



Desenvolvimento de modelos computacionais parametrizados para análise do contato dentário humano

Evelyn Aparecida de Oliveira

JUIZ DE FORA
AGOSTO, 2013

Desenvolvimento de modelos computacionais parametrizados para análise do contato dentário humano

EVELYN APARECIDA DE OLIVEIRA

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Ciências da Computação
Bacharelado em Ciências da Computação

Orientador: Flávia de Souza Bastos
Coorientador: Leonardo Goliatt da Fonseca

JUIZ DE FORA
AGOSTO, 2013

DESENVOLVIMENTO DE MODELOS COMPUTACIONAIS
PARAMETRIZADOS PARA ANÁLISE DO CONTATO DENTÁRIO
HUMANO

Evelyn Aparecida de Oliveira

MONOGRAFIA SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS
EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, COMO PARTE INTE-
GRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
BACHAREL EM CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Flávia de Souza Bastos
Doutora em Engenharia Mecânica

Marcelo Lobosco
Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação

Leonardo Goliatt da Fonseca
Doutor Modelagem Computacional

JUIZ DE FORA
23 DE AGOSTO, 2013

A todos que torceram por mim!

Resumo

O esmalte dentário caracteriza-se por ser uma superfície rugosa, o que ocasiona o atrito quando elas entram em contato. O ato de um dente ser atritado com outro de forma excessiva, intensifica o desgaste dentário. Deste modo é necessário compreender a origem do problema, o que foi feito através da modelagem computacional. A abordagem utilizada para a simulação do contato entre superfícies rugosas consiste em, uma vez conhecidas as funções de densidade de probabilidade e seus respectivos domínios, discretizá-las em n intervalos, de forma que cada um represente uma aspereza principal da superfície. As deformações das asperezas principais são analisadas e é estabelecida, por meio de técnicas de homogeneização, a ligação entre as respostas ocorridas em micro-escala com uma resposta prevista em macro-escala. Neste trabalho são criados *scripts* parametrizados na linguagem *python* para o programa Abaqus, baseados em modelos estatísticos de contato, que geram e modificam a geometria das asperezas principais, suas propriedades de materiais, cargas e condições de contato, e leem e escrevem em um banco de dados as respostas encontradas. A partir daí foi implementado métodos numéricos para aproximar e interpolar as respostas obtidas, e concluir quais são os parâmetros que de fato influenciam na deformação das asperezas.

Palavras-chave: contato, atrito, *scripts* parametrizados, modelos multiescala

Abstract

The enamel is characterized by a rough surface, which causes friction when they rub together. The act of a tooth is rubbed with another form of excessive tooth wear intensifies. Thus it is necessary to understand the origin of the problem, which was done by computer modeling. The approach used to simulate the contact between rough surfaces consisting of once-known probability density functions and their respective domains discretized them into n intervals so that each represent one major surface roughness. The deformations of asperity key is analyzed and is determined by means of homogenization techniques, the bond between the responses that occurred in micro-scale with a predicted response in macro-scale. This work created parameterized scripts in python language for the program Abaqus, based on statistical models of contact, that generate and modify the geometry of the main asperities, their material properties, loads, and contact conditions, and read and write to a database the solutions. From there it was implemented numerical methods to approximate and interpolate the responses, and conclude what are the parameters that actually influence the deformation of asperities.

Keywords: contact, friction, parameterized scripts, multiscale model

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus, pois é Ele quem me levanta diariamente me renovando para seguir sempre em frente, sem Ele nenhum sonho é transformado em realidade.

Agradeço à professora e orientadora Flávia, pela paciência, dedicação e amizade, tornando menos difícil esta conquista.

Aos meus pais Ângela e João, que sempre me apoiaram, me incentivando, e muitas vezes deixando de realizar seus sonhos para realizar o meu, essa vitória é de vocês também. Aos meus irmãos, Elson e Evandro, por todo o carinho que tem por mim.

Agradeço a minha amiga/irmã Aline, que me incentivou diariamente e sempre me ouviu, me aconselhando sempre de maneira positiva. Esta amizade, leal e verdadeira, me fez uma pessoa melhor.

Agradeço a todos os meus familiares, que sempre me mandaram energias positivas, mesmo que em pensamento, sobretudo a minha tia Ana, uma vez que sempre se mostrou prestativa, ajudando-me quando necessário.

Agradeço aos meus amigos da faculdade ou “bando” (Alessandra, Eduardo, Gustavo, João Vitor, Johnny, Joventino e Ruy), pois sei que o carinho e amizade que temos uns com os outros será eterno. Os momentos que passamos juntos ficarão para sempre na nossa memória. Cabe aqui a frase que diariamente nos incentivava: “A gente sofre, mas se diverte!”

Obrigada a todos vocês!

*“Quando uma criatura humana desperta
para um grande sonho e sobre ele lança
toda a força de sua alma, todo o universo
conspira a seu favor ”.*

Johann Goethe

Sumário

Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	9
1 Introdução	10
1.1 Motivação: desafio da computação aplicada à saúde	10
1.1.1 Contextualização do problema: Desgaste Dentário	11
1.2 Objetivos	13
1.3 Ordem de exposição do texto	13
2 Superfícies Rugosas	14
2.1 Rugosidade Parâmetros e Definições	14
2.2 Parâmetros de Textura Superficial	16
3 Modelos Estatísticos de Contato	18
3.1 Contato Entre Superfícies Rugosas	18
3.2 Modelagem Geométrica	18
3.3 Análise do Contato	19
4 Método dos Elementos Finitos	22
4.1 Introdução ao Método	22
4.2 Formulação do Método	22
5 Programa Abaqus	25
5.1 Sobre o Abaqus	25
5.2 Modelagem no Abaqus	25
5.2.1 Arquivo de Entrada de Dados	26
5.2.2 Interfaces de Contato	26
6 Métodos Numéricos	29
6.1 Método dos Mínimos Quadrados	29
6.1.1 Desenvolvimento do Método	29
6.2 Interpolação Polinomial	32
7 Métodos	35
7.1 Parametrização dos Scripts	35
7.2 Modelos Numéricos Axissimétricos	36
7.3 Procedimentos de Homogeneização	38
7.3.1 Relação Tensão x Deformação Superficial Homogeneizada	39
7.3.2 Dureza ou Rigidez Superficial Homogeneizada	41
8 Resultados	42
8.1 Resultados Para a Relação Tensão x Deformação Superficial Homogeneizada	42
8.1.1 Variando a Rugosidade Média	42
8.1.2 Variando a Curvatura Média	43
8.2 Resultados Para a Dureza ou Rigidez Superficial Homogeneizada	45

9 Conclusão	48
Referências Bibliográficas	49

Lista de Figuras

1.1	Estrutura dentária, retirado de Souza <i>et al.</i> (2013)	12
1.2	Esmalte Dentário de uma pessoa saudável, retirado de Matos <i>et al.</i> (2013)	12
2.1	Perfilômetro, retirado de Rocha <i>et al.</i> (2013)	14
2.2	Perfil traçado pelo perfilômetro, retirado de Matos <i>et al.</i> (2013)	15
2.3	Partes que compõe o perfil, retirado de Rocha <i>et al.</i> (2013)	15
2.4	Perfil de rugosidade com a Linha Média, retirado de Matos <i>et al.</i> (2013)	15
2.5	Rugosidade Média, retirado de Matos <i>et al.</i> (2013)	16
2.6	Desvio Médio Quadrático, retirado de Matos <i>et al.</i> (2013)	16
3.1	Contato de Micro-Asperezas, modificado de Francis (1997)	18
3.2	Curva de distribuição	19
3.3	Plano Rígido em contato com as asperezas, modificado de Francis (1997)	20
4.1	Exemplo de discretização	22
5.1	Simulação com o ABAQUS	25
5.2	Geometria do elemento de contato	27
5.3	Sem penetração	27
5.4	Com penetração	27
6.1	Exemplo de um Ajuste Linear por Mínimos Quadrado	30
6.2	Exemplo de Interpolação Linear	32
6.3	Função de Aproximação	33
7.1	Malha de elementos finitos	37
8.1	Gráfico da Tensão pela Deformação para um Valor Inicial de Curvatura	42
8.2	Gráfico da Tensão pela Deformação para um Valor Intermediário de Curvatura	43
8.3	Gráfico da Tensão pela Deformação para um Valor Final de Curvatura	43
8.4	Gráfico da Tensão pela Deformação para um Valor Inicial de Rugosidade	44
8.5	Gráfico da Tensão pela Deformação para um Valor Intermediário de Rugosidade	44
8.6	Gráfico da Tensão pela Deformação para um Valor Final de Rugosidade	45
8.7	Dureza para um Valor Inicial de Identação	46
8.8	Dureza para um Valor Intermediário de Identação	46
8.9	Dureza para um Valor Final de Identação	47
8.10	Dureza Fixando a Curvatura Média	47

Lista de Tabelas

7.1	Contribuição Para a Aspereza de $Zp = 0.45$ na superfície com $Ra = 0.1$ e $Ssc = 0.07$	39
-----	---	----

1 Introdução

1.1 Motivação: desafio da computação aplicada à saúde

Para a maioria dos cientistas da vida, a aplicação de técnicas computacionais em suas pesquisas é relativamente nova e foi acelerada com a incursão largamente difundida de microcomputadores em seus laboratórios. Há não muito tempo atrás, um computador que oferecesse memória razoável para armazenamento de dados em massa e um sistema dotado de linguagem de alto nível podia custar várias vezes mais do que uma ultracentrífuga preparativa. Hoje em dia, um microcomputador sofisticado pode ser comprado com uma pequena fração do custo de uma ultracentrífuga. No entanto, embora o custo seja uma justificativa simples para serem adquiridos, as razões científicas não são tão simples, uma vez que estes os cientistas da vida, de modo geral, ainda não estão tão familiarizados com a computação. Claramente, qualquer desenvolvimento que aumente a consciência nesta área terá um importante papel a desempenhar no futuro. Na atividade médica, o processo de tomada de decisão ocorre em diversos pontos, como é o caso da interpretação de um resultado de laboratório. Existem três outras importantes situações, relacionadas com a medicina clínica, que são o diagnóstico, o prognóstico e o planejamento terapêutico, nas quais o computador pode ajudar. Com o advento de uma computação mais eficaz, melhores programas de modelagem e uma enxurrada de dados biomédicos, pesquisadores deram um salto à frente em suas habilidades para decifrar as dinâmicas complexas envolvidas nas doenças humanas e, agora, cada vez mais recursos computacionais são disponibilizados. No entanto, mesmo com tecnologia de ponta em imagem, testes de biomarcadores e dados genéticos, ainda se está longe de compreender suas multifacetadas causas e os variados estágios de desenvolvimento. Quanto mais se aprende sobre patologias como o câncer, doenças cardíacas e Alzheimer, mais complexas elas parecem ser e suas curas ainda mais enganosas. Muitas pesquisas em saúde são amplamente focadas em especialidades específicas. No entanto, o corpo é todo um sistema que está em constante interação com o ambiente mais amplo, incluindo poluentes, toxinas e outros agentes, sendo que não

trabalham em uma única direção, mas vão e retornam continuamente com perturbações em níveis celulares, moleculares e genéticos. Deseja-se entender como esses sistemas se comportam no nível funcional, e como este comportamento surge como resultado de processos de interação altamente dinâmicos, não-lineares e acoplados que ocorrem em várias escalas espaciais e temporais. Para isso, são necessários novos tipos de modelos exploratórios e preditivos, novas estratégias de investigação e, sobretudo uma nova geração de cientistas altamente computacionais, capazes de construir ferramentas e aplicar estas novas abordagens na resolução de problemas fundamentais da ciência natural. Neste contexto, a computação pode trazer uma grande contribuição para os avanços na medicina. Conforme se ganha confiança na capacidade de modelos computacionais em prever os processos biológicos humanos, eles ajudam a guiar através do complexo panorama da doença, levando a métodos mais eficazes e confiáveis para o diagnóstico da doença, estratificação de risco e tratamento.

1.1.1 Contextualização do problema: Desgaste Dentário

Com o aumento da expectativa de vida dos seres humanos, é essencial manter a estrutura dentária saudável (Fig. 1.1), uma vez que essa é fundamental em todo o processo mastigatório. Entretanto, mesmo diante da crescente prevenção de doenças sistêmicas orais em distintos grupos populacionais, uma das alterações dentárias mais comumente encontradas é o desgaste dentário, o qual se manifesta com grande variabilidade de grau ou nível. Uma doença comum entre os seres humanos, associada ao desgaste dentário, é o bruxismo, hábito do paciente de ranger os dentes, atritando-os e ocasionando grandes danos à saúde bucal, sendo que, em casos extremos, pode comprometer todo o sistema mastigatório do paciente.

Como o desgaste dentário tem-se mostrado um problema crescente na população mundial, que afeta tanto adultos quanto crianças, torna-se necessário compreender melhor não só a origem do problema, mas também suas causas, através de estudos clínicos, experimentais e numéricos (Lobbezzo *et al.*, 2008). A modelagem computacional do problema pode auxiliar no esclarecimento de profissionais que lidam com o assunto, de forma a compreenderem melhor a fisiopatologia do desgaste dentário e instituírem a terapêutica



Figura 1.1: Estrutura dentária, retirado de Souza *et al.* (2013)

adequada para cada caso, atingindo com isso a origem do problema e não apenas o tratamento de seus sintomas.

Dos vários fatores que influenciam o desgaste, muitos estão relacionados com as propriedades mecânicas dos materiais e a textura superficial na interface de contato. Seas na Fig. 1.2. A fim de caracterizar uma superfície, normalmente é realizado um ensaio de perfilometria. Através do perfil da superfície, os parâmetros de rugosidade são extraídos, como, por exemplo, a média e o desvio padrão das alturas das asperezas, e a sua distribuição pode ser equacionada (Hutchings *et al.*, 1992).



Figura 1.2: Esmalte Dentário de uma pessoa saudável, retirado de Matos *et al.* (2013)

Uma abordagem micro-mecânica na área de contato pode ser aplicada com o uso de técnicas de multiescala, referidas ao desenvolvimento de equações constitutivas elasto-

plásticas. Estas técnicas são baseadas em modelos estatísticos de contato, que partem da formulação proposta por Hertz (1896).

Para resolver o problema do contato utilizou-se o software Abaqus, um programa comercial de elementos finitos, com a parametrização do arquivo emitido internamente pelo mesmo, de forma a incluir as tarefas repetitivas de modelagem e o acesso aos dados de saída para cada aspereza, basicamente os valores de força e área de contato. Em seguida, uma rotina fez o cálculo dos valores totais esperados para a interface, que foram utilizados para obter parâmetros tribológicos, ou seja, referentes ao contato, atrito e desgaste das superfícies analisadas.

1.2 Objetivos

Este trabalho busca uma melhor compreensão dos mecanismos de atrito e desgaste dentário, comparando os resultados numéricos encontrados com os dados experimentais disponíveis na literatura. Para alcançar tal objetivo as seguintes etapas foram estabelecidas:

- Caracterização da superfície do esmalte dentário;
- Geração dos modelos computacionais para representar o contato entre as superfícies dentárias.

1.3 Ordem de exposição do texto

No capítulo 2 é feita a definição de superfícies rugosas, bem como suas características; no capítulo 3 é colocado o modelo estatísticos de contato com todos seus parâmetros e definições; no capítulo 4 é feita uma introdução ao método dos elementos finitos; no capítulo 5 é feita uma introdução aos software Abaqus e explicado como este auxiliou no desenvolvimento desse trabalho; no capítulo 6 são apresentados os métodos computacionais implementados para obter a solução do problema em questão; no capítulo 7 é apresentado o método usado no trabalho; no capítulo 8 os resultados obtidos e no capítulo 9 as conclusões são expostas.

2 Superfícies Rugosas

2.1 Rugosidade Parâmetros e Definições

Uma das maneiras conhecidas para se extrair os parâmetros de textura superficial de uma superfície rugosa é a realização do ensaio de perfilometria, que consiste em deslizar uma agulha fina sobre a superfície (Fig. 2.1) e converter o deslocamento vertical dessa agulha em um perfil da superfície. Na Fig. 2.2 podem ser visualizadas as seguintes características de um perfil de superfície:

- E - comprimento total percorrido pela ponta (ou agulha) do perfilômetro;
- l_n - comprimento no qual a ponta capta as imperfeições da superfície;
- l - comprimentos de amostragem;
- A e C - comprimentos desconsiderados.

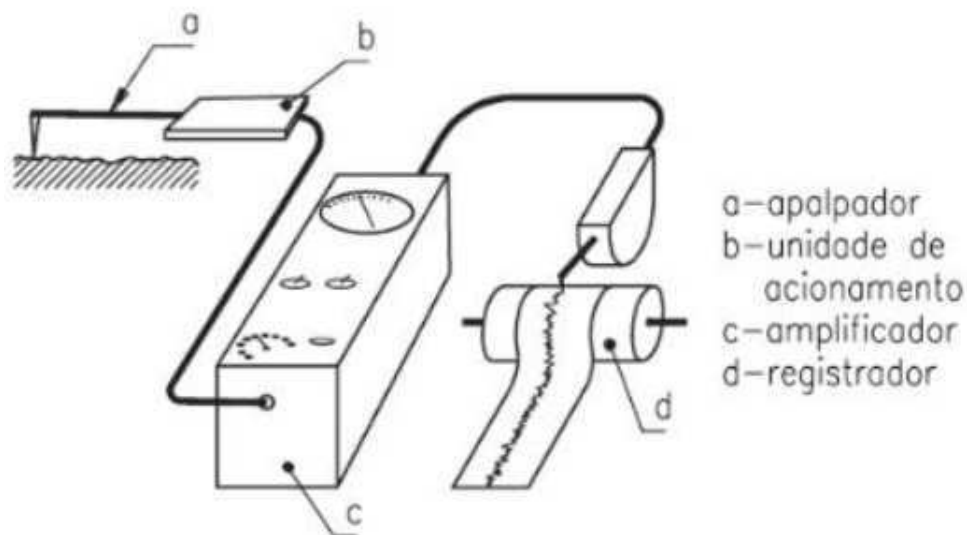


Figura 2.1: Perfilômetro, retirado de Rocha *et al.* (2013)

Sobre o perfil obtido é realizado um tratamento ou filtragem da superfície, a fim de se estabelecer quais asperezas representam a rugosidade e quais representam as ondulações e os erros de forma. As partes que compõem um perfil, rugosidade, ondulação

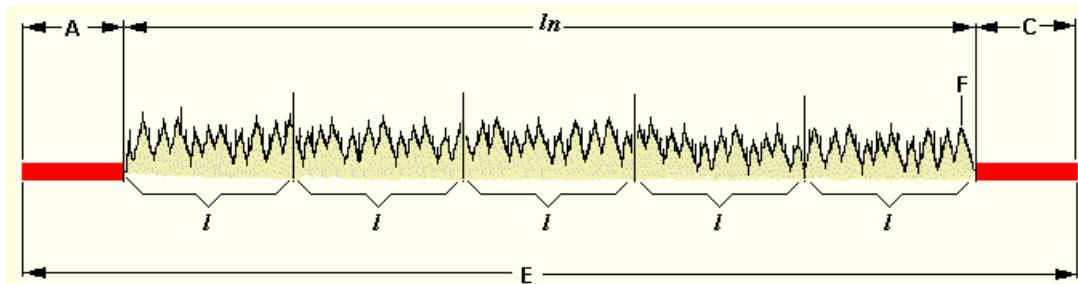


Figura 2.2: Perfil traçado pelo perfilômetro, retirado de Matos *et al.* (2013)

e erro de forma, podem ser visualizadas na Fig. 2.3. Desconsiderando as duas últimas, obtém-se o perfil de rugosidade. A partir desse perfil, uma linha média é traçada e as alturas das irregularidades podem ser calculadas em relação a ela (Fig. 2.4).

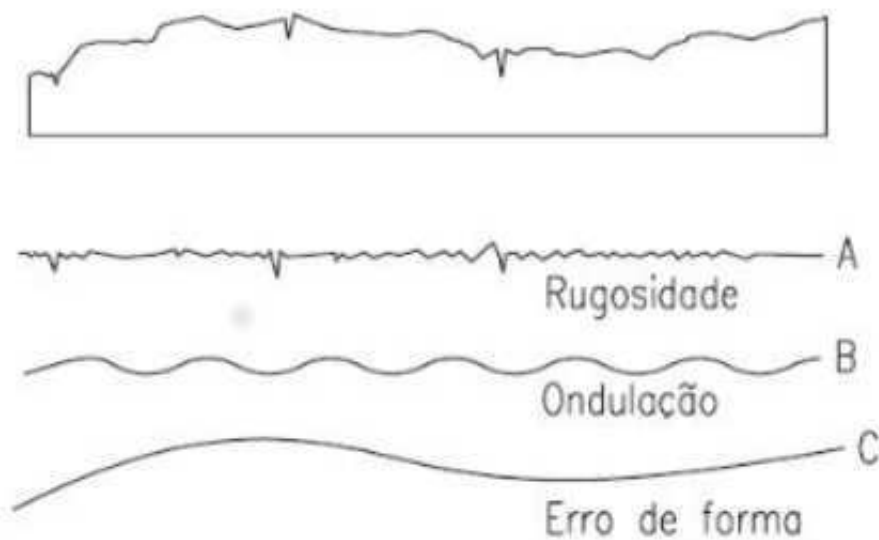


Figura 2.3: Partes que compõem o perfil, retirado de Rocha *et al.* (2013)

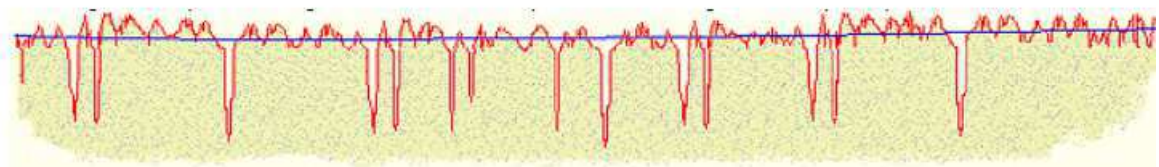


Figura 2.4: Perfil de rugosidade com a Linha Média, retirado de Matos *et al.* (2013)

2.2 Parâmetros de Textura Superficial

A avaliação da topografia de uma superfície não implica apenas a medição dos perfis e sim a atribuição de um valor numérico que dê ao usuário informações universalmente aceitáveis e significantes sobre ela. A seleção dos parâmetros de textura superficial deve ser feita tendo-se em mente que eles devem refletir a diferença entre duas superfícies distintas e ser sensíveis às propriedades em estudo, como, por exemplo, em relação ao desgaste.

Para este trabalho foram selecionados os seguintes parâmetros:

Ra (μm): rugosidade média. É um parâmetro de dispersão definido como a média aritmética dos valores absolutos da superfície acima e abaixo da linha média.

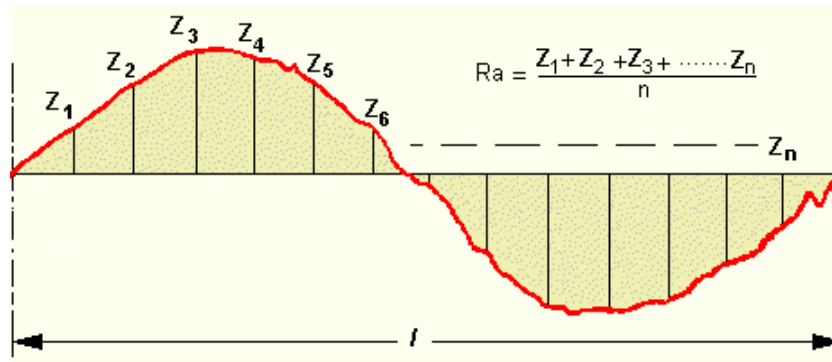


Figura 2.5: Rugosidade Média, retirado de Matos *et al.* (2013)

Rq (μm): desvio médio quadrático, ou desvio padrão da superfície. É um parâmetro mais sensível a valores extremos do que o *Ra*.

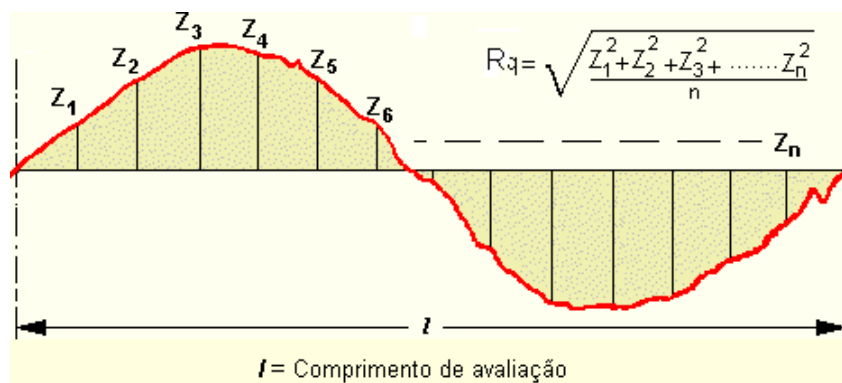


Figura 2.6: Desvio Médio Quadrático, retirado de Matos *et al.* (2013)

Apesar de serem usados comumente em muitas aplicações práticas, os parâmetros *Ra* e *Rq*, principalmente por não distinguirem entre picos e vales, não caracterizam bem uma superfície, podendo ser razoavelmente adequados na descrição apenas de superfícies

isotrópicas. Esses dois parâmetros são fortemente correlacionados (Nayak, 1971).

Sds ($1/mm$): Número de picos por unidade de comprimento. Este parâmetro tem grande sentido funcional em contato deslizante. Quanto maior o número de asperezas, maior será a área real de contato, o que influencia diretamente no atrito na superfície (Waikar *et al.*, 2008).

Ssc ($1/mm$): curvatura média quadrática dos picos. Quanto mais arredondados forem os picos, menor será o valor de *Ssc*.

3 Modelos Estatísticos de Contato

3.1 Contato Entre Superfícies Rugosas

O contato entre dois corpos constituídos de superfícies rugosas, acontece quando uma micro-aspereza choca-se com a outra, a exemplo da Fig. 3.1. Deste modo, fica cada vez mais evidente a importância de se conhecer o perfil de rugosidade dessas superfícies. Quando esse é desprezado, pode-se encontrar erros grosseiros na avaliação da pressão de contato, já que a área de contato real é menor que a área de contato nominal, que ocorre no contato entre superfícies lisas.

Um modelo de mecânica de contato depende da maneira como as superfícies rugosas são descritas matematicamente. As asperezas na superfície aparecem de forma aleatória, e, portanto, a geometria não deformada dos corpos em contato não pode ser descrita de maneira determinística (Ciulli *et al.*, 2008). Logo, é através de análise estatística que os parâmetros necessários são adquiridos.

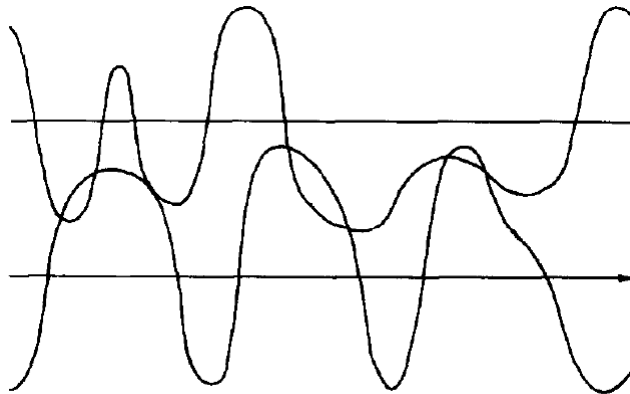


Figura 3.1: Contato de Micro-Asperezas, modificado de Francis (1997)

3.2 Modelagem Geométrica

A partir do trabalho pioneiro de Greenwood *et al.* (1966.), assume-se que as asperezas das superfícies têm a forma de semi-esferas ou parabolóides. Geram-se modelos axis-

simétricos de uma série de asperezas, chamadas de asperezas principais, com diferentes alturas individuais z_i , na forma de colinas de cosseno, como visto em 3.1.

$$z(x, y) = z_i \cos(xK) \cos(yK) \quad (3.1)$$

onde K é a curvatura média das asperezas;

A probabilidade $\phi(z)$ de se encontrar na superfície uma aspereza de altura z , caso a distribuição seja normal, pode ser modelada matematicamente pela equação:

$$\phi(z) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(z - m)^2}{2s^2} \right] \quad (3.2)$$

para a qual s é o desvio padrão e m é a altura média de asperezas. Um exemplo de curva de distribuição normal ou gaussiana, que aproxima o histograma das alturas das asperezas de uma superfície rugosa, pode ser visto na Fig. 3.2.

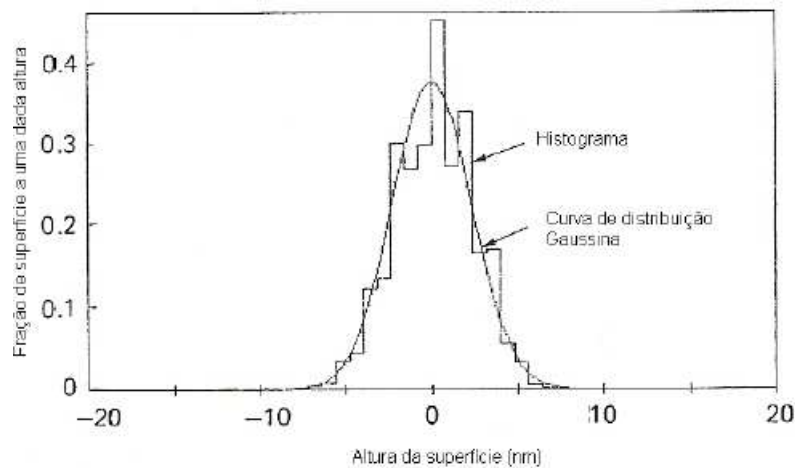


Figura 3.2: Curva de distribuição

3.3 Análise do Contato

A solução de qualquer problema de contato exige que a geometria das duas superfícies em contato não deformadas seja conhecida como uma função da sua posição relativa. Só então a solução pode avançar para a determinação da área da superfície de deslocamento, que acomoda as sobreposições e as tensões de contato associada a esta deformação.

Um primeiro passo na caracterização de propriedades tribológicas é o conheci-

mento das forças de contato em superfícies sólidas durante o contato. Para materiais elastoplásticos, já que uma solução analítica não é possível, é necessário desenvolver modelos numéricos para resolver o problema de contato.

A fim de analisar o contato de tais superfícies a maneira adotada para a simulação é avaliar como é a deformação das asperezas quando essa é amassada por um plano rígido, conforme a Fig. 3.3.

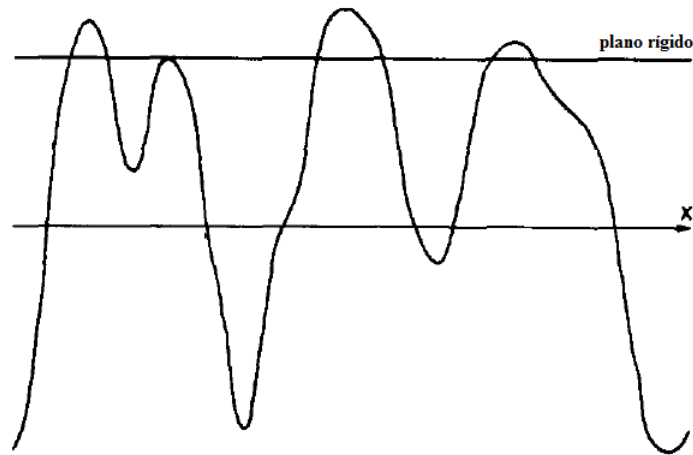


Figura 3.3: Plano Rígido em contato com as asperezas, modificado de Francis (1997)

Inspirado pelas abordagens propostas por (Tworzydło *et al.*, 1998) para modelos de interfaces de contato baseados em asperezas, os seguintes passos são seguidos:

- Obter, através do ensaio de perfilometria, o perfil da superfície rugosa;
- Calcular os parâmetros estatísticos que caracterizam a superfície, como a média e o desvio padrão das alturas, bem como a curvatura das asperezas;
- Calcular a função de densidade de probabilidade que representa a distribuição das asperezas da superfície de diferentes alturas e curvaturas dos picos (Fysh *et al.*, 1990);
- Análise, por elementos finitos, do micro-contato para cada aspereza principal em contato com um plano rígido, como uma analogia ao ensaio de dureza, onde a ponta do penetrador é quase lisa;
- Homogeneização: a partir das respostas obtidas para cada micro-aspereza obter a resposta para a superfície como um todo.

Neste trabalho considera-se que o atrito vem de forças adesivas entre as superfícies em contato deslizante e de sua rigidez mecânica na micro-escala. No último caso, os mecanismos dominantes de dissipação de energia são a deformação plástica e a fratura frágil. A força de atrito total F é a soma da força necessária ao cisalhamento das junções formadas, F_a , e a força necessária para fornecer energia de deformação às asperezas em contato, F_d .

A partir das micro-respostas $X(z_i, K)$ obtidas nas etapas anteriores (onde X pode ser força ou pressão de contato, área real de contato etc), a estimativa dos valores homogeneizados para macro-contato $E^*(X)$ esperado na interface pode ser estimado através da integração numérica de (Pottirayil *et al.*, 2010):

$$E^*(X) = N \int_{-\infty}^{\infty} X(z_i, K) \phi(z_i) dz_i \quad (3.3)$$

onde N é o número de asperezas na interface, e $\phi(z_i)$ são as frequências de cada aspereza principal, com alturas z_i em contato com o plano rígido.

Sendo assim, os benefícios e versatilidade de métodos numéricos e o fato de levarem em conta a análise de deformação em micro-escala nos pontos de contato, podem fornecer informações úteis para a construção de hipóteses sobre o fenômeno em investigação.

4 Método dos Elementos Finitos

4.1 Introdução ao Método

O método dos elementos finitos é uma ferramenta cada vez mais popular na busca de soluções numéricas para problemas com aplicações nas áreas de Engenharia e de Ciências Aplicadas, constituídos de equações diferenciais parciais. Esse método baseia-se no conceito de discretização, que se trata, basicamente, da divisão do domínio em um conjunto de subdomínios. Cada subdomínio é denominado elemento finito. Qualquer formato geométrico pode ser discretizado em elementos finitos, tal como na Fig. 4.1.



Figura 4.1: Exemplo de discretização

4.2 Formulação do Método

No Método dos Elementos Finitos, utiliza-se uma formulação integral para desenvolver relações algébricas sobre os coeficientes u_j de uma aproximação, por exemplo da forma:

$$u \cong \sum_{j=1}^n u_j \psi_j \quad (4.1)$$

onde u representa uma solução particular de uma equação diferencial. O fato de utilizar relações integrais equivalentes às equações diferenciais nem sempre resulta em um número requerido de equações algébricas linearmente independentes. Uma maneira de se assegu-

rar que haverá exatamente n equações tanto como n variáveis é exigir que os resíduos ponderados na equação sejam zero.

Supondo que se deseja encontrar a solução aproximada da seguinte equação diferencial:

$$-\frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + u = 0, \text{ para } 0 < x < 1 \quad (4.2)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$u(0) = 1; \left(x \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (4.3)$$

aproxima-se a solução, sobre o domínio $\Omega = (0, 1)$, na forma:

$$u \approx U_N \equiv \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (4.4)$$

onde c_j são os coeficientes a serem determinados e $\phi_j(x)$ e $\phi_0(x)$ são funções pré-selecionadas para satisfazer as condições de contorno pelos N -parâmetros da solução aproximada U_N .

Como exemplo, toma-se $N = 2$ e as funções de forma $\phi_1 = x^2 - 2x$, $\phi_2 = x^3 - 3x$ e $\phi_0 = 1$. Tem-se:

$$u \approx U_N = c_1(x^2 - 2x) + c_2(x^3 - 3x) + 1$$

Substituindo a solução aproximada em (4.2), tem-se:

$$-\frac{dU_N}{dx} - x \frac{d^2U_N}{dx^2} + U_N = -2c_1(x-1) - 3c_2(x^2-1) - 2c_1x - 6c_2x^2 + c_1(x^2-2x) + c_2(x^3-3x) + 1 = 0$$

Uma vez que essa expressão precisa ser zero para qualquer valor de x , os coeficientes das potências de x também precisam ser zero. Então:

$$1 + c_1 + c_2 = 0$$

$$-(6c_1 + 3c_2) = 0$$

$$c_1 - 9c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

As relações acima são inconsistentes, portanto não têm solução. Por outro lado, pode-se aproximar a solução U de (4.2) na forma de integral ponderada:

$$\int_0^1 wRdx = 0 \quad (4.5)$$

onde R , chamado de resíduo, é:

$$R \equiv -\frac{dU_N}{dx} - x\frac{d^2U_N}{dx^2} + U_N$$

e w é chamado de funções de peso.

De (4.5) obtém-se algumas equações linearmente independentes em relação às funções w . Por exemplo, tomando-se $w = 1$ e $w = x$, obtém-se:

$$0 = \int_0^1 1Rdx = (1 + 2c_1 + 3c_2) + \frac{1}{2}(-6c_1 - 3c_2) + \frac{1}{3}(c_1 - 9c_2) + \frac{1}{4}c_2$$

$$0 = \int_0^1 xRdx = \frac{1}{2}(1 + 2c_1 + 3c_2) + \frac{1}{3}(-6c_1 - 3c_2) + \frac{1}{4}(c_1 - 9c_2) + \frac{1}{5}c_2$$

ou

$$\frac{2}{3}c_1 + \frac{5}{4}c_2 = 1$$

$$\frac{3}{4}c_1 + \frac{31}{20}c_2 = \frac{1}{2}$$

sistema linearmente independente para c_1 e c_2 ($c_1 = \frac{222}{23}$ e $c_2 = -\frac{100}{23}$).

De maneira análoga essa teoria estende-se para problemas em mais dimensões.

5 Programa Abaqus

5.1 Sobre o Abaqus

O software ABAQUS/CAE foi utilizado para a implementação computacional do problema, através da geração de modelos do contato entre asperezas principais da superfície e um plano rígido. Essa implementação engloba a geometria do problema, a atribuição das propriedades dos materiais envolvidos, aplicação do carregamento e das condições de contorno, a seleção das etapas pelas quais o problema deve passar e a geração das malhas de elementos finitos correspondentes aos corpos em questão. O programa possui também um pós processador que permite a visualização gráfica dos resultados. O fluxograma do programa pode ser visto na Fig. 5.1.



Figura 5.1: Simulação com o ABAQUS

5.2 Modelagem no Abaqus

Para a definição da geometria do modelo, utiliza-se o módulo PART do ABAQUS, onde se constrói a *spline* que representa a parte superior da aspereza e as demais linhas que a delimitam. Cria-se um plano horizontal, de forma que sua posição inicial coincida

com o topo da mais alta dentre as asperezas principais da superfície. Esse plano tem a função de "amassar" a aspereza e será deslocado na direção vertical para baixo na etapa de carregamento. Definem-se as propriedades mecânicas do material associadas ao regime elasto-plástico (módulo de elasticidade, coeficiente de poisson e tensão de escoamento) no módulo MATERIALS. A malha de elementos finitos é definida no módulo MESH. Por tratarem-se de modelos axissimétricos, utilizaram-se elementos bi-dimensionais lineares triangulares e quadrangulares. O agrupamento de todas as parte é feito utilizando-se o módulo ASSEMBLY e no módulo STEP são impostas as condições de contorno, de contato e de carregamento.

5.2.1 Arquivo de Entrada de Dados

Ao gerar-se o arquivo de entrada de dados através da interface gráfica do ABAQUS/CAE, cada operação é registrada em um arquivo do tipo script (com terminação .jnl) em uma linguagem de programação orientada a objeto chamada Python. Esse arquivo pode ser acessado e modificado para atender as necessidades do usuário.

5.2.2 Interfaces de Contato

O ABAQUS fornece diversas maneiras para a definição de problemas de contato, dentre elas: contato geral, contato entre pares e contato entre elementos. Neste trabalho, em que se analisou o contato entre um plano rígido (representando uma superfície muito mais dura do que a contraface) e um corpo sólido deformável, representando uma aspereza, utilizou-se a formulação de contato entre pares, de forma que as superfícies interagissem na direção normal, gerando resistência à penetração (Zavarise *et al.*, 2006).

Definição da Superfície

Cada superfície é classificada como "mestre" ou "escrava", sendo que a superfície mestre é a de maior dureza e a escrava é a que resistirá à penetração da mestre. Considerando o contato entre pares, deve-se checar a condição de penetração entre as superfícies, definindo a distância de cada nó da superfície escrava em relação à superfície mestre. Portanto, cada elemento de contato é constituído por um nó escravo e um segmento da superfície mestre,

como pode ser observado na Fig. 5.2.

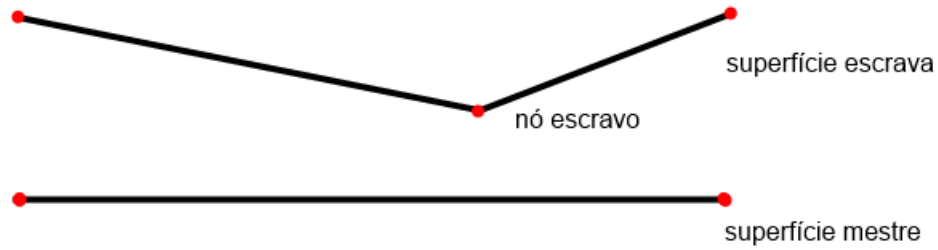


Figura 5.2: Geometria do elemento de contato

Verificação do Contato

Para cada nó escravo, primeiramente, é identificado o nó mestre mais próximo através da função:

$$\min \| x_S - x_M^i \| \quad (5.1)$$

onde x_S representa a atual coordenada do nó escravo e x_M^i representa a atual coordenada do nó mestre M_i .

Em seguida, todos os segmentos da superfície mestre são verificados para se encontrar qual deles está relacionado a esse nó mestre, ou seja, qual é o segmento mestre. Quando o segmento mestre é identificado, pode-se medir a distância do nó escravo a partir dele. Esta tarefa é realizada através do cálculo do produto vetorial entre o vetor unitário normal, n , e o vetor $\overline{E1}$, conforme as Figs. 5.3 e 5.4, e pelo sinal desse produto, verifica-se se houve ou não penetração.

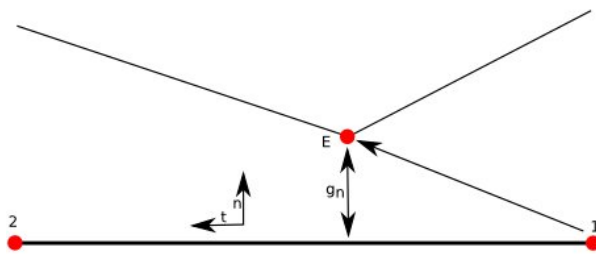


Figura 5.3: Sem penetração

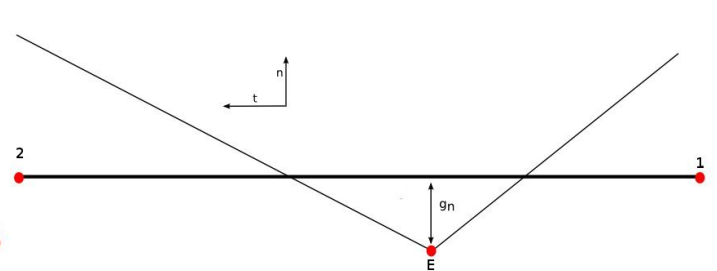


Figura 5.4: Com penetração

Assim, os parâmetros geométricos (comprimento do segmento principal, o vetor unitário normal e tangencial, quantidade de penetração e o ponto de projeção no segmento mestre) necessários para calcular o termo de rigidez no contato, além das variáveis correspondentes à força de atrito, podem ser obtidos.

6 Métodos Numéricos

Alguns métodos numéricos foram implementados, para ajustar da melhor maneira possível as respostas obtidas através do programa Abaqus.

6.1 Método dos Mínimos Quadrados

Basicamente o método dos mínimos quadrados é uma técnica utilizada para ajustar da melhor maneira possível um polinômio entre um conjunto de dados. Geralmente este conjunto de dados trata-se de resultados de uma pesquisa, onde estes valores obtidos carregam junto a eles um certo grau de incerteza, uma vez que trata-se de valores experimentais, que podem conter erros.

A fim de minimizar estes possíveis erros utiliza-se o método dos mínimos quadrados. Neste é exigido apenas uma função aproximadora que tome valores de forma a minimizar a distância entre os valores dados, minimizar, no sentido dos mínimos quadrados (Fig. 6.1).

A ideia principal é tentar descobrir os valores dos coeficientes da função aproximadora de tal modo que a soma dos quadrados das distâncias, tomada na vertical, referente a essa função e a cada um dos pontos dados, seja a menor possível, daí o nome de mínimos quadrados (Leonardo *et al.*, 2013).

6.1.1 Desenvolvimento do Método

Para entender o modelo matemático por de trás desse método, inicialmente é feito a análise do ajuste por uma função linear, como apresentada na equação 6.1.

$$y_i = a + bx \tag{6.1}$$

Supondo que exista p pontos correspondentes aos dados do problema, desta forma teríamos:

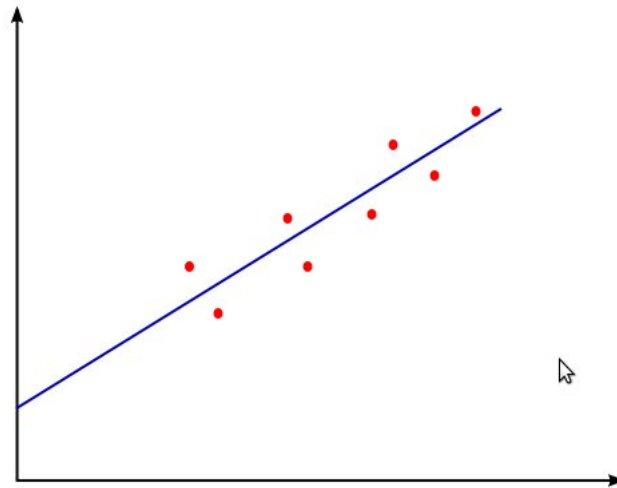


Figura 6.1: Exemplo de um Ajuste Linear por Mínimos Quadrado

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^p (y_i - (a + bx_i))^2 \quad (6.2)$$

De forma que o objetivo é encontrar valores para a e b que minimizam $S(a, b)$. Modelando o problema de forma matricial, onde os resíduos são definidos como na equação 6.3, segue que:

$$r_i = y_i - (a + bx_i) \quad (6.3)$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_p \end{pmatrix}$$

Nota-se que $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$ representa o mesmo que $y_i = a + bx$, logo queremos minimizar:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^p r_i^2 \quad (6.4)$$

Em forma matricial temos:

$$\sum_{i=1}^p r_i^2 = R^T R \quad (6.5)$$

onde

$$R = Y - AX \quad (6.6)$$

Logo temos que:

$$S(a, b) = (Y - AX)^T(Y - AX) = Y^T Y - X^T A^T Y - Y^T A X + X^T A^T A X \quad (6.7)$$

A fim de minimizar $S(a, b)$, devemos encontrar o gradiente de $S(a, b)$ de modo que ele seja nulo, logo:

$$\nabla(S(a, b)) = -A^T Y - Y^T A + 2A^T A X = 0 \quad (6.8)$$

Assim, para encontrarmos a e b que faça com que a soma do quadrado das diferenças entre y_i e $a + b x_i$ seja mínima, basta resolvermos o sistema linear

$$A^T A X = A^T Y \quad (6.9)$$

O sistema linear admite solução única, o ponto de mínimo, uma vez que $A^T A$ é simétrica positiva definida. Deste modo, para a função linear, basta resolver o sistema:

$$A^T Y = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p y_i \\ \sum_{i=1}^p x_i y_i \end{pmatrix}, \quad A^T A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p 1 & \sum_{i=1}^p x_i \\ \sum_{i=1}^p x_i & \sum_{i=1}^p (x_i)^2 \end{pmatrix},$$

Analogamente, para ajustar um polinômio da forma:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (6.10)$$

Basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p x_i^0 & \sum_{i=1}^p x_i^1 & \dots & \sum_{i=1}^p x_i^n \\ \sum_{i=1}^p x_i^1 & \sum_{i=1}^p x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^p x_i^{n+1} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^p x_i^n & \sum_{i=1}^p x_i^{n+1} & \dots & \sum_{i=1}^p x_i^{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p x_i^0 y_i \\ \sum_{i=1}^p x_i^1 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p x_i^n y_i \end{pmatrix}$$

Logo, após resolvido este sistema linear, os valores dos coeficientes do polinômio, que melhor ajustam os dados de entrada, são encontrados.

6.2 Interpolação Polinomial

A interpolação polinomial é uma das maneiras em que se pode obter uma aproximação para uma função $f(x)$, para representar da melhor maneira possível um conjunto de dados. Uma outra situação em que é usual interpolar uma função é quando o problema em questão é matematicamente difícil, ou seja, é descrito por funções que contém operações tais como diferenciação e integração difíceis de serem realizadas.

A diferença em relação ao método dos mínimos quadrados citado anteriormente é que neste caso a função interpoladora passa por todos os pontos em que se conhece o valor dessa função, como mostrado na Fig. 6.2.

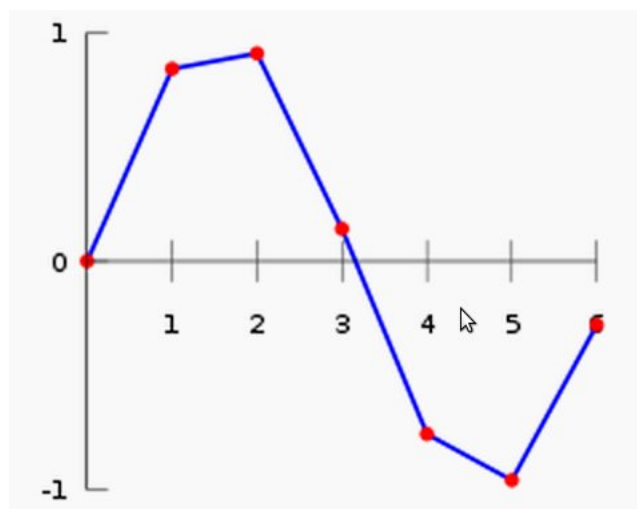


Figura 6.2: Exemplo de Interpolação Linear

Deste modo, dado um conjunto formado por $(n+1)$ pontos distintos: x_0, x_1, \dots, x_n , e seus respectivos valores em $f(x)$, dado por: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, o que se pretende

é obter uma função $g(x)$ que tenha o mesmo valor que a $f(x)$ nos pontos conhecidos, ou seja:

$$f(x_i) = g(x_i) \quad i = 0 \dots n. \quad (6.11)$$

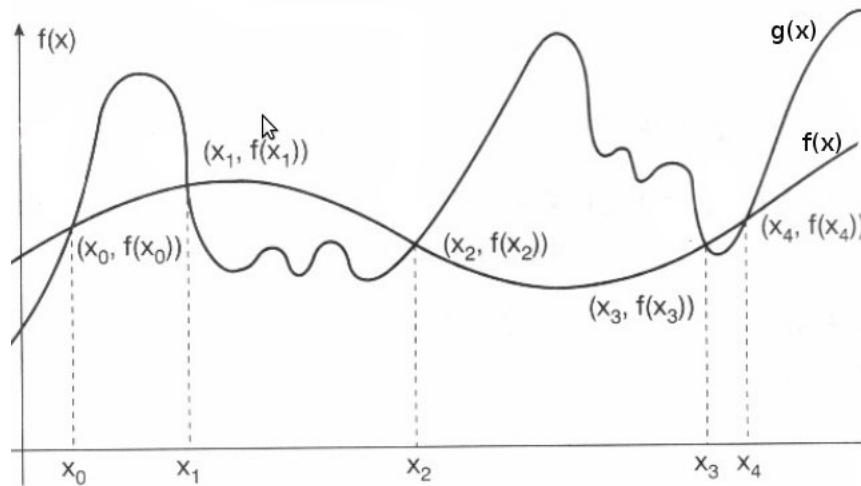


Figura 6.3: Função de Aproximação

Sendo assim, para melhor entendimento, considere que queremos obter a função aproximada $g(x)$:

$$g_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (6.12)$$

Obter $g_n(x)$ significa obter os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n . A partir da condição expressada em 6.11, é possível montar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Logo em notação matricial temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Portanto, resolvendo o sistema linear acima, os valores dos coeficientes são encontrados, podendo então posteriormente definir o polinômio interpolador.

7 Métodos

7.1 Parametrização dos Scripts

A parte inicial deste trabalho foi feita utilizando-se a interface gráfica de usuário (GUI) do módulo ABAQUS/CAE para criar um modelo de exemplo de contato entre uma aspereza específica e um plano rígido. Nesta etapa as características do material avaliado, o esmalte dentário, para o regime elasto-plástico (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e tensão de escoamento) foram incorporadas ao modelo, a partir de valores achados na literatura.

Os comandos emitidos internamente pelo ABAQUS/CAE após cada operação são registrados em um arquivo do tipo *script* (com terminação .jnl) em uma linguagem de programação orientada a objeto chamada Python. Este arquivo foi acessado e parametrizado, de acordo com as variáveis do problema, de forma a incluir, principalmente, um laço que repetisse as tarefas de modelagem.

A modificação tem início com a atribuição de valores aos parâmetros da análise que são a rugosidade média, a rugosidade média quadrática, a curvatura média e o número de células de integração numérica. A função de distribuição das alturas das asperezas é calculada para a rugosidade em questão e, a partir de um critério de tolerância, encontram-se os valores máximo e mínimo de altura de asperezas e, baseado no número de células de integração, determina-se o passo de integração.

O laço para percorrer todas as asperezas principais é iniciado e é atribuído um nome específico ao arquivo de saída, de acordo com o comando:

```
{ jobName = 'amostraCP_' + str(L) }
```

onde L é o contador do laço. Foi definida uma função para auxiliar na geração automatizada da geometria com base nos parâmetros de rugosidade, em que se calcula uma lista com as coordenadas de um número de pontos, np , localizados sobre a curva das asperezas, através da qual passará uma *Spline*. Esse procedimento pode ser observado no algoritmo

1:

Algoritmo 1: Definição Geométrica da Aspereza ($C, k, delta$)

```

result = [ ]
for  $i = 1$  to  $range(x)$  do
    | abs =  $i * delta$ 
    | cordn =  $C * \cos(k * abs)$ 
    |  $z = ( abs , cordn )$ 
    | result.append(z)
end for
return result

```

sendo C a altura da aspereza, k a sua curvatura e $delta$ a distância entre os pontos.

A partir daí o *script* contém todos os comandos inerentes ao módulo CAE do programa Abaqus, parametrizados. Os valores de força e área de contato são acessados da base de dados de saída e gravados na forma de um relatório (terminação .rpt).

7.2 Modelos Numéricos Axissimétricos

Para avaliar a influência da textura superficial na resposta ao contato de superfícies rugosas, duas situações foram impostas. No primeiro caso, considerou-se uma curvatura constante para todas as superfícies e variou-se a amplitude da rugosidade. No caso seguinte, considerou-se uma mesma amplitude de rugosidade e variou-se a curvatura das asperezas. Em ambos os casos foi mantido o espaçamento entre os picos, relacionado com o parâmetro Sds . A forte correlação entre os dois parâmetros de amplitude da rugosidade foi admitida, considerando-se $Sa = Sq$. Foram testadas as seguintes faixas de variação, baseadas em valores achados da literatura (Pottirayil *et al.*, 2010), para os dois parâmetros de textura superficial considerados na análise:

- $0.1\mu m < Sq < 1.0\mu m$ com intervalos de $0.1\mu m$;
- $0.07\mu m^{-1} < Ssc < 0.25\mu m^{-1}$ com intervalos de $0.018\mu m^{-1}$;

Cada par de Sa e Ssc caracterizam uma superfície, resultando num total de 21 a serem estudadas. O domínio da distribuição de alturas das asperezas para cada rugosidade considerada foi dividido em 25 intervalos. A colina de cosseno foi a forma adotada para

representar as asperezas. Nesta análise, foi considerado comportamento isotrópico para a deformação do material.

Foi realizada a análise por elementos finitos dos micro-contatos entre cada aspereza principal e um plano rígido (modelos axissimétricos gerados com apenas a metade das seções transversais das asperezas), simulando um teste de micro-indentação. Uma aproximação entre a superfície rugosa e o plano rígido de $0.6\mu m$ (a mesma ordem de magnitude dos ensaios de dureza instrumentada) foi imposta. Para cada rugosidade, um número entre 9 e 18 modelos axissimétricos foram gerados, representando os possíveis pares de contato entre o plano rígido e cada aspereza principal.

Abaixo de cada aspereza, uma fração da sub-superfície do material foi construída, com as mesmas propriedades físicas e profundidade de $20\mu m$. A malha não-estruturada com elementos triangulares lineares (sob a curva das asperezas) e elementos quadrangulares lineares (na sub-superfície do material) foram gerados, como mostrado na Fig. 7.1. Os elementos foram se tornando menores a medida que se aproximavam das regiões de contato (tamanho médio de cerca de $0.25\mu m$).

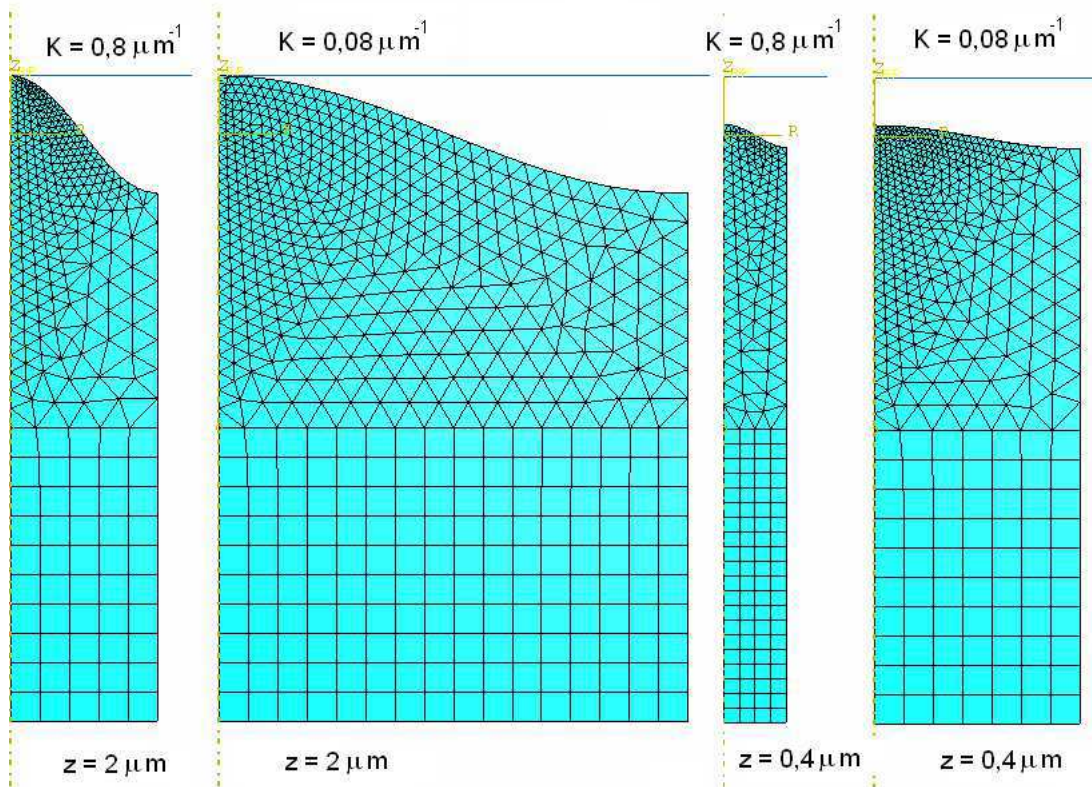


Figura 7.1: Malha de elementos finitos

O contato foi resolvido pelo método de Lagrange, sem considerar a força de atrito, uma vez que nesta escala as asperezas foram considerados lisas. À superfície do plano rígido foram atribuídos elementos de contato mestres, enquanto que as superfícies das asperezas menores receberam elementos de contato escravos. O plano foi deslocado verticalmente para baixo através de pequenos incrementos (processo automático do Abaqus) para alcançar um deslocamento total $0.6\mu m$.

A carga foi considerada como a soma das reações em todos os nós em contato no momento considerado. As curvas de “carga-separação” e “área-separação” foram monitoradas a cada incremento.

Os dados gravados foram processados através de *scripts* em python, a fim de calcular a contribuição de cada micro-contato, dependendo da frequência de suas asperezas $\phi(z_i)$, para a resposta total esperada da interface $E^*(X)$, obtendo-se a integração numérica de (3.3).

7.3 Procedimentos de Homogeneização

Após a gravação de todos os relatórios gerados pelo Abaqus, o que se tem é um arquivo que contém a contribuição de cada aspereza principal. Por exemplo, a resposta obtida para a aspereza principal de altura $Z_p = 0.45$ na superfície com rugosidade média $Sa = 0.1$ e curvatura média de picos $Ssc = 0.07$ pode ser vista na Tab. 7.1. Nas seis colunas encontram-se o valor da indentação, ou seja, o deslocamento que o plano efetuou em cada incremento de tempo, a força necessária para “amassar” o pico, a área de contato desenvolvida entre o plano rígido e a aspereza, a rugosidade média da superfície à qual pertence a aspereza, a curvatura média dos picos da superfície e a altura específica da aspereza principal, respectivamente.

Posteriormente alguns códigos foram implementados para avaliar a contribuição de cada aspereza principal à resposta homogeneizada da superfície. Estes foram implementados utilizando as linguagens de programação C e C++.

Tabela 7.1: Contribuição Para a Aspereza de $Zp = 0.45$ na superfície com $Ra = 0.1$ e $S_{sc} = 0.07$

Identação	Força	Área	Ra	Ssc	Zp
0.0	0.0	0.0	0.1	0.07	0.45
0.015000	0.000503	0.322149	0.1	0.07	0.45
0.030000	0.001877	1.233761	0.1	0.07	0.45
0.052500	0.005133	2.589450	0.1	0.07	0.45
0.086250	0.011737	4.853651	0.1	0.07	0.45
0.136875	0.023838	7.058123	0.1	0.07	0.45
0.196875	0.039847	11.952331	0.1	0.07	0.45
0.256875	0.057340	16.602730	0.1	0.07	0.45
0.316875	0.076883	19.409031	0.1	0.07	0.45
0.376875	0.097709	26.514385	0.1	0.07	0.45
0.436875	0.121202	30.786558	0.1	0.07	0.45
0.496875	0.146152	35.679153	0.1	0.07	0.45
0.556875	0.172998	41.277264	0.1	0.07	0.45
0.600000	0.193379	47.745255	0.1	0.07	0.45

7.3.1 Relação Tensão x Deformação Superficial Homogeneizada

Em um primeiro momento, o que se pretendia neste trabalho era obter uma relação tensão x deformação superficial homogeneizada. Em termos de tensão, considerou-se a razão entre a força de contato homogeneizada, F_H , e a área de contato homogeneizada, A_H , enquanto que tomou-se como deformação a razão entre o valor de indentação, u , e a rugosidade média da superfície, Ra . A força de contato homogeneizada, F_H , pode ser entendida como o somatório de todas as forças individuais desenvolvidas em cada aspereza, F_i , multiplicadas pela frequência de cada aspereza, ϕ_i , sendo que F_i depende da altura específica de cada aspereza, z_i , e é função da indentação imposta, u :

$$F_H = \sum F_i(z_i, u)\phi_i(z_i) \quad (7.1)$$

Analogamente, a área de contato homogeneizada, A_H , é o somatório de todas as áreas de contato individuais desenvolvidas em cada aspereza, A_i , multiplicadas pela frequência de cada aspereza, ϕ_i , sendo que A_i também depende da altura específica de cada aspereza, z_i , e é função da indentação imposta, u .

$$A_H = \sum A_i(z_i, u)\phi_i(z_i) \quad (7.2)$$

Como os somatórios devem ser feitos para determinados valores de indentação, u , tornaram-se necessários alguns cuidados, uma vez que optou-se por deixar que os incrementos de tempo fossem estipulados automaticamente pelo Abaqus em cada passo da análise, ganhando eficiência de tempo na solução de cada modelo. Ou seja, para todas as asperezas o plano se deslocou $0,6\mu m$, a partir de sua posição inicial, que é aquela correspondente ao pico de altura máxima na superfície, porém em passos distintos.

Então, através de interpolação linear entre as respostas obtidas, calcularam-se respostas para valores fixos de indentação, dentro do intervalo de $(0.0, 0.6)\mu m$ com passo de $0.1\mu m$. Uma vez que nem todas asperezas sofrem indentação para os respectivos valores fixos (por exemplo, algumas delas estão mais distantes do plano do que $0,1\mu m$), há um ajuste tanto para o valor da área quanto para o valor da força, que nesses casos são nulos. Esses procedimentos podem ser vistos no Algoritmo 2.

Algoritmo 2: TensãoxDeformação (Arq, Ra)

```

for  $Rsc = 0.07$  to  $Rsc = 0.25$  do
  while !feof( $Arq$ ) do
    for  $point = 0.1$  to  $point = 0.6$  do
       $ForcaInterpolada = \text{Interpola-Linear}(point, Zp) * \text{calcPhi}(Ra, Zp)$ 
       $AreaInterpolada = \text{Interpola-Linear}(point, Zp) * \text{calcPhi}(Ra, Zp)$ 
       $indice = point * 10$ 
       $SomaForca[indice] += ForcaInterpolada$ 
       $SomaArea[indice] += AreaInterpolada$ 
    end for
  end while
end for
return ( $point/Ra, SomaForca[indice]/SomaArea[indice]$ )

```

Para cada superfície, representada por um par de Ra e Rsc , através do método dos mínimos quadrados, ajustou-se a reta entre todos os pontos representando suas asperezas principais, o que permitiu a avaliação de como cada um desses dois parâmetros de textura superficial influenciam na deformação da superfície.

7.3.2 Dureza ou Rigidez Superficial Homogeneizada

Outra etapa deste trabalho consistiu em se avaliar a influência dos dois parâmetros de textura superficial, Ra e Rsc , sobre uma espécie de rigidez superficial homogeneizada, que foi considerada como a inclinação da reta no gráfico tensão versus deformação considerado na sessão anterior, resultando em um gráfico tridimensional dessa rigidez em função dos parâmetros. Como este processo também se inicia através das respostas obtidas no Abaqus, os mesmos cuidados, em relação aos diferentes incrementos de tempo e à homogeneização, foram tomados e podem ser observados nos algoritmos 3 e 4.

Algoritmo 3: Dureza ($Arq, point$)

```

while !feof( $Arq$ ) do
     $ForcaInterpolada$  = Interpola-Linear ( $point, Zp$ )
     $AreaInterpolada$  = Interpola-Linear ( $point, Zp$ )
     $ForcaHomogenizada$  +=  $ForcaInterpolada$  * calcPhi( $Ra, Zp$ )
     $AreaHomogenizada$  +=  $AreaInterpolada$  * calcPhi( $Ra, Zp$ )
end while
return ( $ForcaHomogenizada, AreaHomogenizada, Ra, Ssc$ )
  
```

Algoritmo 4: Dureza Superficial ($Arq, point$)

```

while !feof( $Arq, Ra, Ssc$ ) do
     $j$  = 0
     $Leitura(ForcaHomogenizada, AreaHomogenizada, Ra1, Ssc1)$ 
    if  $Ra == Ra1$  and  $Ssc == Ssc1$  then
         $SomaArea[j]$  +=  $AreaHomogenizada$ 
         $SomaForca[j]$  +=  $ForcaHomogenizada$ 
    end if
    Incrementa  $Ra$ 
    Incrementa  $Ssc$ 
end while
return ( $(SomaForca/SomaArea)/(point/Ra), Ra, Ssc$ )
  
```

8 Resultados

Como descrito no capítulo 7, duas abordagens foram efetuadas para estimar a influência de dois parâmetros de textura superficial, Ra , rugosidade média, e Ssc , curvatura média dos picos, na resposta ao contato entre superfícies rugosas.

8.1 Resultados Para a Relação Tensão x Deformação Superficial Homogeneizada

Esta análise deu-se com a avaliação de uma relação tensão x deformação e da rigidez ou dureza superficial homogeneizadas, obtidas partir das forças e áreas de contato desenvolvidas em cada aspereza principal da superfície. Como descrito anteriormente, 21 superfícies foram estudadas, o que inviabilizaria a apresentação de todos os gráficos. Escolheu-se mostrar os gráficos referentes aos valores limites e mediano dos parâmetros avaliados.

8.1.1 Variando a Rugosidade Média

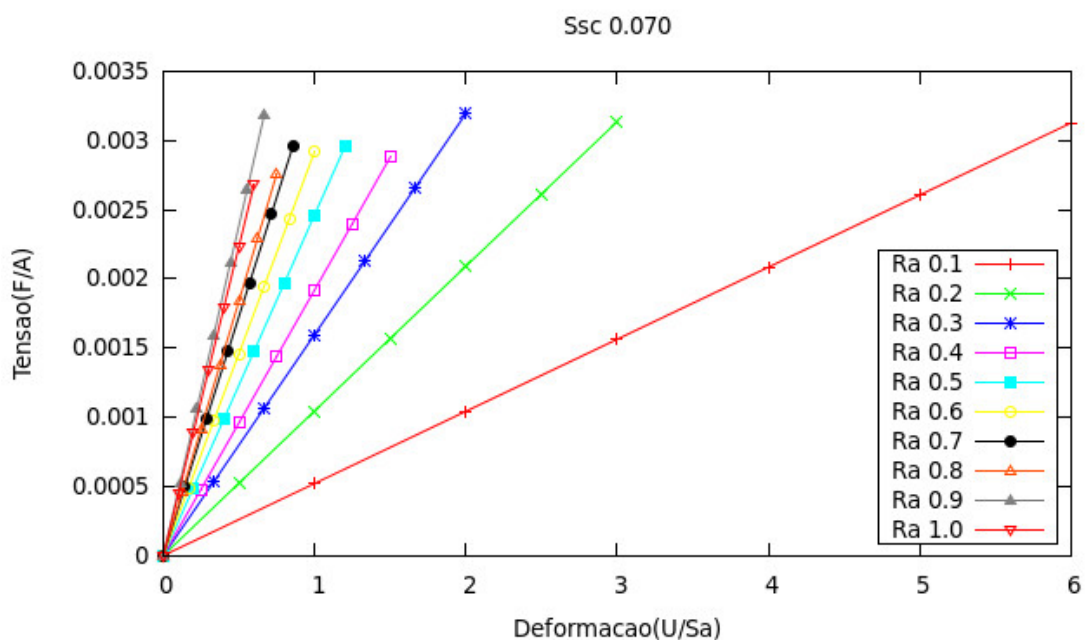


Figura 8.1: Gráfico da Tensão pela Deformação para um Valor Inicial de Curvatura

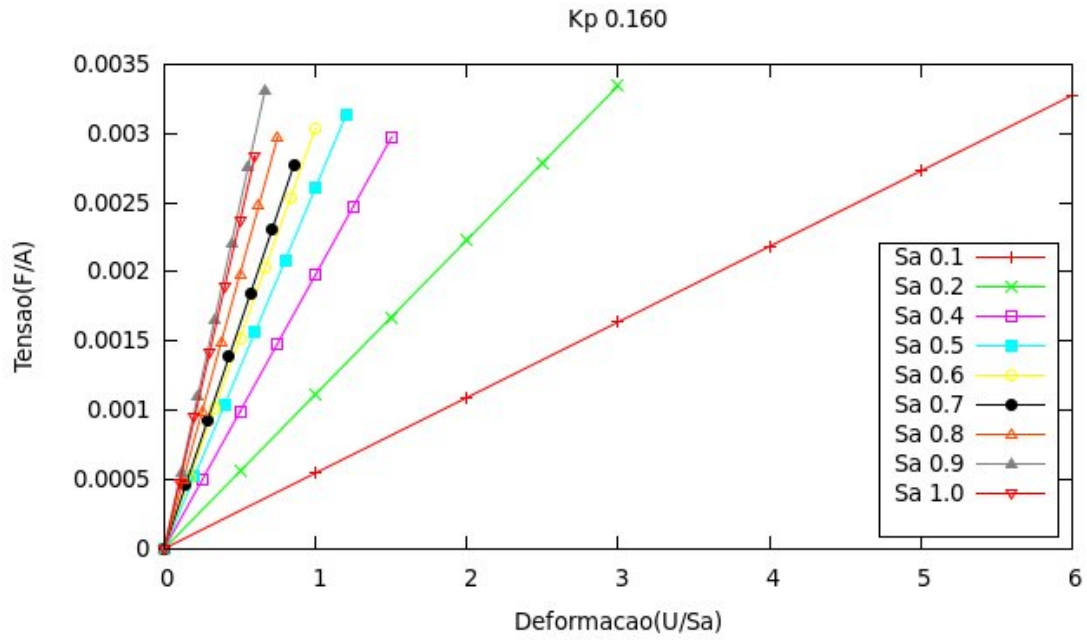


Figura 8.2: Gráfico da Tensão pela Deformação para um Valor Intermediário de Curvatura

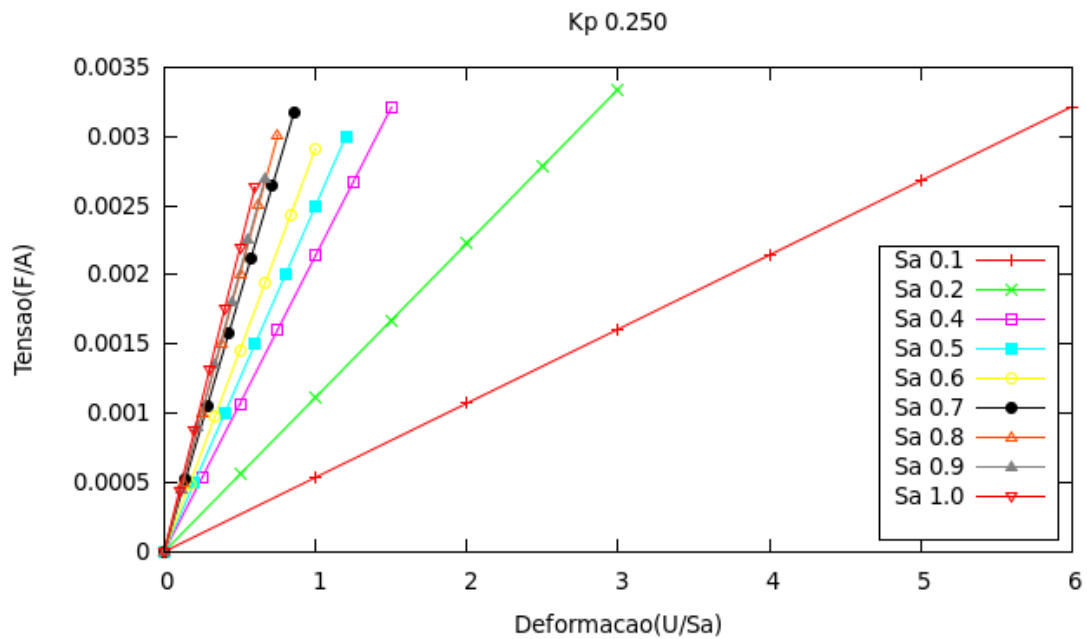


Figura 8.3: Gráfico da Tensão pela Deformação para um Valor Final de Curvatura

8.1.2 Variando a Curvatura Média

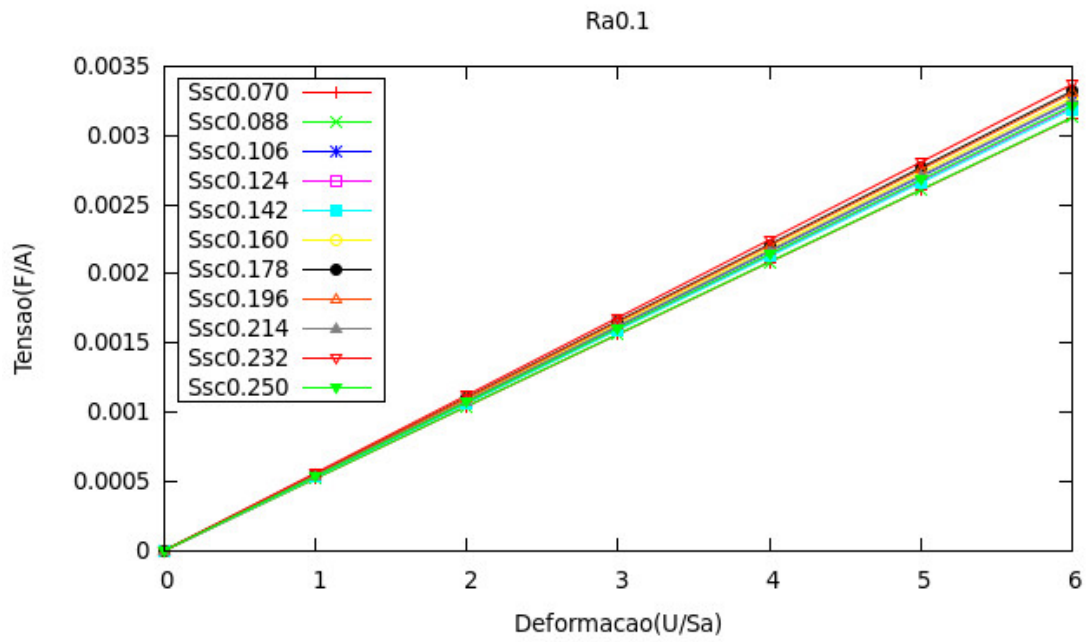


Figura 8.4: Gráfico da Tensão pela Deformação para um Valor Inicial de Rugosidade

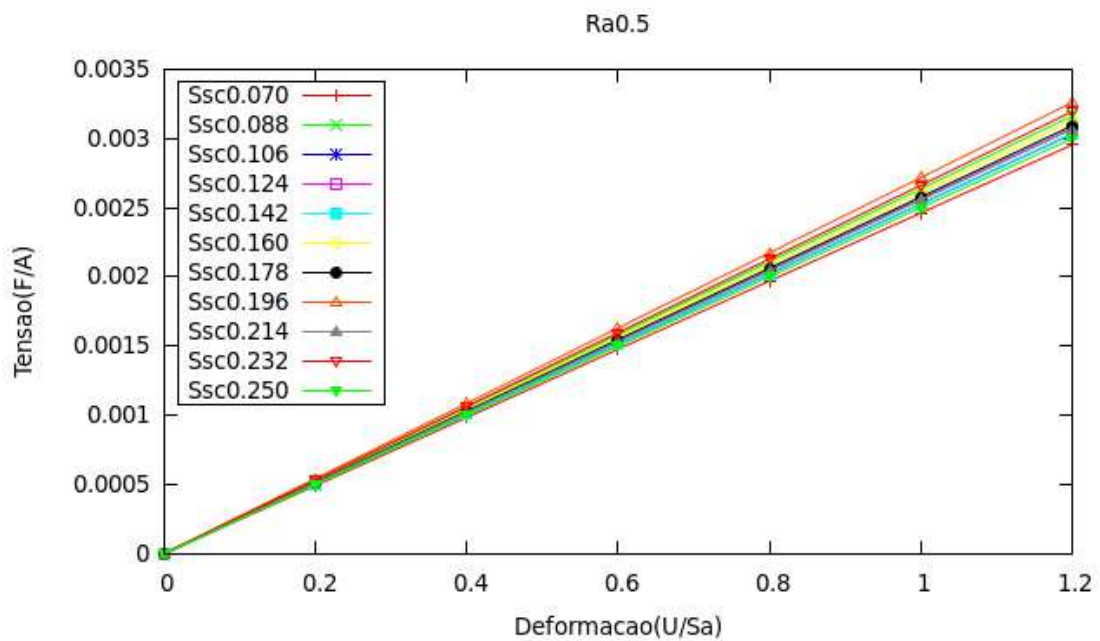


Figura 8.5: Gráfico da Tensão pela Deformação para um Valor Intermediário de Rugosidade

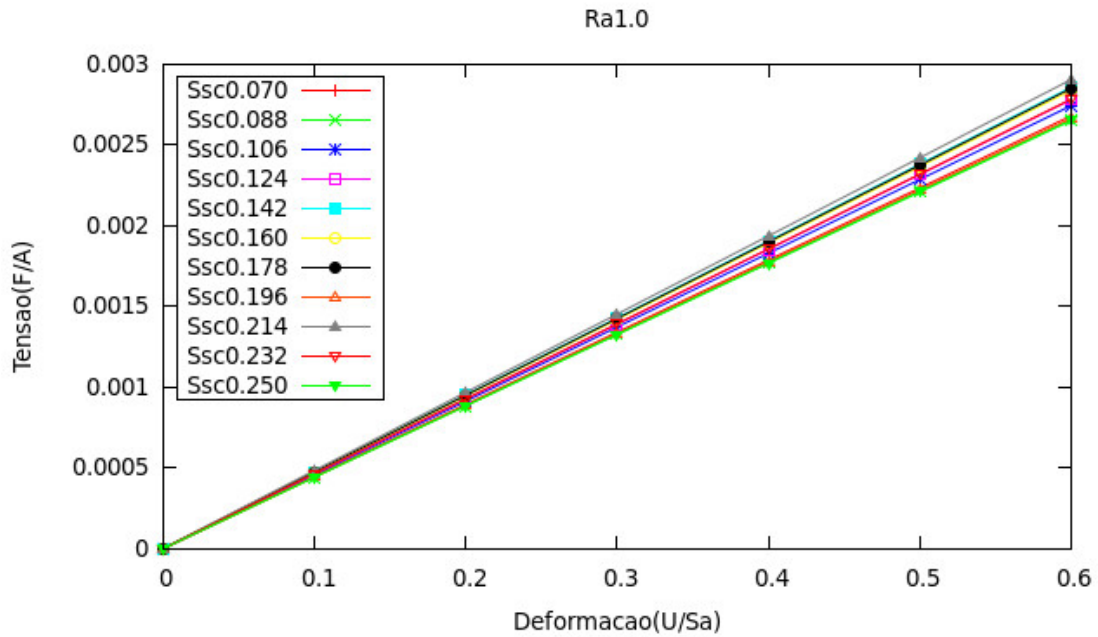


Figura 8.6: Gráfico da Tensão pela Deformação para um Valor Final de Rugosidade

A partir dos gráficos acima, o que se observa é que para um valor fixo da curvatura média, Ssc , a medida que o Ra aumenta, o coeficiente angular da reta também aumenta, ou seja, ocorre um aumento na pressão de contato que é dada pela razão $\frac{F_H}{A_H}$, onde F_H representa força de contato homogeneizada e A_H representa área de contato homogeneizada. Já para um valor fixo de rugosidade média, observa-se que independente do valor de curvatura, as retas que descrevem essa pressão de contato, praticamente não tem seu coeficiente angular alterado.

8.2 Resultados Para a Dureza ou Rigidez Superficial Homogeneizada

Esta análise foi avaliada em 3 pontos diferentes da indentação do plano, um ponto inicial do deslocamento do plano rígido, um ponto intermediário e um final.

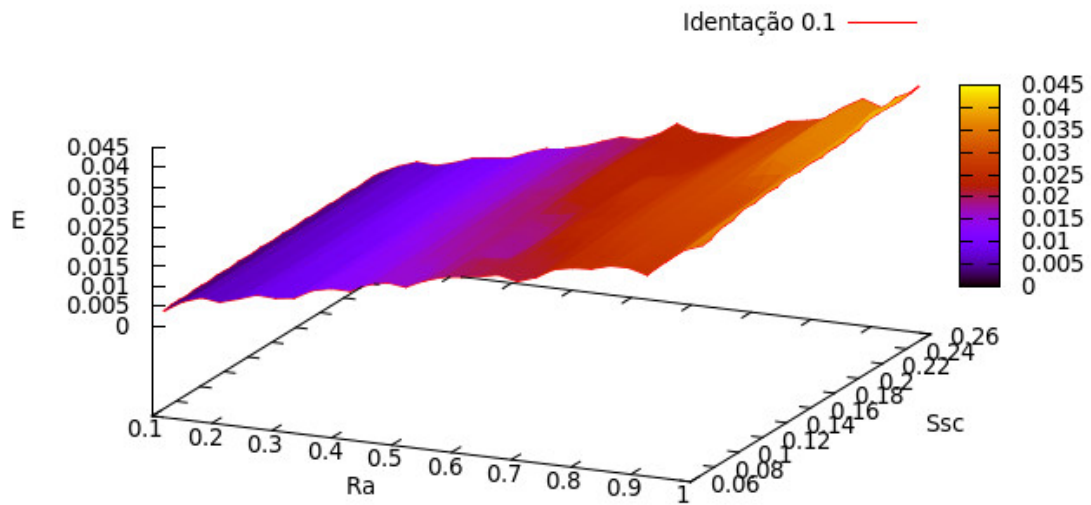


Figura 8.7: Dureza para um Valor Inicial de Identação

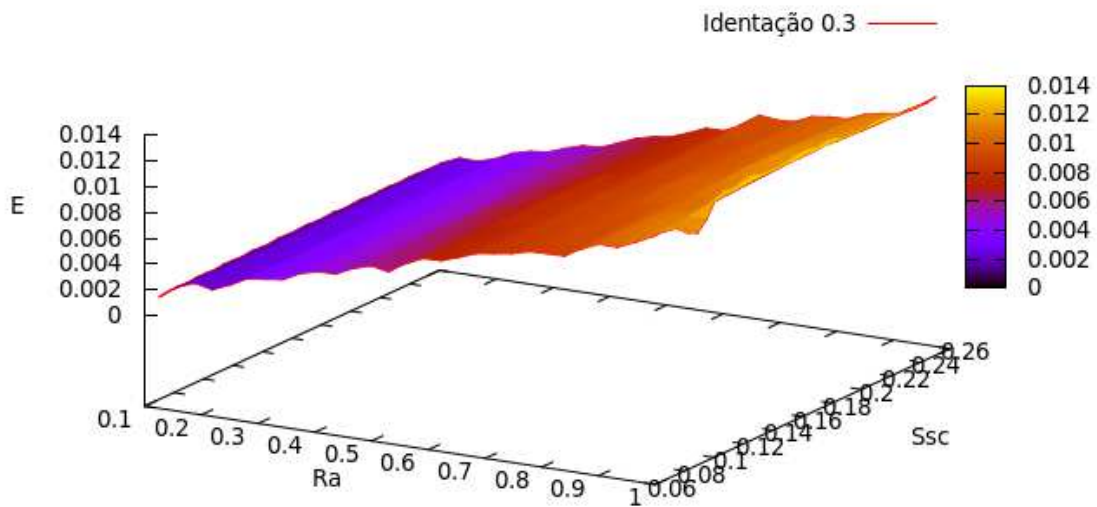


Figura 8.8: Dureza para um Valor Intermediário de Identação

Com essa análise é possível também verificar se os resultados encontrados nos gráficos bidimensionais estão coerentes com este. Para isso o gráfico da Fig. 8.8 foi rotacionado, de forma que no gráfico 8.10 priorizou-se analisar a dureza fixando a curvatura, S_{sc} .

Pode-se observar que os resultados do gráfico tridimensional estão coerentes com os gráficos bidimensionais, uma vez que percebe-se que fixando a curvatura média há uma

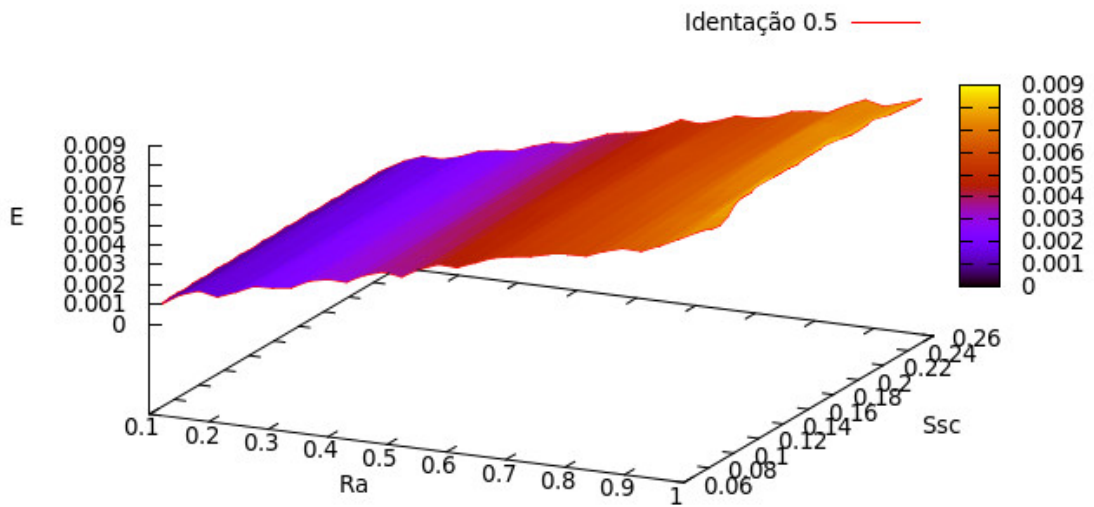


Figura 8.9: Dureza para um Valor Final de Idantação

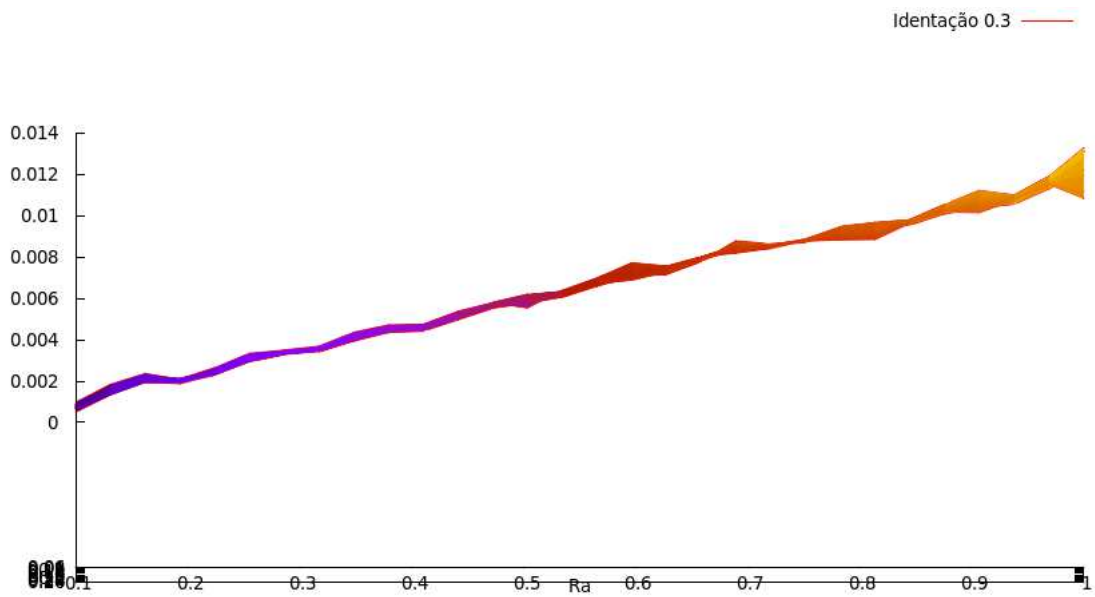


Figura 8.10: Dureza Fixando a Curvatura Média

curva crescente a medida que se aumenta a rugosidade (Fig. 8.10).

9 Conclusão

O objetivo principal desse trabalho consistiu em avaliar a influência de dois parâmetros que caracterizam a superfície do esmalte dentário, rugosidade média de uma superfície gaussiana e a curvatura média de seus picos, realmente influenciam na resposta ao contato de uma com a outra. Como descrito anteriormente a análise para obter esse resultado foi feita fixando-se um desses parâmetros e variando o outro, dentro da sua faixa esperada de valores, avaliando assim o comportamento tribológico da superfície na natureza do contato.

O que se pode concluir é que, dentre esses dois parâmetros, a rugosidade média tem maior influência no contato se comparada à curvatura média.

Além disso pode-se concluir também que os benefícios e versatilidade de métodos numéricos e o fato de levarem em conta a análise de deformação em micro-escala nos pontos de contato, fornecem informações úteis para a construção de hipóteses sobre o fenômeno investigado.

Referências Bibliográficas

- Ciulli, E.; Ferreira, L.; Pugliese, G. ; Tavares, S. Rough contacts between actual engineering surfaces: Part i. simple models for roughness description. **Wear**, v.264, n.11â12, p. 1105 – 1115, 2008.
- Francis, H. Application of spherical indentation mechanics to reversible and irreversible contact between rough surfaces. **Wear**, v.45, n.2, p. 221 – 269, 1977.
- FYSH, S.; ORAVEC, E. ; MEDLEY, J. An experimental simulation of the tribology of large spherical roller bearings in paper machines. **Tribology International**, v.23, n.5, p. 317–327, 1990.
- GREENWOOD, J. A.; WILLIAMSON, J. B. P. Contact of nominally flat surfaces. p. 300–319, 1966.
- HERTZ, H. On the contact of rigid solids and on hardness. **2**, 1896.
- HUTCHINGS, I. M. **Tribology â Friction and Wear of Engineering Materials**, p. 173–183. BH, London, 1992.
- de Aguiar e Wanderley Innocência Moreira Jãonior, F. L. Ajuste de curvas por quadrados mínimos lineares. **mat.ufmg.br**, 2013.
- LOBBEZOO, F.; LAVIGNE, G. . Do bruxism and temporomandibular disorders have a cause-and-effect relationship? **Journal of Orofacial Pain**, v.11, p. 15–23, 1997.
- Adriana Bona Matos, M. L. T. Efeito das técnicas de microabrasão no esmalte: estudo em microscopia eletrônica de varredura. **scielo.br**, 2013.
- NAYAK, P. R. **Random process model of rough surfaces. J. Lubric. Technol.**, volume 93, p. 398–407. 1971.
- POTTIRAYIL, A.; MENEZES, P. L. ; KAILAS, S. V. A parameter characterizing plowing nature of surfaces close to gaussian. **Tribology International**, v.43, n.1â2, p. 370 – 380, 2010.
- Daniel Rocha, G. C. **ebah.br**, 2013.
- Souza, D. Mantendo o sorriso bonito. **www.invivo.fiocruz.br**, 2013.
- TWORZYDLO, W. W.; CECOT, W.; ODEN, J. T. ; YEW, C. H. Computational micro- and macroscopic models of contact and friction: formulation, approach and applications. **Wear**, v.220, p. 113–40, 1998.
- WAIKAR, R.; GUO, Y. A comprehensive characterization of 3d surface topography induced by hard turning versus grinding. **Journal of Materials Processing Technology**, v.197, n.1-3, p. 189 – 199, 2008.
- Zavarise, G.; Wriggers, P.; Nackenhorst, U. ; TCN Consortium. Computational Technologies, C. f. H. T. **A Guide for Engineers to Computational Contact Mechanics**. The TCN series on simulation based engineering and sciences. Conzorcio TCN, 2006.