercer nenhuma opção implicará em abandono de todas as opções, e consideramos $t^* = T$.

C_{IPk} denota o fluxo de caixa da opção selecionada, onde $k \in [1, 2, 3]$ representa o Estado 1 (Eq. (3.13)), Estado 2 (Eq. (3.14)) e Estado 3 (Eq. (3.15)), respectivamente. Note que na Eq. (3.15) o termo $\tilde{\theta}$ representa o retorno obtido em um passo de tempo com a aplicação do CAPEX no IVVB11, sendo este o motivo do produtório iniciar a contagem em $t^* + \Delta t$. Λ detona a sequência de decisões ao longo do tempo e configura os estados de Markov, ou seja, esta variável é a responsável apenas por guardar a informação das decisões predecessora para a modelagem do fluxo de caixa. $cOPEX$ detona os gastos com a manutenção do FV e AC representa o consumo médio de eletricidade do prosumidor.

O termo Inj refere-se a eletricidade injetada pelo SG considerando os descontos pertinentes ao NMGD sobre a energia produzida pelo PV. A Eq. (3.18) descreve Inj , sendo a formulação para calcular a quantidade de energia gerada em cada passo dada por $prod$, onde $Irrad$ refere-se a quantidade de luz solar disponível no mês corrente (conforme Figura 15), rt é a *Performance Ratio* do PV, PV_size é o tamanho do sistema fotovoltaico, 30 é o número de dias, $\prod_{t=t^*}^t (1 + cf)$ representa a degradação acumulada das células fotovoltaicas desde o início de funcionamento em t^* até o tempo corrente t , sendo cf a taxa de degradação convertida a valores mensais. Na expressão Inj ocorre o desconto gerado pelo NMGD, onde $desc(t)$ representa o desconto proporcional ao ano corrente em

²⁸ Essa característica limita o tamanho de projetos fotovoltaicos residenciais ao consumo da residência, tornando sistemas maiores sub-ótimos

t , conforme Tabela 14, enquanto $FIOB$ é o percentual de participação da TUSD no valor da tarifa, que para a CEMIG é de aproximadamente 26%²⁹, neste trabalho foi considerado que o fator de simultaneidade é igual 0, o que implica o pior cenário possível, significando que o prosumidor injeta energia na rede em momentos totalmente distinto do consumo e sofrendo o desconto na totalidade da energia produzida.

Em resumo, a Eq. (3.18) calcula a quantidade de energia equivalente foi injetado pelo sistema no respectivo período, ou seja, a quantidade de energia que será considerada para cálculo do balanço entre consumo e injeção.

$$C_{base}(t^*) = \sum_{t=0}^{t=t^*} AC \cdot \Delta t \cdot ee_t \cdot e^{-rf \cdot \Delta t \cdot t} \quad (3.12)$$

$$C_{IP0}(\Lambda, t^*) = \Lambda(\Lambda, t^*) + \sum_{t=t^*}^{t=T} (AC - Inj) \cdot \Delta t \cdot X_t \cdot e^{-rf \cdot \Delta t \cdot t} - CAPEX \cdot e^{-rf \cdot t^*} + cOPEX \quad (3.13)$$

$$C_{IP1}(\Lambda, t^*, t^{**}) = \Lambda(\Lambda, t^*) + \sum_{t=t^*}^{t=t^{**}} (AC - Inj/2) \cdot \Delta t \cdot X_t \cdot e^{-rf \cdot \Delta t \cdot t} - (CAPEX \cdot e^{-rf \cdot t^*})/2 + cOPEX/2 \quad (3.14)$$

$$C_{IP2}(\Lambda, t^*, t^{**}) = \Lambda(\Lambda, t^*) + \left(\prod_{t=t^*+\Delta t}^{t^{**}} e^{(\delta(t) - rf \cdot \Delta t \cdot t)} \right) \cdot \begin{cases} CAPEX/2, \text{ se } C_{IP1} \in \Lambda \\ CAPEX, \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\delta(t) = \ln(ri_t) - \ln(ri_{t-\Delta t}) \quad (3.16)$$

$$cOPEX(t^*) = \sum_{t=t^*}^{t=T} (OPEX) \cdot e^{-rf \cdot \Delta t \cdot t} \quad (3.17)$$

$$Inj(t, t^*) = prod(t, t^*) \cdot (1 - desc(t) * FIOB) \quad (3.18)$$

$$prod(t, t^*) = Irrad(t) \cdot rt \cdot PV_size \cdot 30 \cdot \Delta t \cdot \prod_{t=t^*}^t (1 - cf \cdot \Delta t)$$

Assim, as equações podem construir qualquer sequência de opções considerando a hipótese descrita anteriormente. Por exemplo, defina a sequência de decisão:

$\Lambda = wait \xrightarrow{t^*=100} C_{IP1}(A, 100, T) \xrightarrow{t^*=120} C_{IP2}(A, 120, T)$, o prosumidor vai esperar até

²⁹ A representatividade da TUSD na tarifa pode ser calculada para qualquer distribuidora no Brasil através da Base de Dados das Tarifas das Distribuidoras de Energia Elétrica, disponibilizada pela ANEEL em: <<https://portalrelatorios.aneel.gov.br/luznatarifa/basestarifas#!>>

Tabela 14 – Descontos TUSD sobre a energia injetada por ano

Ano	Desconto
2023	15%
2024	30%
2025	45%
2026	60%
2027	75%
2028	90%
2029	100%

Fonte: [NEOSOLAR \(2022\)](#)

$t^* = 100$ e investir parcialmente em PV, no tempo 120 o CAPEX/2 vai investir em IBRX até o T, como as opções não excluem C_{IP1} e C_{IP2} continua até T, mas entre o período 100 e 120, o CAPEX/2 não foi aplicado. Nesta situação o valor da opção será:

$$OP = \max(C_{base}(T) - [C_{base}(100) + C_{IP1}(A, 100, T) - C_{IP2}(A, 120, T)], 0).$$

Ainda considerando o exemplo anterior, note que o valor da opção contém como primeira parcela o caso onde nenhuma opção é executada ($C_{base}(T)$) enquanto o restante da equação representa o desembolso total quando a sequência de opções são executadas, sendo a primeira ($C_{base}(100)$) a espera (Estado 4), que consiste em manter o gasto padrão com a eletricidade até o período 100. Posterior a este ponto, haverá a redução do dispêndio devido à entrada de operação do sistema solar parcial (Estado 2) ($C_{IP1}(A, 100, T)$), como a decisão subsequente não muda o status do PV então esse padrão será mantido até o final global da avaliação em T, a decisão final ocorre no instante $T^* = 120$ com a alocação do CAPEX remanescente no ativo de risco (Estado 3) até o final da avaliação $C_{IP2}(A, 120, T)$.

Outro exemplo é $\Lambda = \text{wait} \xrightarrow{t^*=50} C_{IP1}(A, 50, 150) \xrightarrow{t^*=150} C_{IP0}(A, 150)$, para este caso, o prosumidor inicia o sistema PV com 50% do consumo no tempo 50 e no instante 150 ele completa o PV, sendo C_{IP0} um estado terminal. O valor da opção é: $OP = \max(C_{base}(T) - [C_{base}(50) + C_{IP1}(A, 50, 150) - C_{IP0}(A, 150, T)])$, é necessário destacar que para este caso o CAPEX necessário para C_{IP0} é de 50% do valor original, haja vista que a primeira metade do mesmo já foi investido no sistema solar parcial em $t^* = 50$.

3.2.5.1 Metodologia de cálculo preço crítico na expiração

Conforme já mencionado anteriormente, o preço crítico é o análogo do valor de *strike* para opções reais. Como em opções reais, no geral, modela um fluxo de caixa, o valor do preço crítico não é conhecido *a priori*, sendo necessário calcular o mesmo para que os gatilhos sejam devidamente otimizados. Neste trabalho foi considerado como preço crítico de $\tilde{e}e^{IP0}$, $\tilde{e}e^{IP1}$, $\tilde{e}e^{IP2}$ e $\tilde{e}e^{IP2}$ o valor que torna as respectivas opções com VPL

igual ao VPL para o caso de que nenhuma das opções seja exercida ($C_{base}(T)$). Para tanto, o valor das variáveis de incerteza foi considerado fixo dentro da modelagem do fluxo de caixa. As equações abaixo representam as funções consideradas para cálculo do preço crítico de cada opção.

$$\begin{aligned} \widetilde{ee}^{IP0} &\rightarrow C_{base}(T) = C_{IP0}(\Lambda, t_h), \Lambda \in \emptyset \\ \widetilde{ee}^{IP1} &\rightarrow C_{base}(T) = C_{IP1}(\Lambda, t_h), \Lambda \in \emptyset \\ \widetilde{ri}^{IP2}, \widetilde{ee}^{IP2} &\rightarrow C_{base}(T) = C_{IP3}(\Lambda, t_h), \Lambda \in \emptyset \end{aligned} \quad (3.19)$$

A Tabela apresenta os valores críticos utilizados na avaliação do projeto fotovoltáico. Os valores são obtidos considerando a Eq. (3.19) combinada com alguma técnica para identificar zeros de função, sendo considerado o Método da Bissecção³⁰.

Tabela 15 – Valores críticos obtidos via método da Bissecção

Variável	Valor (R\$)
\widetilde{ee}^{IP0}	747.89
\widetilde{ee}^{IP1}	671.925
\widetilde{ee}^{IP2}	576.72
\widetilde{ri}^{IP2}	320.45

Fonte: O Autor

3.2.6 Modelagem Computacional do Problema

A modelagem computacional do problema consiste em descrever a sequência lógica de passos para avaliação e tomada de decisão que permitiram chegar ao resultado desejado. Esta etapa engloba os passos 2 e 3 do fluxograma apresentado na Figura 13.

Em termos globais, o processo evolutivo já foi apresentado na Figura 6 e consiste em repetir o *loop* de iteração através da função de avaliação sobre os vetores de candidatos que vai sendo modificado a cada novo passo. Então a principal diferença então na formulação da função de avaliação, que para este trabalho foi apresentado o esquema geral para se modelar o valor das possíveis opções (função de avaliação) na seção anterior. Todavia, ainda não foi explicado em detalhes o fluxo de passos para que essa avaliação ocorra.

A Figura 25 introduz o pseudocódigo para avaliar uma solução candidata. Inicialmente são geradas as simulações e os candidatos a soluções, posteriormente um vetor nulo é criado para receber o valor de *fitness* para cada candidato, nas linhas 1, 2 e 3 respectivamente. A avaliação inicia com o *loop* da linha 4, que irá percorrer todas as simulações.

³⁰ Mais detalhes sobre o método da Bissecção podem ser encontrados em: <https://web.archive.org/web/20131005004449/http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n36/n36_Artigo04.pdf>

Posteriormente, cada vetor candidato irá ser desenvolvido para seu respectivo conjunto de gatilhos (linha 5), na linha 6 um vetor nulo é gerado para receber o valor da opção para cada simulação. O *loop* na linha 7 varre todas as simulações, onde é feita a verificação dos momentos em que o preço da eletricidade fica na zona de espera ou não, retornando a sequência de tempo e decisões (linha 8) para cada simulação, sendo esta etapa crítica para a modelagem do fluxo de caixa. Detalhes sobre esta função serão explicados nos próximos parágrafos. O terceiro passo é modelar a eletricidade injetada e estimar o desconto na conta de luz, esta função é baseada na Eq. (3.18). O último passo é construir o fluxo de caixa com base nos pontos de entrada e na sequência de opções para cada simulação.

Figura 26 apresenta o pseudo-código para a função `Check_entry_points`. Inicialmente a função recebe os gatilhos (C) e a simulação corrente (s), posteriormente dois vetores nulos são alocados, enquanto três variáveis booleanas, representando os estados já executados, são instanciadas como `FALSE` e dois contadores são marcados com valor 0, linhas 1 a 7 respectivamente. A linha 8 inicia o *loop while* até o horizonte de decisão (t_h), neste *loop* ocorre a checagem dos valores para o preço da energia no instante a , onde é verificado se neste respectivo momento o preço da energia elétrica é superior a algum dos gatinhos e se não está no interior de uma zona de espera em C . Note que a sequencialidade das condicionais *if* é a mesma da apresentada na Figura 12, essa escolha remove a necessidade de uma checagem adicional na lógica *if* para verificar se outro gatilho já foi acionado, otimizando a execução do *loop*.

Caso as condicionais sejam aceitas as variáveis, os vetores `state_seq` e `times_seq` são preenchidos na posição corrente da decisão (`entry_num`) (indicando se é a primeira, segunda ou terceira decisão) com a decisão e o tempo de execução respectivamente. Na linha 11 ocorre a verificação de execução do Estado 1, como o mesmo é um nó terminal, haja vista não existe mais flexibilidade após a instalação do sistema solar completo, caso o *loop while* é encerrado.

Ao contrário das condicionais na linha 11, as condicionais das linhas 16 e 21 também verificarão se o preço corrente da energia está na zona de espera (transição) entre as decisões e também verifica a condição do mesmo estado já não ter sido exercido anteriormente, evitando assim uma repetição na decisão. Ou seja, cada decisão pode ser apenas executada uma única vez. Assim como os passos descritos no parágrafo anterior, os vetores `state_seq` e `times_seq` são preenchidos, porém, o *loop while* não é encerrado, pois, esses estados não são terminais, possibilitando um novo exercício no futuro, caso já não tenham ocorrido. Por fim, a função retorna os vetores `state_seq` e `times_seq` contendo as decisões, caso estejam vazios, significa que nenhuma decisão foi tomada durante o tempo de avaliação.

Adicionalmente, na condicional da linha 21, existe a verificação da ativação do gatilho vinculado ao preço da IVVB11 para exercício da opção de investir. Ou seja, para

essa opção ser exercida são necessários a ativação de dois gatilhos, sendo um relacionado ao preço da energia elétrica e outro relacionado ao próprio IVVB11. Note que não há condicional vinculada ao IVVB11 no *if* da linha 16, essa configuração garante com que o investimento parcial aconteça ao primeiro toque do preço da energia na zona de exercício. Isso faz com que a Premissa 5 assumida no início da Seção 3.2 seja verdadeira.

Figura 25 – Pseudocódigo para avaliação de Fitness do candidato

```

Data: Candidates P, Simulations S
Result: Fitness
1 P ← Solutions_Candidates()           // J × 6 matrix
2 S ← Generate_Simulations_Paths()     // N × M matrix
3 fitness[] = 0                        // set fitness vector with 0, J × 1 matrix
4 for p ← 0 to P do
  /* iterate over the candidates      */
5   C ← Build_Decision_Schemes(p)
6   cashflow[] = 0                    // storage the results individually, N × 1
   matrix
7   for s ← 0 to S do
     /* iterate through simulations and compute the fitness */
8     t = Check_entry_points(C, s)
9     Inj ← Generate_solar_production(t, s)
           // estimate the discount based in entry time t
10    cashflow[s] = - Build_CashFlow(t, Inj)
11    fitness[p] = max(0, |Σ(cashflow)/N|)
12 return fitness

```

Figura 26 – Function Check_entry_points()

Data: Triggers C, Simulation ee, Simulation ri
Result: States, Entry times

```

1 state_seq[] = [] // set empty vector for states
2 times_seq[] = [] // set empty vector for times
3 STATE1 ← FALSE
4 STATE2 ← FALSE
5 STATE3 ← FALSE
  /* representation of previously decision */
6 a = 0 // counter
7 entry_num = 0 // decision counter
8 while a ≤ th do
9   if ee[a] ∈ wait zone in C then
10    CONTINUE
11   else if ee[a] ≥ trigger exercises STATE 1 at a in C then
12    STATE1 = TRUE
13    state_seq[entry_num] = str(STATE_1)
14    times_seq[entry_num] = a
15    BREAK
16   else if ee[a] ≥ trigger exercises STATE 2 at a in C AND
      s[a] < wait zone between STATE 2 and STATE 1 at a in C AND
      STATE2 ≠ TRUE then
17    STATE2 = TRUE
18    state_seq[entry_num] = str(STATE_2)
19    times_seq[entry_num] = a
20    entry_num+ = 1
21   else if ee[a] ≥ trigger exercises STATE3 at a in C AND
      ee[a] < wait zone between STATE2 and STATE3 at a in C AND
      ri[a] ≥ trigger exercises STATE3 at a in C AND STATE3 ≠ TRUE
      then
22    STATE3 = TRUE
23    state_seq[entry_num] = str(STATE_3)
24    times_seq[entry_num] = a
25    entry_num+ = 1
26   a+ = Δt
27 return state_seq, times_seq

```

4 RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos para o estudo realizado neste trabalho, visando avaliar as propostas introduzidas no Capítulo 3. Neste sentido, este capítulo foi dividido em três partes. A primeira parcela, Seção 4.1.1, contém os resultados relacionados aos experimentos I e II, comparando o desempenho de diferentes abordagens de codificação para o problema e o impacto de cada na acurácia da precificação, objetivando identificar a eficiência da metodologia de precificação de opções via SMC + CE.

A segunda parte, Seção 4.2, contém os resultados e uma descrição dos resultados obtidos com a abordagem de calibração via DeepONet, resultados estes já publicados pelo Autor (LEITE; YAMIM; FONSECA, 2021), sendo que esta abordagem foi utilizada para estimar os parâmetros do modelo de Heston. Além disso, contém alguns aprofundamentos desenvolvidos no campo do aprendizado de máquina para melhorar os resultados da estimação dos parâmetros no modelo de volatilidade estocástica.

A terceira parte, Seção 4.3, contém os resultados e análises para o problema de avaliação um investimento fotovoltaico no Brasil, considerando um esquema de decisões complexos e com a possibilidade de esperar remunerada acima da taxa livre de risco, apresentando detalhes pertinentes a contextualização lógica para a conclusão.

4.1 AVALIAÇÃO DO MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES VIA CE

4.1.1 Experimento I

O experimento I considerado os resultados apresentados no trabalho de [Musshoff e Hirschauer \(2010\)](#), o referido autor considerou o método binomial (CRR) como *benchmark* da análise considerando uma discretização da ordem de 10^{-2} . No experimento todos os algoritmos evolutivos possuem uma população constante com 40 indivíduos, 30 gerações evolutivas, totalizando um máximo de 12000 avaliações da função objetivo, sendo que a mesma é avaliada em 50000 simulações de um MGB padrão, conforme Eq. (3.4), com discretização de $\Delta t = 1$.

A Tabela 16 apresenta os resultados médios obtidos para cada abordagem adotada na precificação da opção neste experimento, onde os valores marcados em negrito apontam as menores diferenças absolutas na comparação com o modelo de árvores (CRR). Note que a abordagem de B&S sobreprecificou as opções enquanto a abordagem via LSM resultou na subprecificação. A subprecificação também é observada em todas as meta-heurísticas evolutivas, sendo este comportamento uma idiosincrasia das abordagens baseadas em simulação neste experimento.

Tabela 16 – Resultados para o Experimento I

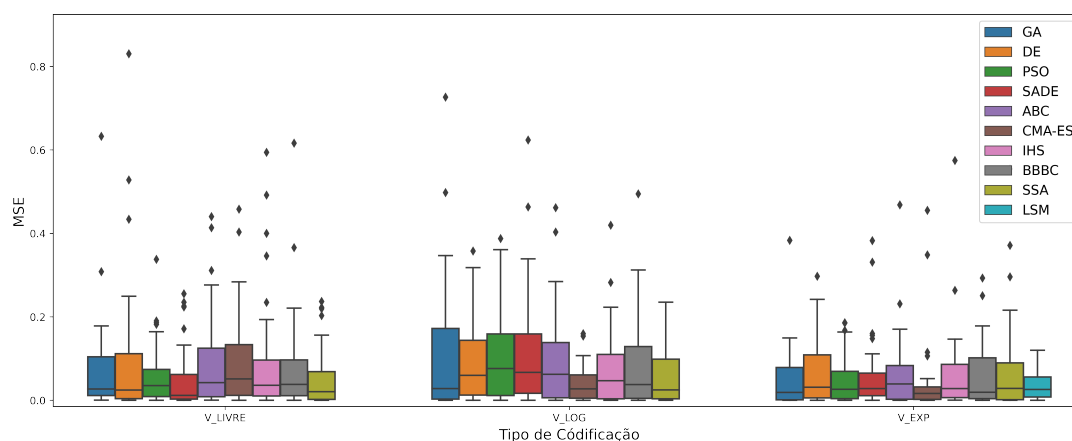
$V(t = 0)$	CRR	BS	LSM	Tipo de Gatilho			Meta-Heurísticas						
				BBBC	SSA	GA	PSO	ABC	DE	ISH	SADE	CMA-ES	
110	19.86	20.05	19.80222	V_LIVRE	19.81689	19.84385	19.80449	19.75762	19.68182	19.72698	19.69893	19.7788	19.82043
				V_LOG	19.66371	19.67073	19.63127	19.58013	19.61493	19.61127	19.64927	19.58482	19.79822
				V_EXP	19.79199	19.84374	19.84516	19.8455	19.85886	19.83092	19.74481	19.9165	19.86257

Fonte: Fonte: O Autor

Tabela 17 – MSE para o Experimento I

$V(t = 0)$	CRR	BS	LSM	Tipo de Gatilho			Meta-Heurísticas						
				BBBC	SSA	GA	PSO	ABC	DE	IHS	SADE	CMA-ES	
110	0	0.0361	0.0376	V_LIVRE	0.07499	0.05056	0.06697	0.0573	0.09189	0.08992	0.08542	0.04662	0.09401
				V_LOG	0.07662	0.05675	0.10064	0.10821	0.09509	0.09459	0.0702	0.11194	0.0403
				V_EXP	0.0564	0.06758	0.05346	0.05621	0.07133	0.06569	0.07393	0.0696	0.05034

Fonte: Fonte: O Autor

Figura 27 – MSE para Experimento I $V(t = 0) = 110$ 

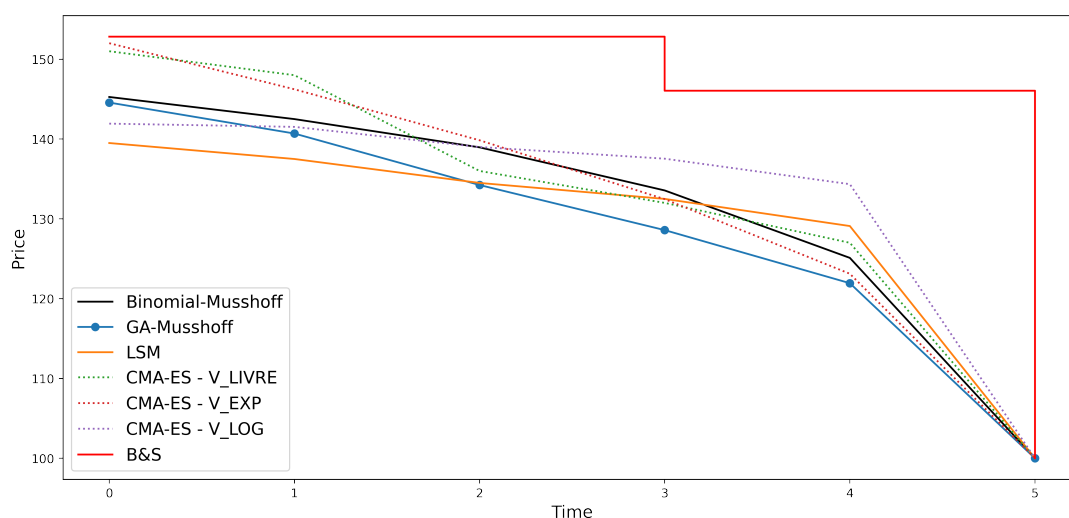
Fonte: O Autor

Um destaque especial pode ser atribuído a otimização numérica do CMA-ES, haja vista a mesma possuir os melhores resultados médios na comparação com o valor referência para os gatilhos do tipo V_LOG e V_EXP. Essa observação é mantida quando a comparação é feita utilizando o MSE, Tabela 17, uma vez que os gatilhos do tipo V_LOG e V_EXP apresentam o menor MSE quando a otimização é feita via CMA-ES.

O teste ANOVA sobre o MSE indica que existe diferenciação entre os grupos. Os grupos são definidos com base na metaheurística e no tipo de gatilho. A única diferença estatística indicada pelo Teste Tukey é vinculada ao MSE do para o CMA-ES com gatilhos do tipo V_LOG e V_EXP. Indicando uma precisão maior desta combinação para o experimento. Essa inferência é notável quando se analisa a Figura 27, onde o menor MSE é visível para o modelo supracitado.

A Figura 28 apresenta os gatilhos obtidos pelos métodos de precificação utilizados, sendo as linhas pontilhadas a resposta resposta média obtida dentro das repetições do experimento para a meta-heurística CMA-ES. Note que cada abordagem (V_EXP, V_LOG e V_LIVRE) apresentou um comportamento distinto para a curva de gatilhos. Em V_EXP a componente exponencial acaba gerando valores de gatilho superior ao *benchmark* entre os períodos 0 e 2, neste âmbito o mesmo não suavizou a curva de forma significativa nos momentos iniciais para este problema específico, apesar do termo $T - \tau$ estar em uma raiz quadrada, supõe-se então que termos mais elevados de para a raiz possa apresentar resultados melhores para os gatilhos, uma vez que raízes de mais alto grau apresentam uma curvatura mais acentuada.

Apesar desta variação nos gatilho, o resultado da precificação é próximo do objetivo, sendo este um indicativo que neste problema uma parcela dos exercícios antecipados acontecem na fronteira da expiração ($T = 5$), o que pode mitigar o erro da precificação, remetendo a ideia que erros mais distantes da expiração possuem impacto menor do que o erros mais próximos.

Figura 28 – Gatilhos para Experimento I $V(t = 0) = 110$ 

Fonte: O Autor

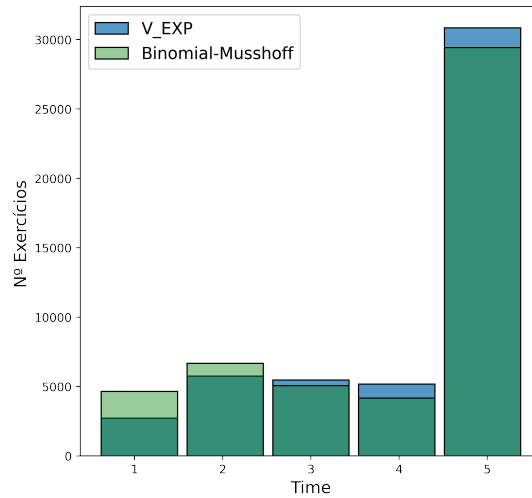
A afirmação anterior é validada na Figura 29, haja vista a relação do n^o exercícios próximo da expiração, para V_EXP , ser superior quando comparado ao valor de referência, havendo um deslocamento dos exercícios para momentos mais próximos da expiração. O maior desbalanço na relação entre o n^o de exercícios acontece em $T = 1$, além de ser notório a diferença na relação do exercício antecipado. O cálculo da distribuição de datas no exercício antecipado para o valor referência é feita utilizando os valores de gatilho disponíveis na Tabela 4 e passando os valores pela SMC para registro das datas de exercício.

Analisando os gatilhos remanescentes na Figura 28, a abordagem baseada no gatilho V_LIVRE mostra um comportamento de não continuidade na solução, apesar de não ser o ótimo, o candidato ainda é considerado viável, lembrando que o resultado apresentado considera a média dos parâmetros otimizados, o que melhora a aparência geral do gatilho. Tal situação remete às restrições consideradas no modelo, pois, apesar de ser requerida a monotonicidade, os critérios considerados são necessários, mas não suficientes para garantir a mesma, sendo requerida uma reformulação neste tipo de cromossomo para que todas as condições sejam satisfeitas. A mesma conclusão pode ser considerada para o caso de V_LOG , apesar de a violação ser acontecer apenas entre os períodos 4 e 5.

4.1.2 Experimento II

O experimento II considerou os resultados apresentados no trabalho de [Company, Egorova e Jódar \(2016\)](#), o referido artigo considerou o método binomial (CRR) como *benchmark* da análise e considerou uma discretização da ordem de 10^{-5} para o mesmo. No experimento todos os algoritmos foram considerados uma população constante com 40 indivíduos, 30 gerações evolutivas, totalizando um máximo de 12000 avaliações da função objetivo, sendo que a mesma é avaliada em 50000 simulações com uma discretização de

Figura 29 – Número de exercícios por período Experimento I



Fonte: O Autor

$\Delta t = 0.005$. A fonte de incerteza do teste é o MGB padrão, o mesmo ao apresentado na Eq. (3.4), sendo os parâmetros $\alpha = \pi = 0.03$, $\sigma = 0.4$, $T = 0.5$, $K = 100$, $r = 0.03$ e $V(t = 0) = [70, 80, 90, 100, 110, 120]$.

Os resultados apresentados para a codificação do tipo V_LOG possui dois pontos importantes para consideração. O primeiro deles refere-se aos pontos livres situados próximos à expiração, sendo necessário definir o espaçamento entre esses *gaps* e uma forma de interligar os mesmos, haja vista que existem mais pontos de exercícios do que a representação do gatilho. O segundo ponto refere-se a tempo de expiração do experimento $T < 1$, nesta situação os pontos representados no interior do período de decisão fazem com que logaritmo do tempo até a expiração seja negativo e decaia rapidamente para valores inferiores a 1.

A solução para o primeiro ponto consiste em interpolar os pontos não representados pelo gatilho do tipo V_LOG. *a priori* não existe rigor para suposição do tipo de método interpolador recomendável para a situação. Neste caso foi considerado a interpolação linear, dada sua simplicidade. Ou seja, considerando que o tempo de expiração do problema é 0.5, então os pontos $\tau = 0.4$ e $\tau = 0.3$ são representados pelos pontos livres enquanto o intervalo $0 \geq \tau \geq 0.2$ é representado pela parcela logarítmica.

A solução adotada para o segundo ponto é a reescalonamento virtual de T , o termo virtual é utilizado, pois, a nova escala serve apenas para modelar o gatilho e tentar preservar suas características de monotonicidade. Ou seja, durante a avaliação dos resultados a expressão $p_{t,0} \cdot \ln(T - \tau)$ é reescrita por $p_{t,0} \cdot \ln((T - \tau) \cdot j)$, onde $j > 1$ é o fator de reescalonamento temporal. Esse fator faz com que haja um deslocamento da curva logarítmica para uma região estritamente positiva, mas é necessária atenção para o valor j a ser utilizado, pois o mesmo pode fazer com que haja uma transição não suave entre a parcela modelada pela função logarítmica e a parte modelada por pontos livres.

Para este experimento foi considerado $j = 10$.

A Tabela 18 introduz os resultados médios obtidos neste experimento, enquanto a Tabela 19 apresenta o MSE para todas as meta-heurísticas consideradas, além também apresentar, para comparação, os resultados obtidos pela aproximação de B&S e para o método LSM. O LSM foi executado considerando a regressão polinomial de segunda ordem, sendo esta escolha em consonância com a indicação de Koenigsdorf (2009).

Ao observar as Figuras 30 até 35 é possível elaborar três considerações: primeiramente (i) a acurácia obtida nestes experimentos contrapõem as considerações apresentadas em Musshoff e Hirschauer (2010) e Powell (2013), demonstrando a eficiência das meta-heurísticas na otimização da fronteira de exercício; (ii) o MSE é diretamente proporcional a relação $V(t = 0)/K$, estando em consonância com os resultados obtidos por Fernandes, Brandão e Bastian-Pinto (2017) relacionados ao erro as opções *out-of-money* e *in-the-money* em todas as metodologias de precificações testadas. Por fim, (iii) a variante V_EXP apresentaram resultados próximos que competem diretamente com a abordagem LSM, seguida pela variante V_LOG, principalmente para os casos onde a opção está *in-the-money*.

Ao considerar o agrupamento dos resultados pelo valor inicial $V(t = 0)$, o teste ANOVA aponta diferenças estatísticas entre em grupos (V_LIVRE, V_LOG, V_EXP, LSM). Por sua vez, o teste Tukey indicou diferenciação significativa para entre os agrupamentos pelo tipo de cromossomo. Os resultados que mais chamam atenção, corroborados com os resultados do teste Tukey, são a diferenciação de CMA-ES e BBBC para $V(t = 0) = [70, 90, 100, 110, 120]$ das demais estratégias de otimização no cromossomo V_LIVRE, reiterando a condição de parada precoce na otimização, haja vista que apesar de existir candidatados com resultados melhores, os mesmos são preteridos a soluções que possuam melhores características para a curva de gatilho.

Analisando sob a ótica do BBBC é simples entender o paralelo de convergência deste modelo e a característica de gerar candidatos fora de especificação. No BBBC o equivalente da mutação para gerar diversidade na população advém do termo "*rand*", conforme Eq. 2.17. Considerando o caso onde *rand* seja apenas um escalar randômico, é possível manter a monotonicidade na solução que mitiga a geração de candidatos inviáveis e otimiza tempo evolutivo para encontrar melhores soluções. Considerando o termo de diversidade no BBBC como um escalar resulta no equivalente a uma busca pela convergência de médias (centroide) onde as dimensões variam de forma suavizada.

Em outras, palavras, o cromossomo V_LIVRE são beneficiados por ferramentas de otimização que consigam manter as características desejadas dos candidatos dados os critérios definidos, pois a otimização desprende menos tempo computacional na busca por candidatos viáveis.

Para o CMA-ES, em primeira vista, parece possuir os melhores resultados indu-

bitavelmente. Todavia, apesar do mesmo conseguir gerar bons resultados no âmbito da acurácia da solução, o mesmo gera indivíduos viáveis, mas com degraus na curva de gatilho semelhante ao gatilho de B&S, conforme já mencionado no experimento anterior. Apesar de o candidato não ser considerado inviável, o mesmo não possui a característica mais desejada para a solução final. Esse efeito vem da característica da ferramenta de otimizar através da análise de covariância dos parâmetros. Reiterando a conclusão citada no experimento anterior das restrições usadas são necessárias, mas não suficientes para o cromossomo do tipo `V_LIVRE`.

Os efeitos descritos anteriormente também são visualizados em `V_LOG`, mas com menor frequência, pois, o tipo de abordagem favorece a redução de candidatos indesejados, sendo esse problema, totalmente anulado em `V_EXP`, sendo este último o que gera os melhores resultados na comparação.

Regressando as comparações de resultados, o teste Tukey não aponta diferenças significativas entre as meta-heurísticas para o cromossomo do tipo `V_EXP`, incluindo a indiferença estatística com o LSM. Ou seja, a abordagem via cromossomos `V_EXP` é estatisticamente equivalente à abordagem via LSM para resolver o mesmo problema de precificação.

A mesma conclusão é alcançável, mas em menor grau, na comparação com o cromossomo `V_LOG`, onde não há distinção entre os algoritmos de otimização, mas eles são diferentes na comparação dos MSE com o algoritmo LSM, para os casos onde $V > 90$, ou seja, diferenças para opções *in-the-money* e *at-the-money*. Em outras palavras, o cromossomo `V_LOG` perde eficiência quando para os casos onde $V > K$, sendo que uma possibilidade para a melhoria dos resultados seria o aumento do número de gerações evolutivas para o incremento dos resultados.

No âmbito geral a abordagem de precificação de opções baseadas na computação evolucionista gera resultados consistentes e em consonância com as referências da literatura. Todavia, em forma resumida, o cromossomo `V_LIVRE` apresenta quebras na estrutura de continuidade, sendo este cromossomo favorecido pelas meta-heurísticas CMA-ES e BBBC. Não foram encontradas diferenças significativas entre as meta-heurísticas dentro dos agrupamentos `V_LOG` e `V_EXP`, mas este último tende a possuir performance melhor aos demais tipos de codificação e independe da meta-heurísticas considerada sob mesmos critérios de avaliação. Além disso, `V_EXP` se mostra uma ferramenta equivalente ao LSM.

A recomendação primária para uma melhora nesta abordagem se baseia em refinar as restrições relacionadas aos candidatos (manutenção da monotonicidade), além de melhorias na geração aleatória (Métodos Quasi Monte Carlo como Halton, Faure, Sobol, Hammersley, etc.), ou mesmo um refinamento no grau de discretização, haja vista que a discretização temporal considerada é inferior a adotada na para cálculo dos valores *ben-*

chmark. Além disso, também é válido testar os gatilho do tipo V_EXP com raízes mais elevadas do que a quadrada e o aumento do número de gerações evolutivas.

Tabela 18 – Resultados para o Experimento II

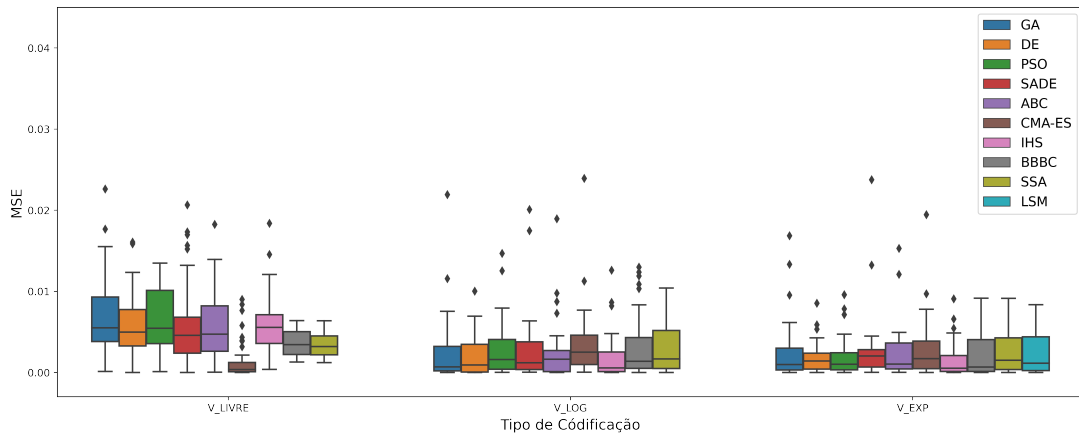
$V(t = 0)$	CRR	BS	LSM	Tipo de Gatilho			Meta-Heurísticas						
				BBBC	SSA	GA	PSO	ABC	DE	ISH	SADE	CMA-ES	
70	1.1458	1.2875	1.1376	V_LIVRE	1.20426	1.20319	1.07021	1.07015	1.07547	1.07326	1.07317	1.07572	1.13437
				V_LOG	1.17617	1.16027	1.14515	1.17632	1.15956	1.15662	1.16267	1.15187	1.17129
				V_EXP	1.15957	1.14313	1.13037	1.15832	1.1428	1.13989	1.14486	1.13645	1.15411
80	3.0415	3.3551	2.99266	V_LIVRE	3.20647	3.19328	2.86147	2.88168	2.87052	2.88044	2.88056	2.87767	3.02654
				V_LOG	3.20647	3.19328	2.86147	2.88168	2.87052	2.88044	2.88056	2.87767	3.02654
				V_EXP	3.02725	3.02513	3.0618	3.03655	3.03565	3.03332	3.0184	3.03679	3.00574
90	6.3287	6.8770	6.2915	V_LIVRE	6.43727	6.54025	6.03069	6.03754	6.04544	6.04971	6.06203	6.0285	6.3045
				V_LOG	6.42408	6.42679	6.45545	6.47368	6.35904	6.43613	6.44423	6.45662	6.42107
				V_EXP	6.32551	6.32671	6.36518	6.38355	6.26639	6.34272	6.34272	6.3589	6.31825
100	11.1084	11.9225	10.97043	V_LIVRE	11.34027	11.50487	10.70758	10.73828	10.68758	10.68138	10.68446	10.70939	10.96951
				V_LOG	11.26777	11.25469	11.33461	11.24566	11.26719	11.32725	11.28198	11.28971	11.26829
				V_EXP	11.10242	11.08599	11.18348	11.07147	11.09957	11.15673	11.11722	11.11702	11.10446
110	17.2667	18.3429	17.11655	V_LIVRE	17.08209	17.63023	16.79765	16.7798	16.79225	16.78613	16.76373	16.79196	17.11894
				V_LOG	17.52852	17.47196	17.54461	17.53938	17.53194	17.49384	17.54522	17.54142	17.47949
				V_EXP	17.27374	17.22154	17.37599	17.27768	17.27618	17.24398	17.28961	17.27158	17.22616
120	24.5650	25.8754	24.53081	V_LIVRE	24.2912	25.05242	24.06606	24.04925	24.03699	24.01978	24.05627	24.00931	24.41141
				V_LOG	24.81857	24.87004	24.76876	24.8163	24.82139	24.74161	24.7684	24.79272	24.75899
				V_EXP	24.55107	24.61406	24.42678	24.57783	24.54682	24.46376	24.54079	24.57936	24.52545

Fonte: Fonte: O Autor

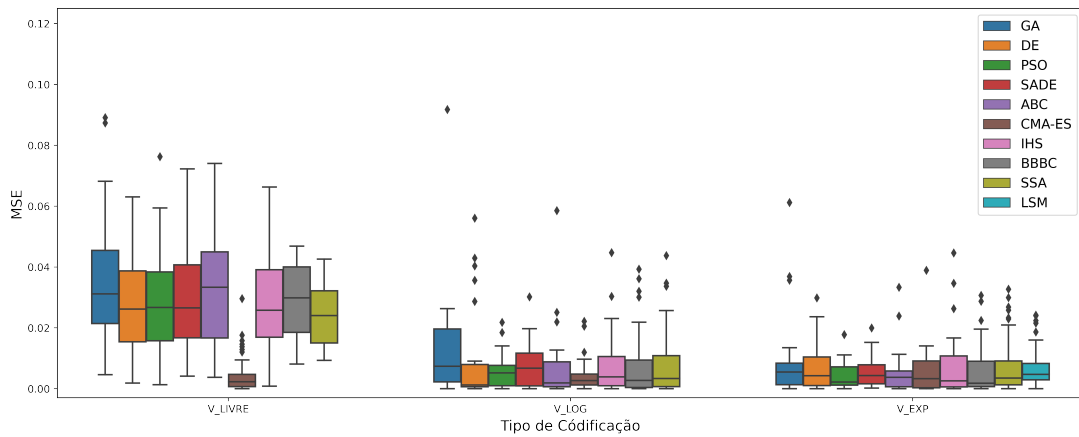
Tabela 19 – MSE para o Experimento II

$V(t = 0)$	CRR	BS	LSM	Tipo de Gatilho			Meta-Heurísticas						
				BBBC	SSA	GA	PSO	ABC	DE	IHS	SADE	CMA-ES	
70	0	0.02007889	0.00243	V_LIVRE	0.0036	0.00347	0.00678	0.00635	0.00576	0.00599	0.0058	0.00583	0.00134
				V_LOG	0.00308	0.00292	0.00281	0.00299	0.00284	0.00199	0.00218	0.00307	0.00387
				V_EXP	0.00225	0.00259	0.00296	0.00216	0.00253	0.00191	0.00196	0.00317	0.0031
80	0	0.09834496	0.00776	V_LIVRE	0.02859	0.02419	0.03457	0.02832	0.03185	0.02816	0.02857	0.02974	0.00437
				V_LOG	0.0076	0.00774	0.01365	0.00611	0.00704	0.00952	0.00808	0.00735	0.0049
				V_EXP	0.00619	0.00702	0.00937	0.00441	0.00531	0.0075	0.00807	0.00539	0.00603
90	0	0.30063289	0.02244	V_LIVRE	0.01269	0.05039	0.09376	0.08914	0.08471	0.08379	0.07643	0.09588	0.01507
				V_LOG	0.02732	0.02728	0.0359	0.049	0.01578	0.0278	0.03597	0.03449	0.02017
				V_EXP	0.01713	0.01597	0.01974	0.03129	0.01676	0.01609	0.02119	0.01976	0.01372
100	0	0.66275881	0.02838	V_LIVRE	0.0712	0.17464	0.17382	0.14387	0.18782	0.19202	0.19006	0.16826	0.05269
				V_LOG	0.05313	0.0592	0.06931	0.04295	0.05127	0.08135	0.05068	0.05555	0.05539
				V_EXP	0.02776	0.03477	0.02312	0.02551	0.02086	0.03306	0.0169	0.02151	0.02983
110	0	1.15820644	0.03403	V_LIVRE	0.07124	0.14901	0.23026	0.24712	0.24086	0.25027	0.26558	0.23599	0.08336
				V_LOG	0.12129	0.08614	0.12226	0.09887	0.11778	0.10055	0.11963	0.12116	0.08745
				V_EXP	0.04752	0.04213	0.03491	0.02232	0.04007	0.04695	0.04208	0.04256	0.04351
120	0	1.71714816	0.01918	V_LIVRE	0.15052	0.25481	0.26912	0.28444	0.29554	0.31555	0.2725	0.32619	0.10654
				V_LOG	0.13574	0.1871	0.12111	0.14477	0.13312	0.08333	0.12496	0.10507	0.10502
				V_EXP	0.07148	0.06238	0.07832	0.03887	0.06753	0.05156	0.04038	0.06969	0.06127

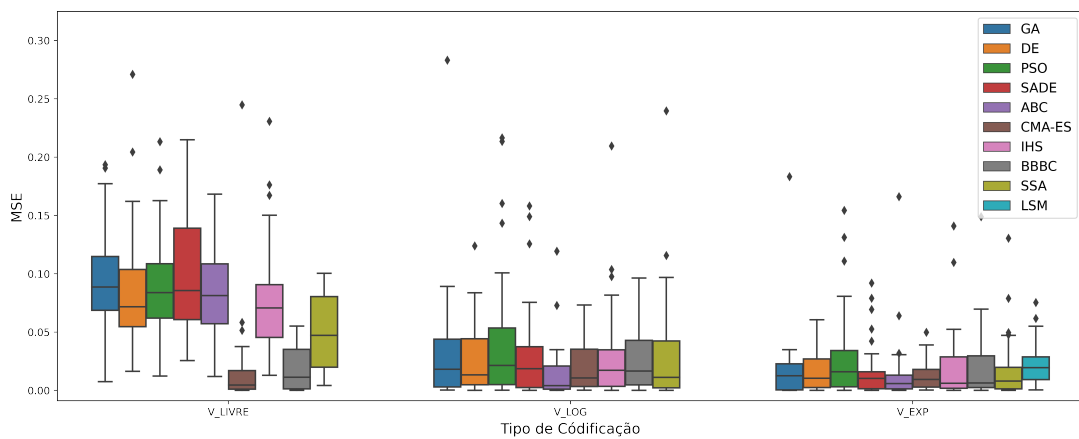
Fonte: O Autor

Figura 30 – MSE para Experimento II $V(t = 0) = 70$ 

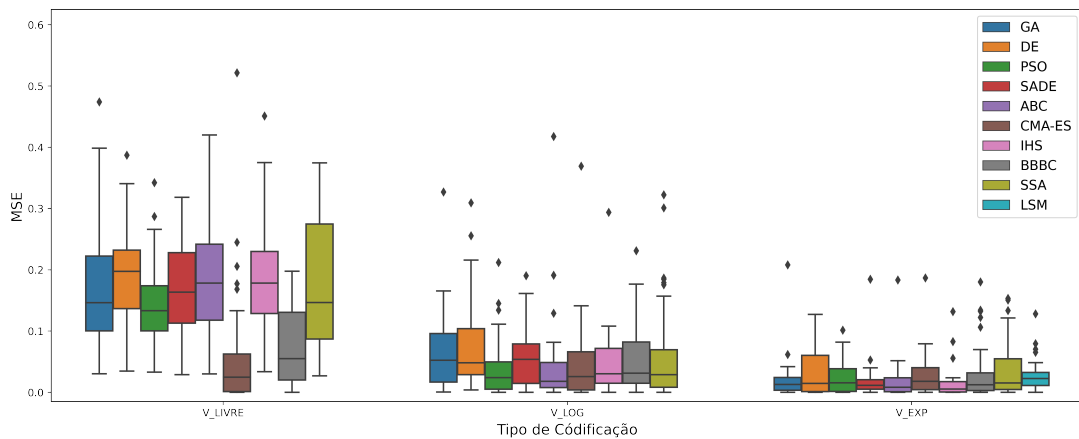
Fonte: O Autor

Figura 31 – MSE para Experimento II $V(t = 0) = 80$ 

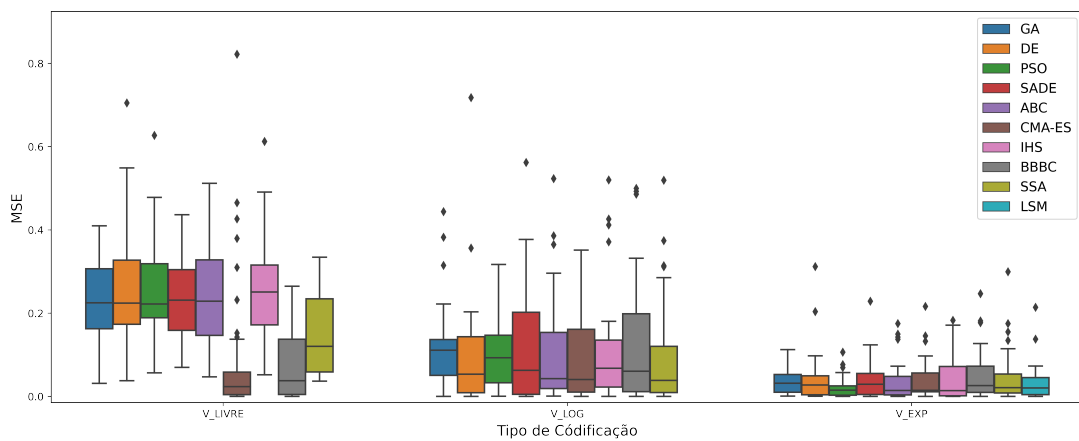
Fonte: O Autor

Figura 32 – MSE para Experimento II $V(t = 0) = 90$ 

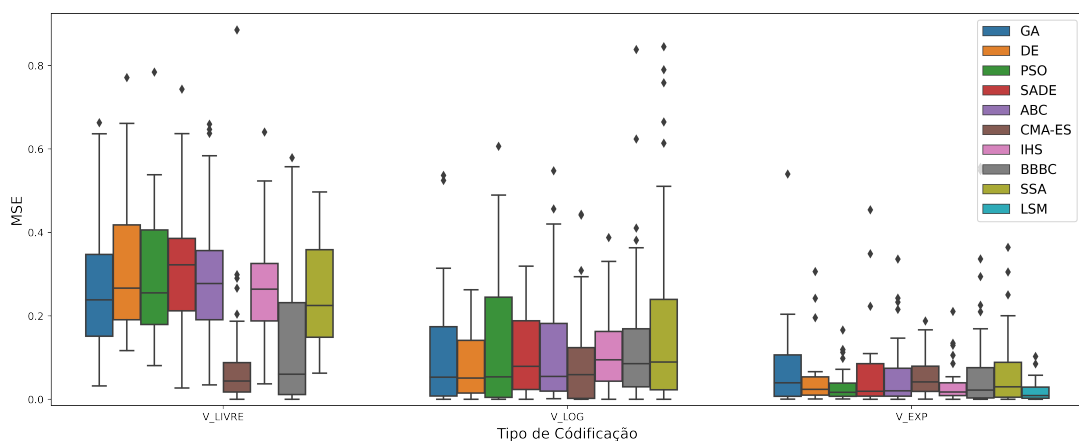
Fonte: O Autor

Figura 33 – MSE para Experimento II $V(t = 0) = 100$ 

Fonte: O Autor

Figura 34 – MSE para Experimento II $V(t = 0) = 110$ 

Fonte: O Autor

Figura 35 – MSE para Experimento II $V(t = 0) = 120$ 

Fonte: O Autor

4.2 CALIBRAÇÃO DO MODELO DE HESTON VIA APRENDIZADO DE MÁQUINA

Uma parte do desenvolvido e aprofundamento nos modelos de volatilidade estocástica consiste em analisar e estudar formas de calibrar os parâmetros destes modelos.

Todavia, nos cenários onde a volatilidade é desconhecida, maioria das situações reais, o desafio se apresenta de forma substancial. Neste âmbito, uma abordagem plausível é a utilização de modelos derivados da família GARCH para a estimação via inferência indireta. Todavia, abordagens alternativas são recorrentes na literatura, conforme citado na Seção 2.1.1.5.

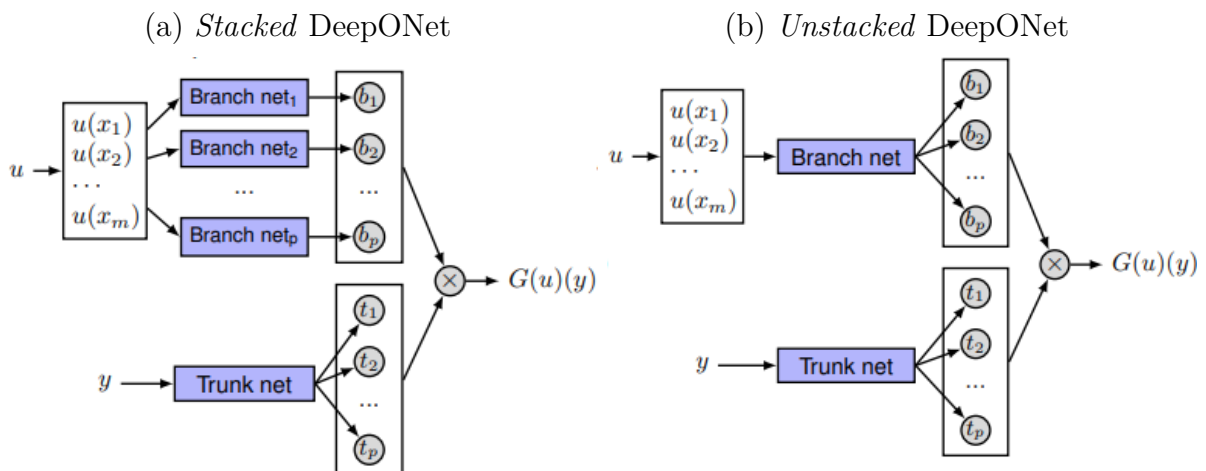
O Autor, no intuito de diversificar a forma para que modelos de volatilidade estocástica sejam calibrados, estudou a aplicabilidade de redes neurais para tal finalidade, aproveitando o início de algumas pesquisas utilizando deste ferramental. A aplicação de redes neurais como aproximadores universais de funções contínuas é bem conhecida em diversas áreas, apresentando resultados notórios e com alta precisão.

Nesta linha, Lu, Jin e Karniadakis (2020) e posteriormente Lu et al. (2021) propuseram o modelo da rede neural denominada *DeepONet* para o aprendizado de operadores não lineares por redes neurais. A *DeepONet* é dividida em duas sub-redes. A primeira codificando a função de entrada como uma RNA padrão denominada *branch net*, enquanto a *trunk net* (segunda ramificação) decodifica os locais/sinais para as funções de saída. A ideia central desta abordagem é aproximar uma função (G) a partir das entradas u e y , conforme Eq. (4.1), onde b_0 é o termo de viés.

$$G(u)(y) \approx \sum_{k=1}^p b_k \cdot t_k + b_0 \quad (4.1)$$

Adicionalmente, Lu, Jin e Karniadakis (2020) também apresenta duas topologias diferentes conforme mostrado na Fig. 36. A forma *Stacked* (Fig. 36a) com muitas redes de ramificação empilhadas paralelamente onde cada ramificação retorna um valor de b_k . A rede *Unstacked* (Fig. 36b) mescla as ramificações paralelas em uma única rede ramificada.

Figura 36 – Representação DeepONet

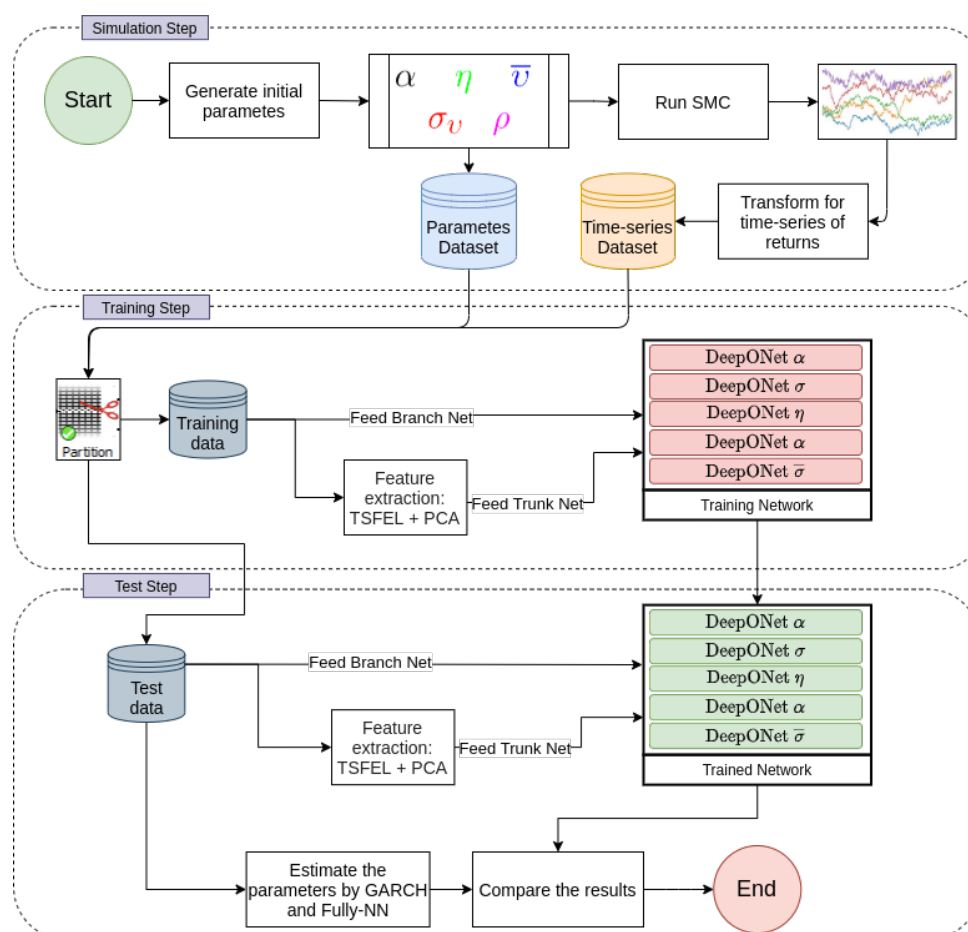


Fonte: Lu, Jin e Karniadakis (2020)

No intuito de aproveitar da notoriedade proporcionada pela *DeepONet*, a mesma foi estudada para que pudesse realizar o papel de estimador de parâmetro, haja vista Acho

que o trato dos dados em 2 níveis: dados diretos (série temporal) e dados representativos podem trazer ganhos a calibração de parâmetros. A metodologia utilizada foi apresentada sob a forma de *flowchart* na Figura 37. Em forma brevíssima, a ideia central é gerar séries de dados sintéticas a partir da SMC onde os parâmetros são conhecidos *a priori*, sendo estes parâmetros devem ser as saídas do modelo.

Figura 37 – Metodologia para estimação de parâmetros com DeepONet



Fonte: Leite, Yamim e Fonseca (2021)

Neste caso, a série de retorno alimenta a parcela *branch net* da rede enquanto o extrator de características¹ TSFEL (BARANDAS et al., 2020)² combinado com a Análise de Componentes Principais (PCA - *Principal Component Analysis*)³ são o insumo da

¹ A extração de características é um dos processos de redução de dimensionalidade no qual um conjunto inicial de dados brutos é reduzido a grupos a uma dimensão menor. Ela serve para selecionar e/ou combinar variáveis em características, reduzindo consideravelmente a quantidade de dados que devem ser processados, enquanto descrevem com precisão e completamente o conjunto de dados original.

² Para este estudo foram consideradas todas as características disponíveis no pacote, a lista de características pode ser encontrada em <https://tsfel.readthedocs.io/en/latest/descriptions/feature_list.html>

³ O PCA é uma técnica de análise usada para gerar componentes que expliquem a inter-relação entre muitas características dos dados, visando condensar a informação em um conjunto menor de variáveis com uma perda mínima de informação. Mais detalhes sobre o PCA

trunk net.

Neste estudo foi considerado que cada parâmetro é, *a priori*, independente e possui sua rede exclusiva para estimação, ou seja, sem *links* entre as redes, totalizando 5 redes. Assim, a rede pode otimizar os pesos das conexões de forma independente, permitindo a análise um-para-um. A título de comparação, foi montada uma rede neural padrão, denominada Fully-NN, considerando as mesmas condições de aprendizado para DeepONet e Fully-NN com períodos de treinamento = 1000, para as camadas ocultas na *branch net* e *trunk net* foram DeepONet: 2×40 , Função de Ativação = Linear para α e ρ e ReLU para as demais, função objetivo = MSE, Otimizador = Adam e Taxa de aprendizado = 0,001. A topologia em Fully-NN foi $[25 - 20 - 15 - 10 - 1]$ com ativação Sigmoid para todos os nós⁴.

Foram gerados aproximadamente 500000 caminhos/trajetórias, sendo estes subdividido em grupos de treinamento e teste com 80% e 20% dos dados respectivamente, para o modelo de Heston com parâmetros gerados aleatoriamente enter: $X_0 = [300; 1000]$, $v_0 = [0, 0.07]$, $\bar{v} = v_0 * [0.9, 1.1]$, $\alpha = [-0.05, 0.05]$, $\sigma_v = [0.001, 0.0501]$, $\eta = [0.005, 2]$, $\rho = [-.8, 0]$. Vale destacar que apenas os dados de teste são utilizados para comparar a abordagem DeepONet com a estimativa Fully-NN e GARCH. Reiterando que os resultados desta abordagem já foram publicados (LEITE; YAMIM; FONSECA, 2021).

A Figura 38 mostra a evolução do MSE nos dados de treinamento e teste para os casos de DeepONets. Destaca-se que apenas em η (Figura 38d) foi observado o potencial da abordagem para *overfitting*. Assim, foi considerado a rede com 200 épocas de treinamento para α , ρ , $\bar{\sigma}$ e σ_v , enquanto para η o melhor resultado foi a forma *Unstacked* com 400 épocas e *Stacked* com 250 épocas de treinamento.

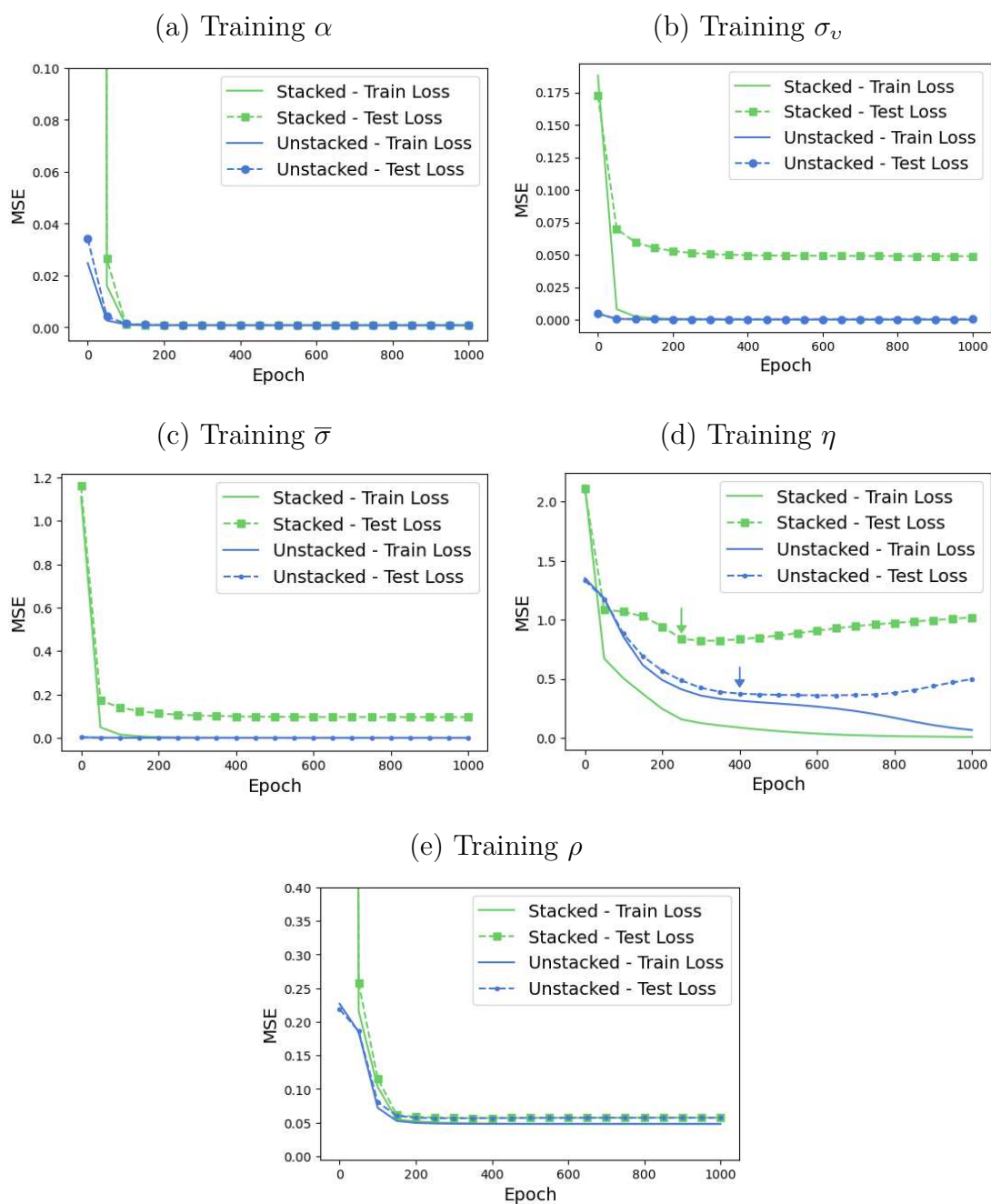
A Figura 39 apresenta o MSE para todos os parâmetros nas quatro abordagens consideradas. Observe que o erro na estimativa α revela uma pequena variação com vários *outliers* nas metodologias baseadas em rede neural, Figura 39a. A situação de equivalência não surpreende, pois o parâmetro *drift* é observável diretamente na série temporal de retorno, podendo ser calculado sem complicações significativas. O teste de Tukey indicou diferenciação apenas entre GARCH e a versão *Unstacked* da DeepONet.

Em ρ , Figura 39e é observável a distorção nos resultados quando comparados com o GARCH, enquanto o teste de Tukey classifica apenas os estimadores baseados em redes neurais como equivalentes. O MSE para η , Figura 39d, mostra os *outliers* apenas nos estimadores DeepONet. No entanto, o teste estatístico indicou a equivalência entre os modelos *Unstacked*, *Fully-NN* e GARCH. Ao contrário de α , essas variáveis são mais complexas de calibrar devido à existência de endogeneidade entre os parâmetros.

podem ser encontrados em Bishop (2006).

⁴ A ativação linear foi considerada no nó de saída para α e ρ . Os valores entre colchetes indicam o número de neurônios em cada camada. Outras topologias foram testadas na abordagem Fully-NN, mas sem ganho significativo

Figura 38 – Evolução Treinamento na DeepONets



Fonte: Leite, Yamim e Fonseca (2021)

A variável \bar{v} , Figura 39c, mostra a clara vantagem do modelo Unstacked na comparação com os demais, sendo o modelo Stacked com menos precisão, enquanto GARCH e Fully- NN não são estatisticamente diferentes pelo teste de Tukey. O último caso, σ_v , é mostrado na Figura 39b a superioridade do modelo *Unstacked*, mas seguida de perto pelo Fully-NN. Assim, o teste estatístico não indicou diferenciabilidade entre os modelos *Unstacked* e Fully-NN enquanto as outras comparações são estatisticamente distintas.

No geral, esses resultados indicam que os modelos *Unstacked* e Fully-NN são equivalentes e retornam um resultado semelhante, com exceção do caso \bar{v} . Outra situação

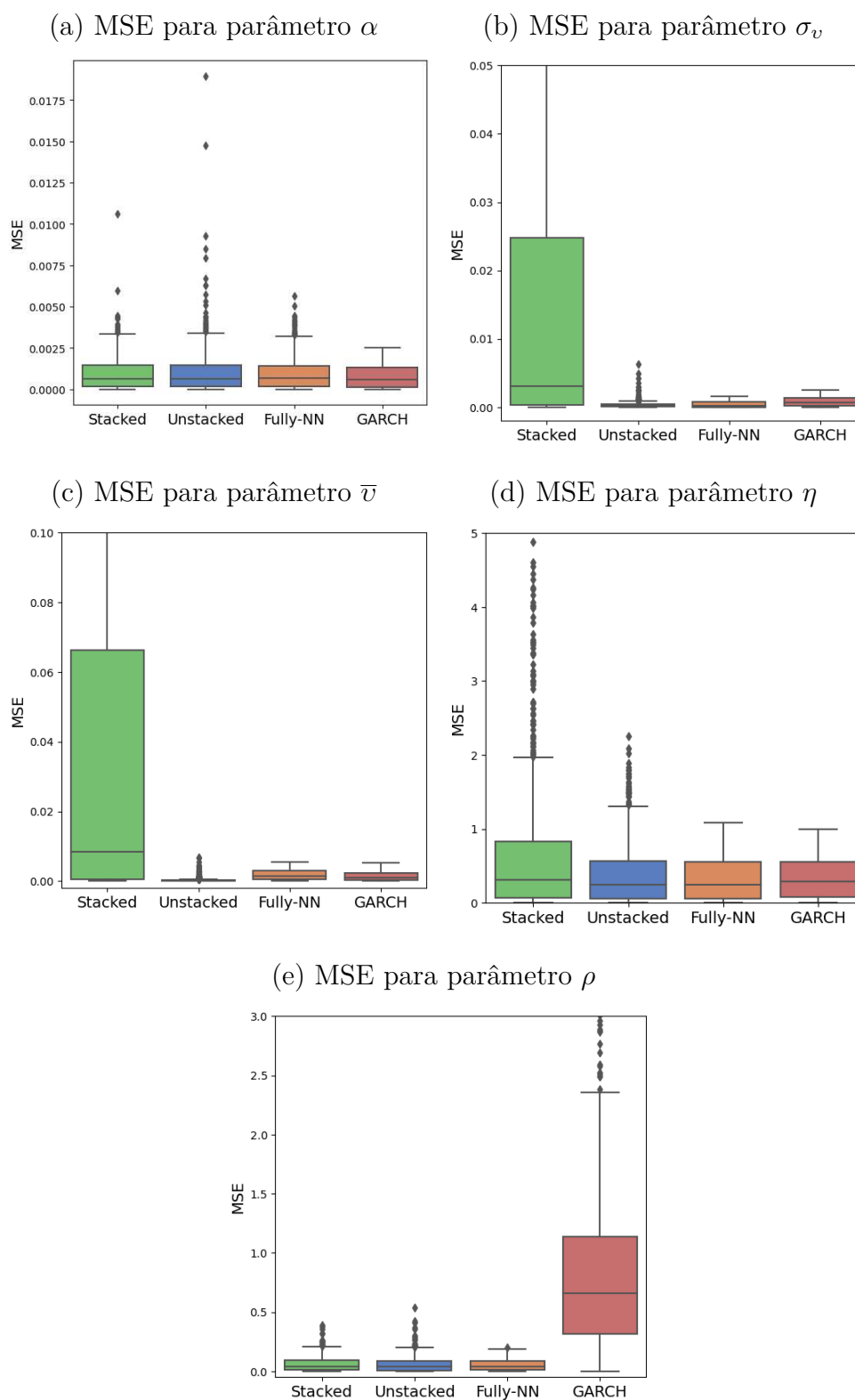
coincide com a observada em (XIE et al., 2007), onde o aumento do número de camadas ocultas e neurônios não melhora o desempenho. Adicionalmente, diferentes combinações com o número de camadas ocultas foram testadas, mas não foram encontrados resultados com diferenças significativas.

A observação sobre as camadas ocultas sugere uma visão essencial sobre a limitação em torno do número de camadas ocultas em abordagens RNA para calibrar os parâmetros do Modelo Heston. A hipótese inicial recai sobre a metodologia de alimentar as redes diretamente com as séries temporais, podendo não ser suficiente para que o DeepONets e o Fully-NN extraiam todas as informações pertinentes sobre os dados para então estimar os valores.

Esta hipótese é reforçada pela observação introduzida em (TOMAS, 2018) sobre a sobreparametrização do modelo de Heston. Esta observação implica na restrição de algum modelo de aprender o mapa de nuances em torno dos valores dos parâmetros. Em outras palavras, a complexidade de modelos estocásticos sofisticados exige um upscale na relação dos dados de entrada e saída, e duas ou mais combinações de parâmetros podem levar a valores semelhantes, fazendo com que o otimizador fique preso em um mínimo local.

A principal desvantagem é a limitação em torno do tamanho da série temporal, uma vez que o comprimento do tempo representa o número de recursos que alimentam a rede e essa condição restringe. Em outras palavras, é necessário treinar novamente as redes neurais todas às vezes que a série temporal mudar de comprimento. Todavia, tais detalhes não desmerecem a capacidade de calibração desta metodologia, podendo então ser considerada eficiente para estimar parâmetros do modelo de Heston.

Figura 39 – MSE na estimativa dos parâmetros com diferentes abordagens



Fonte: [Leite, Yamim e Fonseca \(2021\)](#)

4.3 AVALIAÇÃO DE PROJETOS FOTOVOLTAICOS

Esta seção contém os resultados e análises relacionados ao problema de se investir em um projeto fotovoltaico, sob a ótica do consumidor final que busca minimizar os dispêndios com eletricidade e considerando a nova legislação em vigência no Brasil. Para tanto, foi considerado o caso onde o prosumidor (agente que consome e gera simultaneamente) possui acesso ao CAPEX como fundo de reserva e deseja utilizar o mesmo para investir num projeto solar.

Em forma sucinta, o projeto fotovoltaico pode atender a 100% ou 50% do seu consumo médio, sendo que a decisão sobre qual projeto escolher depende das condições de mercado. Adicionalmente, o prosumidor pode alocar o valor restante do CAPEX em um ativo de risco ou não, criando várias possibilidades de execuções que podem ser exercidas simultaneamente. Ou seja, o agente pode alocar 50% do CAPEX no projeto solar que supra o mesmo percentual de consumo enquanto o restante do CAPEX está sobre um ativo de risco.

A inserção de incertezas no modelo ocorre através da modelagem estocástica de variáveis que interferem no resultado do projeto. Como fontes de incertezas foram consideradas o preço da energia elétrica e o preço/retorno da IVVB11 como ativo de risco. Dada das características de flutuação do preço da energia elétrica, como presença de heterocedasticidade e eventos que superar o retorno médio ± 2 desvios, optou-se por comparar o impacto da modelagem do preço da eletricidade via modelo de volatilidade estocástica de Heston contra a abordagem via MGB com jumps. Já o valor IVVB11, ativo de risco, foi modelado como um MGB padrão. Mais detalhes estão descritos na Seção 3.2.

Todas as análises presentes nesta seção foram conduzidas utilizando o esquema de paralelização delineado na Figura 10. Além disso, a compilação dos códigos também foi realizada para a execução de todos os testes. Para fins de comparação, a avaliação de um único candidato à solução, considerando os parâmetros padrões adotados para o projeto, requer, em média, 1 minuto e 46 segundos para calcular o valor desse candidato. Ao otimizar a linguagem de execução, o tempo médio de avaliação diminui para 1,24 segundos, resultando em um aumento significativo na velocidade de execução, aproximadamente 85 vezes mais rápida. Essa otimização é especialmente relevante, visto que aborda o principal problema destacado por [Musshoff e Hirschauer \(2010\)](#).

4.3.1 O Aspecto da simulação na modelagem de incertezas

A Figura 40 apresenta o histograma da distribuição dos preços simulados de energia elétrica em diferentes intervalos de tempo quando a simulação estocástica do processo de Heston é utilizada, considerando os parâmetros apresentados na Tabela 8. Já a Figura 41 apresenta o histograma da distribuição de preços para o MGB+*Jumps* nos mesmos instantes de tempo para sua contraparte do processo de Heston.

A comparação entre as figuras supracitadas é perceptível que ambos os preços apresentam valores ligeiramente próximos nos momentos iniciais, mas com o avanço dos passos simulados começa a surgir a divergência nos preços a favor do $MGB+Jumps$. Todavia, apesar das médias e medianas para o $MGB+Jumps$ estarem próximas, o mesmo não é observado quando se adota o modelo de Heston, observando a assimetria positiva na distribuição, além do excesso de curtose, indicando a existência de eventos ainda mais extremos do que os observados com a presença *jumps* na modelagem estocástica.

Um exemplo na relação entre a modelagem estocástica via $Heston \times MGB + Jumps$ pode ser observada na Figura 42⁵. Note que apesar de ambas as simulações alcançarem valores próximos ao final de mil passos, Figura 42a, o comportamento entre os dois pontos são distintos. A principal distinção advém do comportamento oscilatório mais intenso na simulação baseada em Heston. Na Figura 42b também é perceptível um comportamento similar entre as simulações, sendo que fica mais evidente a presença do impacto dos saltos $MGB+Jumps$.

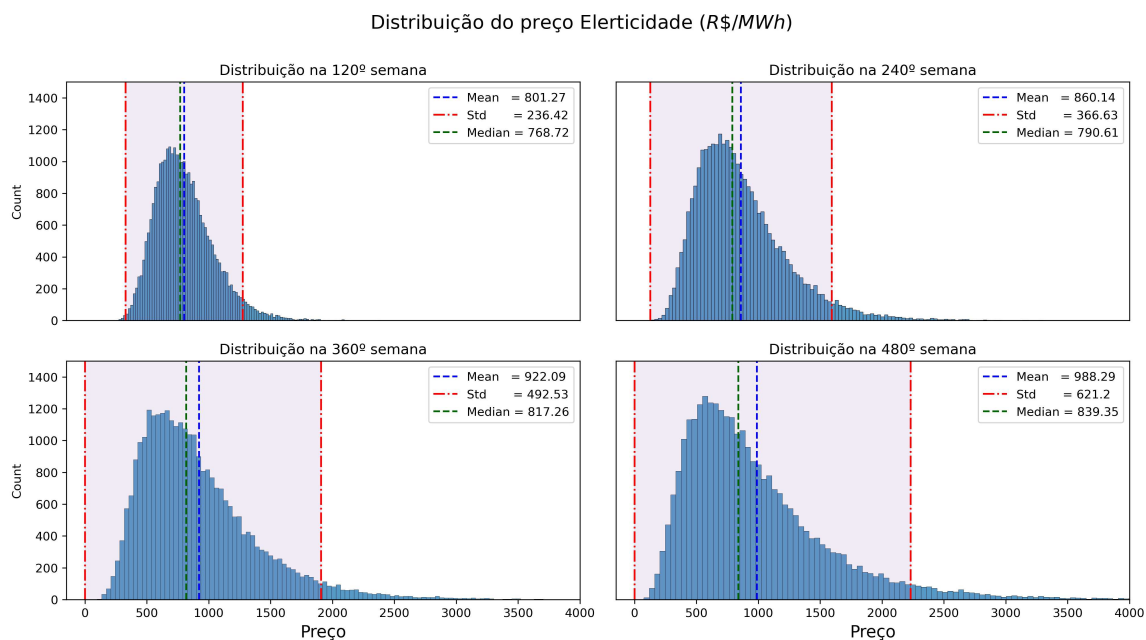
No tocante da modelagem estocásticas é visível o impacto da modelagem de incertezas, sendo que a abordagem via Heston e sua modelagem estocástica de volatilidade demonstra de forma mais intensa o comportamento errático de maior imprevisibilidade para a simulação final. Tal comportamento explica o aumento na dispersão dos resultados observados no histograma da Figura 40, haja vista que apesar do crescimento do preço na média das simulações, devido $\alpha > 0$, as trajetórias geradas pelo modelo de Heston são mais difusas e mais próximas de comportamentos reais. Portanto, dada as naturezas geradas por cada processo de simulação, é plausível esperar que estas características se reflitam no comportamento de decisão do modelo.

Outra ilação possível advém da relação de equilíbrio entre os momentos de volatilidades mais elevadas e mais baixas, podendo ser interpretado como dominância de comportamento. Em outras palavras, em determinados momentos da simulação a parcela referente ao processo de volatilidade assume valores significativos, dominando a parcela referente ao MGB e criando comportamento mais extremos e vice-versa. Os eventos de cauda gerados por Heston são importantes no âmbito geral para o controle de exposição ao risco do negócio.

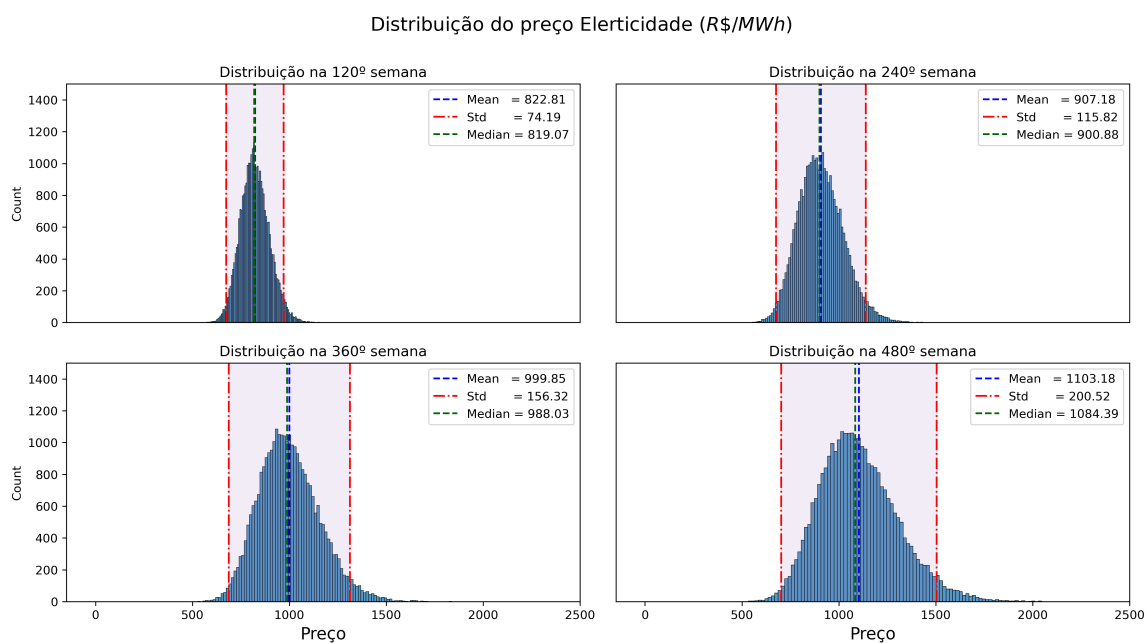
A relação entre as parcelas dependem dos parâmetros utilizados e do esquema de truncamento adotado, haja vista que sequencias de volatilidade zero (truncadas) tornariam o momento puramente determinístico e proporcional a α . Para o problema, estudar essa situação se torna pertinente, pois, a condição de Feller não é atendida. Essa inferência reforça a necessidade intrínseca da calibração eficiente e precisa dos parâmetros de modelos mais complexos, sendo este um campo pouco explorado da literatura e com significativo potencial de impacto nos resultados.

⁵ A simulação segue os mesmos parâmetros da Tabela 8

Figura 40 – Histograma das simulações em diferentes passos - Heston



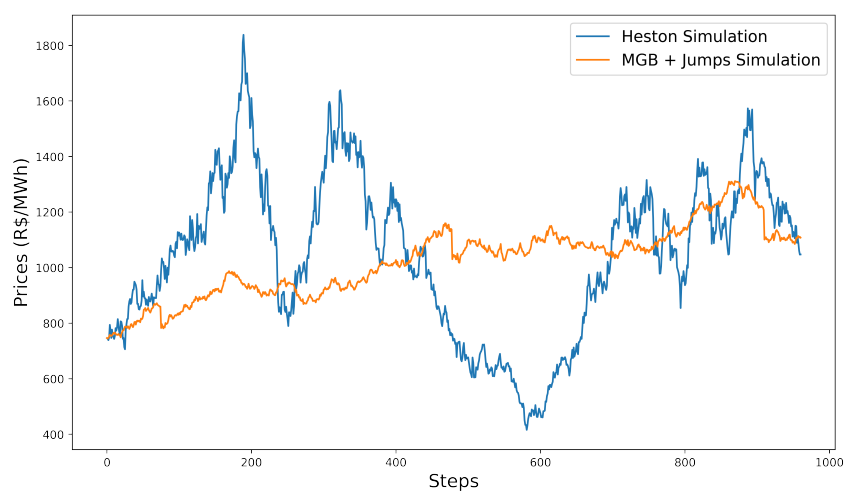
Fonte: O Autor

Figura 41 – Histograma das simulações em diferentes passos - MGB + *Jumps*

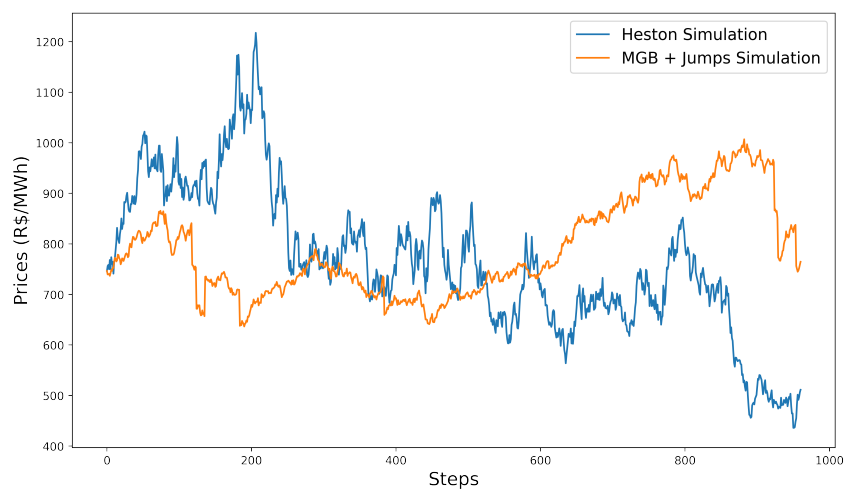
Fonte: O Autor

Figura 42 – Comparação de trajetórias nas simulações Heston \times MGB + *Jumps*

(a) Simulação 1



(b) Simulação 2



Fonte: O Autor

4.3.2 Avaliação do problema de decisão

O problema de decisão envolvendo energia solar foi analisado considerando 30 gerações de evolução e um total de 100 repetições do experimento, considerando os candidatos a solução do tipo *V_EXP* combinados com o algoritmo de otimização DE, conforme o modelo de simulação descritos na Seção 3.2 e otimização descrito na Seção 3.1.3.

A escolha do algoritmo otimizador baseado na DE decorre da escolha do autor, uma vez que utilizando como base o arcabouço de resultados obtidos na Seção 4.1, os quais demonstraram a indiferença entre meta-heurísticas no processo de otimização baseado na codificação do tipo *V_EXP*, tornando a escolha do mesmo indiferente. O que é inválido para todas configurações de codificação da regra de decisão testadas. Já a escolha da codificação *V_EXP* decorre da constância dos resultados obtidos.

Neste contexto, foi simulado os experimentos considerando as duas abordagens estocásticas, Heston e *MGB+Jumps*, e foi adicionalmente verificado o impacto da nova legislação vigente (doravante apenas NMGD para representar a situação onde o promissor receberá um abatimento no valor da energia injetada) e aplicável para projetos residenciais fotovoltaicos, recordando que questões relacionadas aos requerimentos de engenharia para o projeto são considerados satisfeitos.

No tocante à precificação, a Figura 43 apresenta as distribuições de resultados para os 4 casos estudados, sendo que os valores mostrados são oriundos de simulações *out-of-sample* daquelas usadas na etapa de otimização. Na mesma figura é perceptível o efeito de cauda causado pela modelagem estocástica baseada em Heston, a cauda da distribuição está em consonância com o observado na Figura 40, onde a assimetria positiva gerada pela distribuição move a média dos resultados para a direita. Em contrapartida, os resultados baseados em *MGB+Jumps* mantém uma proximidade maior com distribuições normais, apesar da presença de *jumps*.

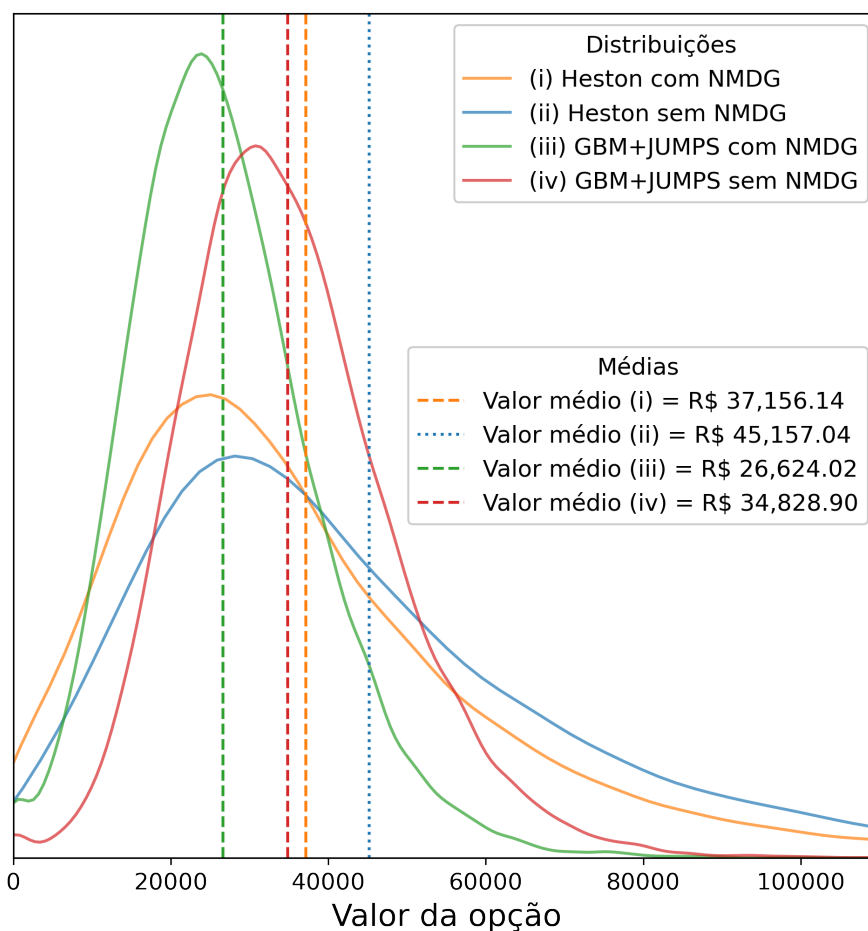
Analisando a Figura 43 pode-se inferir que a opção considerando a modelagem estocástica via Heston apresenta valor médio de R\$ 37,156.14, indicando que o prosumidor economizará em média o referido valor caso siga o conjunto de decisão e opção descrito. A economia é mensurada ao subtrair o custo total incorrido caso o prosumidor não tome decisão e se mantenha pagando o valor integral do consumo energético pelo custo total efetivo caso as opções sejam exercidas nos momentos indicados pelos gatilhos.

O caso da modelagem estocástica via *MGB+Jumps* resulta em uma economia média de R\$ 26,624.02, valor inferior à modelagem via volatilidade estocástica. O valor inferior é um indicativo da vantagem do modelo de opções em ambientes de incerteza, sendo que as opções fornecidas são mais exploradas quanto mais incerto é o futuro (conforme será comentado mais adiante).

Os valores de economia proporcionados pela opção são inferiores quando compa-

rados na situação de inexistência de NMDG, mas a nova regulamentação não é suficiente para negar uma economia ao prosumidor ao longo do tempo, independente do modelo estocástico escolhido. Nos próximos parágrafos serão apresentados os impactos que o NMDG tem sobre as decisões dos futuros prosumidores, sendo a hipótese inicial que é de um atraso no investimento por parte dos prosumidores como forma confirmação da viabilidade do investimento.

Figura 43 – Distribuição dos resultados para os casos considerados



Fonte: O Autor

Antes de aprofundarmos sobre as decisões, a Tabela 20 resume as principais estatísticas relacionadas a distribuições dos resultados. Um ponto que chama atenção na tabela são os valores máximos apontados obtidos, alguns deles invisíveis na Figura 43. Todavia, apesar de os valores máximos serem elevados, em especial na modelagem baseada em Heston, o quantil 75% corresponde a uma 1/9 do ponto máximo para os resultados oriundos da modelagem via Heston e aproximadamente 1/4 para o MGB+*Jumps*.

Esses valores foram destacados já influenciam diretamente no valor médio das opções, haja vista que eventos mais extremos são simulados pela abordagem de Heston. Na comparação entre média e quantil 75% os valores começam a mostrar consonância entre si, variando entre um acréscimo de entre 22% e 29% na relação. A característica de

Tabela 20 – Descrição dos resultados para avaliação de projeto fotovoltaico

	Heston com NMDG	Heston sem NMDG	GBM+JUMPS com NMDG	GBM+JUMPS sem NMDG
Média	37,156.14	45,157.04	26,624.02	34,828.90
Desvio	26,702.06	32,079.19	11,947.82	13,333.60
Mínimo	0.00	0.00	0.00	0.00
25%	19,418.64	23,796.99	18,411.08	25,677.71
Mediana	31,355.08	37,648.01	25,458.86	33,518.68
75%	48,134.57	58,112.54	33,513.52	42,618.33
Máximo	348,989.57	421,793.19	119,654.42	119,460.16

Fonte: O Autor

assimetria é confirmada analisando a relação entre as médias e medianas da distribuição de resultados.

Então pode-se inferir que o modelo de Heston gera um comportamento ainda mais intenso nas caudas das distribuições de preços do que o causado pela modelo baseado em MGB+*Jumps*, apesar da análise em termos de medianas não apresentarem tamanha distância. Portanto, a adoção do modelo de volatilidade estocástica deve ser vinculada com atenção ao precificar opções, uma vez que essa idiosincrasia pode impactar de forma significativa o resultado. Esta observação reforça a necessidade de uma estimação adequada e precisa aos parâmetros de modelos mais sofisticados.

Analisando o impacto do NMGD foi encontrado uma redução de aproximadamente 18% no valor da opção quando a modelagem estocástica adota o processo de Heston e de aproximadamente 24% de redução quando consideramos a modelagem via MGB+*Jumps*, sendo este um contraste ao impacto do NMGD na TUSD (aproximadamente 26% para a CEMIG).

Caso a mesma análise seja feita considerando a mediana das distribuições, são encontrados valores semelhantes para o impacto do NMGD. Apesar destas observações, no âmbito geral, o NMGD reduz o valor das opções para o prosumidor, reduzindo a atratividade do modelo. Todavia, a redução não é suficiente para inviabilizar projetos fotovoltaicos residenciais em todos os cenários avaliados.

Uma métrica interessante é a probabilidade das opções não possuírem valor, sendo este resultado a quantidade de vezes que as simulações resultaram em situações totalmente adversas ao prosumidor. Considerando a abordagem baseada em Heston + NMGD aproximadamente 1.27% dos casos a opções não possuem valor, enquanto para o modelo baseado em MGB+*Jumps* possui 0.72% dos casos, ou seja, das 60000 simulaçõesm aproximadamente 763 e 432 caminhos levaram ao valor 0, para Heston e MGB+*Jumps*, respectivamente. Desconsiderando o NMGD, são obtidos 0.65% e 0.51% para os modelos de Heston e MGB+*Jumps*, respectivamente.

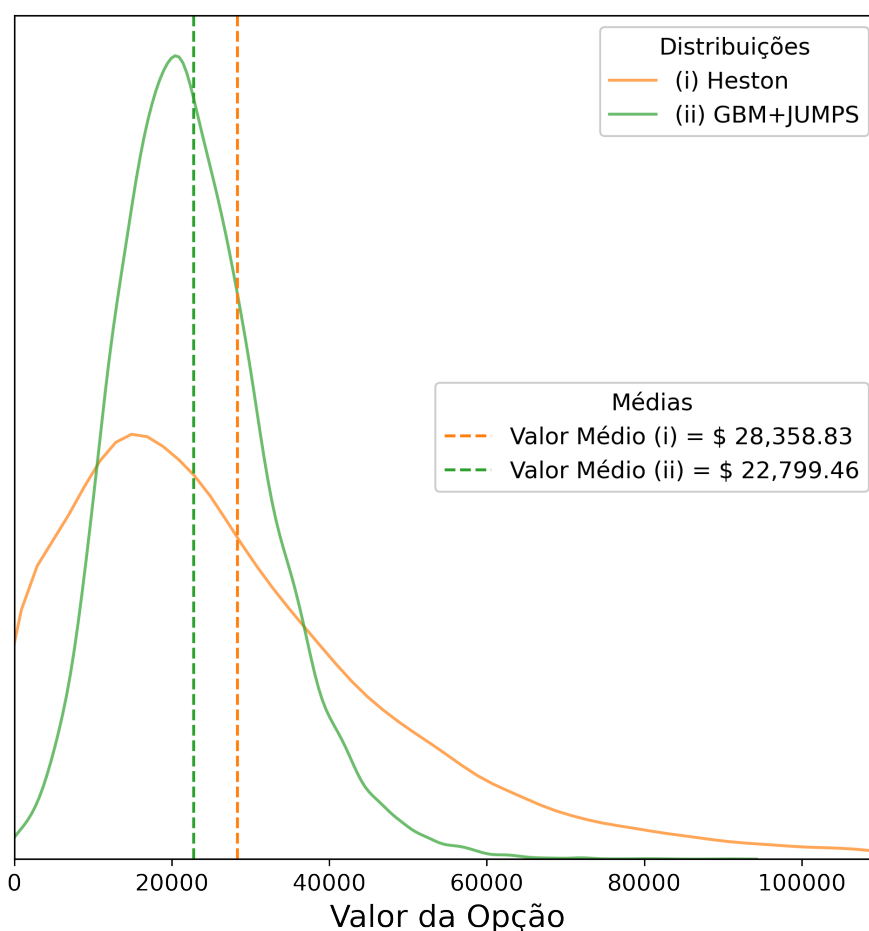
Ao analisar o índice de zeros, tem-se que o NMGD quase que dobrou a probabilidade o número de eventos onde a opção não teria valor, quando considerado a metodologia

de volatilidade estocástica, sendo que todos os casos estão associados a queda nos níveis de preços após o exercício das opções de investimento total. Todavia, as opções de investimento tem valor > 0 em mais de 95% das vezes, torando essa combinação de investimento viável em qualquer situação considerada neste trabalho.

A Figura 44 apresenta os resultados da precificação de opção quando apenas o Estado 1 é exercível e considerando apenas o cenário onde o NMGD está presente. Nesta imagem é possível reparar que a existência das opções de investimento parcial (Estado 2) e investimento no ativo de risco (Estado 3) aumentam o valor das opções de R\$ 28,358.83 para R\$ 37,156.14 no caso de Heston e de R\$ 22,799.46 para R\$ 26,624.02 quando o preço da energia elétrica segue um MGB+*Jumps*, ou seja, um incremento de 31% e 16.77% respectivamente em termos de valores médios.

Estes valores confirmam o valor da existência das opções de investimento parcial e do investimento no ativo de risco como forma complementar a decisão do investimento no projeto fotovoltaico completo. Essa característica é mais proeminente para a situação com maior incerteza vinculada (modelagem via volatilidade estocástica).

Figura 44 – Distribuição dos resultados para Estado 1 como única opção



Fonte: O Autor

A Tabela 21 sumariza as principais estatísticas das distribuições observadas na

Figura 44. Na referida tabela é perceptível o comportamento de cauda causado pela abordagem da modelagem via Heston, representado pelo valor máximo alcançado nas simulações, enquanto a mediana da distribuição de Heston é superior ao MGB+*Jumps*. Um ponto importante para atenção é o desvio dos resultados, indicando a maior variabilidade quando o modelo de volatilidade estocástica é assumido no problema, sendo este valor muito representativo quando comparado a média.

Outro ponto importante está na observação das medianas e do primeiro quantil da distribuição dos resultados, onde a diferença entre os modelos estocásticos são menores e com vantagem para o modelo baseado no MGB+*Jumps* no primeiro quantil, o mesmo não sendo repetido quando todas as opções estão disponíveis (ver resultados da Tabela 20). Reiterando o ganho é proporcionado pela existência de mais opções e do maior grau de incerteza.

Tabela 21 – Descrição dos resultados para Estado 1 como única opção

	Heston com NMDG	GBM+JUMPS com NMDG
Média	29,371.64	22,799.46
Desvio	24,664.30	9,918.32
Mínimo	0.00	0.00
25%	12,465.05	14,501.47
Mediana	23,832.55	19,837.50
75%	39,859.07	25,970.03
Máximo	292,753.21	82,277.53

Analisando novamente a taxa de zeros nas amostras, foi observado que em 5% dos casos a existência isolada da opção de investimento total levou a uma opção que não possuía valor, para o caso considerando volatilidade estocástica. Já para o caso considerando MGB+*Jumps* foi observado uma taxa de zeros em 2.5% das simulações. Portanto, a combinação de opções de investimento parcial e investimento no ativo de risco também se mostrou eficaz para reduzir a taxa de zeros nas simulações, o que traz um conforto maior ao prosumidor ao mitigar cenários onde o investimento se mostrou inviável.

Ao considerar as situações descritas anteriormente é possível verificar que as combinações de opções traz sim ganhos ao valor da opção, mas também melhora as boas características nos piores cenários ao reduzir a probabilidade de eventos ruins ao prosumidor (não chegando a zerar completamente). Além disso, existe uma melhora na relação entre o valor médio das opções e seu desvio, haja vista que a inclusão das opções de investimento parcial e investimento no ativo de risco aumentou o valor médio da opção e manteve o desvio dos resultados nos mesmos patamares quando a fonte de incerteza segue o modelo de Heston. A relação valor/desvio vai de 1.19 quando apenas o Estado 1 para 1.39 quando todas as opções estão disponíveis. Todavia, o mesmo não é observável para

o caso MGB+*Jumps* onde a relação vai de 2.29 (apenas o Estado 1) para 2.23, sendo esta uma redução nesta relação.

A melhora da relação valor / desvio já era esperado, pois a inclusão de opções permite a flexibilidade de mudança em cenários potencialmente ruins, dando margem para o exercício de contramedidas. Para o caso caso MGB+*Jumps* a queda na relação quando todas as opções são disponíveis é oriunda do acoplamento de um novo processo estocástico (IVVB11) cuja a variância é maior do que o processo ($\sigma_{ri} > \sigma_{ee}$), resultando no aumento da variabilidade de decisões e conseqüentemente de resultados, a questão da variabilidade de decisões será abordada na Seção 4.3.2.1.

4.3.2.1 Análise do timing de decisão

Uma vez calculado o valor da opção considerando medida neutra ao risco é possível encontrar a taxa de desconto da opção, ou seja, se faz possível utilizar a simulação real e analisar aspectos relacionados a estratégias e probabilidades de decisão. Para tanto, a simulação de preços foi refeita considerando o prêmio de risco como zero, neste passo o experimento foi repetido com diferentes taxas de desconto até com que o resultado médio da opção fosse equivalente ao resultado apresentado na Tabela 20. Deste ponto em diante, todos os resultados apresentados consideram a medida real, sendo esta importante para efeitos de análise relacionadas a probabilidade de exercício e estratégias de operação.

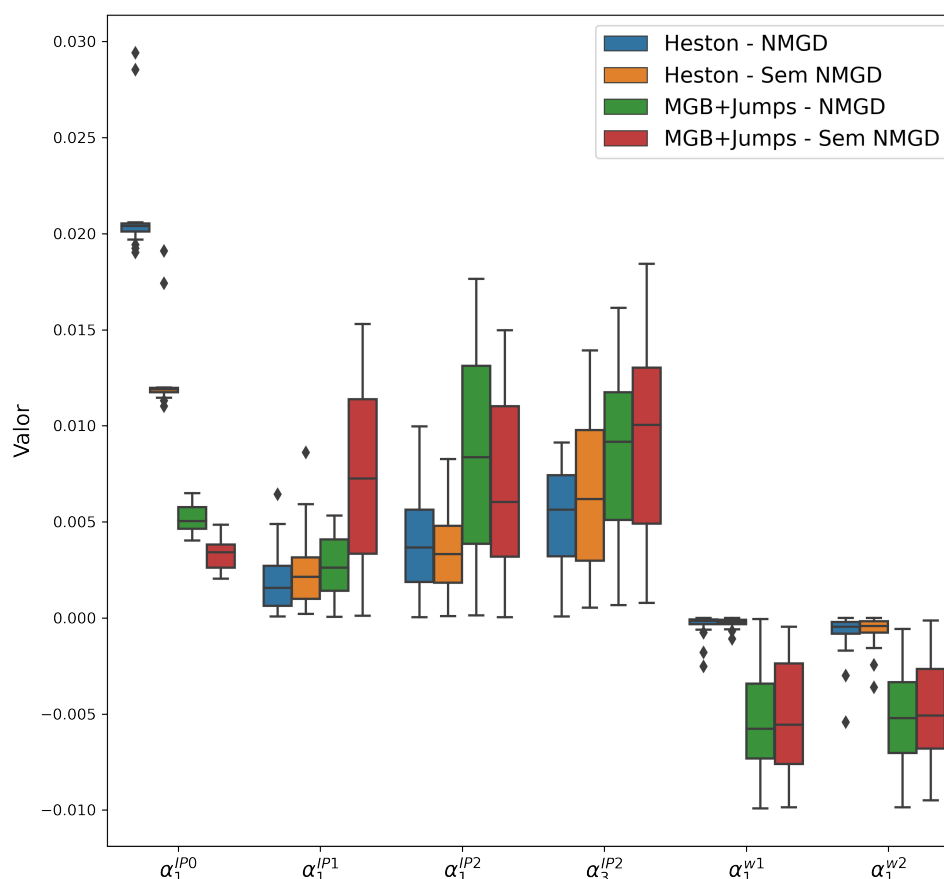
A Figura 45 apresenta os gatilhos obtidos para os casos considerados. Note que os valores de gatilho mudam conforme regime de desconto, com e sem o NMGD, criando cenários diferentes conforme o momento. Outro ponto importante, está na relação entre os parâmetros dos gatilhos para o MGB+*Jumps*, sendo que há uma redução na barreira de entrada para o Estado 1, IP0, indicando uma preferência para o exercício imediato desta opção.

Outra observação importante está na relação entre α_1^{IP0} e a presença ou não do NMGD, onde este último induz o modelo a exercer antecipadamente a opção de investir completamente no projeto solar. Este valor já era esperado devido à lógica por trás da legislação que mitiga o desconto, fazendo com que na ausência do mesmo, seja ótimo exercer de forma antecipada e garantir o desconto na eletricidade de forma mais breve.

Outro caso, refere-se as zonas de esperas entre as opções, sendo maiores para o caso MGB+*Jumps*, indicando que preferência deste modelo em postergar as decisões, haja vista que a combinação de zonas de espera e gatilhos maiores resultam em zonas de esperar mais significativas. A Tabela 22 apresenta a média dos valores mostrados na Figura 45, desconsiderando os resultados *outliers* (valores foram da zona calculada pela média $\pm 2 \times \text{std}$).

Para clarificar o comportamento dos gatilhos em diferentes ambientes de decisão, a Figura 46 representa visualmente o comportamento do conjunto de gatilhos, para o preço

Figura 45 – Variação dos parâmetros dos gatilhos



Fonte: O Autor

Tabela 22 – Valores médios para gatilhos V_EXP no problema de investimento no projeto solar

	α_1^{IP0}	α_1^{IP1}	α_1^{IP2}	α_3^{IP2}	α_1^{w1}	α_1^{w2}
Heston - NGMD	0.0204	0.0011	0.0046	0.005	-0.0003	-0.0003
Heston - Sem NGMD	0.0127	0.0031	0.0038	0.0073	-0.0002	-0.0006
MGB+ <i>Jumps</i> - NGMD	0.0052	0.0028	0.0084	0.0082	-0.0054	-0.0055
MGB+ <i>Jumps</i> - Sem NGMD	0.0033	0.0073	0.0072	0.0094	-0.0052	-0.0047

Fonte: O Autor

da energia, em cada abordagem considerada, enquanto a Figura 47 mostra o comportamento do conjunto de gatilhos para o preço do IVVB11.

Ao analisar a Figura 46a é possível observar que para o caso da presença do NMGD ocorre o aumento no gatilho de entrada para o Estado 1, dificultado a entrada no projeto completo, ao mesmo tempo que a zona de exercício do Estado 2 é aumentada, além do gatilho de espera entre o Estado 1 e Estado 2 ser reduzido (expoente para V_EXP próximo de 0).

Ao considerar a zona correspondente ao Estado 2, é notável que sob o cenário sem NMGD a saída deste estado é facilitada, haja vista a linha azul pontilhada estar acima

da linha azul preenchida, indicando que sem o desconto proporcionado pelo NMGD o investimento de risco se torna mais atrativo, fato este corroborado com a Figura 47, pois em todos os cenários, o gatilho para o caso sem o NMGD é superior aos demais (dificultado a entrada na opção). Ou seja, confirma-se que o NMGD torna mais atrativo outros investimentos de risco ao investimento solar.

Por outro lado, na Figura 46b, a modelagem considerando MGB+*jumps* resultou no modelo que designa a entrada no Estado 1 o mais breve possível, quando comparados a abordagem via Heston, como solução para α_1^{IP0} . A elucidação deste resultado também pode ser entendido ao comparar as zonas de esperas entre nos Estado 1 e Estado 2, conforme as Figuras 46b e 46a, onde exercício antecipado da opção para o Estado 1 na modelagem MGB+*jumps* é combinado ao resultado da respectiva região de espera, o que contrasta com o platô para a zona espera e o incremento no valor para o exercício na abordagem considerando Heston, equivalente a uma rotação em torno do preço da expiração.

Ao analisar os gatilhos correspondentes entre a Figura 46b e Figura 46a é visível que a entrada em Estados alternativos ao Estado 1 é dificultado quando o NMGD não está ativado, sendo especialmente restritivo para o caso MGB+*jumps*. Esta observação é corroborado ao visualizar o impacto do NMGD na decisão de entrada do Estado 2 e para o Estado 3, sendo este resultado aquele com as maiores zonas de espera.

Para ambas as abordagens estocásticas, poucas diferenças foram encontradas para o gatilho relacionado a entrada na opção do ativo de risco, considerando os preços da energia elétrica. Essa característica pode ser interpretada considerando duas situações que se relacionam, sendo a primeira vinculada ao ponto inicial da simulação referente a energia elétrica, que começa em uma zona superior à zona de entrada no Estado 3. Ou seja, o Estado 3 é ativado quando os preços da energia estão em queda, neste cenário, a ativação ocorre quando os preços atravessam a região de espera no Estado 2.

A segunda característica advém da necessidade que dois gatilhos estejam ativados para que o Estado 3 seja exercido. Portanto, considerando que pela parte da energia elétrica, a ativação acontece quando o preço cruza a zona de espera, o fator limitante para o exercício do Estado 3 fica por conta do gatilho para o IVVB11, este por sua vez apresenta diferenças entre as abordagens estocásticas. Em outras palavras, como a ativação do Estado 3 depende *a priori* da zona de espera no Estado 2 e do gatilho em IVVB11, o gatilho α_1^{IP2} apresenta pouca relevância no processo de decisão e otimização.

A baixa relevância do gatilho α_1^{IP2} também decorre do esquema decisório imposto na análise, haja vista que essa opção tem como finalidade servir como um investimento alternativo em cenários onde o preço da energia elétrica alcança patamares baixos, o que minimizaria a atratividade do projeto fotovoltaico. Contudo, todas essas observações não são validas caso o ponto inicial seja inferior a gatilho α_1^{IP2} , pois, neste cenário o gatilho

passaria a ter uma importância maior para determinar a entrada no referido Estado.

Sobre a ótica dos tempos de decisão, fica clara a diferença entre cada uma das modelagens estocásticas e impacto no processo de decisão. Uma vez que, para compensar o desconto oriundo do NMGD o modelo proposto aumenta o preço de entrada e, conseqüente, o tempo de exercício sob um ambiente de incertezas, especialmente para os casos baseados em Heston. Já no cenário baseado no MGB o critério de entrada se mantém. Porém, a diferença entre eles é diminuída, enquanto o exercício das opções alternativas se torna mais provável na presença do NMGD.

A Tabela 23 mostra as probabilidades de exercício dos estados em cada abordagem considerada. Reiterando as afirmações anteriores, é possível ver que para o caso do GBM+JUMPS há um aumento na probabilidade de exercício do Estado 1 (nó terminal), enquanto as decisões que contenham o Estado 3 são reduzidas de forma significativa quando comparados com o caso baseado no processo de Heston. Além disso, o efeito das zonas de exercício também é visível ao observar que não há cenários onde a primeira decisão do prosumidor ser iniciar pelo Estado 3. Outro ponto interessante é que o agente sempre exerce ao menos uma das opções até o horizonte de decisão.

As sequências baseadas em Heston possuem uma distribuição maior entre as decisões, o que favorece a flexibilidade das opções. Além disso, apenas 18.96% e 12.3% dos cenários sujeitos ao processo de volatilidade estocástica, com e sem o NMGD, não finalizaram o projeto solar completo. Por outro lado, considerando o GBM+JUMPS, apenas 8.57% e 3.47% dos casos não houve a finalizam do projeto fotovoltaico completo.

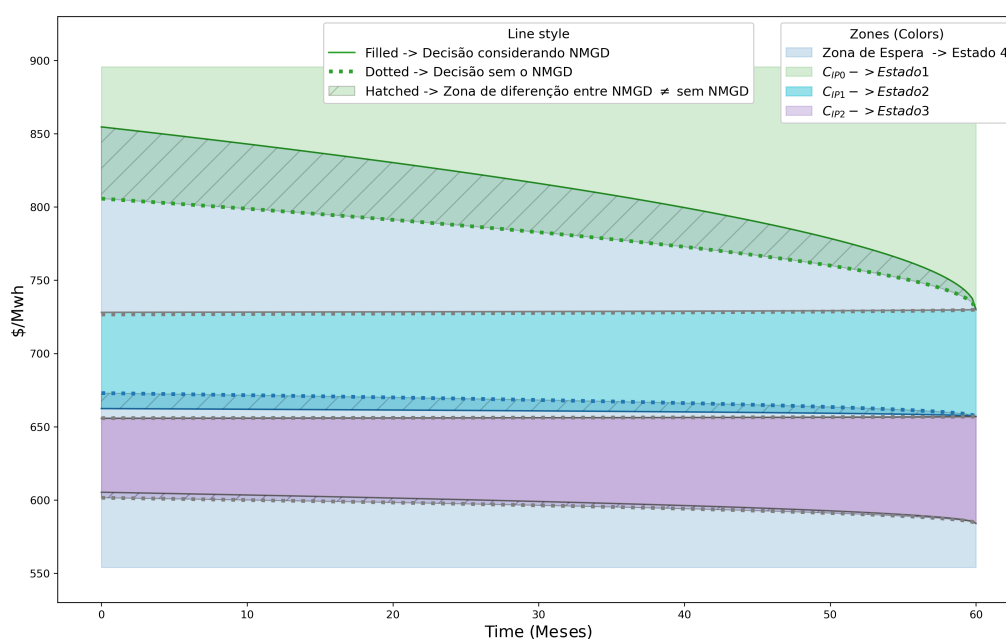
Outro ponto interessante é a relevância do Estado 2, estando presente em quase todas as decisões vinculadas ao modelo de Heston, 70%, e caindo para menos de 20% quando o processo estocástico é alterado. Este caso pode ser entendido como uma consciência da relação entre a forma como as incertezas se apresentam, haja vista que um aumento no grau de incerteza faz com que o modelo decida por sequências com maior diversificação, um *trade-off* entre nível de incertezas e diversificação das decisões. Portanto, é possível inferir que sobre a presença da modelagem baseada em MGB+Jumps é necessário que o ativo de risco possua uma relação de retorno melhor do que o investimento no IVVB11.

Em outras palavras, observa-se uma disparidade na amplitude da zona de espera entre as abordagens que buscam um compromisso vantajoso para ambas as situações. No contexto da modelagem utilizando MGB+jumps, é implicitamente pressuposto que mesmo o menor indício de aumento no preço da energia induzirá o modelo a tomar imediatamente a decisão de entrar no Estado 1, devido à perspectiva de economia futura substancial. Em contrapartida, na abordagem via Heston, sugere-se a necessidade de um aumento mais considerável no preço, uma vez que as flutuações nos preços podem afetar a atratividade do investimento em energia solar para o prosumidor.

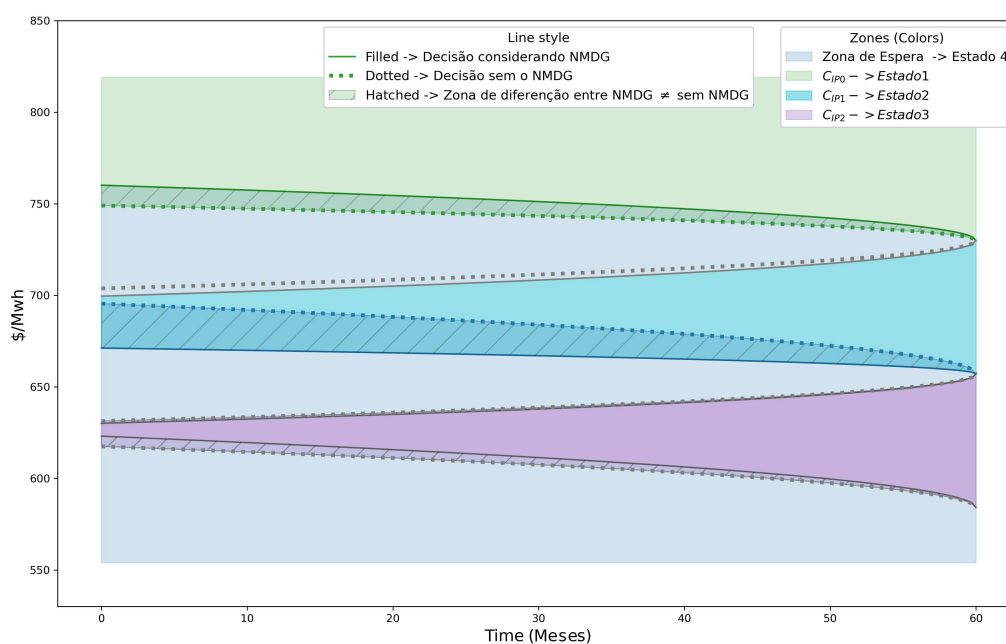
Analisando o tempo médio para a primeira decisão, o tempo até o primeiro exer-

Figura 46 – Lógica de decisão otimizada para preço energia

(a) Gatilhos considerando Heston



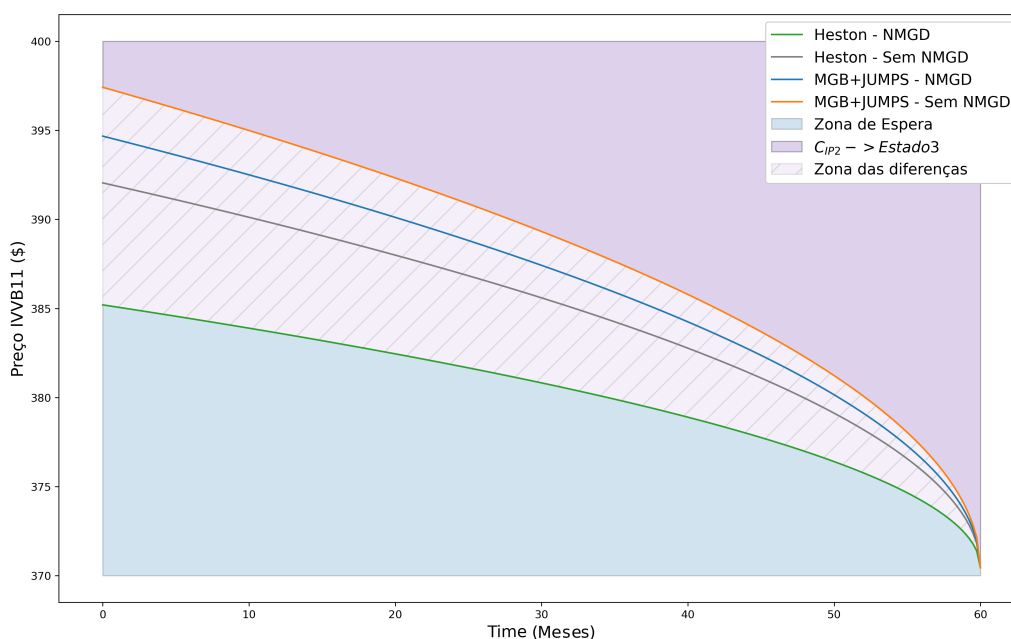
(b) Gatilhos considerando MGB+Jumps



Fonte: O Autor

cício, temos a Figura 48 que apresenta função densidade de probabilidade e função de distribuição acumulada (Figura 48a e Figura 48b) em termos do tempo gasto até o primeiro exercício, lembrando que o primeiro exercício pode ocorrer em qualquer uma das opções. A Figura 48a apresenta os tempos médios para o primeiro exercício considerando os 4 casos já mencionados aqui, modelagem estocástica via Heston e MGB+Jumps, ambas vinculado ou não ao NMGD. Analisando o tempo de primeiro contato dos preços nos gatilhos é possível perceber o atraso nas decisões proporcionado pelo NMGD, reforçando

Figura 47 – Lógica de decisão otimizada para preço IVVB11



Fonte: O Autor

Tabela 23 – Probabilidade de decisões(%)

Sequência	Heston com NMDG	Heston sem NMDG	GBM+ <i>JUMPS</i> com NMDG	GBM+ <i>JUMPS</i> sem NMDG
1	22.66	32.83	79.61	90.54
2	0	0	0.65	0.14
3	0	0	0.54	0.64
2-1	31.14	32.13	9.37	4.74
2-3	18.96	12.3	6.65	2.19
3-1	0	0	0.04	0.08
3-2	0	0	0.73	0.51
2-3-1	27.24	22.72	1.92	0.69
3-2-1	0	0.02	0.49	0.47

Fonte: O Autor

o receio dos agentes em investir descrito no início deste trabalho, onde os tempos iniciais passaram de 5.5 e 6.5 meses para aproximadamente 9 e 13 meses, considerando o modelagem via MGB+*Jumps* e Heston respectivamente. Em outras palavras, o NMGD faz com que a opção de espera se torne mais valiosa ao agente, esperando por uma confirmação do movimento de preços para decidir se entra no projeto.

Aprofundando sobre o primeiro exercício, é observado na Figura 48a o comportamento assimétrico positivo em todos os casos, mas com intensidade maior para o caso do MGB+*Jumps* sem a presença do NMGD, observação está em consonância com as zonas de gatilhos geradas neste cenário, indicando que sob esta condição a espera é algo agrega pouco valor ao projeto. O caso oposto, modelagem via Heston e considerando o NMGD,

considerado também o mais incerto, possui a maior dispersão dos momentos de exercício, sendo que os valores são os mais bem distribuídos ao longo do horizonte de decisão.

A Figura 48b apresenta um comportamento interessante para o caso MGB+*Jumps* sem o NMGD, onde em 80% dos casos a primeira decisão acontece nos 10 primeiros meses, crescimento acentuado, e se estabilizando posteriormente. Por outro lado, o caso baseado em Heston sem o NMGD, começa com um crescimento menor, mas acelera até o 15^o mês, totalizando 90% dos exercícios. Os casos onde o NMGD está presente ocorre o comportamento próximo tanto por parte do modelo de Heston quanto pela sua contraparte. Na mesma figura também é possível visualizar os valores de medianas para os 4 casos, sendo perceptível que nesta faixa os dois casos sem o NMGD se aproximam com o primeiro exercício em aproximadamente 5 meses.

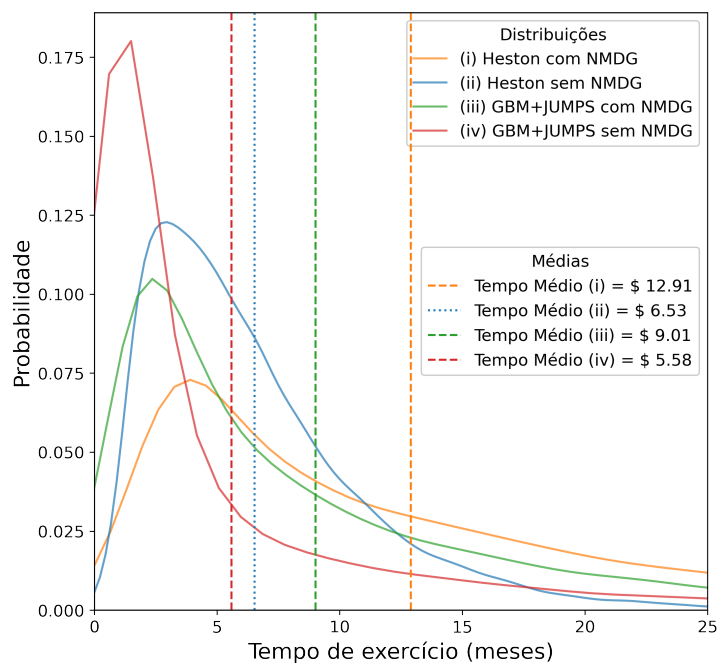
Em resumo, temos que o NMGD prolonga o tempo até a primeira decisão em qualquer cenário, em especial para o caso considerando a volatilidade estocástica que tem seu tempo de primeira decisão praticamente dobrado com a nova legislação. Então pode-se inferir que os novos agentes devem tomar sua primeira decisão com aproximadamente 13 meses.

A Tabela 24 e a Tabela 25 resumem os valores apresentados nas Figuras 46 e 47, considerando o NMGD. Nas mesmas é possível encontrar os valores numéricos de gatilhos otimizados para o exercício das opções a cada ano a partir do ponto zero considerado na simulação (Fev/2023). Ou seja, caso o preço da energia elétrica seja superior a 842.69 R\$/MWh (0.843 centavos em KWh) até o final de 2023, o agente deve investir imediatamente no sistema solar que atenda a 100% do seu consumo. Caso a energia oscile entre valores abaixo de 842.69 e superior a 728.23 ou entre 661.92 e 655.82, agente deverá aguardar. Valores de energia entre superiores a 661.92 e e abaixo de 728.23 implicam em investimento parcial no projeto solar, enquanto valores abaixo de 655.82 e com IVVB11 acima de 332.05 indicam o investimento no ativo de risco. Valores este para o caso baseado em Heston na Tabela 24.

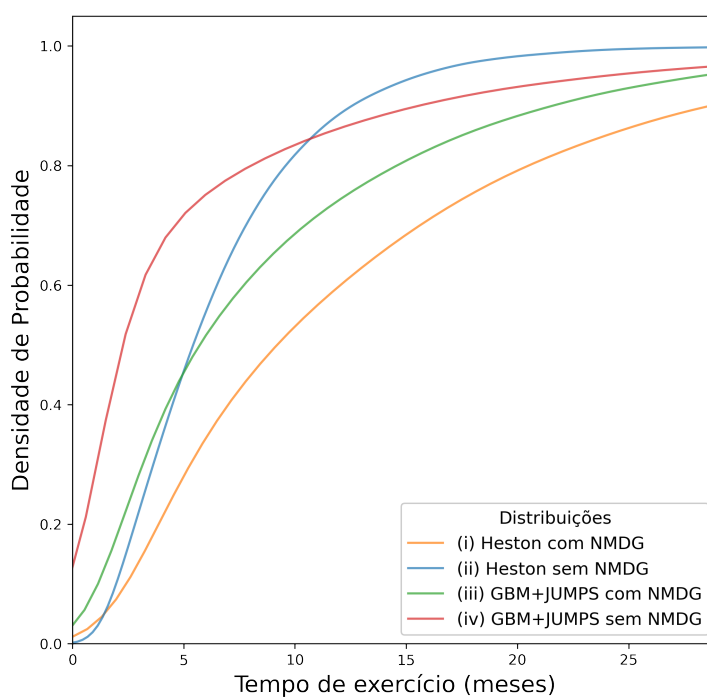
Essa lógica também é aplicada para os demais anos, com alteração nos valores de entrada e em cada situação, além de também ser válido para o caso baseado em MGB+*Jumps* na Tabela 25. Os valores apresentados são uma simplificação dos valores reais obtidos a partir do sistema de equações pela Eq. 3.3, com os valores apresentados nas Tabela 13, Tabela 15 e Tabela 22, que objetiva gerar uma intuição mais prática no agente sobre quando e em que investir ao longo do tempo.

Figura 48 – Tempos até a tomada da primeira decisão

(a) Função densidade de probabilidade dos tempos de primeiro exercício



(b) Função de distribuição acumulada do tempo de primeiro exercício



Fonte: O Autor

Tabela 24 – Gatilhos de decisão por ano considerando modelo Heston

Período	Investir projeto completo	Investir projeto Parcial	Investir Ativo de Risco	
	Preço Energia (R\$/MWh)	Preço Energia	Preço Energia	Valor IVVB11
2023	842.69 < <i>ee</i>	661.92 < <i>ee</i> < 728.23	603.34 < <i>ee</i> < 655.82	332.05 < <i>ri</i>
2024	829.94 < <i>ee</i>	661.39 < <i>ee</i> < 728.42	601.25 < <i>ee</i> < 655.94	330.79 < <i>ri</i>
2025	815.70 < <i>ee</i>	660.80 < <i>ee</i> < 728.63	598.90 < <i>ee</i> < 656.09	329.38 < <i>ri</i>
2026	799.10 < <i>ee</i>	660.09 < <i>ee</i> < 728.88	596.11 < <i>ee</i> < 656.25	327.71 < <i>ri</i>
2027	779.89 < <i>ee</i>	659.17 < <i>ee</i> < 729.21	592.48 < <i>ee</i> < 656.47	325.53 < <i>ri</i>
2028	730.0 < <i>ee</i>	657.0 < <i>ee</i> < 730.0	584.0 < <i>ee</i> < 657.0	320.45 < <i>ri</i>

Fonte: O Autor

Tabela 25 – Gatilhos de decisão por ano considerando modelo MGB+*Jumps*

Período	Investir projeto completo	Investir projeto Parcial	Investir Ativo de Risco	
	Preço Energia (R\$/MWh)	Preço Energia	Preço Energia	Valor IVVB11
2023	757.39 < <i>ee</i>	669.91 < <i>ee</i> < 702.19	619.46 < <i>ee</i> < 632.43	339.48 < <i>ri</i>
2024	754.44 < <i>ee</i>	668.53 < <i>ee</i> < 705.09	615.6 < <i>ee</i> < 635.0	337.41 < <i>ri</i>
2025	751.09 < <i>ee</i>	666.96 < <i>ee</i> < 708.4	611.24 < <i>ee</i> < 637.92	335.07 < <i>ri</i>
2026	747.14 < <i>ee</i>	665.11 < <i>ee</i> < 712.35	606.1 < <i>ee</i> < 641.41	332.31 < <i>ri</i>
2027	742.0 < <i>ee</i>	662.69 < <i>ee</i> < 717.55	599.44 < <i>ee</i> < 646.01	332.31 < <i>ri</i>
2028	730.0 < <i>ee</i>	657.0 < <i>ee</i> < 730.0	584.0 < <i>ee</i> < 657.0	320.45 < <i>ri</i>

Fonte: O Autor

4.3.2.2 Análise para a variação da taxa livre de risco

Apesar da SELIC corrente estar próxima dos 13% a.a., foi utilizada uma taxa livre de risco de 6% a.a. (0.49%a.m.). O impacto desta diferença pode ser observado, considerando o modelo de Heston e MGB+*Jumps*, com e sem o NMGD, na Figura 49. O aumento do valor da opção é notório, sendo a relação taxa de juros e valor da opção inversamente proporcional, haja vista que o aumento da taxa livre de risco aumenta o valor da espera. Vale lembrar que a mudança na taxa livre de risco não se limita a aumento na taxa de desconto, mas sim uma mudança em outros parâmetros do modelo de decisão, exemplo o prêmio de risco.

Na mesma figura também é notável a diferença entre os casos considerando ou não o NMGD, sendo que a diferença aumenta conforme incremento na taxa livre de risco, reiterando a valorização da opção de esperar até o momento adequado para investir. Além disso, a taxas próximos de zero, acontece a aproximação dos valores das opções para os modelos estocásticos considerados. Adicionalmente, o valor das disparidades relacionadas o NMGD também se mantém padrão para ambos os modelos estocásticos, haja vista que o desconto não possui relação ao tipo de incerteza.

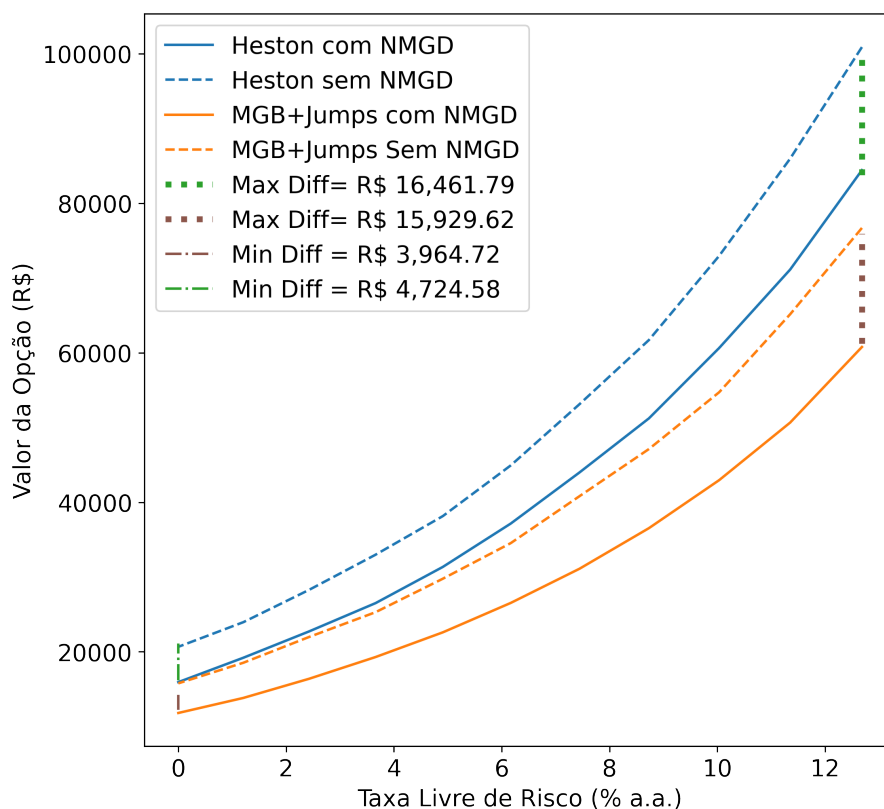
Ao considerar os valores mais elevados da taxa livre de risco e mensurar, via CAPM, o prêmio de risco na janela de dados disponível são encontrados valores negativos, haja vista que a uma taxa SELIC atual é superior ao retorno a *proxy* do mercado. Essa condição faz com que os preços simulados possuam um crescimento mais acentuado ao longo do tempo, o que reflete no valor das opções.

O impacto da taxa de livre de risco não se limita apenas aos resultados financeiros, mas também altera de forma o comportamento dos gatilhos de decisões. A Figura 50 apresenta os valores médios para cada parâmetro dos gatilhos considerados, considerando o NMGD para todos os casos. Note que existe uma relação direta entre a taxa livre de risco e o aumento no valor do gatilho, indicando o atraso na decisão de investimento. O atraso implica na valorização da opção de espera, ou seja, esperar para investir se torna mais valioso.

Analisando os valores apresentados na Figura 50 é possível visualizar que a maior taxa de crescimento no gatilho ocorre para a decisão pelo investimento completo, representado pela variável α_1^{IP0} quando a energia elétrica é modelada pelo processo de Heston. Considerando apenas o modelo de Heston, no geral, todos os parâmetros indicam um aumento nas zonas de espera. O mesmo também é válido para o caso baseado em MGB+*Jumps*, sendo α_1^{IP0} (linha azul pontilhada) o gatilho mais alterado nesta circunstância.

O fato que chama atenção na Figura 50 é a menor variância do gatilho α_1^{IP2} em relação à taxa livre de risco, sendo esta característica já explorada anteriormente e agora confirmada. A motivação para estes valores, de forma brevíssimo, advém do formado

Figura 49 – Relação dos resultados com taxa livre de risco



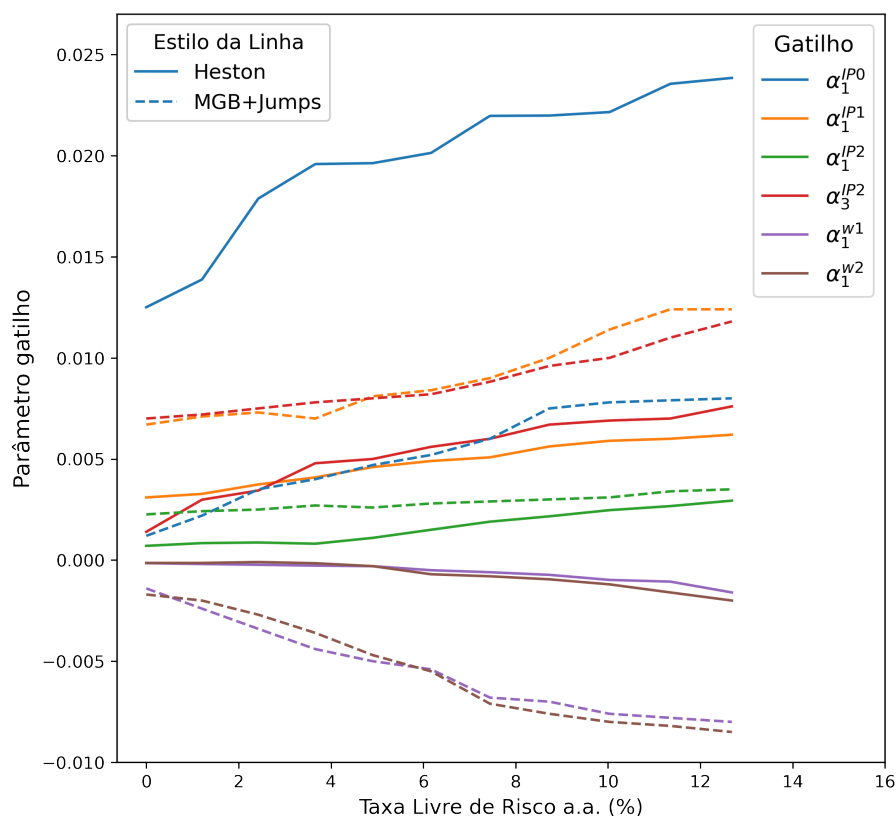
Fonte: O Autor

imposto para a análise, onde o exercício do Estado 3 depende mais dos valores de α_1^{w2} ativação do que de α_1^{IP2} , pois, considerando que o preço inicial na simulação da energia elétrica está acima deste gatilho, os preços precisam cair e cruzar a zona de espera do Estado 2 para então entrar no Estado 3, assim quem o cruzamento do gatilho acontece de forma descendente.

Todavia, a baixa relevância não indica inutilidade, pois, caso os valores de α_1^{IP2} sejam elevados, pode acontecer o cruzamento de gatilhos e neste caso indicaria uma zona de espera, sendo a dimensão da mesma proporcional ao valor de α_1^{IP2} . Além disso, deve-se atentar ao fato que em caso de salto ou grandes oscilações podem fazer com que os preços atravessem a zona de investimento criado pelo par α_1^{w2} e α_1^{IP2} em um único passo, fazendo com o modelo de decisão entenda que a espera perdure como decisão corrente.

A observação anterior abre caminho para uma futura reavaliação das estruturas de decisão adotadas aqui, haja vista que o esquema de decisão montado segue os moldes conhecidos na literatura, mas dependendo do contexto, em termos práticos, acredita-se que alguns gatilhos podem ser suprimidos da decisão sem perdas significativas, exemplo de α_1^{IP2} . Neste caso a zona correspondente ao Estado 3 abrangeria todos os valores de energia elétrica abaixo do gatilho de espera α_1^{w2} . Vale ressaltar que ainda o gatilho para o preço do IVVB11 ainda permaneceria com a mesma funcionalidade atual.

Figura 50 – Variação parâmetros de gatilho



Fonte: O Autor

4.3.2.3 Considerações finais

A comparação de dois modelos estocásticos objetivam inserir no processo de decisão os efeitos do excesso de curtose, buscando fornecer um novo panorama e comparação sobre os mesmos. Na teoria, tanto o modelo com saltos, quanto o modelo de volatilidade estocástica tentam povoar os extremos das séries de preços. Todavia, com mecanismos diferentes para realizar a mesma função.

No panorama de aplicação é visível a preferência das pesquisas por tratarem tal situação com modelos de saltos, sendo compreensivo dada a simplificação na calibragem dos parâmetros. Todavia, apesar do objetivo semelhante os resultados apresentados aqui sugerem diferenças entre ambos os modelos estocásticos, não limitado apenas a questão sobre o valor da opção, mas sim quanto ao próprio conjunto de decisão que impactam de forma profunda no comportamento dos agentes. Estas decisões são importantes para a gestão de risco dos projetos.

A justificativa para essa discrepância decorre da calibração dos parâmetros do modelo. Isso se baseia na observação feita por Leite, Yamim e Fonseca (2021) a respeito da sobre-parametrização do modelo de Heston e na possibilidade de que o modelo de calibração proposto tenha alcançado um ponto de equilíbrio entre os parâmetros. Isso implica na situação em que os valores encontrados podem gerar um comportamento que se

assemelha ao comportamento real, combinando os parâmetros de maneira apropriada. Por exemplo, aumentar a velocidade de reversão enquanto reduz a volatilidade da volatilidade, juntamente com a correlação, pode produzir um efeito semelhante ao observado na série real. Isso destaca a importância de investigar a endogeneidade neste método de estimação, o que pode resultar em melhorias significativas na precisão dos resultados.

A hipótese para essa diferença advém da calibração de parâmetros do modelo, uma vez que em [Leite, Yamim e Fonseca \(2021\)](#) foi comentado a sobre-parametrização do modelo de Heston e a possibilidade do modelo de calibração proposto ter encontrado um ponto de equilíbrio entre os parâmetros. Isso implica na situação onde os valores encontrados podem produzir um comportamento próximo ao comportamento real pela complementação dos parâmetros, como exemplo aumentar a velocidade de reversão enquanto a volatilidade da volatilidade é reduzida junto a correlação produz um efeito equivalente do que o observado na série real, reforçando a necessidade do estudo de endogeneidade nesta abordagem de estimação, o que pode trazer ganhos significativos na acurácia.

No âmbito geral, apesar das diferenças, ambos os modelos estocásticos cumprem com o proposto e apresentam suas qualidades/limitações, mas acredita-se que a modelagem da volatilidade se mostra mais próxima do contexto real dos agentes, haja vista a interferência pública e as mudanças no regime de chuvas que impactam no comportamento das usinas hidrelétricas, o que trás mais comportamentos idiossincráticos as séries de preços, além da própria experiência do Autor com o mercado elétrico no Brasil. Todavia, o efeito de cauda causado pelo modelo faz com que as médias para o valor da opção aumentem e isso deve ser analisado com cautela. Pois, caso sejam removidos os valores mais à direita da distribuição, mais propínquo os resultados nas diferentes abordagens estocásticas serão, haja vista que a remoção das caudas irá aproximar os valores médios das distribuições.

Essas observações reiteram as indicações de [Schachter e Mancarella \(2016\)](#) sobre a necessidade que novas abordagens estocásticas, uma vez que modelos estocásticos distintos podem produzir resultados diferentes em um processo de decisão, resultados tanto no aspecto financeiro quando na lógica que permeia a decisão (questão gerencial). Essas afirmações foram observadas neste trabalho.

Tal condição se mostra vital quando decisões em escalas maiores são necessárias e métodos sofisticados de avaliação devem ser considerados, reiterando também as recomendações de [Lazo e Watts \(2023\)](#) sobre a possibilidade da modelagem de decisão em multinível e o incremento na complexidade de decisão, tornando o modelo de avaliação mais próximo da realidade.

A síntese destes resultados deste trabalho permite visualizar o impacto que a modelagem estocástica tem sobre os resultados das opções e sobre a lógica de decisão, uma vez que o incremento das incertezas moveu a lógica de decisão para opções alternativas

a principal, valorizando a diversificação de decisões. Isso demonstra a efetividade da metodologia empregada para avaliação em otimizar decisões em cenários de risco ao buscar regras de decisões que permitam mitigar potenciais riscos.

No âmbito geral, o NMGD mitiga as possibilidades de economia por parte dos agentes, mas as flexibilidades apresentadas ao prosumidor melhoram a tomada de decisão e permitem minimizar potenciais perdas financeiras, haja vista que boa parte das decisões englobam a exploração das flexibilidades possíveis.

Assim, pode-se inferir que a possibilidade parte dos prosumidores sofisticados que tenham o conhecimento sobre essas opções invistam inicialmente no projeto parcial e completem o mesmo no tempo futuro, a depender do comportamento da curva de preços. Além disso, o acoplamento de ativos de risco mais rentáveis trará ainda mais ganhos as opções, sendo especialmente necessário caso a avaliação siga o padrão de $MGB+Jumps$.

Apesar da aplicação considerada ser o caso do cliente residencial, a metodologia utilizada pode ser habilmente modificada para o caso de projetos solares significativamente maiores, sendo aplicável também para grandes projetos de usinas solares. Além disso, a mesma metodologia de avaliação também pode ser considerada em outros tipos de projetos com as devidas mudanças de parâmetros e fluxo de caixa, não estando limitada também a projetos solares. Portanto, tem-se em mãos uma ferramenta (TOR + CE) que pode ser utilizada em vários contextos e não limitada apenas a aplicação considerada neste trabalho, possuindo potencial ímpar que pode ser explorado em diversos contextos e com as mais complexas estratégias de exercício de opções.

Este modelo também poderia ser extrapolado para outras regiões do Brasil, avaliando o impacto na decisão em cada Estado do País, apesar de não haver indícios que sustentem a possibilidade do NMGD inviabilizar os investimentos em sistemas fotovoltaicos residenciais em qualquer outra região do país.

5 CONCLUSÃO

Esta tese se posiciona em duas grandes áreas do conhecimento e esforçar-se por apresentar uma solução numericamente viável para um problema da área de análise de investimentos a partir de ferramentas presentes na modelagem computacional, no intuito de estreitar laços mutualísticos entre as áreas.

Neste âmbito a tese desenvolve, avalia e aplica a metodologia baseada em metaheurísticas para otimização do problema de parada ótima ou problema da fronteira livre na área da análise de investimentos, mais especificamente a precificação de Opções Financeiras e Opções Reais. Desde o desenvolvimento desta abordagem, pouco aprofundamento foi dado a mesma, haja vista que o desempenho computacional, na época, não favorecia esta abordagem, que troca a simplicidade de modelagem de opções pelo custo computacional para avaliar e otimizar o problema.

Para tanto, o processo de avaliação foi otimizado, através do paralelismo e otimização da linguagem de programação, para ter um desempenho computacional condizente aos tempos atuais e ser um modelo a altura das outras abordagens conhecidas na literatura. O teste de acurácia foi realizado considerando as principais meta-heurísticas da literatura combinadas com três formas de codificação para o conjunto de gatilho, sendo eles o V_LOG, V_LIVRE e o V_EXP.

Desta análise, a codificação do tipo V_EXP se mostrou a mais estável e indiferente entre as metaheurísticas, sendo que o principal atributo para isso é que a mesma não necessita de restrições especiais para que a monotonicidade seja garantida ao longo da evolução. Ao contrário das demais codificações, que possuem dificuldades para manter essa restrição. Assim, fica claro que as condições adotadas neste trabalho para a monotonicidade são necessárias, mas não suficientes para manter a suavidade de variação no gatilho, o que prejudicou principalmente os gatilhos do tipo V_LIVRE.

Além disso, foi investigado o impacto que a nova regulamentação do setor elétrico brasileiro tem sobre a decisão de pequenos agentes para instalar pequenos sistemas fotovoltaicos e usufruir do desconto que o mesmo pode proporcionar nas contas de energia elétrica. O impacto é calculado analisando o fluxo de caixa do prosumidor, sob incerteza, e considerando flexibilidades gerenciais sobre o processo de decisão. Estas flexibilidades têm uma dinâmica de iteração peculiar, onde o exercício de uma opção pode gerar novas opções dependendo do caminho decisório tomado.

Durante a avaliação das incertezas foi desenvolvido um fluxo de avaliações que detalham como cada processo estocástico foi escolhido para o problema. Nesta etapa foi detectada a presença de heterocedasticidade na regressão para o preço da energia elétrica. Esta observação desencadeou um estudo sobre a modelagem de volatilidade estocástica, algo raro na literatura de Opções Reais, então optou-se por comparar o mesmo com uma

abordagem mais tradicional, baseado na modelagem de incertezas com MGB+*JUMPS*. A segunda variável de decisão do modelo (IVVB11), está por sua vez possui componentes que indicavam o comportamento aderente ao MGB. Um ponto interessante desta variável é a característica de *overshooting* na regressão entre os retornos, o que seria um potencial problema caso fosse considerada um modelo reversivo para a série de retornos.

A adoção do modelo de Heston (um dos mais famosos da literatura) para modelagem da volatilidade estocástica culminou no desafio ímpar de estimar os parâmetros do mesmo, dificuldade especial devido à consideração da volatilidade não observável diretamente. A literatura sobre o assunto é focada na situação onde o agente possui acesso a preço de opções negociados no mercado, com casos pontuais focados na condição de ausência deste tipo de informação. Apesar do autor trabalhar em uma empresa de comercialização de energia ter acesso à mesa de negociação de contratos futuros, estes valores não são de acesso público, o que tornaria impraticável para um agente comum na sociedade utilizar de tais dados para estimar os parâmetros do modelo estocástico. Neste caso, a calibração deverá ser baseada, apenas, na série temporal de preços da energia elétrica.

Então o caminho de calibrar parâmetros passou a adotar o *Machine Learning* como ferramenta de estimação, sendo este eficiente ao estimar valores próximos ao processo de inferência indireta, baseado GJR-GARCH. Todavia, apesar da revisão da extensa e profunda da literatura, ainda não ficou claro como ocorre a comparação entre o GJR-GARCH e os parâmetros de Heston, sendo este passo apenas informado na literatura. A abordagem baseada em aprendizado de máquina produziu um *insight* importante sobre o processo de engenharia de *features* para a modelagem de volatilidade estocástica, além de que os resultados preliminares da mesma já estão publicados na literatura. A importância deste passo é refletida quando a distribuição de resultados para o valor da opção é analisada, pois o efeito de cauda gerado pela abordagem de volatilidade estocástica é mais intenso do que sua contraparte na comparação, o que afeta diretamente a precificação.

A análise de investimento no projeto fotovoltaico, considerando opções de investimento parcial e o adiamento do CAPEX alocado em ativos de risco, resultou em um modelo que gera uma economia de aproximadamente 37 mil reais e 26 mil reais, quando consideramos o modelo de Heston e o MGB+*JUMPS*, respectivamente. Essa economia é derivada da comparação entre a economia obtida ao exercer as opções nos gatilhos indicados e o gasto incorrido quando o prosumidor opta por não exercer nenhuma das opções de investimento, continuando a consumir energia da rede elétrica.

O NMGD reduz a economia para o prosumidor em cerca de 20% a 30%, dependendo do regime estocástico. No entanto, essa redução não é significativa o suficiente para tornar inviável a economia gerada pela instalação de um sistema fotovoltaico residencial. Isso impacta diretamente na relação entre o agente decisório e representa uma indicação da evolução das regulamentações, antecipando novas abordagens de pensamento e

práticas no setor.

Um resultado interessante desta abordagem é a dinâmica de decisão do modelo sobre diferentes regimes estocásticos. Neste âmbito é visível que a modelagem via volatilidade estocástica geral maior diversidade de decisões, aproveitando-se mais das opções disponíveis, enquanto a combinação MGB+*JUMPS* tende a gerar a entrada no sistema solar completo na maioria dos casos simulados.

Este resultado reforça as pesquisas recentes ao demonstrar a dinâmica distinta como função da volatilidade inserida no modelo de avaliação, explorando novas abordagens estocásticas, e demonstrando a tendência em diversificar as decisões quando existe a flexibilidade inserida na modelagem da opção. Um detalhe importante está no efeito de cauda gerado pela modelagem via volatilidade estocástica, o que reitera a notoriedade da etapa de calibração, pois, valores inconsistentes para os parâmetros podem fazer com que a simulação decorra de forma incontrolável e resulte em valores completamente fora de realidade, potencializando as caudas dos resultados de forma indesejável, por conseguinte precificar opções de forma equivocada.

Assim, essa tese contribui com o desenvolvimento de algoritmos de precificação de opções financeiras e reais ao analisar a eficiência do mesmo em diferentes situações com valores *benchmark* obtidos na literatura e comprar os mesmo com as metodologias mais usuais conhecidas. Além disso, avaliou-se o projeto de investir em um sistema fotovoltaico residencial considerando a nova legislação vigente no Brasil, comparando o mesmo esquema de decisão para o caso sem a legislação, e considerando duas fontes de incertezas distintas para modelar o preço da energia elétrica no Brasil. Apesar do contexto de aplicação, a metodologia de precificação apresenta pode ser utilizada em quaisquer outros cenários decisórios. Por fim, estudou-se a estimação dos parâmetros de modelo de volatilidade estocástica de Heston via *Machine Learning*, onde foi mostrado como o melhorando das características fornecidas no aprendizado de máquina podem melhorar a precisão da calibração.

Além disso, a ferramenta considerada não está limitada a aplicação alvo do trabalho, podendo ser utilizada em cenários onde os projetos solares são maiores, como grandes usinas fotovoltaicas, considerando as devidas mudanças nas variáveis do projeto, ou mesmo ser adotada em outros projetos cuja avaliação esteja sobre o ambiente de incertezas múltiplas e possua um complexo esquema de decisões e exercícios.

A principal limitação desta ferramenta está na característica de preferência de decisão, haja vista que foi definida a condição de preços para a entrada em cada Estado, além de que o caso do investimento no ativo de risco ser tratado como investimento alternativo caso a energia alcance valores baixos. Além disso, foi feita a consideração que a mesma estrutura de decisão é mantida após o exercício de uma opção ocorrer, exemplo o Estado 2 foi exercício e a decisão para investir no projeto completo é a mesma para

o caso onde nada tenha sido feito. Em outras palavras, o mesmo conjunto de decisão é considerado em todas as circunstâncias, independentemente do que tenha sido exercício a priori.

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Como possibilidades de trabalhos são considerados:

- Acredita-se que a modelagem de gatilhos pela codificação V_LIVRE tenha méritos importantes que podem ser explorados quando sejam combinados com restrições adequadas para o problema. Então o aprofundamento desta linha se torna útil para aumentar a precisão dos gatilhos;
- Embutir novas opções ao problema de decisão de investir ou não, bem como reformular a visão sobre a sequencialidade de gatilhos e redesenhar o esquema de decisão para não limitar a execução de Estados em forma sequencial. Em outras palavras, analisar o caso onde duas opções possam ser executadas simultaneamente no mesmo instante de tempo;
- Avaliar a adoção de outros modelos de volatilidade estocástica e verificar o impacto do mesmo sobre a valoração das opções;
- Verificar a relação entre a atual estrutura de decisão e a possibilidade de que novos gatilhos sejam gerados a partir das decisões tomadas anteriormente;

REFERÊNCIAS

- AIHARA, S.; BAGCHI, A.; SAHA, S. On parameter estimation of stochastic volatility models from stock data using particle filter - application to aex index -. *International journal of innovative computing, information and control*, IJICIC Editorial Office, v. 5, n. 1, p. 17–27, jan. 2009. ISSN 1349-4198. Disponível em: <<https://core.ac.uk/download/pdf/11471873.pdf>>.
- AIUBE, F. A. L. *Modelos Quantitativos em Finanças: Com enfoque em commodities*. [S.l.]: Porto Alegre: Bookman, 2013.
- ALBRECHER, H. et al. *The little Heston trap*. *Wilmott*, n. 1, p. 83–92, 2007. ISSN 1540-6962.
- AMATO, F. *Em 5 anos de cobrança extra na conta de luz, consumidores pagam quase duas usinas de Jirau*. 2020. G1 - Globo. Link: <https://g1.globo.com/economia/noticia/2020/02/04/em-5-anos-de-cobranca-extra-na-conta-de-luz-consumidores-pagam-quase-duas-usinas-de-jirau.ghtml>, Acessado:: 2020-02-04.
- ANEEL. **Resolução Normativa N^o 482, DE 17 DE ABRIL DE 2012**. 2012. Disponível em: <<https://www2.aneel.gov.br/cedoc/ren2012482.pdf>>.
- ANEEL. *Revisão das regras aplicáveis à micro e minigeração distribuída – Resolução Normativa n^o 482/2012, Relatório de Análise de Impacto Regulatório n^o 0004/2018-SRD/SCG/SMA/ANEEL*. 2018. Link: <https://www.aneel.gov.br/documents/656877/18485189/6+Modelo+de+AIR++SRD++Gera%C3%A7%C3%A3o+Distribuida.pdf/769daa1c-51af-65e8-e4cf-24eba4f965c1>, Acessado: 2019-09-22.
- ANEEL. -*Agência Nacional de Energia Elétrica. Relatório Mercado Cativo - SAMP (Atualização Mensal)*. 2022. Link: <https://portalrelatorios.aneel.gov.br/luznatarifa/cativo#!>, Accessed: 2022-20-10.
- ARAÚJO, H. B. *Estimação da relação do preço entre diferentes tipos de café negociados no mercado futuro e físico utilizando modelos econométricos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Departamento de Engenharia de Produção, Juiz de Fora, Minas Gerais (MG), Brasil, 2016.
- BARANDAS, M. et al. Tsfel: Time series feature extraction library. *SoftwareX*, v. 11, p. 100456, 2020. ISSN 2352-7110.
- BARONE-ADESI, G.; WHALEY, R. E. Efficient analytic approximation of american option values. *The Journal of Finance*, v. 42, n. 2, p. 301–320, 1987. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1540-6261.1987.tb02569.x>>.
- BARROS, F. R. *Dívida bilionária do governo provoca aumento nas contas de luz no país*. 2017. Link: <https://g1.globo.com/hora1/noticia/2017/02/divida-bilionaria-do-governo-provoca-aumento-nas-contas-de-luz-no-pais.html>, Acessado: 2023-04-09.
- BASTIAN-PINTO, C. d. L. *Modelagem de Opções Reais com Processos de Reversão à Média em Tempo Discreto: Uma Aplicação na Indústria Brasileira de Etanol*. Tese

(Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Administração, Rio de Janeiro, Dezembro 2009.

BASTIAN-PINTO, C. de L. et al. A parameter based approach to single factor stochastic process selection for real options applications. *The European Journal of Finance*, Routledge, v. 27, n. 15, p. 1533–1552, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/1351847X.2021.1895859>>.

BERTOLINI, M.; D'ALPAOS, C.; MORETTO, M. Do smart grids boost investments in domestic pv plants? evidence from the italian electricity market. *Energy*, v. 149, p. 890–902, 2018. ISSN 0360-5442. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360544218302664>>.

BISCANI, F.; IZZO, D. A parallel global multiobjective framework for optimization: pagmo. *Journal of Open Source Software*, The Open Journal, v. 5, n. 53, p. 2338, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.21105/joss.02338>>.

BISHOP, C. M. *Pattern Recognition and Machine Learning*. [S.l.]: Springer, 2006. ISBN 978-0387310732.

BODENHOFER, U. *Genetic Algorithms: Theory and Applications*. 2003. Institut für Algebra, Johannes Kepler Universität, Link: <https://www.fll.jku.at/div/teaching/Ga/GA-Notes.pdf>, Acessado: 2019-18-11.

BRABAZON, A. et al. *Natural Computing in Finance - A Review*, in *Handbook of Natural Computing*. In: _____. *Handbook of Natural Computing*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. cap. 6, p. 1707–1735. ISBN 978-3-540-92910-9.

BRANDÃO, L. E.; FERNANDES, G.; DYER, J. S. Valuing multistage investment projects in the pharmaceutical industry. *European Journal of Operational Research*, v. 271, n. 2, p. 720–732, 2018. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221718304557>>.

BRANKA, M.; ZDRAVKA, A.; TEA, P. *Numerical Methods versus Bjerksund and Stensland Approximations for American Options Pricing*. *International Journal of Social, Behavioral, Educational, Economic, Business and Industrial Engineering*, World Academy of Science, Engineering and Technology, v. 8, n. 4, p. 1023–1031, 2014. ISSN eISSN:1307-6892.

BRASIL. **Projeto de Lei 1917/15, DE 15 DE JUNHO DE 2015**. 2015. Disponível em: <<https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/fichadetramitacao?idProposicao=1307190>>.

BRASIL. Lei nº 14.300, de 6 de janeiro de 2022. *Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil*, Brasília, DF, 2022. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2019-2022/2022/lei/l14300.htm>.

BREALEY, R.; MYERS, S.; ALLEN, F. *Principles of Corporate Finance*. 10th. ed. New York: The McGraw-Hill/Irwin, 2010. ISBN 0-07-353073-5.

BRIGO, D.; MERCURIO, F. *Interest Rate Models – Theory and Practice: with smile, inflation and credit*. 2. ed. [S.l.]: Springer Finance, 2006. v. 1. ISBN 978-3-540-22149-4.

- BROADIE, M.; DETEMPLE, J. The valuation of american options on multiple assets. *Mathematical Finance*, v. 7, n. 3, p. 241–286, 1997. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/1467-9965.00032>.
- BROADIE, M.; GLASSERMAN, P.; HA, Z. Pricing American Options by Simulation Using a Stochastic Mesh with Optimized Weights. In: _____. *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*. Boston, MA: Springer US, 2000. p. 26–44. ISBN 978-1-4757-3150-7.
- CAMP, C. V. Design of Space Trusses Using Big Bang Big Crunch Optimization. *Journal of Structural Engineering*, v. 133, n. 7, p. 999–1008, 2007.
- CAPE, J. et al. Estimating heston's and bates' models parameters using markov chain monte carlo simulation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, Taylor & Francis, v. 85, n. 11, p. 2295–2314, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00949655.2014.926899>.
- CHEBOTAREVA, G.; STRIELKOWSKI, W.; STREIMIKIENE, D. Risk assessment in renewable energy projects: A case of russia. *Journal of Cleaner Production*, v. 269, p. 122110, 2020. ISSN 0959-6526. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959652620321570>.
- CHOCKALINGAM, A.; MUTHURAMAN, K. An approximate moving boundary method for American option pricing. *European Journal of Operational Research*, v. 240, n. 2, p. 431–438, 2015. ISSN 0377-2217.
- CHUNG, S.-L.; HUNG, M.-W.; WANG, J.-Y. Tight bounds on American option prices. *Journal of Banking & Finance*, v. 34, n. 1, p. 77–89, 2010. ISSN 0378-4266.
- COMPANY, R.; EGOROVA, V.; JÓDAR, L. Constructing positive reliable numerical solution for American call options: A new front-fixing approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 291, p. 422–431, 2016. ISSN 0377-0427.
- COSTA, V. B. et al. Socioeconomic and environmental consequences of a new law for regulating distributed generation in brazil: A holistic assessment. *Energy policy*, Elsevier Ltd, v. 169, p. 113176, 2022. ISSN 0301-4215.
- COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, v. 7, n. 3, p. 229 – 263, 1979. ISSN 0304-405X.
- DEB, K. An efficient constraint handling method for genetic algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 186, n. 2, p. 311 – 338, 2000. ISSN 0045-7825.
- DESAI, S. R.; PRASAD, R. Novel Technique of Optimizing FOPID Controller Parameters Using BBBC for Higher Order System. *IETE Journal of Research*, Taylor & Francis, v. 60, n. 3, p. 211–217, 2014.
- DETEMPLE, J. *American-Style Derivatives: Valuation and Computation*. 1. ed. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2005. v. 1. ISBN 158488567X.
- DETERT, N.; KOTANI, K. Real options approach to renewable energy investments in mongolia. *Energy Policy*, v. 56, p. 136–150, 2013. ISSN 0301-4215. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301421512010427>.

- DIAS, A. G. aes. [Selection of Alternatives of Investment in Information for Oil-field Development using Evolutionary Real Options Approach](#). In: *Proceedings of 5 th Annual International Conference on Real Options, June 5--8, Los Angeles, USA*. [S.l.: s.n.], 2001.
- DIAS, M. A. G. Calculating real option values. In: _____. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. John Wiley & Sons, Ltd, 2011. ISBN 9780470400531. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9780470400531.eorms0127>>.
- DIAS, M. A. G. *Análise de Investimentos com Opções Reais: Teoria e Prática com Aplicações em Petróleo e Outros Setores*. 1. ed. [S.l.]: Interciência, 2014. v. 1. ISBN 9788571933552.
- DIAS, M. A. G. *Análise de Investimentos com Opções Reais: Teoria e Prática com Aplicações em Petróleo e Outros Setores*. 1. ed. [S.l.]: Interciência, 2015. v. 2. ISBN 8571933561.
- DIXIT, A.; PINDYCK, R. *Investment under Uncertainty*. 1. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 1994.
- DUARTE, G. R. *Política de migração para Metaheurísticas Híbridas usando Modelo Paralelo de Ilhas*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Juiz de Fora, Fevereiro 2019.
- DUARTE, G. R.; LEMONGE, A. C. de C.; FONSECA, L. G. da. [An algorithm inspired by social spiders for truss optimisation problems](#). *Engineering Computations*, v. 34, n. 8, p. pp. 2767–2792, 2017.
- E., C. T.; ANTIKAROV, V.; COPELAND, T. *Real Options: A Practitioner's Guide*. 1. ed. [S.l.]: Texere Publishing Limited, 2001. v. 1. ISBN 1587990288.
- EBERHART, R.; KENNEDY, J. [A new optimizer using particle swarm theory](#). In: *MHS'95. Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*. [S.l.: s.n.], 1995. p. 39–43.
- ELSAYED, W. et al. [Modified social spider algorithm for solving the economic dispatch problem](#). *Engineering Science and Technology, an International Journal*, v. 19, n. 4, p. pp. 1672–1681, 2016. ISSN 2215-0986.
- ENGLE, R. F.; LEE, G. G. [11 - Estimating Diffusion Models of Stochastic Volatility](#). In: ROSSI, P. E. (Ed.). *Modelling Stock Market Volatility*. San Diego: Academic Press, 1996. p. 333 – 355. ISBN 978-0-12-598275-7.
- EROL, O. K.; EKSIN, I. [A new optimization method: Big Bang–Big Crunch](#). *Advances in Engineering Software*, v. 37, n. 2, p. 106–111, 2006. ISSN 0965-9978.
- Esteves, G. R. T.; Leite, I. M. S. [Solar energy for decentralized energy supply: A real option approach](#). In: *2017 14th International Conference on the European Energy Market (EEM)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 1–6. ISSN 2165-4093.

- ESTEVEVES, G. R. T.; LEITE, I. M. S. Solar energy for decentralized energy supply: A real option approach. In: *2017 14th International Conference on the European Energy Market (EEM)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 1–6.
- FABOZZI, F. J.; PALETTA, T.; TUNARU, R. [An improved least squares Monte Carlo valuation method based on heteroscedasticity](#). *European Journal of Operational Research*, v. 263, n. 2, p. 698–706, 2017. ISSN 0377-2217.
- FERNANDES, G.; BRANDÃO, L. E. T.; BASTIAN-PINTO, C. de L. [Feeder Cattle Options: Where's the Beef?](#) *Latin American Business Review*, Routledge, v. 18, n. 3-4, p. 317–339, 2017.
- FONTOURA, C. F. V. T. d. [Avaliação de Projeto de Investimento em Usina Termelétrica à Capim-Elefante: Uma Abordagem Pela Teoria de Opções Reais](#). Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, Departamento de Administração, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Abril 2011.
- GALLANT, A. R.; TAUCHEN, G. Which moments to match? *Econometric Theory*, Cambridge University Press, v. 12, n. 4, p. 657–681, 1996. ISSN 02664666, 14694360. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/3532789>.
- GASTALDI, H. L. G. [Opções reais em investimentos florestais](#). 56f. p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Economia - Insper Instituto de Ensino e Pesquisa, 2012.
- GATHERAL, J. *The volatility surface : a practitioner's guide*. [S.l.]: Wiley, 2012. ISBN 9781119202073.
- GIEBEL, S.; RAINER, M. Neural network calibrated stochastic processes: forecasting financial assets. *Central European Journal of Operations Research*, v. 21, n. 2, p. 277–293, Mar 2013. ISSN 1613-9178. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10100-011-0234-3>.
- GILLI, M.; MARINGER, D.; SCHUMANN, E. *Numerical Methods and Optimization in Finance*. Elsevier, 2011. (Elsevier Monographs, 9780123756626). ISBN ARRAY(0x5a57ee08). Disponível em: <https://ideas.repec.org/b/eee/monogr/9780123756626.html>.
- GLASSERMAN, P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. 10. ed. New York, NY, USA: Springer, 2010. ISBN 1441918221.
- GOURIEROUX, C.; MONFORT, A.; RENAULT, E. Indirect inference. *Journal of Applied Econometrics*, Wiley, v. 8, p. S85–S118, 1993. ISSN 08837252, 10991255. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2285076>.
- GREENER. [Estudo Estratégico: Mercado Fotovoltaico de Geração Distribuída 3º Trimestre de 2019 - Os Impactos Regulatórios](#). 2019. Link: <https://www.greener.com.br/pesquisas-de-mercado/estudo-estrategico-mercado-fotovoltaico-de-geracao-distribuida-3o-trimestre-de-2019/>, Acessado: 2019-20-12.
- GREENER. [Análise do Marco Legal da Geração Distribuída | Lei 14.300/2022](#). 2022. Link: <https://www.greener.com.br/estudo/analise-do-marco-legal-da-geracao-distribuida-lei-14-300-2022/>, Accessed: 10-10-2022.

- GREENER. *Estudo Estratégico do Mercado Fotovoltaico de Geração Distribuída*. 2023. Link: <https://www.greener.com.br/estudo/estudo-estrategico-geracao-distribuida-2022-mercado-fotovoltaico-2-semester/>, Acessado em: 12-03-2023.
- GUDMUNDSSON, H.; VYNCKE, D. *On the calibration of the 3/2 model*. *European Journal of Operational Research*, v. 276, n. 3, p. 1178 – 1192, 2019. ISSN 0377-2217.
- GUO, X.; MIN, J.; GUO, H. Investment timing study for residential distributed energy resource projects: A real-option approach. In: *2016 IEEE Power & Energy Society Innovative Smart Grid Technologies Conference (ISGT)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 1–5.
- GUPTA, A. K. et al. *BBBC based optimization of PI controller parameters for buck converter*. In: *2017 Innovations in Power and Advanced Computing Technologies (i-PACT), April 21-22, Vellore, India*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 1–6.
- HANSEN, N.; MÜLLER, S. D.; KOUMOUTSAKOS, P. *Reducing the Time Complexity of the Derandomized Evolution Strategy with Covariance Matrix Adaptation (CMA-ES)*. *Evolutionary Computation*, v. 11, n. 1, p. 1–18, March 2003. ISSN 1063-6560.
- HARIKAE, S.; DYER, J. S.; WANG, T. Valuing real options in the volatile real world. *Production and Operations Management*, v. 30, n. 1, p. 171–189, 2021. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/poms.13261>.
- HERNANDEZ, A. Model calibration with neural networks. In: . [S.l.: s.n.], 2015. Available at SSRN, doi: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2812140>.
- HESTON, S. L. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, v. 6, n. 2, p. 327–343, 04 2015. ISSN 0893-9454. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/rfs/6.2.327>.
- HIRSA, A. *Computational methods in finance*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2013. (Chapman and Hall/CRC Financial Mathematics Series). ISBN 978-1-4665-7604-9.
- HOLLAND, J. *Genetic Algorithms and the Optimal Allocation of Trials*. *SIAM Journal on Computing*, v. 2, n. 2, p. 88–105, 1973.
- HULL, J. *Options, futures, and other derivatives*. 10. ed. Upper Saddle River, NJ [u.a.]: Pearson Prentice Hall, 2017. ISBN 978-0-13-197705-1.
- IDEAL. *O Mercado Brasileiro de Geração Distribuída Fotovoltaica – Edição 2018*. 2018. Link: <https://institutoideal.org/o-mercado-brasileiro-de-geracao-distribuida-fotovoltaica-edicao-2018/>, Acessado: 2019-02-09.
- IDEAL. *O Mercado Brasileiro de Geração Distribuída FV – Edição 2019*. 2019. Link: <https://institutoideal.org/o-mercado-brasileiro-de-geracao-distribuida-fv-edicao-2019/>, Acessado: 2019-02-09.
- JACQUIER, E.; POLSON, N. G.; ROSSI, P. E. Bayesian analysis of stochastic volatility models. *Journal of Business & Economic Statistics*, [American Statistical Association, Taylor & Francis, Ltd.], v. 12, n. 4, p. 371–389, 1994. ISSN 07350015. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1392199>.

- JAVAHERI, A.; LAUTIER, D.; GALLI, A. Filtering in finance. *Wilmott*, v. 2003, 05 2003.
- KACOWICZ, L. *Calibração do Modelo Gibson-Schwartz para dados de commodities no Brasil*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Dezembro 2012.
- KARABOGA, D. *An idea based on honey bee swarm for numerical optimization*. [S.l.], 2005. Erciyes University, Engineering Faculty, Kayseri, Turkiye.
- KIM, B. et al. Is it a good time to develop commercial photovoltaic systems on farmland? an american-style option with crop price risk. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 125, p. 109827, 2020. ISSN 1364-0321. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032120301222>>.
- KIM, B.; KIM, K.; KIM, C. Determining the optimal installation timing of building integrated photovoltaic systems. *Journal of Cleaner Production*, v. 140, p. 1322 – 1329, 2017. ISSN 0959-6526.
- KIM, B. J.; MA, Y.-K.; CHOE, H. A Simple Numerical Method for Pricing an American Put Option. *Journal of Applied Mathematics*, Hindawi, v. 2013, 02 2013.
- KOENIGSDORF, M. A. L. *Avaliação de Projetos de Exploração e Produção de Petróleo VIA OPÇÕES REAIS: Abordagem por Mínimos Quadrados de Monte Carlo*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- KORN, R.; KORN, E.; KROISANDT, G. *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*. 1. ed. Broken Sound Parkway, Boca Raton, FL, EUA: CRC Press - Taylor & Francis Group, 2010. ISBN 9781420076189.
- KUMAR, S. et al. Ant colony optimization to price exotic options. In: *2009 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 2366–2373. ISSN 1089-778X.
- LAM, S. K.; PITROU, A.; SEIBERT, S. Numba: A llvm-based python jit compiler. In: *Proceedings of the Second Workshop on the LLVM Compiler Infrastructure in HPC*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–6.
- LAZO, J.; WATTS, D. The use of real options approach in solar photovoltaic literature: A comprehensive review. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, v. 57, p. 103204, 2023. ISSN 2213-1388. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2213138823001972>>.
- LAZO, J. G. L. *DETERMINAÇÃO DO VALOR DE OPÇÕES REAIS POR SIMULAÇÃO MONTE CARLO COM APROXIMAÇÃO POR NÚMEROS FUZZY E ALGORITMOS GENÉTICOS*. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, Rio de Janeiro, Agosto 2004.
- LEITE, I. M. S.; DUARTE, G. R.; FONSECA, L. G. D. A SOCIAL SPIDER ALGORITHM FOR PRICING a FINANCIAL OPTION: A FORWARD APPROACH BY MONTE CARLO SIMULATION. *Revista Mundi Engenharia, Tecnologia e Gestão (ISSN: 2525-4782)*, Revista Mundi, v. 5, n. 2, maio 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.21575/25254782rmetg2020vol5n21173>>.

- LEITE, I. M. S.; FONSCECA, L. G. d. Análise de meta-heurísticas para o problema de parada Ótima: Uma aplicação em finanças. *Mecânica Computacional*, Asociación Argentina de Mecánica Computacional, XXXVII, n. 47, p. 10, 2019. Disponível em: <<https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/6016>>.
- LEITE, I. M. S.; YAMIM, J. D. M.; FONSECA, L. G. da. The deeponets for finance: An approach to calibrate the heston model. In: MARREIROS, G. et al. (Ed.). *Progress in Artificial Intelligence*. Cham: Springer International Publishing, 2021. p. 351–362. ISBN 978-3-030-86230-5.
- LÉTOURNEAU, P.; STENTOFT, L. Bootstrapping the early exercise boundary in the least-squares monte carlo method. *Journal of Risk and Financial Management*, v. 12, n. 4, 2019. ISSN 1911-8074. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1911-8074/12/4/190>>.
- LEWIS, A. L. Option valuation under stochastic volatility: With mathematica code. In: _____. Newport Beach, California, USA: Finance Press, 2000. cap. Appendix 1.1 - Parameter Estimators for the GARCH Diffusion Model. ISBN 0967637201.
- LIMA, U. S. M. de; SAMANEZ, C. P. Complex derivatives valuation: applying the least-squares monte carlo simulation method with several polynomial basis. *Financial Innovation*, v. 2, n. 1, p. 1, Jan 2016. ISSN 2199-4730. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/s40854-015-0019-0>>.
- LIU, S. et al. A neural network-based framework for financial model calibration. *Journal of Mathematics in Industry*, v. 9, n. 1, p. 9, Sep 2019. ISSN 2190-5983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/s13362-019-0066-7>>.
- LIU, Z.; PANG, T. An efficient grid lattice algorithm for pricing American-style options. *International Journal of Financial Markets and Derivatives*, v. 5, p. 36, 01 2016.
- LONGSTAFF, F. A.; SCHWARTZ, E. S. Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach. *The Review of Financial Studies*, v. 14, n. 1, p. 113–147, 06 2015. ISSN 0893-9454. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1093/rfs/14.1.113>>.
- LORD, R. et al. A Fast and Accurate FFT-Based Method for Pricing Early-Exercise Options under Lévy Processes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 30, n. 4, p. 1678–1705, 2008.
- LU, L.; JIN, P.; KARNIADAKIS, G. E. DeepONet: Learning nonlinear operators for identifying differential equations based on the universal approximation theorem of operators. 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1910.03193>>.
- LU, L. et al. Learning nonlinear operators via deepnet based on the universal approximation theorem of operators. *Nature Machine Intelligence*, v. 3, n. 3, p. 218–229, Mar 2021. ISSN 2522-5839.
- MA, R. et al. The impact of feed-in tariff degression on r&d investment in renewable energy: The case of the solar pv industry. *Energy Policy*, v. 151, p. 112209, 2021. ISSN 0301-4215. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301421521000781>>.
- MAHDAVI, M.; FESANGHARY, M.; DAMANGIR, E. An improved harmony search algorithm for solving optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, v. 188, n. 2, p. 1567 – 1579, 2007. ISSN 0096-3003.

MAIER, S.; PFLUG, G. C.; POLAK, J. W. Valuing portfolios of interdependent real options under exogenous and endogenous uncertainties. *European Journal of Operational Research*, 2019. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221719300906>>.

MARKETS pv magazine P.; TECHNOLOGY. *Brazil introduces new rules for distributed generation, net metering*. 2022. Link: <https://www.pv-magazine.com/2022/01/10/brazil-introduces-new-rules-for-distributed-generation-net-metering/>, Accessed: 2022-09-10.

MÁRKUS, L.; KUMAR, A. Modelling joint behaviour of asset prices using stochastic correlation. *Methodology and Computing in Applied Probability*, v. 23, n. 1, p. 341–354, Mar 2021. ISSN 1573-7713. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11009-020-09838-2>>.

MAROTTA, L. L. d. S. *Calibração do Modelo de Schwartz-Smith com Filtro de Kalman*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Fevereiro 2011.

MASLOVA, M. *Calibration of parameters for the Heston model in the high volatility period of market*. Dissertação (Mestrado) — Master's Thesis in Financial Mathematics, School of Information Science, Computer and Electrical Engineering, Halmstad University, November 2008.

MATHER, K. et al. *A parallel firefly meta-heuristics algorithm for financial option pricing*. In: *2017 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*, 27 Nov.- 1 Dec., Honolulu, HI, USA. [S.l.: s.n.], 2017.

MILLER, M. B. *Mathematics and Statistics for Financial Risk Management*. [S.l.]: Wiley, 2012. (Wiley Finance). ISBN 9781118170625; 1118170628.

MOODLEY, N. *The Heston Model: A Practical Approach with Matlab Code*. Dissertação (Mestrado) — Programme in Advanced Mathematics of Finance, Faculty of Science, University of the Witwatersrand, Johannesburg, South Africa, 2005.

MOON, Y.; BARAN, M. Economic analysis of a residential pv system from the timing perspective: A real option model. *Renewable Energy*, v. 125, p. 783–795, 2018. ISSN 0960-1481. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148118302908>>.

MOSTOVYI, O. *On the stability the least squares Monte Carlo*. *Optimization Letters*, v. 7, n. 2, p. 259–265, 2013. ISSN 1862-4480.

MOYSIADIS, G.; ANAGNOSTOU, I.; KANDHAI, D. Calibrating the mean-reversion parameter in the hull-white model using neural networks. In: ALZATE, C. et al. (Ed.). *ECML PKDD 2018 Workshops*. Cham: Springer International Publishing, 2019. p. 23–36. ISBN 978-3-030-13463-1.

MRÁZEK, M.; POSPÍŠIL, J. Calibration and simulation of heston model. *Open Mathematics*, De Gruyter Open, v. 15, n. 1, p. 679–704, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1515/math-2017-0058>>.

MUSSHOFF, O.; HIRSCHAUER, N. *A survey of simulation-based methods for pricing complex American type options*. *Insurance Markets and Companies*, v. 1, p. 16–31, 2010. ISSN 2616-3551. Disponível em: <<https://businessperspectives.org/journals/insurance-markets-and-companies/issue-195/a-survey-of-simulation-based-methods-for-pricing-complex-american-type-options>>.

MYERS, S. C. *Determinants of corporate borrowing*. *Journal of Financial Economics*, v. 5, n. 2, p. 147 – 175, 1977. ISSN 0304-405X.

NA, S. et al. Real options analysis for land and water solar deployment in idle areas of agricultural dam: A case study of south korea. *Sustainability*, v. 14, n. 4, 2022. ISSN 2071-1050. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2071-1050/14/4/2297>>.

NADARAJAH, S.; MARGOT, F.; SECOMANDI, N. *Comparison of least squares Monte Carlo methods with applications to energy real options*. *European Journal of Operational Research*, v. 256, n. 1, p. 196–204, 2017. ISSN 0377-2217.

NEOSOLAR. *Marco Legal da Geração Distribuída: Haverá taxaço do sol?* 2022. Link: <https://www.neosolar.com.br/blog/marco-legal-geracao-distribuida-taxacao-energia-solar/>, Accessed: 2022-10-10.

NETO, J. C. de S. A. et al. A comparison study of grid impact of photovoltaic installations in brazil according to normative resolution 482 and federal law 14.300. 2022. Disponível em: <<https://ssrn.com/abstract=4309470>>.

NGAI, C.; VALLE, S.; LONGLEY, A. *Trading Surge in Oil Options Creates a Whirl of Speculation*. 2019. Link: <https://www.bloomberg.com/news/articles/2019-03-13/oil-options-trading-jumps-as-large-producer-is-said-to-hedge>, Accessed: 2019-07-10.

NOGUEIRA, P. C. *Análise da inserção de geração solar fotovoltaica em grandes consumidores do Rio de Janeiro: um estudo de caso*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Fevereiro 2016.

PACHECO, M. A. C.; VELLASCO, M. M. B. R. *Sistemas Inteligentes de Apoio à Decisão*. 1. ed. [S.l.]: Interciência, 2007. v. 1. (Business Intelligence, v. 1). ISBN 978-85-7193-172-5.

PACHECO, M. A. C.; VELLASCO, M. M. B. R. *Intelligent Systems in Oil Field Development under Uncertainty*. 1. ed. [S.l.]: Springer, 2009. v. 183. (Studies in Computational Intelligence, v. 183). ISBN 978-3-540-93000-6.

PESSOA, P. F. P. *Opções de conversão com movimento de reversão à média com saltos de Poisson*. Dissertação (Mestrado) — Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Agosto 2011.

PINHO, J. a. T.; GALDINO, M. A. *Manual de Engenharia para sistemas fotovoltaicos*. [S.l.]: CEPEL - CRESESB, 2014.

PIRONNEAU, O. Calibration of Heston Model with Keras. Working paper or preprint. 2019. Disponível em: <<https://hal.sorbonne-universite.fr/hal-02273889>>.

- POWELL, S. Pricing Early-Exercise Options Using Genetic Optimization. *Journal of Derivatives*, v. 20, p. 43–59, 03 2013.
- PRAYOGO, D. et al. Differential Big Bang - Big Crunch algorithm for construction-engineering design optimization. *Automation in Construction*, v. 85, p. 290–304, 2018. ISSN 0926-5805.
- PVXCHANGE. *pvxchange Prices Index*. 2023. Link: <https://www.pvxchange.com/>, Acessado: 2023-03-20.
- QIN, K.; SUGANTHAN, P. Self-adaptive differential evolution algorithm for numerical optimization. In: . [S.l.: s.n.], 2005. v. 2, p. 1785–1791.
- QODSI, S.; TEHRANI, R.; BASHIRI, M. Portfolio optimization with simulated annealing algorithm. *Financial Research Journal*, University of Tehran, v. 17, n. 1, p. 141–158, 2015. ISSN 1024-8153. Disponível em: <https://jfr.ut.ac.ir/article_52036.html>.
- ROSCHNOTTI, M.; VASQUEZ, J. *Biggest Trading in Copper Options Ever Signals Supply Troubles*. 2019. Link: <https://www.bloomberg.com/news/articles/2019-03-18/biggest-trading-in-copper-options-ever-signals-supply-troubles>, Acessed: 2019-07-20.
- ROUAH, F. D. *The Heston model and its extensions in Matlab and C#*. 1. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2013., 2013. v. 1. (Wiley finance series, v. 1). ISBN 978-1-118-69518-0.
- SAIDALA, R. K.; DEVARAKONDA, N.; KAMARAIUGADDA, R. Hybrid Air Mass Collision Based Optimization Algorithm for Data Cluster Problems. In: *2018 IEEE 17th International Conference on Cognitive Informatics Cognitive Computing (ICCI*CC), Jul. 16-18, Berkeley, CA, USA*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 507–516.
- SANTOS, L. et al. Real Options versus Traditional Methods to assess Renewable Energy Projects. *Renewable Energy*, v. 68, p. 588 – 594, 2014. ISSN 0960-1481.
- SCARCIOFFOLO, A. R.; PEROBELLI, F. F. C.; CHIMELI, A. B. Counterfactual comparisons of investment options for wind power and agricultural production in the United States: Lessons from Northern Ohio. *Energy Economics*, v. 74, p. 299 – 309, 2018. ISSN 0140-9883.
- SCHACHTER, J.; MANCARELLA, P. A critical review of real options thinking for valuing investment flexibility in smart grids and low carbon energy systems. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 56, p. 261–271, 2016. ISSN 1364-0321. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032115013386>>.
- SCHÖNE, M. *Real Options Valuation: The Importance of Stochastic Process Choice in Commodity Price Modelling*. 1. ed. [S.l.]: Springer Gabler Wiesbaden, 2015. v. 1. XIV, 104 p. (BestMasters, v. 1). ISBN 978-3-658-07492-0.
- SEDIGHIZADEH, M.; ESMAILI, M.; EISAPOUR-MOARREF, A. Voltage and frequency regulation in autonomous microgrids using Hybrid Big Bang-Big Crunch algorithm. *Applied Soft Computing*, v. 52, p. 176–189, 2017. ISSN 1568-4946.
- SHARMA, B.; THULASIRAM, R. K.; THULASIRAMAN, P. Normalized particle swarm optimization for complex chooser option pricing on graphics processing unit. *The Journal of Supercomputing*, v. 66, n. 1, p. 170–192, Oct 2013. ISSN 1573-0484.

- SHREVE, S. E. *Stochastic calculus for finance 2, Continuous-time models*. New York, NY; Heidelberg: Springer, 2004. ISBN 0387401016 9780387401010. Disponível em: <http://www.worldcat.org/search?qt=worldcat_org_all&q=0387401016>.
- SILVA, R. C. . 27f. p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Estatística - Universidade Estadual da Paraíba, 2010.
- SINGH, G. P.; THULASIRAM, R. K.; THULASIRAMAN, P. [Non-dominant sorting Firefly algorithm for pricing American option](#). In: *2016 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI), Dec. 6-9, Athens, Greece*. [S.l.: s.n.], 2016.
- SOLARPOWER, E. *Global Market Outlook: For Solar Power / 2022-2026*. 2022. Link: <https://www.solarpowereurope.org/insights/market-outlooks/global-market-outlook-for-solar-power-2022>, Accessed: 2022-20-10.
- STORN, R.; PRICE, K. [Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces](#). *Journal of Global Optimization*, v. 11, n. 4, p. 341–359, Dec 1997. ISSN 1573-2916.
- SUCUPIRA, I. R. *Métodos Heurísticos genéricos: Metaheurísticas e Hiper-Heurísticas*. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Ciência da Computação - Universidade de São Paulo, 2004.
- SWAIN, A. American put option pricing using a hybrid evolutionary computation and monte-carlo simulation method. *SSRN Electronic Journal*, 01 2017.
- TANG, C. Y.; CHEN, S. X. Parameter estimation and bias correction for diffusion processes. *Journal of Econometrics*, v. 149, n. 1, p. 65–81, 2009. ISSN 0304-4076. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030440760800208X>>.
- TEIXEIRA, F. O. *On the Numerical simulation of the Heston model*. Dissertação (Mestrado) — Fundação Getúlio Vargas (FGV), Departamento de Matemática Aplicada, Rio de Janeiro, December 2017. Disponível em: <<http://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/handle/10438/19486>>.
- THULASIRAM, R. K. et al. [Nature-inspired soft computing for financial option pricing using high-performance analytics](#). *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, v. 28, n. 3, p. 707–728, 2016.
- TIAN, L. et al. The valuation of photovoltaic power generation under carbon market linkage based on real options. *Applied Energy*, v. 201, p. 354–362, 2017. ISSN 0306-2619. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0306261916318633>>.
- TOMAS, M. *Pricing and calibration of stochastic models via neural networks*. Dissertação (Mestrado) — Department of Mathematics, Imperial College London, 2018. Disponível em: <https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/faculty-of-natural-sciences/department-of-mathematics/math-finance/TOMAS_MEHDI_01390785.pdf>.
- TRIGEORGIS, L. *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. 1st. ed. [S.l.]: Mit Press, 1996. ISBN 026220102X.

TRIGEORGIS, L.; REUER, J. J. Real options theory in strategic management. *Strategic Management Journal*, v. 38, n. 1, p. 42–63, 2017.

WANG, E. *Wall Street ends 2022 with biggest annual drop since 2008*. 2022. Reuters. Link: <<https://www.reuters.com/markets/us/futures-slip-last-trading-day-torrid-year-2022-12-30/>>, Accessed: 2023-02-10.

WANG, X. et al. Parameter estimates of heston stochastic volatility model with mle and consistent ekf algorithm. *Science China Information Sciences*, v. 61, n. 4, p. 042202, Mar 2018. ISSN 1869-1919. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11432-017-9215-8>>.

WANG, X. et al. Parameter estimations of heston model based on consistent extended kalman filter. *IFAC-PapersOnLine - Elsevier*, v. 50, n. 1, p. 14100 – 14105, 2017. ISSN 2405-8963. 20th IFAC World Congress. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896317324758>>.

WILMOTT, P. *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*. 2. ed. New York, NY, USA: Wiley-Interscience, 2007. ISBN 0470319585, 9780470319581.

XIE, Z. et al. The estimation of parameters for stochastic differential equations using neural networks. *Inverse Problems in Science and Engineering*, Taylor & Francis, v. 15, n. 6, p. 629–641, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/17415970600907429>>.

YAO, B. et al. A Big Bang-Big Crunch Optimization for a Type-2 Fuzzy Logic Based Human Behaviour Recognition System in Intelligent Environments. In: *2013 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, Oct. 13-16, Manchester, UK*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 2880–2886. ISSN 1062-922X.

YU, J. J.; LI, V. O. A social spider algorithm for global optimization. *Applied Soft Computing*, v. 30, p. pp. 614 – 627, 2015. ISSN 1568-4946.

ZAHARIE, D.; MICOTA, F. Revisiting the analysis of population variance in differential evolution algorithms. In: *2017 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*. [S.l.: s.n.], 2017. p. 1811–1818.

ZENG, Y.; CHEN, W. The determination of concession period for build-operate-transfer solar photovoltaic power project under policy incentives: A case study of china. *Energies*, v. 12, n. 18, 2019. ISSN 1996-1073. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1996-1073/12/18/3520>>.

ZHANG, M. et al. Valuing investment decisions of renewable energy projects considering changing volatility. *Energy Economics*, v. 92, p. 104954, 2020. ISSN 0140-9883. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0140988320302942>>.

ZHANG, M. et al. Optimal investment portfolio strategies for power enterprises under multi-policy scenarios of renewable energy. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 154, p. 111879, 2022. ISSN 1364-0321. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032121011461>>.

ZHANG, M. et al. Evaluating uncertain investment decisions in low-carbon transition toward renewable energy. *Applied Energy*, v. 240, p. 1049–1060, 2019. ISSN 0306-2619. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030626191930217X>>.

ZHANG, N. et al. An agent-based diffusion model for residential photovoltaic deployment in singapore: Perspective of consumers' behaviour. *Journal of Cleaner Production*, v. 367, p. 132793, 2022. ISSN 0959-6526. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0959652622023885>>.

ZHANG, S. X.; BABOVIC, V. An evolutionary real options framework for the design and management of projects and systems with complex real options and exercising conditions. *Decision Support Systems*, v. 51, n. 1, p. 119–129, 2011. ISSN 0167-9236. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167923610002344>>.

ZUBA, M. E. *A energia elétrica como instrumento de desenvolvimento humano e o desafio ao plano nacional de energia brasileiro*. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Planejamento e Governança Pública. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Curitiba (PR). Brasil, 2017.