UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Januário Morgado Januário Salatiel

SOLUÇÕES RADIAIS PARA ALGUMAS EQUAÇÕES ELÍTICAS ENVOLVENDO O OPERADOR ORNSTEIN-UHLENBECK EM DOMÍNIOS EXTERIORES

Juiz de Fora
2023

Januário Morgado Januário Salatiel

SOLUÇÕES RADIAIS PARA ALGUMAS EQUAÇÕES ELÍTICAS ENVOLVENDO O OPERADOR ORNSTEIN-UHLENBECK EM DOMÍNIOS EXTERIORES

Dissertação apresentada ao PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise

Orientador: Professor Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria

Juiz de Fora

2023

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Salatiel,Januário Morgado Januário .

SOLUÇÕES RADIAIS PARA ALGUMAS EQUAÇÕES ELÍTICAS ENVOLVENDO O OPERADOR ORNSTEIN-UHLENBECK EM DOMÍNIOS EXTERIORES / Januário Morgado Januário Salatiel. – 2023.

70 f.

Orientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Ciências . PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA , 2023.

1. Ornstein-Uhlenbeck. 2. Domínio Exterior. 3. Problema de Autovalor. I. Faria, Luiz Fernando de Oliveira, orient. II. Título.

Januário Morgado Januário Salatiel

Soluções radiais para algumas equações elíticas envolvendo o operador Ornstein-Uhlenbeck em domínios exteriores

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise

Aprovada em 10 de março de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Pereira

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Aldo Henrique de Souza Medeiros

Universidade Federal de Viçosa

Juiz de Fora, 24/03/2023.

Dedico este trabalho aos meus avós, Marta Muando e Januário Salatiel (In Memoriam).

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho contou com a colaboração de certas pessoas às quais gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos.
Primeiramente a Jesus, o Divino Mestre da humanidade, que nos ama em nossa pequenez, compreende a nossa imaturidade espiritual, mas confia no nosso progresso.

Ao Professor Dr. Luiz Fernando de oliveira Faria, meu supervisor, vai a minha especial gratidão pelos ensinamentos valiosos e por me colocar no caminho certo sempre que me desviava. Serei eternamente grato por ter me acolhido como orientando, pelo tempo disponibilizado, encorajamento e pela orientação que me transmitiu. Sou profundamente grato pela oportunidade de trabalharmos juntos e por tê-lo tido como exemplo de profissional.
Ao Professor Dr. Eduard Toon pelos grandes momentos de ensinamentos e por sempre me incentivar a fazer esse curso de Mestrado em Matemática.

Agradeço também aos meus pais, Mogado Salatiel e Felícia João, que de forma especial e carinhosa me deram força e coragem, apoiando-me nos momentos de dificuldades. Quero agradecer também aos meus irmãos, Marta Salatiel, Cardoso Salatiel e Jassimínia Bapú, por me darem um alicerce forte sem o qual não poderia seguir em frente.
À minha esposa, Isabel Cumbane, por estar sempre ao meu lado me motivando com um belo sorriso, pelo amor e companheirismo.
Ao meu tio Armando Salatiel que me apoiou em todos os momentos de dificuldades.

Agradeço à Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) por me acolher como aluno no período de Mestrado.
A todos os professores que contribuiram cada um do seu modo para o meu desenvolvimento acadêmico e pessoal, em especial, agradeço ao professor Fábio Pereira, à professora Joana da Cruz e à professora Camila zeller, por estarem sempre a disposição quando precisamos de alguma ajuda e também pelos ensinamentos.
Aos nossos colegas pelo companheirismo e disponibilidade para nos auxiliarem em vários momentos.
Aos meus estimados amigos, pela partilha de toda e qualquer emoção.

Agradeço a todos que contribuíram no decorrer desta jornada, e que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação acadêmica, o meu muito obrigado!
Agradeço à ProAfri – Moçambique pelo apoio financeiro.

RESUMO

Esta Dissertação apresenta os principais resultados obtidos no artigo Alarcón et.al [1]. Serão estudados resultados sobre a existência e multiplicidade de soluções radiais para problemas Elípticos quaselineares em domínios ilimitados conduzidos pelo operador diferencial de segunda ordem de **Ornstein Uhlenbeck**. Duas classes de problemas são consideradas do ponto de vista da Análise. A primeira classe de problemas envolve um tipo de problema de autovalor e a segunda envolve a não linearidade do tipo côncavo e convexo. Algumas propriedades assintóticas das soluções radiais também são apresentadas.

Palavras-chave: Ornstein-Uhlenbeck. Domínio Exterior. Problema de Autovalor. Métodos Topológicos. Abordagem Variacional. Soluções Radiais.

ABSTRACT

This thesis presents the main results obtained on the paper Alarcón et.al [1]. This project presents results on the existence and multiplicity of radial solutions for quasilinear elliptic problems with unbounded coefficients driven by Ornstein Uhlenbeck's second-order differential operator. We consider two classes of problems: The first class of problems involves an eigenvalue problem type and the second one involves nonlinearity of concave and convex type. Some asymptotic properties of the radial solutions are also presented here.

Keywords: Elliptic problems. Exterior domain. Eigenvalue problem. Topological methods. Variational approach. Radial solutions.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}^N = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) : x_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \mathbb{N}\}$ espaço euclidiano n-dimensional

$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ gradiente da função u

$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}},\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N),\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$

$\Delta u = div \nabla u = \sum_{1 \leq i \leq N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i}$ laplaciano da função u

B_1	é a bola unitária centrada na origem
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	é domínio limitado
∂B_1	é a fronteira da bola unitária centrada na origem
$\partial \Omega$	é a fronteira de Ω
$\frac{\partial u}{\partial \nu}$	é a derivada normal exterior a $\partial \Omega$
$E \hookrightarrow F$	é a imersão contínua de E em F
$E \hookrightarrow\hookrightarrow F$	é a imersão compacta de E em F
$supp\ f$	suporte da função f
$f \star g$	produto de convolução de f com g
ρ_n	sequência de mollifiers
$\omega \subset\subset \Omega$	ω fortemente incluído em Ω, isto é, $\overline{\omega}$ é compacto e $\overline{\omega} \subset \Omega$
$\lvert\ \rvert$	norma de Hilbert
$w_n \to w$	w_n converge forte para w quando $n \to \infty$
$w_n \rightharpoonup w$	w_n converge fraco para w quando $n \to \infty$
q.t.p.	em quase todo ponto (a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula)
$W^\perp$	ortogonal de um subespaço vetorial W
$L^p(\Omega) =$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é mensurável e $\int_\Omega \lvert u\rvert^p < \infty\}, 1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega) =$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R} : u$ é mensurável e $\lvert u(x)\rvert \leq C$ q.t.p. em Ω para alguma constante $C\}$
$C(\Omega) =$	funções contínuas em Ω
$C_c(\Omega) =$	espaço de funções contínuas com suporte compacto em Ω
$C^k(\Omega) =$	espaço de funções k vezes continuamente diferenciáveis em $\Omega,\ k \geq 0$
$C^\infty(\Omega) =$	$\bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$
$C^k(\overline{\Omega}) =$	funções em $C^k(\Omega)$ tal que para cada multi-índice α com $\lvert\alpha\rvert \leq k$, a função $x \mapsto D^\alpha u(x)$ admite uma extensão contínuo para $\overline{\Omega}$
$C^\infty(\overline{\Omega}) =$	$\bigcap_{k \geq 0} C^k(\overline{\Omega})$

$W^{1,p}(\Omega),\ W_0^{1,p}(\Omega),\ W^{m,p}(\Omega),\ H^1(\Omega),\ H_0^1(\Omega),\ H^m(\Omega)$ espaços de Sobolev

$\mathcal{L}(E, F)$	espaço das funções lineares e contínuas de E em F
X^*	dual topológico do espaço X
$\square$	fim de uma demonstração

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento deste capítulo está baseado no artigo Alarcón et.al [1]. Este Trabalho trata de uma classe de problemas de valor de fronteira de Dirichlet Elíptico Semilinear em domínios exteriores conduzido pelo operador de segunda ordem diferencial Ornstein-Uhlenbeck dado por

$$L_N := \Delta - x \cdot \nabla,$$

onde Δ é o Laplaciano usual e $x \cdot \nabla$ é um termo de derivada ilimitado. Mais precisamente, consideramos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u + x \cdot \nabla u = \lambda a(|x|)|u|^{q-1}u + b(|x|)|u|^{p-1}u \text{ em } \mathbb{R}^N \backslash B_1, \\ \qquad u = 0 \text{ em } \partial B_1, \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} |\nabla u(x)| = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $N \geq 3,\ p > 0,\ q > 0,\ B_1$ é a bola unitária centrada na origem, $\lambda > 0$ é um parâmetro e a e b são funções radiais não negativas no espaço $L^\infty\left(\mathbb{R}^N \backslash B_1\right)$ satisfazendo algumas hipóteses apropriadas.

O problema (1.1) está relacionado ao trabalho celebrado devido à Ambrosetti, Brézis e Cerami [3], bem como à questão proposta por eles, para o caso do operador Laplaciano, a respeito da existência de duas soluções positivas para o expoente supercrítico de Sobolev em domínios simétricos.

Em [3], os autores consideraram o seguinte problema, hoje em dia denominado de tipo côncavo-convexo,

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda |u|^{q-1}u + |u|^{p-1}u, & \text{em } \Omega \\ \quad u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $0 < q < 1 < p$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é domínio limitado. Eles mostraram que se $p > 1$ então existe uma constante real $\Lambda > 0$ tal que o problema (1.2) tem uma solução minimal se $\lambda \in (0, \Lambda)$, não tem solução se $\lambda > \Lambda$, e tem uma segunda solução se $p \in (1, 2^*]\,, \lambda \in (0, \Lambda)$. No final da seção, os autores propuseram a seguinte questão: "Suponha que $p > 2^* - 1, \Omega$ é uma bola e $N \geq 3$. A equação (1.2) tem duas soluções positivas para $\lambda > 0$ suficiente pequeno?". A resposta positiva foi dada por Ruyun Ma [24].

Aqui, quando $p, q > 0$ provamos a existência de parâmetros $0 < \widehat{\lambda} \leq \Lambda$ tal que o problema (1.1) tem pelo menos duas soluções radiais positivas para cada $0 < \lambda < \widehat{\lambda}$, tem pelo menos uma solução radial positiva para cada $\widehat{\lambda} < \lambda < \Lambda$, e provamos a inexistência de solução radial positiva para $\lambda > \Lambda$, quando $\Lambda < \infty$. E também examinamos o alcance de Λ. Além disso, exploramos algumas propriedades assintóticas das soluções radiais u_λ, ou seja, investigamos

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|u_\lambda\|_{L^\infty_{(\mathbb{R}^N \setminus B_1)}} = 0.$$

Uma abordagem bastante nova é usada para responder à pergunta ABC (Ambrosetti, Brézis e Cerami) para o problema de Ornstein-Uhlenbeck em domínios exteriores. As suposições sobre os pesos a e b nos permitem cobrir o caso limite $0 < q < p = 1$. Até onde sabemos, este deve ser um dos primeiros artigos a lidar com tal caso.

Quando $b = 0$ e $q = 1$, temos um tipo de problema de autovalor. Neste caso, provamos a existência de uma sequência de autovalores $\{\lambda = \lambda_n\}$ com $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, e uma sequência correspondente de autofunções radiais. Para um estudo completo do espectro dos Operadores de Ornstein-Uhlenbeck em todo $\mathbb{R}^N$, gostaríamos de citar [26].

O estudo de problemas elípticos e parabólicos com coeficientes ilimitados é motivado por muitas aplicações na ciência, engenharia e economia. Nos referimos a monografia [5] para desenvolvimentos recentes neste campo (veja também [28]). Como foi referido em [20], o operador diferencial $L_N u := \Delta u - x \cdot \nabla u$, pode ser visto como uma versão N-dimensional da equação de Fokker-Planck para um processo unidimensional do tipo Ornstein-Uhlenbeck.

O operador L_N também é conhecido como operador Ornstein–Uhlenbeck. Um grande número de autores na literatura tem considerado o Operador de Ornstein-Uhlenbeck, também chamado de operador de Hermite, tanto do ponto de vista da Análise ou Estocástica (ver, por exemplo, [6,9,27,29] e referências neles). Essas classes de operadores surgem naturalmente na transformação de equações parabólicas, tal como a equação de calor ou o fluxo de Navier-Stokes no exterior de um obstáculo (ver, por exemplo, [16,17,19]). Assim, há um interesse considerável em tais operadores definidos em domínios exteriores. Para problemas relacionados no exterior de um conjunto compacto K, frequentemente chamado de obstáculo, gostaríamos de citar [14,18]. Em [9], a regularidade das soluções para a equação elíptica $\lambda u - L_N u = f$ num aberto convexo Ω é estudado assumindo que Ω é um subconjunto de um espaço de Banach X separável de dimensão infinita dotado de uma medida centrada Gaussiana não degenerada.

Um problema interessante, relacionado com (1.1), foi tratado em [6], considerando a Condição de fronteira de Neumann na bola unitária. De fato, os autores consideraram o seguinte problema

$$\begin{cases} -L_N(u) + u = a(|x|)f(u) \quad \text{em} \quad B_1, \\ u > 0 \text{ em } B_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ em } B_1, \end{cases} \tag{1.3}$$

sob certas hipóteses apropriadas sobre a e f. Usando argumentos topológicos e variacionais, eles provaram a existência de soluções radiais crescentes positivas para o problema (1.3). Para problemas elípticos de Dirichlet relacionados em um semi-espaço de $\mathbb{R}^N$, gostaríamos de citar [30]. Extensões para uma classe mais geral de operadores diferenciáveis foram obtidos, por exemplo, por Cranston e Zhao [11] e Chojnowska-Michalik e Goldys [10]. Para soluções numéricas de equações envolvendo o operador de Ornstein-Uhlenbeck, gostaríamos de citar [13].

A fim de expor os resultados alcançados neste trabalho, definimos os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{A} := \left\{ \phi \in L^\infty(1,\infty) \cap C(1,\infty) : \phi \geq 0 \wedge \int_1^\infty t^{N-1}\phi(t)dt < \infty \right\} \tag{1.4}$$

e

$$\mathcal{B} := \left\{ \phi \in L^\infty(1,\infty) \cap C(1,\infty) : \phi \geq 0 \wedge \int_1^\infty t^{N-1}\phi(t)dt < 1 \right\}. \tag{1.5}$$

Agora, apresentamos os principais resultados.

Teorema 1 *(Problema de autovalor). Sejam $N \geq 3$, $a \in \mathcal{A}$, $b \equiv 0$ e $q = 1$. Então existe uma sequência de autovalores reais λ_n (com $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$) e uma sequência correspondente $\{z_n\}$ de autofunções radiais para o problema (1.1), para todo $n \geq 1$.*

A respeito do problema dos autovalores, deve-se esperar que existam muitas autofunções não radiais, mas não temos conhecimento de nenhum resultado nesta direção, nem mesmo em duas dimensões.

Teorema 2 *(Existência): Sejam $N \geq 3$ e uma das seguintes condições:*

(i) $0 < q < 1 < p$ e $a, b \in \mathcal{A}$;

(ii) $0 < q < 1 = p$, $a \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{B}$;

(iii) $0 < p < 1 = q$ e $a, b \in \mathcal{A}$.

Então, em cada caso, existe $\lambda^* > 0$ tal que o problema (1.1) tem pelo menos uma solução radial positiva para $0 < \lambda < \lambda^*$. Além disso, nos casos (i) e (ii) obtemos

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|u_\lambda\|_{L^\infty_{(\mathbb{R}^N \setminus B_1)}} = 0.$$

Com respeito aos resultados de multiplicidade, temos o seguinte teorema.

Teorema 3 *(Multiplicidade): Sejam $N \geq 3$ e uma das seguintes condições:*

(i) $0 < q < 1 < p$ *e* $a, b \in \mathcal{A}$*;*

(ii) $0 < q < 1 = p$, $a \in \mathcal{A}$ *e* $b \in \mathcal{B}$.

Então, em cada caso, existe $0 < \widehat{\lambda} \leq \lambda^*$ tal que o problema (1.1) tem pelo menos duas soluções radiais positivas para $0 < \lambda < \widehat{\lambda}$. Além disso, em ambos casos obtemos

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|u_\lambda\|_{L^\infty_{(\mathbb{R}^N \setminus B_1)}} = 0.$$

Proposição 1 *Sejam $N \geq 3$ e uma das seguintes condições:*

(i) $0 < q < 1 < p$ *e* $a, b \in \mathcal{A}$*;*

(ii) $0 < p < 1 = q$ *e* $a, b \in \mathcal{A}$.

Seja

$$\Lambda := \sup\{\lambda > 0 : \textit{O problema (1.1) tem uma solução radial positiva}\},$$

então $\Lambda < \infty$.

Corolário 1 *Sob as hipóteses anteriores, Λ tem a seguinte propriedade: Para todo $\lambda \in (0, \Lambda)$ o problema (1.1) tem uma solução radial positiva e para todo $\lambda > \Lambda$ o problema (1.1) não tem solução radial positiva.*

No caso em que $p = 1$, a afirmação $\Lambda < \infty$ falha. Nesse sentido, podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 2 *Seja $N \geq 3$ e considere $0 < q < 1 = p$. Se $a + b \in \mathcal{B}$, então o problema (1.1) tem uma solução radial positiva para qualquer $\lambda > 0$.*

Na abordagem, foram usados argumentos topológicos (Teorema 4 página 15) e argumentos variacionais, mesmo o Operador Ornstein - Uhlenbeck não tendo estrutura variacional óbvia. Para garantir a segunda solução, são usadas algumas ideias de [15]. Entretanto, uma adaptação notável é necessária, porque aqui a abordagem é diferente.

É importante dizer que foram consideradas condições adequadas no cone para aplicar o teorema do ponto fixo. Outro problema superado foi a falta de resultados de compacidade para o uso de métodos variacionais. Assim, em [1], foi provado um resultado de imersão, que é de interesse independente.

O restante deste trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 anunciamos os resultados preliminares e alguns lemas técnicos necessários mais tarde, anunciamos também uma seção introdutória sobre espaços de Sobolev em dimensão 1, sua motivação e os resultados principais incluindo algumas demonstrações. Neste capítulo, uma vez que estamos interessados em soluções radiais, consideramos a formulação radial do problema (1.1). Sob uma mudança adequada de vriáveis, o problema (1.1) pode ser transformado em uma EDO com condição de fronteira mista. No Capítulo 2 anunciamos um resultado de imersão compacta. O Capítulo 3 é dedicado para a prova do Teorema 1 . No Capítulo 4 provamos os Teoremas, 2 e 3 . No Capítulo 5 (Apêndice A), na Seção 5.1 comentamos brevemente sobre as condições suficientes para as funções pertencerem aos conjuntos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. A Seção 5.2 será uma breve introdução dos Espaços de Sobolev e certas propriedades elementares são menciodas. A Seção 5.3 é dedicada ao estudo do Espectro do Laplaciano. Finalmente, na Seção 5.4 anunciamos alguns conceitos básicos para o uso ao longo do trabalho, finalizando assim o trabalho.

Como pré-requisitos para a leitura deste texto, são necessários conhecimentos básicos de Análise, Algebra Linear e Medida e Integração. Utilizaremos também alguns resultados de Análise Funcional, aos quais daremos as referências necessárias no decorrer da Dissertação.

2 PRELIMINARES

Teorema 4 ***(Teorema do Ponto Fixo de Schauder).*** *Seja D um subconjunto aberto, limitado e convexo de um espaço de Banach X tal que $0 \in D$ e seja $T \in C(\overline{D}, X)$ uma aplicação compacta tal que $T(\overline{D}) \subset \overline{D}$. Então T tem um ponto fixo em $\overline{D}$, ou seja, existe $x \in \overline{D}$ tal que $T(x) = x$.*

Para uma demonstração do resultado acima consulte [4], página 43.

Este importante teorema é utilizado para a obtenção de outros resultados dentro da Matemática e da Matemática Aplicada.
Neste trabalho utilizaremos o **Teorema do Ponto Fixo de Schauder** como uma forma alternativa de encontrar soluções para certas equações diferenciais ordinárias e parciais.

Teorema 5 *(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis com convergência q.t.p. para f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| < g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Para uma demonstração do resultado acima consulte [32], página 44.

Lema 1 *(Lema de Brezis-Lieb). Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida. Suponha que $u_n \to u$ q.t.p* em Ω *e $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C < \infty \; \forall n \in \mathbb{N}$ e para algum $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |u_n|^p - \int_\Omega |u_n - u|^p \right) = \int_\Omega |u|^p.$$

Demonstração. Ver [7] páginas 486-490.

Teorema 6 *(Teorema de Ascoli-Arzelá). Seja $K \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda sequência eqüicontínua e simplesmente limitada de funções $f_n : K \to \mathbb{R}$ possui uma subsequência uniformemente convergente.*

Demonstração. Ver [23] páginas 412-413.

Mollifiers

Definição 2.0.1 *A sequência de mollifiers* $(\rho_n)_{n\geq 1}$ *é uma sequência de funções em* $\mathbb{R}^N$ *tal que*

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad supp\ \rho_n \subset \overline{B(0,1/n)}, \quad \int \rho_n = 1\ \rho_n \geq 0\ em\ \ \mathbb{R}^N.$$

2.1 Espaços de Sobolev e a Formulação Variacional de Problemas de Valor de Fronteira em Uma Dimensão

Esta Secção tem como base principal [8].

2.1.1 Motivação

Considere o seguinte problema. Dado $f \in C([a,b])$, encontre uma função u satisfazendo

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{sobre} \quad [a,b], \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Uma solução clássica – ou forte – de (2.1) é uma função C^2 sobre $[a,b]$ satisfazendo (2.1) no sentido usual. É bem sabido que (2.1) pode ser resolvido explicitamente por um simples cálculo, mas ignoramos essa característica de modo a ilustrar o método neste exemplo elementar.

Multiplicando (2.1) por $\varphi \in C^1([a,b])$ e integrando por partes; obtemos

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]),\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \tag{2.2}$$

Note que (2.2) faz sentido assim que $u \in C^1([a,b])$ (considerando que (2.1) requer duas derivadas em u). Além disso, de fato, se $u, u' \in L^1([a,b])$, onde u' tem um significado ainda a ser tornado preciso, (2.2) também faz sentido. Digamos (provisoriamente) que uma função $u \in C^1([a,b])$ que satisfaz (2.2) é uma solução fraca de (2.1).

O programa a seguir descreve as principais etapas da *abordagem variacional* na teoria das equações diferenciais parciais:

Etapa A. A noção de *solução fraca* torna-se precisa. Isso envolve *espaços de Sobolev*, que são as nossas *ferramentas básicas.*

Etapa B. *Existência e unicidade de uma solução fraca* é estabelecido por um método variacional através do teorema de Lax-Milgram.

Etapa C. A solução fraca é provada ser de classe C^2 (por exemplo): Este é um resultado de regularidade.

Etapa D. Uma solução clássica é recuperada, mostrando que qualquer solução fraca que é C^2 é uma solução clássica.

Para realizar a Etapa D é muito simples. De fato, suponha que $u \in C^2([a,b])$, $u(a) = u(b) = 0$, e que u satisfaz (2.2). Integrando (2.2) por partes obtemos

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C^1([a,b]),\ \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

e portanto

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1((a,b)).$$

Segue que $-u'' + u = f$ q.t.p. sobre (a,b) e, portanto, em toda parte sobre $[a,b]$, desde que $u \in C^2([a,b])$.

2.2 O Espaços de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Seja $I = (a,b)$ um intervalo aberto, possivelmente ilimitado, e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$.

Definição. O Espaços de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido como sendo

$$\boxed{W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.}$$

Definimos

$$\boxed{\mathrm{H}^1(I) = W^{1,2}(I).}$$

Para $u \in W^{1,p}(I)$ denotamos $u' = g$.

Observação 1 *Na definição de $W^{1,p}$ chamamos φ uma função de teste. Poderíamos igualmente ter usado $C_c^\infty(I)$ como a classe de funções de teste porque se $\varphi \in C_c^1(I)$, então $\rho_n \star \varphi \in C_c^\infty(I)$ para n suficientemente grande e $\rho_n \star \varphi \longrightarrow \varphi \in C^1$ (é claro, φ é estendido para 0 fora de I), onde (ρ_n) denota a sequência de mollifiers.*

Observação 2 *É claro que se $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ e se $u' \in L^p(I)$ (aqui u' é a derivada usual de u) então $u \in W^{1,p}(I)$. Além disso, a derivada usual de u coincide com sua derivada no espaço $W^{1,p}$ no sentido de que a notação seja consistente! Em particular, se I é limitado, $C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I)$ para qualquer $1 \leq p \leq \infty$.*

Observação 3 *Para definir $W^{1,p}$ pode-se usar também a linguagem das distribuições. Todas as funções $u \in L^p(I)$ admitem uma derivada no sentido de distribuições; essa derivada é um elemento do enorme espaço de distribuições $\mathcal{D}'(I)$. dizemos que $u \in W^{1,p}$ se esta derivada distributiva estiver em L^p, que é um subespaço de $\mathcal{D}'(I)$. Quando $I = \mathbb{R}$*

e $p = 2$, os espaços de Sobolev também podem ser definidos usando a transformada de Fourier.

Notação. O espaço $W^{1,p}$ está equipado com a norma

$$\boxed{\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}}$$

ou às vezes, se $1 < p < \infty$, com a norma equivalente $(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{1/p}$. O espaço H^1 está equipado com o produto escalar

$$\boxed{(\mathrm{u,\ v})_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2} = \int_a^b (uv + u'v')}$$

e com a norma associada $\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{1/2}$.

Proposição 3 *O espaço $W^{1,p}$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. É reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p \leq \infty$. O espaço H^1 é um espaço de Hilbert separável.*

*D*emonstração:

(a) Seja (u_n) uma sequência de Cauchy em $W^{1,p}$; então (u_n) e (u'_n) são sequências de Cauchy em L^p. Segue que (u_n) converge para algum limite u em L^p e (u'_n) converge para algum limite g em L^p. Temos

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I u'_n \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

e passando o limite

$$\int_I u \varphi' = -\int_I g \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Assim, $u \in W^{1,p}$, $u' = g$, e $||u_n - u||_{W^{1,p}} \to 0$. □

(b) $W^{1,p}$ é reflexivo para $1 < p < \infty$. Claramente, o espaço produto $E = \mathrm{L}^p(I) \times L^p(I)$ é reflexivo. O operador $T : W^{1,p} \to E$ definido por $Tu = [u, u']$ é uma isometria de $W^{1,p}$ em E. Como $W^{1,p}$ é um espaço de Banach, $T(W^{1,p})$ é um subespaço fechado de E. Segue-se que $T(W^{1,p})$ é reflexivo. Consequentemente $W^{1,p}$ é também reflexivo. □

(c) $W^{1,p}$ é separável para $1 \leq p < \infty$. De fato, o espaço produto $E = \mathrm{L}^p(I) \times L^p(I)$ é separável. Assim, $T(W^{1,p})$ é também separável. Consequentemente $W^{1,p}$ é separável. □

Teorema 7 *Seja $u \in W^{1,p}(I)$, com $1 \leq p \leq \infty$, e I limitado ou ilimitado; então existe uma função $\widetilde{u} \in C(\overline{I})$ tal que*

$$u = \widetilde{u} \text{ q.t.p. em } I$$

e

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x \widetilde{u}(t)dt \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Na prova do Teorema 7, usaremos os seguintes lemas:

Lema 2 *Seja* $f \in L^1_{loc}(I)$ *tal que*

$$\int_I f\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(I). \tag{2.3}$$

Então existe uma constante C *tal que* $f = C$ *q.t.p. em* I.

*D*emonstração: Fixe uma função $\psi \in C_c(I)$ tal que $\int_I \psi = 1$. Para qualquer função $w \in C_c(I)$ existe $\varphi \in C^1_c(I)$ tal que

$$\varphi' = w - \left(\int_I w\right)\psi.$$

Com efeito, a função $h = w - \left(\int_I w\right)\psi$ é contínua, tem suporte compacto em I, e também $\int_I h = 0$. Portanto h tem uma (única) primitiva com suporte compacto em I. Deduzimos de (2.3) que

$$\int_I f\left[w - \left(\int_I w\right)\psi\right] = 0 \quad \forall w \in C_c(I),$$

isto é,

$$\int_I \left[f - \left(\int_I f\psi\right)\right] w = 0 \quad \forall w \in C_c(I),$$

e portanto $f - \left(\int_I f\psi\right) = 0$ q.t.p em I, isto é, $f = C$ q.t.p em I com $C = \int_I f\psi$. □

Lema 3 *Seja* $g \in L^1_{loc}(I)$ *para* y_0 *fixado em* I, *defina*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt, \qquad x \in I.$$

Então $v \in C(I)$ *e*

$$\int_I v\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C^1_c(I).$$

*D*emonstração: Temos

$$\begin{aligned}\int_I v\varphi' &= \int_I \left[\int_{y_0}^x g(t)dt\right]\varphi'(x)dx \\ &= -\int_a^{y_0} dx \int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dt + \int_{y_0}^b dx \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)dt.\end{aligned}$$

Pelo teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_I v\varphi' &= -\int_a^{y_0} g(t)dt \int_a^t \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b g(t)dt \int_t^b \varphi'(x)dx \\ &= -\int_I g(t)\varphi(t)dt.\end{aligned}$$

□

*D*emonstração do Teorema 7 . Fixe $y_0 \in I$ e defina $\bar{u}(x) = \displaystyle\int_{y_0}^{x} u'(t)dt$. Pelo Lema 3 temos

$$\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Portanto $\displaystyle\int_I (u-\bar{u})\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$. Segue do Lema 2 que $u - \bar{u} = C$ q.t.p em I. A função $\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + C$ tem as propriedades desejadas. □

Observação 4 *O Lema 3 mostra que a primitiva v de uma função $g \in L^p$ pertence a $W^{1,p}$ desde que também saibamos que $v \in L^p$, que é sempre o caso quando I é limitado.*

Proposição 4 *Seja $u \in L^p$ com $1 < p \leq \infty$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $u \in W^{1,p}$,

(ii) existe uma constante C tal que

$$\left|\int_I u\varphi'\right| \leq C||\varphi||_{L^{p'}(I)} \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Além disso, podemos tomar $C = ||u'||_{L^p(I)}$ em (ii).

*D*emonstração: Ver [8] página 206.

Proposição 5 *Uma função $u \in L^\infty(I)$ pertence a $W^{1,\infty}(I)$ se, e somente se, existe uma constante C tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y| \text{ em q.t.p.} \quad \forall x, y \in I.$$

*D*emonstração: Se $u \in W^{1,\infty}(I)$ podemos aplicar o Teorema 7 para deduzir que

$$|u(x) - u(y)| \leq ||u'||_{L^\infty}|x-y| \text{ em q.t.p.} \quad \forall x, y \in I.$$

Por outro lado, seja $\varphi \in C_c^1(I)$. Para $h \in \mathbb{R}$, com $|h|$ suficientemente pequeno, temos

$$\int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx = \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx$$

(essas integrais fazem sentido para h pequeno, já que φ é suportado em um subconjunto compacto de I). Usando a hipótese de u obtemos

$$\left|\int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx\right| \leq C|h|||\varphi||_{L^1}.$$

Dividindo por $|h|$ e fazendo $h \to 0$, obtemos

$$\left|\int_I u\varphi'\right| \leq C||\varphi||_{L^1} \quad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Podemos agora aplicar a Proposição 4 e concluir que $u \in W^{1,\infty}$. □

A versão L^p da Proposição 5 é a seguinte:

Proposição 6 *Seja $u \in L^p(\mathbb{R})$ com $1 < p < \infty$. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$,

(ii) *existe uma constante C tal que $\forall h \in \mathbb{R}$,*

$$||\tau_h u - u||_{L^p(\mathbb{R})} \leq C|h|.$$

Além disso, pode-se escolher $C = ||u'||_{L^p(\mathbb{R})}$ em (ii).

Lembre-se que $(\tau_h u)(x) = u(x+h)$.

*D*emonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$. (Essa implicação também é válida quando $p = 1$.) Pelo Teorema 7 temos, para qualquer x e h em $\mathbb{R}$,

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t)dt = h\int_0^1 u'(x+sh)ds.$$

Portanto

$$|u(x+h) - u(x)| \leq |h|\int_0^1 |u'(x+sh)|ds.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds.$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|^p dx &\leq |h|^p \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds \\ &\leq |h|^p \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}} |u'(x+sh)|^p dx.\end{aligned}$$

Mas para $0 < s < 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} |u'(x+sh)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |u'(y)|^p dy,$$

do qual (ii) pode ser deduzido. □

$(ii) \Rightarrow (i)$. Seja $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$. Para qualquer $h \in \mathbb{R}$ temos

$$\int_{\mathbb{R}} [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder e (ii) obtém-se

$$\left|\int_{\mathbb{R}} [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx\right| \leq C|h|||\varphi||_{L^{p'}(\mathbb{R})}$$

e portanto

$$\left|\int_{\mathbb{R}} u(x)[\varphi(x-h)-\varphi(x)]dx\right| \leq C|h|||\varphi||_{L^{p'}(\mathbb{R})}.$$

Dividindo por $|h|$ e fazendo $h \to 0$, obtemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}} u\varphi'\right| \leq C||\varphi||_{L^{p'}(\mathbb{R})}.$$

Podemos aplicar a Proposição 6 mais uma vez e concluir que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. □

Certas operações analíticas básicas têm significado apenas para funções definidas em todo $\mathbb{R}$ (por exemplo, convolução e transformada de Fourier). Portanto, é útil poder estender uma função $u \in W^{1,p}(I)$ para uma função $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. O seguinte resultado aborda este ponto.

Teorema 8 ***(operador de extensão).*** *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Existe um operador linear limitado $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$, chamado de operador de extensão, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $Pu|_I = u \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$,

(ii) $||Pu||_{L^p(\mathbb{R})} \leq C||u||_{L^p(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$,

(ii) $||Pu||_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C||u||_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I)$,

onde C depende apenas de $|I| \leq \infty$.

*D*emonstração: Ver [8] página 211.

Teorema 9 *(densidade). Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sequência $(u_n) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u \in W^{1,p}(I)$.*

Observação 5 *Em geral, não existe sequência $(u_n) \in C_c^\infty(I)$ tal que $u_n \to u \in W^{1,p}(I)$. Isso é uma contradição com os espaços L^p : lembre-se que para cada função $u \in L^p(I)$ existe uma sequência $(u_n) \in C_c^\infty(I)$ tal que $u_n \to u \in L^p(I)$.*

*D*emonstração: Podemos supor sempre que $I = \mathbb{R}$; caso contrário, estenda u para uma função em $W^{1,p}(\mathbb{R})$ pelo Teorema 8. Usamos as técnicas básicas de convolução (que tornam as funções C^∞) e cut-off (que tornam seu suporte compacto).

(a) **Convolução**.

Precisamos do seguinte lema

Lema 4 *Seja $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ e $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $\rho \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ e $(\rho \star v)' = \rho \star v'$.*

*D*emonstração: Ver [8] páginas 211-212.

(b) **Cut-off.**

Fixe uma função $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$ e

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{se} \quad |x| \geq 2. \end{cases}$$

Defina a sequência

$$\zeta_n(x) = \zeta(x/n) \quad \text{para} \quad n = 1,\ 2, \cdots \tag{2.4}$$

Segue-se facilmente do teorema da convergência dominada que se uma função f pertence a $L^p(\mathbb{R})$ com $1 \leq p < \infty$, então $\zeta_n f \to f \in L^p(\mathbb{R})$. □

(c) **Conclusão.**

Escolha uma sequência de mollifiers (ρ_n). Afirmamos que a sequência $u_n = \zeta_n(\rho_n \star u)$ converge para $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Primeiro, temos $||u_n - u||_p \to 0$. De fato, escreva

$$u_n - u = \zeta_n((\rho_n \star u) - u) + (\zeta_n u - u)$$

e assim

$$||u_n - u||_p \leq ||\rho_n \star u - u||_p + ||\zeta_n u - u||_p \to 0.$$

Agora, pelo Lema 4, temos

$$u_n' = \zeta_n'(\rho_n \star u) + \zeta_n(\rho_n \star u').$$

Portanto

$$\begin{aligned} ||u_n' - u'||_p &\leq ||\zeta_n'(\rho_n \star u)||_p + ||\zeta_n(\rho_n \star u') - u'||_p \\ &\leq \frac{C}{n}||u||_p + ||\rho_n \star u' - u'||_p + ||\zeta_n u' - u'||_p \to 0, \end{aligned}$$

onde $C = ||\zeta'||_\infty$. □

O próximo resultado é um protótipo importante de uma desigualdade de Sobolev (também chamado de imersão de Sobolev).

Teorema 10 *Existe uma constante C (dependendo apenas de $|I| \leq \infty$) tal que*

$$||u||_{L^\infty(I)} \leq C||u||_{W^{1,p}(I)} \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \quad \forall \ 1 \leq p \leq \infty. \tag{2.5}$$

Em outras palavras, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ com injeção contínua para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Além disso, se I é ***limitado*** *então*

$$\text{a } \textbf{\textit{injeção}}\, W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I}) \ \ \textbf{\textit{é compacta}} \quad \text{para todo } 1 < p \leq \infty, \tag{2.6}$$

$$\text{a } \textbf{\textit{injeção}}\, W^{1,1}(I) \subset L^q(I) \ \ \textbf{\textit{é compacta}} \quad \text{para todo } 1 \leq q < \infty. \tag{2.7}$$

*D*emonstração: Começamos por provar (2.5) para $I = \mathbb{R}$; o caso geral então decorre disso pelo teorema de extensão (Teorema 8). Seja $v \in C_c^1(\mathbb{R})$; se $1 \leq p < \infty$ defina $G(s) = |s|^{p-1}s$. A função $w = G(v)$ pertence a $C_c^1(\mathbb{R})$ e

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'.$$

Assim, para $x \in \mathbb{R}$, temos

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt,$$

e pela desigualdade de Hölder

$$|v(x)|^p \leq p||v||_p^{p-1}||v'||_p,$$

de onde concluímos que

$$||v||_\infty \leq C||v||_{W^{1,p}} \quad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R}), \tag{2.8}$$

onde C é uma constante universal (independente de p).

Argumentando agora por densidade. Seja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$; existe uma sequência $(u_n) \subset C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n \to u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ (pelo Teorema 9). Aplicando (2.8), vemos que (u_n) é uma sequência de Cauchy em $L^\infty(\mathbb{R})$. Portanto $u_n \to u \in L^\infty(\mathbb{R})$ e obtemos (2.5).
□

*D*emonstração de (2.6): Seja $\mathcal{H}$ a bola unitária em $W^{1,p}(I)$ com $1 < p \leq \infty$. Para $u \in \mathcal{H}$ temos

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u'(t)dt \right| \leq ||u'||_p|x-y|^{1/p'} \leq |x-y|^{1/p'} \quad \forall x, y \in I.$$

Segue-se então do teorema de Ascoli-Arzelà que $\mathcal{H}$ tem um fecho compacto em $C(\bar{I})$. □

*D*emonstração de (2.7): Ver [8] páginas 213-214.

Observação 6 *Seja I um intervalo limitado, seja $1 \leq p \leq \infty$, e seja $1 \leq q \leq \infty$. Do Teorema 7 e (2.5) pode-se mostrar facilmente que a norma*

$$|||u||| = ||u'||_p + ||u||_q$$

é equivalente à norma de $W^{1,p}(I)$.

Observação 7 *Seja I um intervalo ilimitado. Se $u \in W^{1,p}(I)$, então $u \in L^q(I)$ para todo $q \in [p, \infty]$, desde que*

$$\int_I |u|^q \leq ||u||_\infty^{q-p} ||u||_p^p.$$

Mas em geral $u \notin L^q(I)$ para $q \in [1, p)$.

Corolário 2 *Suponha que I seja um intervalo ilimitado e $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \to \infty}} u(x) = 0. \tag{2.9}$$

*D*emonstração: Do Teorema 9 existe uma sequência $u_n \in C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u \in W^{1,p}(I)$. Segue de (2.5) que $||u_n - u||_{L^\infty(I)} \to 0$. Deduzimos (2.9) disso. De fato, dado $\epsilon > 0$ escolhemos n suficientemente grande para que $||u_n - u||_{L^\infty(I)} < \epsilon$. Para $|x|$ suficientemente grande, $u_n(x) = 0$ (desde que $u_n \in C_c^1(\mathbb{R})$) e assim $|u(x)| < \epsilon$. $\square$

Corolário 3 ***(diferenciação de um produto).*** *Sejam $u, v \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$uv \in W^{1,p}(I)$$

e

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{2.10}$$

Além disso, a fórmula para integração por partes vale:

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv' \quad \forall x, y \in \bar{I}. \tag{2.11}$$

*D*emonstração: Ver [8] página 215.

Corolário 4 ***(diferenciação de uma composição).*** *Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$, e Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

*D*emonstração: Seja $M = ||u||_\infty$. Desde que $G(0) = 0$, existe uma constante C tal que $|G(s)| \leq C|s|$ para todo $s \in [-M, +M]$. Assim $|G \circ u| \leq C|u|$; segue que $G \circ u \in L^p(I)$. Similarmente, $(G' \circ u)u' \in L^p(I)$. Resta verificar que

$$\int_I (G \circ u)\varphi' = -\int_I (G' \circ u)u'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I). \tag{2.12}$$

Suponha primeiro que $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sequência (u_n) de $C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u \in W^{1,p}(I)$ e também em $L^\infty(I)$. Assim $(G \circ u_n)|_I \to G \circ u \in L^\infty(I)$ e $(G_{\prime} \circ u_n)u_n'|_I \to (G' \circ u)u' \in L^p(I)$. Claramente (pelas regras padrão para funções C^1) temos

$$\int_I (G \circ u_n)\varphi' = -\int_I (G' \circ u_n)u_n'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

do qual deduzimos (2.12). Para o caso $p = \infty$ proceda da mesma maneira que na prova do Corolário 3. □

2.3 Os Espaços de Sobolev $W^{m,p}$

Definição 2.3.1 *Dado um número inteiro $m \geq 2$ e um número $1 \leq p \leq \infty$ definimos por indução o espaço*

$$W^{m,p}(I) = u \in W^{m-1,p}(I);\ u' \in W^{m-1,p}(I).$$

definimos também

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

É facilmente mostrado que $u \in W^{m,p}(I)$ se, e somente se, existem m funções $g_1, g_2, \cdots, g_m \in L^p(I)$ tais que

$$\int_I uD^j\varphi = (-1)^j \int_I g_j\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \quad \forall j = 1, 2, \cdots, m,$$

onde $D^j\varphi$ denota a j-ésima derivada de φ. Quando $u \in W^{m,p}(I)$ podemos assim considerar as derivadas sucessivas de u : $u' = g_1$, $(u')' = g_2, \cdots$, até a ordem m. Denotadas por $Du,\ D^2u, \cdots, D^m u$. O espaço $W^{m,p}(I)$ está munido com a norma

$$||u||_{W^{m,p}} = ||u||_p + \sum_{\alpha=1}^{m} ||D^\alpha u||_p,$$

e o espaço $H^m(I)$ está munido com o produto escalar

$$(u, v)_{H^m} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} = \int_I uv + \sum_{\alpha=1}^{m} \int_I D^\alpha u D^\alpha v.$$

Pode-se mostrar que a norma $||\ ||_{W^{m,p}}$ é equivalente à norma

$$|||u||| = ||u||_p + ||D^m u||_p.$$

2.4 O Espaço $W_0^{1,p}$

Definição 2.4.1 *Dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_c^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$. Definimos*

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

O espaço $W_0^{1,p}(I)$ está munido com a norma de $W^{1,p}(I)$, e o espaço H_0^1 é munido com o produto escalar de H^1.

O espaço $W_0^{1,p}$ é um espaço de Banach separável. Além disso, é reflexivo para $p > 1$.
O espaço H_0^1 é um espaço de Hilbert separável.

Observação 8 *Quando $I = \mathbb{R}$ sabemos que $C_c^1(\mathbb{R})$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (veja Teorema 9) e portanto $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.*

Teorema 11 *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se, $u = 0$ sobre ∂I.*

*D*emonstração: Se $u \in W_0^{1,p}$, existe uma sequência $(u_n) \in C_c^1(I)$ tal que $u_n \to u \in W^{1,p}(I)$. Portanto $u_n \to u$ uniformemente sobre $\overline{I}$ e como consequência $u = 0$ sobre ∂I.

Reciprocamente, seja $u \in W^{1,p}(I)$ tal que $u = 0$ sobre ∂I. Fixe uma função $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad |t| \leq 1, \\ t & \text{se} \quad |t| \geq 2, \end{cases}$$

e

$$|G(t)| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Defina $u_n = (1/n)G(nu)$ de modo que $u_n \in W^{1,p}(I)$ (pelo corolário 4). Por outro lado,

$$supp\ u_n \subset \{x \in I;\ |u(x)| \geq 1/n\},$$

e assim *supp* u_n está em um subconjunto compacto de I (usando o fato de que $u = 0$ sobre ∂I e $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty,\ x \in I$). Portanto $u_n \in W_0^{1,p}(I)$. Finalmente, verifica-se facilmente que $u_n \to u \in W^{1,p}(I)$ pelo teorema da convergência dominada. Assim $u \in W_0^{1,p}(I)$. □

Observação 9 *Mencionemos duas outras caracterizações de funções $W_0^{1,p}$:*

(i) Seja $1 \leq p < \infty$ e seja $u \in L^p(I)$. Defina $\overline{u}$ por

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & se \quad x \in I, \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R} \backslash I. \end{cases}$$

Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se, $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

(ii) Seja $1 < p < \infty$ e seja $u \in L^p(I)$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se, existe uma constante C tal que

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq C||\varphi||_{L^{p'}(I)} \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

Proposição 7 ***(Desigualdade de Poincaré)***. *Suponha que I é um intervalo* ***limitado.*** *Então existe uma constante C (Dependendo $|I| < \infty$) tal que*

$$||u||_{W^{1,p}(I)} \leq C||u'||_{L^p(I)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I). \tag{2.13}$$

Em outras palavras, em $W_0^{1,p}$, a quantidade $||u'||_{L^p(I)}$ é uma norma equivalente à norma $W^{1,p}$.

*D*emonstração: Seja $u \in W_0^{1,p}$ (com $I = (a,b)$). Como $u(a) = 0$, temos

$$|u(x) = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t)dt \right| \leq ||u'||_{L^1}.$$

Assim, $||u||_{L^\infty(I)} \leq ||u'||_{L^1}$ e (2.13) segue-se então pela desigualdade de Hölder.

Observação 10 *Se I é limitado, a expressão $(u', v')_{L^2} = \int u'v'$ define um produto escalar em H_0^1 e a norma associada, isto é, $||u'||_{L^2}$, é equivalente à norma H^1.*

Observação 11 *Dado um número inteiro $m \geq 2$ e um número real $1 \leq p < \infty$, o espaço $W_0^{m,p}(I)$ é definido como o fecho de $C_c^m(I)$ em $W^{m,p}(I)$. Um deles mostra que*

$$W_0^{m,p}(I) = \left\{ u \in W^{m,p}(I);\ u = Du = \cdots = D^{m-1}u = 0 \quad sobre\ \partial I \right\}.$$

É essencial notar a distinção entre

$$W_0^{2,p}(I) = \left\{ u \in W^{2,p}(I);\ u = Du = 0 \quad sobre\ \partial I \right\}$$

e

$$W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I) = \left\{ u \in W^{2,p}(I);\ u = 0 \quad sobre\ \partial I \right\}.$$

Uma vez que estamos interessados em soluções radiais, consideramos a formulação radial do problema (1.1), onde $N \geq 3$. Sob uma mudança adequada de vriáveis, o problema

(1.1) pode ser transformado em uma EDO com condição de fronteira mista.

A seguir, denotamos $f_\lambda : \mathbb{R}^N \backslash B_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f_\lambda(|x|, u) = \lambda a(|x|)|u|^{q-1}u + b(|x|)|u|^{p-1}u$. Se u for uma solução radial do problema (1.1), isto é, se $r := |x|$ e $u(x) = u(|x|) = u(r)$, então o laplaciano é dado por

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{du}{dr}.$$

De fato, como

$$r = |x| = (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{1/2},$$

temos

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\frac{2x_i}{(x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{1/2}} = \frac{x_i}{r}.$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{du}{dr}\frac{x_i}{r}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\frac{x_i}{r}\frac{x_i}{r} + \frac{du}{dr}\left(\frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2}\right) = \frac{d^2u}{dr^2}\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{du}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right),$$

donde

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{d^2u}{dr^2}\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{r^2} + \frac{du}{dr}\sum_{i=1}^N\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right) = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr}\left(\frac{N}{r} - \frac{1}{r}\right) = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{du}{dr}.$$

Logo, se $u = u(r)$ é uma função radial harmônica, ela satisfaz a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$u''(r) + \frac{N-1}{r}u'(r) = 0.$$

Então u verifica

$$\begin{cases} -u'' - \frac{N-1}{r}u' + ru' = f_\lambda(r,u) \quad \text{em} \quad (1,\infty), \\ u(1) = 0, \quad \lim\limits_{r\to\infty} u'(r) = 0, \end{cases}$$

o que leva a

$$\begin{cases} -\left(r^{N-1}u'\right)' + r^N u' = r^{N-1}f_\lambda(r,u) \quad \text{em} \quad (1,\infty), \\ u(1) = 0, \quad \lim\limits_{r\to\infty} u'(r) = 0. \end{cases}$$

Agora ponhamos

$$u(r) := z(s),$$

onde

$$s = \frac{r^{2-N}}{N-2}. \tag{2.14}$$

Desta forma, obtemos o seguinte problema equivalente ao problema acima

$$\begin{cases} -z'' - r^N z' = r^{2(N-1)} f_\lambda(r(s), z(s)) \quad \text{em} \quad \left(0, \dfrac{1}{N-2}\right), \\ z\left(\dfrac{1}{N-2}\right) = 0, \quad \lim\limits_{s\to 0^+} z'(s) = 0. \end{cases}$$

Pode-se supor, sem perda de generalidade, que a função z satisfaz $z'(0) = 0$.
Agora, observe que

$$-\left(\mu(s)z'(s)\right)' = -\mu(s)z''(s) - \mu'(s)z'(s) = -\mu(s)z''(s) - \mu(s)r^N(s)z'(s)$$

se, e somente se,

$$\mu(s)r^N = \mu'(s).$$

logo,

$$\frac{\mu'(s)}{\mu(s)} = [(N-2)s]^{\frac{N}{2-N}},$$

isso implica

$$\ln|\mu(s)| = -\frac{(N-2)^{-\frac{2}{N-2}}}{2} s^{-\frac{2}{N-2}} + C.$$

Assim, ao escolher

$$\mu(s) := e^{-\frac{(N-2)^{\frac{-2}{N-2}}}{2} s^{-\frac{2}{N-2}}}, \tag{2.15}$$

obtemos

$$-\left(\mu(s)z'(s)\right)' = \mu(s)r(s)^{2(N-1)} f_\lambda(r(s), z(s)) \text{ para todo } s \in \left(0, \frac{1}{N-2}\right). \tag{2.16}$$

Portanto, se u é uma função radial, concluímos que u é uma solução do problema (1.1) se, e somente se, a função auxiliar z é uma solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\left(\mu(s)z'(s)\right)' = \mu(s)r(s)^{2(N-1)} f_\lambda(r(s), z(s)) \quad \text{em} \quad \left(0, \dfrac{1}{N-2}\right), \\ z\left(\dfrac{1}{N-2}\right) = 0, \quad z'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Ao integrar a equação (2.16), obtemos

$$-\mu(t)z'(t) = \int_0^t \mu(s)r(s)^{2(N-1)} f_\lambda(r(s), z(s))ds \quad \text{para todo} \quad t \in \left(0, \frac{1}{N-2}\right),$$

desse modo

$$-z'(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int_0^t \mu(s)r(s)^{2(N-1)} f_\lambda(r(s), z(s))ds.$$

Por conveniência, denotamos

$$\left[\begin{array}{l} \alpha(s) := \dfrac{1}{\mu(s)}, \quad \beta(s) := \mu(s)r(s)^{2(N-1)}, \quad \tilde{f}_\lambda(s, z(s)) = f_\lambda(r(s), z(s)) \\ \tilde{a}(s) = a(r(s)), \quad \text{e} \quad \tilde{b}(s) = b(r(s)), \end{array}\right. \tag{2.18}$$

onde $r(s)$ é dado por (2.14).

2.5 Estrutura variacional

Considere o espaço de Lebesgue com peso

$$L^p((0, L); \vartheta) := \left\{ w \text{ mensurável} : \int_0^L |w|^p \vartheta(s)ds < +\infty \right\},$$

dotado da norma

$$\|w\|_{L^p((0,L);\vartheta)} = \left(\int_0^L |w|^p \vartheta(s)ds \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde a função $\vartheta > 0$ será definida posteriormente.

Denotamos o espaço de Sobolev $W^{1,2}((0, L); \mu)$ como o espaço das funções w em $L^2((0, L); \mu)$ tal que, para cada múlti-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ com ordem $|\alpha| \leqslant 1$, existe uma função $v_\alpha \in L^2((0, L); \mu)$ (a derivada fraca de w) satisfazendo

$$\int_0^L \varphi(s)v_\alpha(s)ds = (-1)^{|\alpha|} \int_0^L w(s)D^\alpha \varphi(s)ds \quad \text{para todo} \quad \varphi \in C_0^\infty((0, L)).$$

Observe que o problema (2.17) é um problema de condições de fronteira mista de Dirichlet e Neumann. A formulação variacional para este problema é permitir que $Y((0, L); \mu) = \{w \in W^{1,2}((0, L); \mu) : w(L) = 0\}$ seja um subespaço de $W^{1,2}((0, L); \mu)$ e

$$\int_0^L z'(s)v'(s)\mu(s)ds = \int_0^L \beta(s)\tilde{f}_\lambda(s, z(s))v(s)ds \quad \text{para todo} \quad v \in Y((0, L); \mu).$$

É fácil de ver que o espaço $Y((0,L);\mu)$ munido da norma

$$\|w\|_{Y((0,L);\mu)} = \left(\int_0^L |w'|^2 \mu(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Sobolev.

Lema 5 *Seja $w \in Y((0,L);\mu)$, onde μ é dado em (2.15), então para $s \in (0,L)$ temos que*

$$|w(s)| \leq L^{\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{1}{2}}(s)\|w\|_{Y((0,L);\mu)}. \tag{2.19}$$

*D*emonstração: Sejam $w \in Y((0,L);\mu)$ e $s \in (0,L)$, então

$$\begin{aligned} |w(s)| &= \left|-\int_s^L w'(t)dt\right| \\ &\leq \left(\int_0^L |w'(t)|^2 \mu(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^L \mu(t)^{-1}dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq L^{1/2}\mu^{-1/2}(s)\|w\|_{Y((0,L);\mu)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 12 *A imersão $Y((0,L);\mu) \hookrightarrow L^\tau((0,L);\vartheta)$ é compacta para $\tau \in (0,2]$, onde $\vartheta(s) = \beta(s)c(s)$ e c é uma função mensurável não-negativa tal que*

$$\int_0^L \left|s^{\frac{2(N-1)}{2-N}}c(s)\right| ds < \infty.$$

*D*emonstração: Seja $\{w_n\} \subset Y((0,L);\mu)$ uma sequência limitada. Então, passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que

$w_n \rightharpoonup w$ fracamente em $Y((0,L);\mu)$ e pontualmente (pois Yé reflexivo).

Note que

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^L |w_n(s)|^\tau \vartheta(s)ds = \int_0^L |w(s)|^\tau \vartheta(s)ds. \tag{2.20}$$

De fato, pelo Lema 5, para $s \in (0,L)$ temos

$$|w_n(s)|^\tau \vartheta(s) \leqslant L^{\tau/2}\mu^{\frac{2-\tau}{2}}(s)[(N-2)s]^{\frac{2(N-1)}{2-N}}c(s)\|w\|^\tau_{Y((0,L);\mu)}. \tag{2.21}$$

Defina

$$h(s) := L^{\tau/2}\mu^{\frac{2-\tau}{2}}(L)[(N-2)s]^{\frac{2(N-1)}{2-N}}c(s)\|w\|^\tau_{Y((0,L);\mu)}.$$

Uma vez que

$$\int_0^L |h(s)|ds \leqslant C_c \|w\|^{\tau}_{Y((0,L);\mu)}, \tag{2.22}$$

(onde a constante C depende da função c) e $h(s) \geqslant |w_n(s)|^{\tau}\,\vartheta(s)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos (2.20). Agora, pelo Lema de Brezis-Lieb 1 temos

$$\lim_{x\to\infty} \|w_n - w\|_{L^{\tau}((0,L);\vartheta)} = 0.$$

$\square$

3 PROBLEMA DE AUTOVALOR ENVOLVENDO O OPERADOR ORNSTEIN-UHLENBECK EM DOMÍNIOS EXTERIORES

3.1 Prova do Teorema 1

Considere o problema

$$\begin{cases} -\left(\mu(s)z'\right)' = \lambda\beta(s)\tilde{a}(s)z \quad \text{em} \quad (0,L), \\ z'(0) = z(L) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Um número real $\lambda \in \mathbb{R}$ é dito ser um autovalor do problema (3.1) se, e somente se, existe $z \in Y((0,L);\mu)\backslash\{0\}$ tal que

$$\int_0^L \mu(s)z'\psi' ds = \lambda \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s)z\psi ds \tag{3.2}$$

para todo $\psi \in Y((0,L);\mu)$. Neste caso, z é chamado de autofunção associada ao λ.

Lema 6 *Existe o menor (o primeiro) autovalor $\lambda_1 > 0$ e pelo menos uma autofunção correspondente $z_1 > 0$ q.t.p em $(0,L)$ do problema de autovalor (3.1).*

*D*emonstração: Vamos definir Φ e $J : Y((0,L);\mu) \to \mathbb{R}$, funcionais de classe C^1 definidos, respectivamente, por

$$\Phi(u) := \int_0^L \mu(s)\left|u'\right|^2 ds \quad \text{e} \quad J(u) := \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s)|u|^2 ds.$$

Desse modo, um valor real λ é um autovalor do problema (3.1) se existe $u \in Y((0,L);\mu)\backslash\{0\}$ tal que

$$\Phi'(u) = \lambda J'(u).$$

Ponhamos

$$\mathbf{M} := \{u \in W : J(u) = 1\}$$

e

$$\lambda_1 = \inf_{u \in \mathrm{M}} \Phi(u).$$

Seja (u_n) uma sequência de minimização para λ_1 dado por

$$J(u_n) = 1 \quad \text{e} \quad \Phi(u_n) = \lambda_1 + \delta_n, \quad \text{com} \quad \delta_n \to 0_+ \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{3.3}$$

De (3.3), segue-se que $\|u_n\|_{Y((0,L);\mu)} < c$, com $c > 0$ independente de n. Então passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que

$$u_n \rightharpoonup z_1 \text{ fracamente em } Y((0,L);\mu) \text{ e pontualmente}$$

para algum $z_1 \in Y((0,L);\mu)$. Segue-se pelo Teorema 12 e o Lema de Brezis-Lieb 1 que

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s)\,|u_n|^2\,ds = \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s)\,|z_1|^2\,ds.$$

Note que $z_1 \neq 0$. Desde que $u_n \rightharpoonup z_1$ fracamente em $Y((0,L);\mu)$, temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 \le \int_0^L \mu(s)\,|z_1'|^2\,ds = \|z_1\|^2_{Y((0,L);\mu)} &\le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{Y((0,L);\mu)} \\ &= \liminf_{n\to\infty} (\lambda_1 + \delta_n) = \lambda_1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Logo, $\Phi(z_1) = \lambda_1$. É equivalente a dizer que

$$\lambda_1 = \inf_{u\in Y((0,L);\mu)\setminus\{0\}} R(u),$$

onde R é o quociente de Rayleigh dado por

$$R(u) = \frac{\displaystyle\int_0^L \mu(s)\,|u'|^2\,ds}{\displaystyle\int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s)|u|^2 ds}.$$

Para cada $\phi \in Y((0,L);\mu) \cap C^\infty(0,L)$, usando o Teorema da Convergência Dominada pode-se verificar que R admite a derivada direcional ao longo de ϕ. Assim, obtemos

$$\left.\frac{d}{dt} R(z_1 + t\phi)\right|_{t=0} = 0.$$

Portanto

$$\int_0^L \mu(s) z_1' \phi' ds = \lambda_1 \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s) z_1 \phi ds,$$

para todo $\phi \in Y((0,L);\mu) \cap C^\infty(0,L)$. Agora usamos a densidade para concluir que

$$\int_0^L \mu(s) z_1' v' ds = \lambda_1 \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s) z_1 v ds \quad \text{para todo} \quad v \in Y((0,L);\mu). \tag{3.5}$$

Note que $\lambda_1 > 0$. Além disso, usando argumentos padrão, podemos provar a simplicidade do primeiro autovalor (veja [12]). Uma vez que z_1 é uma autofunção correspondente para λ_1, então $|z_1|$ é também uma autofunção correspondente para λ_1, e podemos assumir que $z_1 \ge 0$ em $(0,L)$. Além disso, (3.5) nos permite garantir que $\mu(s)z_1'$ possui derivada fraca em $L^2(0,L)$ e

$$-\left(\mu(s) z_1'\right)' = \lambda_1 \beta(s)\tilde{a}(s) z_1.$$

Assim, z_1' é contínuo. Finalmente, a igualdade

$$\mu z_1'' = -\mu' z_1 + \lambda_1 \beta(s)\tilde{a}(s) z_1,$$

mostra que z_1 é de Classe C^2. Agora, uma vez que z_1 satisfaz

$$z_1'(t) = -\frac{\lambda_1}{\mu(t)} \int_0^t \beta(s)\tilde{a}(s) z_1(s) ds,$$

e $z_1 \geq 0$, obtemos que $z_1 > 0$ em $(0, L)$. $\square$

A seguir, provamos a existência de uma sequência infinita de autovalores.

Lema 7 *O problema (3.1) admite uma sequência de autovalores positivos indo para* ∞.

*D*emonstração: Para cada $n \in \mathbf{N}$, usando as mesmas idéias do Lema 6 obtemos $z_n \in \mathbf{M}$ tal que

$$\lambda_n = \Phi\left(z_n\right) = \inf_{z \in \mathbf{M}: z \perp W_{n-1}} \Phi(z),$$

onde $W_0 = \{0\}, W_{n-1} = \text{span}\left\{z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}\right\}$. É fácil de ver que $\{z \in \mathbf{M} : z \perp W_{n-1}\} \neq 0$, para cada n. Agora, pelo mesmo argumento usado anteriormente, vemos que

$$\int_0^L \mu(s) z_n' v' ds = \lambda_n \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s) z_n v ds \quad \text{ para todo } \quad v \in W_{n-1}^{\perp}.$$

Além disso, para $i = 1, 2, \cdots, n-1$ temos

$$0 = \int_0^L \mu(s) z_i' z_n' ds = \lambda_i \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s) z_i z_n ds.$$

Então para $v \in W_{n-1},\ v = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i z_i$ temos

$$\int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s) z_n v ds = 0,$$

para $v \in Z_{n-1}$. Portanto

$$\int_0^L \mu(s) z_n' v' ds = \lambda_n \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s) z_n v ds \quad \text{ para todo } \quad v \in Y((0, L); \mu).$$

Assim, obtemos um conjunto ortogonal infinito $\{z_n\}$ de autofunções de (3.1) em $\mathbf{M}$. A seguir, mostramos que a sequência $\{\lambda_n\}$ é ilimitada. Agora, definindo $v_n = \dfrac{z_n}{\sqrt{\lambda_n}}$ vemos que $\{v_n\}$ é uma sequência ortonormal em $Y((0, L); \mu)$ e, portanto, $v_n \rightharpoonup 0$.
Uma vez que

$$\lambda_n^{-1} = \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s) \left|z_n\right|^2 ds,$$

usamos o resultado de compacidade do Teorema 12 para obter

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1} = \lim_{n\to\infty} \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s)\,|z_n|^2\,ds = 0.$$

Isto mostra que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1} = 0$ e, portanto, a sequência $\{\lambda_n\}$ de autovalores de (3.1) é ilimitada. $\square$

4 PROBLEMA DO TIPO CÔNCAVO - CONVEXO ENVOLVENDO O OPERADOR ORNSTEIN-UHLENBECK

4.1 Prova do Teorema 2

Esta seção é dedicada a fornecer o resultado de existência.

4.1.1 Caso (i) $0 < q < 1 < p$.

Para $0 < q < 1$, seja $\phi_\lambda : \left(0, \frac{1}{N-2}\right] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$\phi_\lambda(\tau) := \left[(1-q)\lambda\left(G_{\tilde{a}}\left(\frac{1}{N-2}\right) - G_{\tilde{a}}(\tau)\right)\right]^{\frac{1}{1-q}} \tag{4.1}$$

onde

$$G_{\tilde{a}}(\tau) = \int_0^\tau \alpha(t)\left(\int_0^t \beta(s)\tilde{a}(s)ds\right)dt,$$

com α e β definidos em (2.18). Note que $G_{\tilde{a}}(\tau)$ é crescente em $\left(0, \frac{1}{N-2}\right]$,

$$G_{\tilde{a}}(\tau) \leq \int_0^\tau \int_0^t \tilde{a}(s)[(N-2)s]^{\frac{2(N-1)}{2-N}} dsdt,$$

(em particular $G_{\tilde{a}}(0) = 0$) e $G'_{\tilde{a}}(\tau) = \alpha(t)\displaystyle\int_0^\tau \tilde{a}(s)\beta(s)ds$. Sabemos que $\phi_\lambda(\tau)$ é decrescente, $\phi_\lambda\left(\frac{1}{N-2}\right) = 0$ e satisfaz a seguinte equação integral

$$\phi_\lambda(\tau) = \lambda\int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t)\left(\int_0^t \beta(s)\tilde{a}(s)ds\right)\phi_\lambda^q(t)dt. \tag{4.2}$$

Agora, defina o operador $\mathcal{T} : \overline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}}$, onde

$$\overline{\mathcal{C}} := \left\{g \in C\left(\left[0, \frac{1}{N-2}\right]; [0,\infty)\right) : g \text{ é decrescente e } g\left(\frac{1}{N-2}\right) = 0 = g'(0)\right\}$$

por

$$(\mathcal{T}z)(\tau) := \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t)\left(\int_0^t \beta(s)\left[\lambda\tilde{a}(s)z(s)^q + \tilde{b}(s)z(s)^p\right]ds\right)dt.$$

Observe que dado $z \in \overline{\mathcal{C}}$, $\mathcal{T}z$ satisfaz

$$\mathcal{T}z \geq 0$$

e

$$(\mathcal{T}z)\left(\frac{1}{N-2}\right) = 0.$$

Além disso,

$$(\mathcal{T}z)'(\tau) = -\alpha(\tau)\int_0^\tau \beta(s)\left[\lambda\tilde{a}(s)z(s)^q + \tilde{b}(s)z(s)^p\right]ds \leq 0$$

e

$$(\mathcal{T}z)'(\tau) \to 0 \quad \text{quando} \quad \tau \to 0^+.$$

Assim, se $z \in \overline{\mathcal{C}}$ então $\mathcal{T}z \in \overline{\mathcal{C}}$.

Agora, considere o conjunto

$$\mathcal{M} := \left\{g \in \overline{\mathcal{C}} : \phi_\lambda(\tau) \leq g(\tau) \leq \lambda\right\} \tag{4.3}$$

com λ a ser escolhido posteriormente.

Vamos considerar as seguintes hipóteses:

$$A := \lim_{\tau\to 0^+}\int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t)\left(\int_0^t \beta(s)(\tilde{a}(s)+\tilde{b}(s))ds\right)dt < +\infty \tag{4.4}$$

e

$$B := \lim_{\tau\to 0^+}\phi_\lambda(\tau) < +\infty. \tag{4.5}$$

Segue de (4.4) e (4.5) que podemos escolher $\lambda > 0$ pequeno o suficiente, tal que

$$\lambda^{p-1}A \leq \frac{1}{2}. \tag{4.6}$$

Além disso, λ pode ser escolhido de forma que, $\lambda \leq \left(\frac{1}{2A}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ e

$$\phi_\lambda(\tau) < \lambda \quad \text{para todo} \quad \tau \in \left(0, \frac{1}{N-2}\right], \tag{4.7}$$

ou equivalente,

$$\lambda < \frac{\lambda^{1-q}}{(1-q)G_{\tilde{a}}\left(\frac{1}{N-2}\right)}, \tag{4.8}$$

por (4.1). Portanto, o conjunto $\mathcal{M}$ dado em (4.3) é bem definido com esta escolha de λ e ϕ_λ.

Lema 8 *Se (4.4) e (4.5) ocorrem, λ e ϕ_λ satisfazem (4.7); então existe λ^* tal que*

$$\mathcal{T}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M},$$

para $0 < \lambda < \lambda^*$, onde $\mathcal{M}$ é o conjunto dado em (4.3).

Demonstração: Seja $z \in \mathcal{M}$, então $\phi_\lambda(\tau) \le z(\tau) \le \lambda$. Portanto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(z)(\tau) &= \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) \left[\lambda \tilde{a}(s) z(s)^q + \tilde{b}(s) z(s)^p \right] ds \right) dt \\
&\le \lambda \lambda^q \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) \tilde{a}(s) ds \right) dt \\
&+ \lambda^p \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) \tilde{b}(s) ds \right) dt \\
&\le \left(\lambda^q A + \lambda^{p-1} A \right) \lambda.
\end{aligned}
$$

Por (4.6) podemos escolher

$$
\lambda \le \left(\frac{1}{2A} \right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{4.9}
$$

Portanto, se

$$
\lambda \le \left(\frac{1}{2A} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.10}
$$

obtemos $\lambda^q A + \lambda^{p-1} A \le 1$. Portanto,

$$
(\mathcal{T} z)(\tau) \le \lambda.
$$

Agora, como $\phi_\lambda(\cdot)$ é decrescente e usando (4.6), obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(z)(\tau) &= \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) \left[\lambda \tilde{a}(s) z(s)^q + \tilde{b}(s) z(s)^p \right] ds \right) dt \\
&\ge \lambda \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) \tilde{a}(s) \phi_\lambda(s)^q ds \right) dt \\
&\ge \lambda \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) \tilde{a}(s) ds \right) \phi_\lambda(t)^q dt \\
&= \phi_\lambda(\tau).
\end{aligned}
$$

Resumindo, obtemos $(\mathcal{T} z)\left(\frac{1}{N-2}\right) = 0 = (\mathcal{T} z)'(0), \quad (\mathcal{T} z)'(\tau) \le 0$ e

$$
\phi_\lambda(\tau) \le (\mathcal{T} z)(\tau) \le \lambda.
$$

Portanto

$$
\mathcal{T} z \in \mathcal{M}
$$

para

$$
0 < \lambda < \lambda^* = \min \left\{ \left(\frac{1}{2A} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \left(\frac{1}{2A} \right)^{\frac{1}{q}}, \left(\frac{1}{(1-q) G_{\tilde{a}} \left(\frac{1}{N-2} \right)} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}, \tag{4.11}
$$

por (4.8), (4.9) e (4.10). □

Agora, vamos provar que $\mathcal{T}$ é um operador compacto. De fato, seja $\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{C}}$ limitado, pelo teorema de Ascoli-Arzelá, é suficiente provar que $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ é limitado e $\mathcal{T}$ é equicontínuo. Como $\mathcal{D}$ é limitado e as funções $a, b \in L^\infty(1, \infty)$, então para $\lambda \geq 0$ fixado podemos assumir que $\|z\|_\infty \leq M$ para todo $z \in \mathcal{D}$ para algum $M \geq 0$. Portanto, para $0 \leq t \leq \dfrac{1}{N-2}$ e $z \in \mathcal{D}$ temos

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T}z)(0)| &\leq \left| \int_0^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) f_\lambda(r(s), z(s)) ds \right) dt \right| \\ &\leq \lambda E \|z\|_\infty^q + F \|z\|_\infty^p \\ &\leq \lambda E M^q + F M^p, \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde $f_\lambda(|x|, u) = \lambda a(|x|)|u|^{q-1}u + b(|x|)|u|^{p-1}u$,

$$E := \int_0^{\frac{1}{N-2}} \left(\int_0^t r(s)^{2(N-1)} \tilde{a}(s) ds \right) dt$$

e

$$F := \int_0^{\frac{1}{N-2}} \left(\int_0^t r(s)^{2(N-1)} \tilde{b}(s) ds \right) dt.$$

Portanto $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ é limitado.

Agora, seja $\epsilon > 0$ dado, $z \in \mathcal{D}$ e $\tau_1, \tau_2 \in \left[0, \frac{1}{N-2}\right]$, com $\tau_1 < \tau_2$. Temos,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{T}z)(\tau_1) - (\mathcal{T}z)(\tau_2)| &= \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) f_\lambda(r(s), z(s)) ds \right) dt \right| \\ &\leq \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\int_0^t r(s)^{2(N-1)} f_\lambda(r(s), z(s)) ds \right) dt \\ &\leq |\tau_1 - \tau_2| \int_0^{\frac{1}{N-2}} r(s)^{2(N-1)} f_\lambda(r(s), z(s)) ds \\ &\leq |\tau_1 - \tau_2| \left(\lambda E \|z\|_\infty^q + F \|z\|_\infty^p \right) \\ &\leq |\tau_1 - \tau_2| \left(\lambda E M^q + F M^p \right). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Tomando $|\tau_1 - \tau_2| < \delta = \dfrac{\epsilon}{\lambda E M^q + F M^p}$, vemos que $\mathcal{T}$ é equicontínuo.

A prova de existência é feita por meio de Teorema 4 página 15. Devido ao Lema 8, podemos definir $\mathcal{T} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$, onde $\mathcal{M}$ é dado em (4.3). Note que $\mathcal{M}$ é fechado e convexo. Agora, pelo Teorema 4 página 15, obtemos a existência de um ponto fixo $z \in C\left(\left[0, \frac{1}{N-2}\right]; [0, \infty)\right)$ de $\mathcal{T}$. Isto é

$$z(\tau) = \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) \left(\lambda \tilde{a}(s) z(s)^q + \tilde{b}(s) z(s)^p \right) ds \right) dt. \tag{4.14}$$

Como $z \in \mathcal{M}$, obtemos

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|z\|_{L^\infty\left(0,\frac{1}{N-2}\right)} = 0$$

e isso completa a prova. □

4.1.2 Caso (ii) $0 < q < 1 = p$

Vamos supor que $b \in \mathcal{B}, 0 < q < 1$ e ϕ_λ conforme definido em (4.1). Segue de (4.4) e (4.5) que podemos escolher $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$\phi_\lambda(\tau) < \lambda \quad \text{para todo } \tau \in \left(0, \frac{1}{N-2}\right], \tag{4.15}$$

isso é equivalente a

$$\lambda < \left(\frac{1}{(1-q) G_{\tilde{a}}\left(\frac{1}{N-2}\right)} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.16}$$

por (4.1). Portanto, o conjunto $\mathcal{M}$ dado em (4.3) está bem definido com a escolha de λ e ϕ_λ.

Lema 9 *Se (4.4) e (4.5) ocorrem, λ e ϕ_λ satisfazendo (4.15). Então existe λ^* tal que*

$$\mathcal{T}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M},$$

para $0 < \lambda < \lambda^*$, onde $\mathcal{M}$ é o conjunto dado em (4.3).

Demonstração: Seja $z \in \mathcal{M}$, então $\phi_\lambda(\tau) \leq z(\tau) \leq \lambda$. Definindo

$$D := \int_0^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) \tilde{b}(s) ds \right) dt = G_{\tilde{b}}\left(\frac{1}{N-2} \right),$$

vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(z)(\tau) &= \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) \left[\lambda \tilde{a}(s) z(s)^q + \tilde{b}(s) z(s)^p \right] ds \right) dt \\ &\leq \left(\lambda^q A + D \right) \lambda. \end{aligned}$$

Como $\lambda > 0$, se escolhermos

$$\lambda \leq \left(\frac{1-D}{A} \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.17}$$

obtemos $\lambda^q A + D \leq 1$. Portanto,

$$(\mathcal{T} z)(\tau) \leq \lambda.$$

Agora, como $\phi_\lambda(\cdot)$ é decrescente e usando (4.1), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(z)(\tau) &= \int_{\tau}^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) \left[\lambda \tilde{a}(s) z(s)^q + \tilde{b}(s) z(s)^p \right] ds \right) dt \\ &\geq \phi_\lambda(\tau).\end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{T}z)\left(\frac{1}{N-2}\right) = 0, \quad (\mathcal{T}z)'(\tau) \leq 0$ e

$$\phi_\lambda(\tau) \leq (\mathcal{T}z)(\tau) \leq \lambda.$$

Portanto

$$\mathcal{T}z \in \mathcal{M}$$

para

$$0 < \lambda < \lambda^* = \min\left\{ \left(\frac{1-D}{A}\right)^{\frac{1}{q}}, \left(\frac{1}{(1-q)G_{\tilde{a}}\left(\frac{1}{N-2}\right)}\right)^{\frac{1}{q}} \right\}. \tag{4.18}$$

Novamente, pelo Teorema 4 página 15, obtemos a existência de um ponto fixo $z \in C\left(\left[0, \frac{1}{N-2}\right]; [0, \infty)\right)$ de $\mathcal{T}$. Isto é

$$z(\tau) = \int_{\tau}^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) \left(\lambda \tilde{a}(s) z(s)^q + \tilde{b}(s) z(s)^p \right) ds \right) dt, \tag{4.19}$$

e isso completa a prova de existência. Como $z \in \mathcal{M}$, obtemos

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|z\|_{L^\infty\left(0, \frac{1}{N-2}\right)} = 0$$

e isso completa a prova. $\square$

4.1.3 Caso (iii) $0 < p < 1 = q$

Para lidar com este caso, vamos considerar a abordagem variacional. Associado com o problema (2.17) definimos o funcional $I_\lambda : Y((0,L);\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(z) = \frac{1}{2}\|z\|^2_{Y((0,L);\mu)} - \frac{\lambda}{2} \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s) \left(z^+(s)\right)^2 ds - \frac{1}{p+1} \int_0^L \beta(s)\tilde{b}(s) \left(z^+(s)\right)^{p+1} ds, \tag{4.20}$$

onde $z^+ = \max\{0, z\}$, que é C^1 e cuja derivada de Fréchet para todo $z, u \in Y((0,L);\mu)$, é dada por

$$I'_\lambda(z)v = \int_0^L z'(s)v'(s)\mu(s)ds - \lambda \int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s)z^+(s)v(s)ds - \int_0^L \beta(s)\tilde{b}(s)\left(z^+(s)\right)^p v(s)ds. \tag{4.21}$$

Por (2.22), temos a estimativa

$$I_\lambda(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \lambda\frac{C_a}{q+1}\right)\|z\|^2_{Y((0,L);\mu)} - \frac{C_b}{p+1}\|z\|^{p+1}_{Y((0,L);\mu)}, \qquad \text{para todo} \qquad z \in Y((0,L);\mu),$$

e assim, I_λ é limitado por baixo e coercitivo para todo $\lambda \in (0, \lambda^*)$, com $\lambda^* = \dfrac{q+1}{2C_a}$. Pelo Teorema 12 inferimos que I_λ é sequencialmente fracamente inferior semicontínuo e portanto, existe $z_0 \in Y((0,L);\mu)$ tal que

$$I_\lambda(z_0) = \inf_{z \in Y((0,L);\mu)} I_\lambda(z)$$

(veja, por exemplo, [[25] Teoremas 1.1, 1.2]). Portanto z_0 é um crítico de I_λ satisfazendo

$$\int_0^L z_0'(s)v'(s)\mu(s)ds = \lambda\int_0^L \beta(s)\tilde{a}(s)z_0^+(s)v(s)ds + \int_0^L \beta(s)\tilde{b}(s)\left(z_0^+(s)\right)^p v(s)ds, \quad (4.22)$$

para todo $v \in Y((0,L);\mu)$.

Resta justificar que $z_0 > 0$. Inserindo $v = -z_0^- = -\max\{0, -z_0\}$ em (4.22) leva a $z_0^- = 0$, então $z_0 \geq 0$ em $(0,L)$. Note que devido a condição $1 < p+1 < 2$, temos que $I_\lambda(tz) < 0$ para qualquer $z \neq 0$ e $t > 0$ suficientemente pequeno. Logo, $z_0 \neq 0$. Finalmente, podemos verificar que o princípio do máximo forte em [[31] Teorema 5.4.1] aplica-se no caso da equação (4.22). Concluímos que $z_0 > 0$ em $(0,L)$, então z_0 é uma solução (fraca) positiva do problema (2.17). □

4.2 Prova do Teorema 3

A seguir, consideraremos $\widehat{\lambda} \in (0, \lambda^*]$, a ser escolhido posteriormente. Para $\lambda \in (0, \widehat{\lambda}]$, a primeira solução u_λ do problema (2.17) é dado pelo Teorema 2. Agora, segundo [15], vamos construir uma segunda solução da forma $v_\lambda = u_\lambda + z_\lambda$, onde z_λ satisfaz

$$\begin{cases} -\left(\mu(s)w'(s)\right)' = \mu(s)r(s)^{2(N-1)}g_\lambda(r(s), w(s)) \quad \text{em} \quad \left(0, \dfrac{1}{N-2}\right), \\ z\left(\dfrac{1}{N-2}\right) = 0, \quad z'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.23)$$

onde $g_\lambda(s,t) := f_\lambda\left(r(s), u_\lambda(s) + t^+\right) - f_\lambda\left(r(s), u_\lambda(s)\right)$. Defina o operador $\Psi : \overline{\mathcal{C}} \to \overline{\mathcal{C}}$ por

$$\Psi(z)(\tau) := \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t)\left(\int_0^t \beta(s)g_\lambda(s, z(s))ds\right)dt.$$

Observe que para $z \in \overline{\mathcal{C}}$ e $\tau \in \left(0, \frac{1}{N-2}\right)$ temos

$$\begin{aligned}
\Psi(z)(\tau) &= \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left\{ \left(\int_0^t \beta(s) \int_0^1 \left[\left(q\lambda\tilde{a}(s) \left| u_\lambda(s) + lz(s) \right|^{q-1} + p\tilde{b}(s) \left| u_\lambda(s) + lz(s) \right|^{p-1} \right) z(s) \right] dl \right) ds \right\} dt \\
&\geq \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left\{ \left(\int_0^t \beta(s) \int_0^1 \left[p\tilde{b}(s) \left| u_\lambda(s) \right|^{p-1} z(s) \right] dl \right) ds \right\} dt \\
&= \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \left[p\beta(s) \left| u_\lambda(s) \right|^{p-1} z(s)\tilde{b}(s) \right] ds \right) dt \\
&\geq \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} p\alpha(t) \left| u_\lambda(t) \right|^{p-1} \left(\int_0^t [\beta(s)\tilde{b}(s)z(s)] ds \right) dt \\
&\geq \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} p\alpha(t) \left| u_\lambda(t) \right|^{p-1} z(t) \left(\int_0^t \beta(s)\tilde{b}(s) ds \right) dtdt. \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

Definindo $\tilde{\phi}_\lambda \in C^1 \left(\left[0, \frac{1}{N-2}\right] \right)$ como

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_\lambda(t) &= \exp\left(-\lambda^{1+q} \int_0^t p\alpha(s) \left| u_\lambda(s) \right|^{p-1} \left(\int_0^s \beta(l)\tilde{b}(l) dl \right) ds \right) \\
&\quad - \exp\left(-\lambda^{1+q} \int_0^{\frac{1}{N-2}} p\alpha(s) \left| u_\lambda(s) \right|^{p-1} \left(\int_0^s \beta(l)\tilde{b}(l) dl \right) ds \right)
\end{aligned}$$

vemos que $\Psi(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{Q}$, onde

$$\mathcal{Q} = \left\{ z \in \overline{\mathcal{C}} : h(\lambda) \geq z(t) \geq \tilde{\phi}_\lambda(t) \quad \text{para todo} \quad t \in \left[0, \frac{1}{N-2}\right] \right\},$$

com h uma função contínua que será especificada posteriormente.

Observe também que, $\mathcal{Q}$ é um subconjunto limitado, fechado e convexo de $\overline{\mathcal{C}}$. Adicionalmente, para $0 < \lambda < \lambda^*$ suficientemente pequeno, temos que

$$\begin{aligned}
\Psi(z)(\tau) &= \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s)\lambda\tilde{a}(s)(|u_\lambda(s) + z(s)|^{q-1}) \left(u_\lambda(s) + z(s) \right) - u_\lambda(s)^q) ds \right) dt \\
&\quad + \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s)\tilde{b}(s)(|u_\lambda(s) + z(s)|^{p-1}) \left(u_\lambda(s) + z(s) \right) - u_\lambda(s)^p) ds \right) dt \\
&=: E + F.
\end{aligned}$$

Vamos analisar os termos E e F. Para E, temos

$$\begin{aligned}
E &\leq \lambda \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s)\tilde{a}(s) \left((u_\lambda(s) + z(s))^q + u_\lambda(s)^q \right) ds \right) dt \\
&\leq \lambda \int_0^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s)\tilde{a}(s) \left((\lambda + h(\lambda))^q + \lambda^q \right) ds \right) dt \\
&= \lambda \left((\lambda + h(\lambda))^q + \lambda^q \right) G_{\tilde{a}} \left(\frac{1}{N-2} \right) \\
&=: \lambda \left((\lambda + h(\lambda))^q + \lambda^q \right) E_0, \quad \text{com} \quad E_0 = G_{\tilde{a}} \left(\frac{1}{N-2} \right).
\end{aligned}$$

Enquanto isso, F satisfaz

$$\begin{aligned}
F &= \int_{\tau}^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s)\tilde{b}(s) p \left[\int_0^1 |u_\lambda(s) + lz(s)|^{p-1} z(s) dl \right] ds \right) dt \\
&\leq p \int_0^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t r(s)^{2(N-1)} \tilde{b}(s) \left(u_\lambda(s) + z(s) \right)^{p-1} z(s) ds \right) dt \\
&\leq p(\lambda + h(\lambda))^{p-1} h(\lambda) G_{\tilde{b}} \left(\frac{1}{N-2} \right) \\
&=: (\lambda + h(\lambda))^{p-1} h(\lambda) F_0, \quad \text{com} \quad F_0 = p G_{\tilde{b}} \left(\frac{1}{N-2} \right).
\end{aligned}$$

4.2.1 Caso (i) $0 < q < 1 < p$

Consideremos a função $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$, desta forma, h satisfaz

$$\lambda \left((\lambda + h(\lambda))^q + \lambda^q \right) E_0 \leq \frac{h(\lambda)}{2}$$

e

$$(\lambda + h(\lambda))^{p-1} h(\lambda) F_0 \leq \frac{h(\lambda)}{2}.$$

A segunda desigualdade significa que $(\lambda + h(\lambda))^{p-1} F_0 \leq \frac{1}{2}$, o que é possível desde que $h(0) = 0$ e λ suficientemente pequeno. Definimos a função h como a solução da igualdade $\lambda \left((\lambda + h(\lambda))^q + \lambda^q \right) E_0 = \frac{h(\lambda)}{2}$. Assim, $h(\lambda) = \lambda h_1^{-1} \left(2\lambda^q E_0 \right)$, onde $h_1(t) = \frac{t}{(1+t)^q + 1}$, verifica a primeira desigualdade.

Vamos provar que $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. De fato, observe que, após cálculos simples, obtemos

$$\tilde{\phi}_\lambda(t) \leq \tilde{h}(\lambda) := 1 - \exp \left(-\lambda^{p+q} p G_{\tilde{b}} \left(\frac{1}{N-2} \right) \right), \quad \forall t \in \left[0, \frac{1}{N-2} \right].$$

Assim, resta-nos provar que

$$\tilde{h}(\lambda) \leq h(\lambda) = \lambda h_1^{-1} \left(2\lambda^q E_0 \right)$$

para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Ou seja,

$$h_1 \left(\frac{\tilde{h}(\lambda)}{\lambda} \right) \leq 2\lambda^q E_0,$$

ou ainda

$$\frac{\frac{\tilde{h}(\lambda)}{\lambda}}{\left(1 + \frac{\tilde{h}(\lambda)}{\lambda} \right)^q + 1} \leq 2\lambda^q E_0.$$

Afirmação: A desigualdade acima é válida se

$$\frac{1 - \exp \left(-\lambda^{p+q} p G_{\tilde{b}} \left(\frac{1}{N-2} \right) \right)}{\lambda^{1+q}} = \frac{\tilde{h}(\lambda)}{\lambda^{1+q}} \leq 2E_0, \tag{4.25}$$

para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.
De fato, pela regra de L'Hôpital, obtemos

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{1 - \exp\left(-\lambda^{p+q} p G_{\tilde{b}}\left(\frac{1}{N-2}\right)\right)}{\lambda^{1+q}}$$
$$= \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{(p+q)\lambda^{p+q-1} p G_{\tilde{b}}\left(\frac{1}{N-2}\right) \exp\left(-\lambda^{p+q} p G_{\tilde{b}}\left(\frac{1}{N-2}\right)\right)}{(1+q)\lambda^q} = 0.$$

Mostrando que (4.25) é verdadeira e isso implica $\tilde{\phi}_\lambda(t) \leq h(\lambda)$ para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

Assim, existe $\widehat{\lambda} \in (0, \lambda^*]$ tal que $E + F \leq h(\lambda)$ para qualquer $0 < \lambda \leq \widehat{\lambda}$ e $\Psi(z) \in \mathcal{Q}$ para qualquer $z \in \mathcal{Q}$. Portanto, aplicando novamente o Teorema 4 página 15 obtemos uma solução positiva z_λ de (4.23), ou seja, v_λ é uma segunda solução do Problema (2.17). Pela definição de u_λ e h, temos

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|v_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus B_1)} = 0. \qquad \square$$

4.2.2 Caso (ii) $0 < q < 1 = p$

Como $b \in \mathcal{B}$, temos $G_{\tilde{b}}\left(\frac{1}{N-2}\right) = F_0 < 1$. Aqui, definimos a função h como a solução da igualdade $\lambda\left((\lambda + h(\lambda))^q + \lambda^q\right) E_0 = (1 - F_0)\, h(\lambda)$. Assim, $h(\lambda) = \lambda h_1^{-1}\left(\dfrac{\lambda^q E_0}{1 - F_0}\right)$ verifica $E + F \leq h$. O restante do argumento segue como no Caso (i) para provar que $\tilde{\phi}_\lambda(t) \leq h(\lambda)$ para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno.

Desta forma, como no caso anterior, existe $\widehat{\lambda} \in (0, \lambda^*]$ tal que para qualquer $\lambda \in (0, \widehat{\lambda})$, o Problema (2.17) tem uma segunda solução verificando

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \|v_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus B_1)} = 0. \qquad \square$$

4.3 Alcance de Λ

4.3.1 *Demonstração da Proposição* 1

Observe que o intervalo de existência no Teorema 2 é um intervalo limitado. Definindo

$$\Lambda := \sup\{\lambda > 0 : \text{O Problema (2.17) tem uma solução positiva }\}.$$

Afirmação: $\lambda^* \leq \Lambda < \infty$. De fato, pela definição, temos que $\lambda^* \leq \Lambda$. Por outro lado, argumentando por contradição, suponha que $\Lambda = \infty$ e defina $\lambda_1 := \lambda_1(\delta)$ como o primeiro autovalor do problema

$$\begin{cases} -\left(\mu(s)z'(s)\right)' = \lambda_1\beta(s)\delta(s)z(s) \quad \text{em} \quad \left(0, \dfrac{1}{N-2}\right), \\ z\left(\dfrac{1}{N-2}\right) = 0, \quad z'(0) = 0, \end{cases}$$

onde $\delta(s) := \min\{\tilde{a}(s), \tilde{b}(s)\}$. Então, podemos escolher $\lambda_1 < \tilde{\lambda}$ e $0 < \lambda$ grande o suficiente para que (2.17) tenha uma solução positiva u_λ e

$$f_\lambda\left(r(s), u_\lambda(s)\right) \geq \widetilde{\lambda}\delta(s)u_\lambda. \tag{4.26}$$

Verifiquemos a desigualdade (4.26) para o caso (i), pois o caso (ii) é trivial. Considerando $0 < q < 1 < p$, defina

$$P(t) = \lambda t^q + t^p.$$

Vamos mostrar que existe uma constante $C_\lambda > 0$ tal que

$$P(t) \geq C_\lambda t \quad \text{para} \quad t > 0.$$

Defina a função $Q(t) = P(t)t^{-1}$. Então $Q(t) \to \infty$ quando $t \to 0^+$e quando $t \to \infty$. O valor mínimo é $Q\left(t_0\right) = C_\lambda$, onde $t_0 > 0$ é dado por

$$t_0 = \left(\frac{\lambda(1-q)}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

Note que t_0 aumenta quando λ aumenta, e a constante C_λ tem o mesmo comportamento em relação a λ. Assim, é possível escolher λ suficientemente grande tal que

$$f_\lambda\left(r(s), u_\lambda(s)\right) \geq \delta(s)\left[\lambda\left(u_\lambda(s)\right)^q + \left(u_\lambda(s)\right)^p\right] \geq C_\lambda\delta(s)u_\lambda(s) \geq \widetilde{\lambda}\delta(s)u_\lambda(s).$$

Agora, usando o problema do autovalor

$$\begin{cases} -\left(\mu(s)z'(s)\right)' = \widetilde{\lambda}\beta(s)\delta(s)z(s) \quad \text{em} \quad \left(0, \dfrac{1}{N-2}\right), \\ z\left(\dfrac{1}{N-2}\right) = 0, \quad z'(0) = 0. \end{cases} \tag{4.27}$$

Consideremos o operador associado $\varepsilon : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, onde $\mathcal{P}$ denota o cone de funções não negativas $u \in C\left(\left[0, \frac{1}{N-2}\right]\right)$, dado por

$$\varepsilon(z)(\tau) = \tilde{\lambda}\int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t)\left(\int_0^t \beta(s)\delta(s)(s)z(s)ds\right)dt.$$

Não é difícil provar que ε é um operador compacto e crescente no Espaço de Banach $C\left(\left[0, \frac{1}{N-2}\right], \|.\|_\infty\right)$ dotado da relação de ordem usual, dada por $u \leq v$ se, e somente se,

$$u(t) \leq v(t) \quad \text{para qualquer} \quad t \in \left[0, \frac{1}{N-2}\right].$$

Como $u'_\lambda\left(\frac{1}{N-2}\right) < 0$ e $\psi'_1\left(\frac{1}{N-2}\right) < 0$, para $0 < \epsilon$ suficiente pequeno e tomando ψ_1 como a autofunção positiva associada a λ_1, temos que

$$\varepsilon\psi_1(t) < u_\lambda(t), \qquad \text{para todo} \qquad t \in \left(0, \frac{1}{N-2}\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\varepsilon\left(\epsilon\psi_1\right)(\tau) &= \widetilde{\lambda}\epsilon \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t)\left(\int_0^t \beta(s)\delta(s)\psi_1(s)ds\right)dt \\
&= \frac{\widetilde{\lambda}}{\lambda_1}\epsilon\left(\lambda_1 \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t)\left(\int_0^t \beta(s)\delta(s)\psi_1(s)ds\right)dt\right) \\
&= \frac{\widetilde{\lambda}}{\lambda_1}\epsilon\psi_1(\tau) \\
&\geq \epsilon\psi_1(\tau),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varepsilon\left(u_\lambda\right)(\tau) &= \widetilde{\lambda} \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t)\left(\int_0^t \beta(s)\delta(s)u_\lambda(s)ds\right)dt \\
&= \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t)\left(\int_0^t \beta(s)\widetilde{\lambda}\delta(s)u_\lambda(s)ds\right)dt \\
&\leq \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t)\left(\int_0^t \beta(s)f_\lambda\left(r(s), u_\lambda(s)\right)ds\right)dt \\
&= \left(\mathcal{T}u_\lambda\right)(\tau) \\
&= u_\lambda(\tau).
\end{aligned}$$

Portanto, $\bar{u} = u_\lambda$ e $\underline{u} = \epsilon\psi_1$ são, respectivamente, super e sub-soluções do problema (4.27). Por [[2], Teorema 6.1] obtemos uma solução positiva do problema acima, o que é uma contradição com a definição de λ_1. Na verdade, observe que

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \int_0^L \beta(s)\delta(s)u_{\widetilde{\lambda}}\psi_1 ds &= -\int_0^L u_{\widetilde{\lambda}}\left(\mu(s)\psi'_1\right)' ds \\
&= -\int_0^L \left(\mu(s)u'_{\widetilde{\lambda}}\right)'\psi_1 ds \\
&= \widetilde{\lambda}\int_0^L \beta(s)\delta(s)u_{\widetilde{\lambda}}\psi_1 ds,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

e assim,

$$\left(\widetilde{\lambda} - \lambda_1\right)\int_0^L \beta(s)\delta(s)u_{\widetilde{\lambda}}\psi_1 ds = 0,$$

o que é uma contradição. □

4.3.2 Demonstração da Proposição 2

Considere,

$$\Lambda := \sup\{\lambda > 0 : \text{O problema (1.1) tem uma solução radial positiva}\},$$

daremos algumas condições para garantir que

$$\Lambda = \infty.$$

Suponhamos que $a + b \in \mathcal{B}, 0 < q < 1 = p$, e ϕ_λ conforme definido em (4.1), assim obtemos

$$G_{\tilde{a}}\left(\frac{1}{N-2}\right) + G_{\tilde{b}}\left(\frac{1}{N-2}\right) < 1. \tag{4.29}$$

Para cada $\lambda > 0$, Segue de (4.4) e (4.5) que,

$$\phi_\lambda(\tau) \leq \left[(1-q)G_{\tilde{a}}\left(\frac{1}{N-2}\right)\right]^{\frac{1}{1-q}} \lambda^{\frac{1}{1-q}} < \lambda^{\frac{1}{1-q}} \text{ para todo } \tau \in \left(0, \frac{1}{N-2}\right]. \tag{4.30}$$

Portanto, o conjunto $\mathcal{M}_1 := \left\{g \in \bar{C} : \phi_{\tilde{\lambda}}(\tau) \leq g(\tau) \leq \lambda^{\frac{1}{1-q}}\right\}$ está bem definido para cada $\lambda > 0$.

Lema 10 *Se (4.4), (4.5) e (4.29) ocorrem, λ e ϕ_λ satisfazem (4.30). Então,*

$$\mathcal{T}(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{M}_1,$$

para cada $\lambda > 0$, onde $\mathcal{M}_1$ foi definido acima.

Demonstração: Seja $z \in \mathcal{M}_1$, então $\phi_\lambda(\tau) \leq z(\tau) \leq \lambda^{\frac{1}{1-q}}$. Como (4.29) ocorre, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(z)(\tau) &:= \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s)\left[\lambda \tilde{a}(s) z(s)^q + \tilde{b}(s) z(s)\right] ds\right) dt \\
&\leq \lambda^{\frac{1}{1-q}} \int_0^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s)[\tilde{a}(s) + \tilde{b}(s)] ds\right) dt \\
&= \lambda^{\frac{1}{1-q}} \left(G_{\tilde{a}}\left(\frac{1}{N-2}\right) + G_{\tilde{b}}\left(\frac{1}{N-2}\right)\right) \\
&\leq \lambda^{\frac{1}{1-q}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(\mathcal{T}z)(\tau) \leq \lambda^{\frac{1}{1-q}}.$$

De (4.1) e o decrescimento de $\phi_\lambda(\cdot)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(z)(\tau) &:= \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s)\left[\lambda \tilde{a}(s) z(s)^q + \tilde{b}(s) z(s)\right] ds\right) dt \\
&\geq \phi_\lambda(\tau).
\end{aligned}$$

Logo, $(\mathcal{T}z)\left(\frac{1}{N-2}\right) = 0, \quad (\mathcal{T}z)'(\tau) \leq 0$ e

$$\phi_\lambda(\tau) \leq (\mathcal{T}z)(\tau) \leq \lambda^{\frac{1}{1-q}}.$$

Desta forma, para cada $\lambda > 0$ temos,

$$\mathcal{T}z \in \mathcal{M}_1. \qquad \square$$

Novamente, pelo pelo Teorema 4 página 15, obtemos a existência de um ponto fixo $z \in C\left(\left[0, \frac{1}{N-2}\right]; [0, \infty)\right)$ de $\mathcal{T}$. Isto é

$$z(\tau) = \int_\tau^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^t \beta(s) \left[\lambda \tilde{a}(s) z(s)^q + \tilde{b}(s) z(s) \right] ds \right) dt, \tag{4.31}$$

e isso completa a prova de existência de cada $\lambda > 0$. $\square$

REFERÊNCIAS

1 Salomón Alarcón, Anderson L. A. de Araujo, Luiz F.O. Faria, Leonelo Iturriaga, *On radial solutions for some elliptic equations involving operators with unbounded coefficients in exterior domains*, Topol. Methods Nonlinear Anal. (2022). DOI: 10.12775/TMNA.2022.026.

2 H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered banach spaces*, SIAM Rev. 18 (1976) 620-709.

3 A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (1994).

4 A. Ambrosetti, A. Malchiod, A. Others, *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, volume 104. Cambridge University Press, 2007.

5 M. B. L. Lorenzi, *Analytical methods for markov semigroups*, Pure Appl. Math. (Boca Raton) 283 (2007).

6 D. Bonheure, B. Noris, T. Weth, *Increasing radial solutions for neumann problems without growth restrictions*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 29 (2012) $573-588$.

7 H. Brezis, E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983) 486-490.

8 H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, New York Springer, 2011.

9 G. Cappa, *Maximal regularity for ornstein-uhlenbeck equation in convex sets of banach spaces*, J. Differential Equations 260 (2016) 8051-8071.

10 A. Chojnowska-Michalik, B. Goldys, *Generalized ornstein-uhlenbeck semigroups: Littlewood-paley-stein inequalities and the p. a. meyer equivalence of norms*, J. Funct. Anal. 182 (2001) 243-279.

11 M. Cranston, Z. Zhao, *Conditional transformation of drift formula and potential theory for* $\frac{1}{2}\delta + b(\cdot)\nabla$, Commun. Math. Phys. 112 (1987) 613-625.

12 D. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems. in: Guedes de figueiredo d., honig c.s. (eds) differential equations. lecture notes in mathematics*, Springer, Berlin, Heidelberg 957 (1982).

13 L. Figueroa, E. Süli, *Greedy approximation of high-dimensional ornstein-uhlenbeck operators*, Found. Comput. Math. 12 (2012) 573-623.

14 M. Geissert, H. Heck, M. Hieber, I. Wood, *The ornstein-uhlenbeck semigroup in exterior domains*, Arch. Math. 85 (2005) 554-562.

15 D. G. de Figueiredo, J.-P. Gossez, P. Ubilla, *Multiplicity results for a family of semilinear elliptic problems under local superlinearity and sublinearity*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 8 (2) (2006) 269-286.

16 T. Hansel, *On the navier-stokes equations with rotating effect and prescribed outflow velocity*, J. Math. Fluid Mech. 13 (2011) 405-419.

17 T. Hansel, A. Rhandi, *Non-autonomous ornstein-uhlenbeck equations in exterior domains*, Adv. Differential Equations 16 (2011) 201-220.

18 M. Hieber, O. Sawada, *The navier-stokes equations in $\mathbb{R}^n$ with linearly growing initial data*, Arch. Ration. Mech. Anal. 175 (2005) 269-285.

19 T. Hishida, *On the navier-stokes flow around a rigid body with a prescribed rotation*, Nonlinear Anal. 47 (2001) 4217-4231.

20 M. Jacobsen, *Laplace and the origin of the ornstein-uhlenbeck process*, Bernoulli 2 (3) (1996) 271-286.

21 Rodney Josué BIEZUNER, *Notas de Aula: Equações Diferenciais Parciais*, UFMG, 2005.

22 Rodney Josué BIEZUNER, *Notas de Aula: Autovalores do Laplaciano*, UFMG, 2006.

23 E. L. Lima, *Curso de Análise Volume 1*, Edição 14. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2017, 432 p.multiplicity

24 R. Ma, *On a conjecture concerning the of positive solutions of elliptic problems*, Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications 27 (1996) 775-780.

25 J. Mawhin, M. Willem, *Critical point theory and hamiltonian system*, Springer-Verlag, New York (1989).

26 G. Metafune, *l^p-spectrum of ornstein-uhlenbeck operators*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze Ser. 4, 30 (1) (2001) 97-124.

27 G. Metafune, J. Pruss, A. Rhandi, R. Schnaubelt, *The domain of the ornstein-uhlenbeck operator on an lp-space with invariant measure*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 1 (2002) 471-485.

28 G. Da Prato, B. Goldys, *Elliptic operators on $\mathbb{R}^d$ with unbounded coefficients*, Journal of Differential Equations 172 (2001) 333-358.

29 G. D. Prato, A. Lunardi, *On the ornstein-uhlenbeck operator in spaces of continuous functions*, J. Funct. Anal. 131 (1995) 94-114.

30 E. Priola, *On a dirichlet problem involving an ornstein-uhlenbeck operator*, Potential Anal. 18 (2003) 251-287.

31 P. Pucci, J. Serrin, *The maximum principle, In: Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Birkhauser Verlag AG 73 (2007).

32 Bartle, R. G., *The Elements of Real Analysis* , John Wiley and Sons, New York, 1995.

5 APÊNDICE A

5.1 Condições suficientes em a e b

Como $\mu(t)$ é crescente, obtemos

$$\int_0^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t)\left(\int_0^{\tau} \beta(s)ds\right) d\tau \leq \frac{1}{N-2}\int_0^{\frac{1}{N-2}} a\left(((N-2)s)^{\frac{1}{2-N}}\right)((N-2)s)^{\frac{2(N-1)}{2-N}} ds.$$

Se colocarmos $a(r) = r^{\gamma} \quad ($ ou $b(r) = r^{\gamma})$:

(a) Note que

$$\left|\int_0^{\frac{1}{N-2}} a\left(((N-2)s)^{\frac{1}{2-N}}\right)((N-2)s)^{\frac{2(N-1)}{2-N}} ds\right| < \infty$$

é equivalente a

$$\left|\int_0^{\frac{1}{N-2}} s^{\frac{\gamma}{2-N}} s^{\frac{2(N-1)}{2-N}} ds\right| < \infty.$$

Isso é possível se

$$\frac{-\gamma - 2(N-1)}{N-2} > -1$$

ou

$$1 - \frac{2(N-1)}{N-2} > \frac{\gamma}{N-2}.$$

Ambas as desigualdades nos fonecem,

$$\gamma < -N.$$

Por outro lado, temos

$$-\int_0^{\frac{1}{N-2}} a(r(s))[(N-2)s]^{\frac{2(N-1)}{2-N}} ds = \int_{C_0}^{\infty} a(r)r^{N-1}dr.$$

Assim obtemos a desigualdade,

$$\gamma + N - 1 < -1.$$

Então, podemos assumir que $|x|^{-\gamma}a(|x|) < C$, com $\gamma < -N$, para $|x|$ suficientemente grande. Desta forma, o nosso operador estará bem definido.

(b) Se $\gamma < -N - 1$, obtemos

$$\int_0^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^{\tau} \beta(s) ds \right) d\tau < 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{N-2}} \alpha(t) \left(\int_0^{\tau} \beta(s) ds \right) d\tau &= \frac{1}{N-2} \int_0^{\frac{1}{N-2}} a \left(((N-2)s)^{\frac{1}{2-N}} \right) ((N-2)s)^{\frac{2(N-1)}{2-N}} ds \\
&= \frac{1}{N-2} \int_0^{\frac{1}{N-2}} s^{\frac{\gamma}{2-N}} s^{\frac{2(N-1)}{2-N}} ds \\
&= \frac{1}{-\gamma - N} \left(\frac{1}{N-2} \right)^{\frac{-\gamma-N}{N-2}} \\
&\leq \frac{1}{-\gamma - N} \\
&< 1,
\end{aligned}$$

se $\gamma < -N - 1$.

5.2 Espaços de Sobolev

Para o estudo desta Seção foi consultada a referência [22].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto. Definimos

$$W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in W^1(\Omega) : u \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para todo } i = 1, \ldots, n \right\}. \tag{5.1}$$

$W^{1,2}(\Omega)$ é claramente um espaço vetorial munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^2 + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2}. \tag{5.2}$$

Consideremos ainda o espaço vetorial,

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \text{ fecho de } C_0^\infty(\Omega) \text{ em } W^{1,2}(\Omega).$$

Os espaços vetoriais normados $W^{1,2}(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega)$ são espaços com produto interno dado por,

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)}. \tag{5.3}$$

Desta forma, a norma definida acima é induzida deste produto interno. Além disso, a norma $||u|| = (u, u)$ é equivalente à norma,

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} &= \left(\int_\Omega |u|^2 \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

5.2.1 Propriedades dos Espaços de Sobolev

Assumiremos os resultados a seguir sem demonstração (veja [21] para a demonstração destes resultados).

Teorema 13 *$W^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Em particular, $W_0^{1,2}(\Omega)$ também é um espaço de Hilbert.*

Teorema 14 *$C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ é denso em $W^{1,2}(\Omega)$. Se Ω é um aberto com fronteira de classe C^1, então $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$ é denso em $W^{1,2}(\Omega)$.*

Os seguintes resultados caracterizam o espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$:

Teorema 15 *Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$ satisfaz supp $u \subset\subset \Omega$, então $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.*
Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto com fronteira de classe C^1 e $u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, então $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ se,e somente se, $u = 0$ em $\partial\Omega$.

As propriedades de imersão compacta dos espaços de Sobolev são as que lhe conferem a sua grande utilidade. Recordamos os conceitos de *imersão contínua* e *imersão compacta:*

Definição 5.2.1 *Seja E um subespaço vetorial normado de um espaço normado F (ou seja, a norma em E não precisa necessariamente ser a norma induzida de F). Dizemos que a inclusão $E \subset F$ é uma **imersão** (contínua) se a aplicação inclusão $I : E \to F$ definida por $Ix = x$ for contínua. Denotamos este fato por*

$$E \hookrightarrow F.$$

*Se, além disso, a aplicação inclusão for compacta, dizemos que a imersão $E \hookrightarrow F$ é **compacta**. Denotaremos a imersão compacta de um espaço vetorial normado E em um espaço vetorial normado F por*

$$E \hookrightarrow\hookrightarrow F.$$

Como a aplicação inclusão é linear, o fato de existir uma imersão $E \hookrightarrow F$ é equivalente *à* existência de uma constante C tal que

$$||x||_F \leq C||x||_E \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Em particular, se (x_n) é uma sequência de Cauchy em E, então (x_n) também é uma sequência de Cauchy em F; logo, se $(x_n) \to x$ em E, então $(x_n) \to x$ em F também. É claro que se E tem a norma induzida de F, então a inclusão $E \subset F$ é uma imersão, com $C = 1$. Quando existe uma imersão $E \hookrightarrow F$, dizer que ela é compacta é equivalente a dizer que sequências limitadas de $(E, ||\cdot||_E)$ possuem subsequências convergentes em $(F, ||\cdot||_F)$.

Teorema 16 *(Teorema da imersão de Sobolev). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Então*

$$W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

*D*emonstração: Usando a norma equivalente introduzida acima, se $E = W^{1,2}(\Omega)$ ou se $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ temos

$$\|u\|_E = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \geq \|u\|_{L^2(\Omega)}. \qquad \square$$

Teorema 17 *(Teorema de Rellich–Kondrakhov). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^1. Então*

$$W^{1,2}(\Omega) \twoheadrightarrow L^2(\Omega),$$

se trocarmos $W^{1,2}$ por $W_0^{1,2}$, o resultado é válido para abertos arbitrários.

Teorema 18 *(Desigualdade de Poincaré). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(\frac{|\Omega|}{\omega_n} \right)^{1/n} ||\nabla u||_{L^2(\Omega)},$$

para todo $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (aqui ω_n é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$).

Observe que o Teorema 18 não é válido se trocarmos $W_0^{1,2}$ por $W^{1,2}$ porque as funções constantes pertencem a $W^{1,2}$ e não satisfazem a desigualdade de Poincaré (pois têm derivada nula).

5.3 O Espectro do Laplaciano

Para o estudo desta Seção foi consultada a referência [22].

5.3.1 Existência e Caracterização Variacional dos Autovalores do Laplaciano

Para o problema de Dirichlet, o espaço natural para aplicar o método variacional é $W_0^{1,2}(\Omega)$, enquanto que para o problema de Neumann trabalharemos em $W^{1,2}(\Omega)$. Examinaremos primeiro o problema de autovalor do laplaciano para condição de fronteira de Dirichlet.

Definição 5.3.1 *Dizemos que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é uma **solução fraca** para o problema de autovalor do laplaciano para condição de fronteira de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_\Omega uv \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{5.4}$$

Aceitaremos o seguinte resultado de regularidade sem demonstração.

Teorema 19 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado com fronteira de classe* C^∞. *Seja* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Se* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Teorema 20 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado. Então o problema de autovalor*

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{em } \Omega, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

possui um número infinito enumerável de autovalores

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_j \leq \ldots$$

tais que

$$\lambda_j \to \infty,$$

e autofunções $\{u_j\}$ *que constituem um sistema ortonormal completo para* $L^2(\Omega)$, *isto é,*

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. *Em particular,*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Além disso, para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *vale*

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}^2 .$$

*D*emonstração: Generalizando o princípio de Rayleigh, gostaríamos de obter o primeiro autovalor do laplaciano como o mínimo do funcional de Rayleigh:

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\langle -\Delta u, u \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

No entanto, nossas funções estão em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e em geral não possuem derivadas parciais de segunda ordem e portanto seus laplacianos não estão definidos. Porém, lembrando que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,2}(\Omega)$ e a primeira identidade de Green para funções em $C_0^\infty(\Omega)$ toma a forma

$$\langle -\Delta u, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega (-\Delta u)u = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla u\rangle - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \eta} = \langle \nabla u, \nabla u\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Consideramos o funcional $I : W_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2} = \frac{\langle \nabla u, \nabla u\rangle_{L^2(\Omega)}}{\langle u, u\rangle_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

Afirmamos que se

$$\lambda_1 = \inf_{u\in W_0^{1,2}(\Omega)\backslash\{0\}} I(u), \tag{5.5}$$

então existe $u \in W_0^{1,2}(\Omega),\ u \neq 0$, tal que

$$-\Delta u = \lambda_1 u,$$

ou seja, λ_1 é um autovalor do laplaciano. Para provar isso, observe em primeiro lugar que o funcional I é invariante por escala, no sentido de que $I(\alpha u) = I(u)$ para todo $\alpha \neq 0$, logo podemos considerar uma sequência minimizante $(u_k) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ que satisfaz $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$ para todo k. Em particular,

$$\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\Omega)} \to \lambda_1,$$

logo (u_k) é uma sequencia limitada em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Segue do Teorema de Rellich-Kondrakhov que, a menos de uma subseqüência, $u_k \to u$ em $L^2(\Omega)$ e, portanto, $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$, o que implica em particular que $u \neq 0$. Afirmamos que $u_k \to u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$. De fato, valem as identidades

$$\begin{aligned}
\|\nabla (u_k - u_l)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla (u_k + u_l)\|^2_{L^2(\Omega)} &= 2\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla u_l\|^2_{L^2(\Omega)}, \\
\|u_k - u_l\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_k + u_l\|^2_{L^2(\Omega)} &= 2\|u_k\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|u_l\|^2_{L^2(\Omega)} = 4.
\end{aligned}$$

A segunda identidade implica que $\|u_k + u_l\|^2_{L^2(\Omega)} \to 4$ quando $k, l \to \infty$. Usando a primeira identidade juntamente com a desigualdade

$$\|\nabla (u_k + u_l)\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \lambda_1 \|u_k + u_l\|^2_{L^2(\Omega)},$$

que segue da definição de λ_1, obtemos

$$\|\nabla(u_k - u_l)\|^2_{L^2(\Omega)} \le 2\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla u_l\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda_1 \|u_k + u_l\|^2_{L^2(\Omega)} \to 0$$

quando $k, l \to \infty$, isto é, (∇u_k) é uma seqüência de Cauchy em $L^2(\Omega)$, o que prova a afirmação. Segue que

$$\lambda_1 = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

e o Teorema de Poincaré implica que $\lambda_1 \neq 0$. Vamos denotar $u = u_1$. Para mostrar que u_1 é uma solução fraca de $-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1$, observe que para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ fixado temos

$$I(u_1 + tv) = \frac{\langle \nabla(u_1 + tv), \nabla(u_1 + tv)\rangle_{L^2(\Omega)}}{\langle (u_1 + tv), (u_1 + tv)\rangle_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + 2t\langle \nabla u_1, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)} + t^2\|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + 2t\langle u_1, v\rangle_{L^2(\Omega)} + t^2\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)}}$$

onde $|t|$ é suficientemente pequeno para que o denominador nunca se anule. Como u_1 é um mínimo para este funcional, segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{dI}{dt}(u + tv)\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{\left(2\langle \nabla u_1, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)} + 2t\|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\|u_1 + tv\|^2_{L^2(\Omega)} - \left(2\langle u_1, v\rangle_{L^2(\Omega)} + 2t\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\|\nabla(u_1 + tv)\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u_1 + tv\|^4_{L^2(\Omega)}}\right|_{t=0} \\
&= \frac{2\langle \nabla u_1, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} - 2\langle u_1, v\rangle_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_1\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u_1 + tv\|^4_{L^2(\Omega)}} \\
&= \frac{2\langle \nabla u_1, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)} - 2\lambda_1\langle u_1, v\rangle_{L^2(\Omega)}}{\|u_1 + tv\|^4_{L^2(\Omega)}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u_1 \cdot \nabla v = \lambda_1 \int_\Omega u_1 v$$

para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Suponha como hipótese de indução que obtivemos $(\lambda_1, u_1), \ldots, (\lambda_{j-1}, u_{j-1})$ satisfazendo

$$\begin{gathered}
u_i \in W_0^{1,2}(\Omega), \\
\lambda_1 \le \ldots \le \lambda_{j-1}, \\
-\Delta u_i = \lambda_i u_i \quad \text{em } \Omega,
\end{gathered}$$

e

$$\langle u_i, u_k\rangle_{L^2(\Omega)} = \delta_{ik}$$

para todos $1 \le i, k \le j$. Definimos

$$H_j = \left\{ v \in W_0^{1,2}(\Omega) : \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \text{ para } i = 1, \dots, j-1 \right\}.$$

Em outras palavras, H_j é o subespaço de Hilbert ortogonal ao subespaço de dimensão finita gerado pelas autofunções $u_1, \dots, u_{j-1}$. Defina

$$\lambda_j = \inf_{u \in H_j} I(u).$$

Como o ínfimo está tomado sobre um espaço menor, segue que

$$\lambda_j \geq \lambda_{j-1}.$$

Como H_j é um subespaço fechado de $W_0^{1,2}(\Omega)$ podemos repetir o mesmo argumento acima para obter $u_j \in H_j$ tal que $\|u_j\|_{L^2(\Omega)} = 1$, $\lambda_j = \|\nabla u_j\|^2_{L^2(\Omega)}$. E de forma análoga obtemos,

$$\int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla v = \lambda_j \int_\Omega u_j v$$

para todo $v \in H_j$ e a relação é trivialmente verdadeira para todo $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, já que u_j é ortogonal ao subespaço gerado por $u_1, \dots, u_{j-1}$. Portanto u_j é uma solução fraca de $-\Delta u = \lambda_j u$ em Ω.

Para ver que $\lambda_j \to \infty$, suponha por absurdo que $\lambda_j \to \lambda_0$. Então obtemos uma sequência $(u_j) \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ de autofunções associadas aos autovalores λ_k tais que $\|u_j\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e

$$\|\nabla u_j\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_j \to \lambda_0.$$

Em particular, podemos usar novamente o Teorema de Rellich-Kondrakhov para concluir que $u_j \to u$ em $L^2(\Omega)$. Mas isso é um absurdo, pois a seqüência (u_j) é ortonormal em $L^2(\Omega)$ e portanto satisfaz

$$\|u_k - u_l\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_l\|^2_{L^2(\Omega)} = 2.$$

Falta apenas provar os resultados de expansão. Para $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, escreva

$$\alpha_i = \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i,$$
$$w_k = v - v_k.$$

Para todo $i \leq k$ temos

$$\langle w_k, u_i \rangle = \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i, u_i \right\rangle = \langle v, u_i \rangle - \alpha_i = 0,$$

como u_i é solução fraca, para todo $i \leq k$ temos também

$$\langle \nabla w_k, \nabla u_i \rangle_{L^2(\Omega)} = \lambda_i \langle w_k, u_i \rangle_{L^2(\Omega)} = 0,$$

consequentemente, temos

$$\langle w_k, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle v, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle v_k, v_k \rangle_{L^2(\Omega)},$$
$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla v_k, \nabla v_k \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Da última identidade segue que

$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Pela definição de λ_k obtemos

$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_{L^2(\Omega)} \geq \lambda_{k+1} \langle w_k, w_k \rangle_{L^2(\Omega)},$$

logo,

$$\|w_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \langle w_k, w_k \rangle_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} \to 0.$$

Em particular, concluímos que

$$v = \lim v_k + \lim w_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i \quad \text{em } L^2(\Omega). \tag{5.6}$$

Para provar a segunda expansão, escreva

$$\nabla v_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \nabla u_i,$$

assim,

$$\|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \langle \nabla u_i, \nabla u_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \lambda_i \langle u_i, u_i \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \alpha_i^2.$$

Observe que,

$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla v_k, \nabla v_k \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = \|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)},$$

e como os λ_i são não-negativos, concluímos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2$ converge, de modo que

$$\|\nabla (w_k - w_l)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|\nabla (v_l - v_k)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=k+1}^{l} \lambda_i \alpha_i^2$$

e portanto (∇w_k) também é uma seqüência de Cauchy em $L^2(\Omega)$, ou seja, (w_k) converge em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Conseqüentemente, $w_k \to 0$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$, e assim,

$$\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} = \lim \|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega)} + 2 \lim \langle \nabla v_k, \nabla w_k \rangle + \lim \|\nabla w_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i^2.$$

Segue que (u_j) é uma seqüência ortonormal e o fecho do subespaço gerado por (u_j) é um espaço de Hilbert contendo $W_0^{1,2}(\Omega)$ contido em $L^2(\Omega)$. Como $\overline{W_0^{1,2}(\Omega)} = L^2(\Omega)$, concluímos que $\{u_j\}$ é um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$. □

Observação 12 *Segue deste teorema, em particular, que aquelas funções v em $L^2(\Omega)$ que não estão em $W_0^{1,2}(\Omega)$ podem ser caracterizadas pelo fato que $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}$ diverge.*

Observação 13 *Pelo Teorema 19, se $\partial\Omega$ for de classe C^∞, então as autofunções do problema de Dirichlet estão em $C^\infty(\bar{\Omega})$ e são soluções clássicas.*

Teorema 21 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Então o problema de autovalor*

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{em } \Omega, \quad u \in W^{1,2}(\Omega)$$

possui um número infinito enumerável de autovalores

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_j \leq \ldots$$

tais que

$$\lambda_j \to \infty,$$

e autofunções $\{u_j\}$ que satisfazem

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

e constituem um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$, isto é,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Em particular,

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle^2_{L^2(\Omega)}.$$

Além disso, para todo $v \in W^{1,2}(\Omega)$ vale

$$\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, u_i \rangle^2_{L^2(\Omega)} .$$

Na demonstração do Teorema 21 usamos o princípio de Rayleigh para obter o primeiro autovalor do laplaciano como o mínimo do funcional de Rayleigh. Como os autovalores do laplaciano formam uma seqüência infinita que cresce arbitrariamente em módulo, o funcional de Rayleigh para o laplaciano não possui um máximo. Entretanto, da mesma forma que no caso de operadores lineares em dimensão finita, podemos também derivar um princípio de minimax para obter os demais autovalores do laplaciano:

Teorema 22 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Sejam*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_j \leq \ldots$$

os autovalores do laplaciano com condição de Dirichlet:

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{em}\, \Omega, \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Então, se $\mathcal{L}_j$ denota o conjunto dos subespaços vetoriais de $W_0^{1,2}(\Omega)$ de dimensão j, temos

$$\lambda_j = \min_{L \in \mathcal{L}_j} \left(\max_{\substack{u \in L \\ \|u\|=1}} \langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)} \right) = \min_{L \in \mathcal{L}_j} \left(\max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} \frac{\langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} \right) \tag{5.7}$$

ou, dualmente,

$$\lambda_j = \max_{L \in \mathcal{L}_{j-1}} \left(\min_{\substack{u \perp L \\ \|u\|=1}} \langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)} \right) = \max_{L \in \mathcal{L}_{j-1}} \left(\min_{\substack{u \perp L \\ u \neq 0}} \frac{\langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} \right). \tag{5.8}$$

O resultado análogo vale para os autovalores do laplaciano com condição de Neumann trocando-se $W_0^{1,2}(\Omega)$ por $W^{1,2}(\Omega)$ e λ_j por λ_{j-1}.

*D*emonstração: Vimos na demonstração do Teorema 19 que se $L = \langle u_1, \ldots, u_{j-1} \rangle$ é o subespaço gerado pelas primeiras $j-1$ autofunções $u_1, \ldots, u_{j-1}$ do laplaciano, então

$$\lambda_j = \min_{\substack{u \perp L \\ u \neq 0}} \frac{\langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}};$$

de fato, o mínimo é realizado em $u = u_j$. Por outro lado, se $L' = \langle u_1, \ldots, u_j \rangle$ é o subespaço gerado pelas primeiras j autofunções $u_1, \ldots, u_j$ do laplaciano, também temos

$$\lambda_j = \max_{\substack{u \in L' \\ u \neq 0}} \frac{\langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

De fato, para todo u_i com $i < j$ vale

$$\frac{\langle \nabla u_i, \nabla u_i \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|u_i\|^2_{L^2(\Omega)}} = \lambda_i \leq \lambda_j,$$

enquanto que

$$\frac{\langle \nabla u_j, \nabla u_j \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|u_j\|^2_{L^2(\Omega)}} = \lambda_j.$$

Portanto, se $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in L'$, temos

$$\frac{\langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\langle \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)}}{\langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}} = \frac{\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \nabla u_i, \sum_{i=1}^{n} a_i \nabla u_i \right\rangle_{L^2(\Omega)}}{\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \right\rangle_{L^2(\Omega)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \langle \nabla u_i, \nabla u_i \rangle_{L^2(\Omega)}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \langle u_i, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2 \langle u_i, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \langle u_i, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}} \leq \lambda_j \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \langle u_i, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \langle u_i, u_i \rangle_{L^2(\Omega)}} = \lambda_j,$$

e o máximo é realizado em $u = u_j$.

Agora, para provar (5.7) , seja $L' \subset \mathcal{L}_j$ outro subespaço de $W_0^{1,2}(\Omega)$ de dimensão j, digamos $L' = \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$. Afirmamos que existe um vetor não nulo $v = \sum_{i=1}^{j} a_i v_i \in L'$ tal que $v \perp u_i$ para $i = 1, \ldots, j-1$. De fato, basta tomar uma das soluções não triviais do sistema homogêneo

$$\begin{cases} \langle v, u_1 \rangle = \sum_{i=1}^{j} a_i \langle v_i, u_1 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v, u_{j-1} \rangle = \sum_{i=1}^{j} a_i \langle v_i, u_{j-1} \rangle = 0 \end{cases}$$

que possui $j-1$ equações e j incógnitas. Logo, disso e do Teorema 21 segue que

$$\frac{\langle \nabla v, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, u_i \rangle^2_{L^2(\Omega)}}{\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\sum_{i=j}^{\infty} \lambda_i \langle v, u_i \rangle^2_{L^2(\Omega)}}{\sum_{i=j}^{\infty} \langle v, u_i \rangle^2_{L^2(\Omega)}} \geqslant \frac{\lambda_j \sum_{i=j}^{\infty} \langle v, u_i \rangle^2_{L^2(\Omega)}}{\sum_{i=j}^{\infty} \langle v, u_i \rangle^2_{L^2(\Omega)}} = \lambda_j,$$

e portanto

$$\max_{\substack{u\in L' \\ u\neq 0}} \frac{\langle \nabla u, \nabla u\rangle_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} \geqslant \lambda_j.$$

Isso prova (5.7).

Para provar a afirmativa dual (5.8), seja $L \subset \mathcal{L}_j$ um subespaço de $W_0^{1,2}(\Omega)$ de dimensão $j-1$, digamos $L = \langle v_1, \ldots, v_{j-1}\rangle$. Afirmamos que existe um vetor não nulo $v = \sum_{i=1}^{j} a_i u_i \perp L$, combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_j$. De fato, basta tomar uma das soluções não triviais do sistema homogêneo

$$\begin{cases} \langle v, v_1\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, v_1\rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v, v_{j-1}\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle u_i, v_{j-1}\rangle = 0 \end{cases}$$

que possui $j-1$ equações e j incógnitas. Então algum dos vetores $u_1, \ldots, u_j$ é perpendicular a L, digamos u_i. Logo, disso e do Teorema 19 segue que

$$\frac{\langle \nabla v, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)}}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle v, u_i\rangle^2_{L^2(\Omega)}}{\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i\rangle^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \left\langle \sum_{k=1}^{j} a_k u_k, u_i \right\rangle^2_{L^2(\Omega)}}{\sum_{i=1}^{\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{j} a_k u_k, u_i \right\rangle^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\sum_{i=1}^{j} a_i^2 \lambda_i \langle u_i, u_i\rangle^2_{L^2(\Omega)}}{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \langle u_i, u_i\rangle^2_{L^2(\Omega)}}$$

$$\leqslant \frac{\lambda_j \sum_{i=1}^{j} a_i^2 \langle u_i, u_i\rangle^2_{L^2(\Omega)}}{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \langle u_i, u_i\rangle^2_{L^2(\Omega)}} = \lambda_j,$$

e portanto

$$\min_{\substack{u\perp L \\ u\neq 0}} \frac{\langle \nabla u, \nabla u\rangle_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} \leqslant \lambda_j,$$

o que prova (5.8). □

5.4 Definições Preliminares

Definição 5.4.1 *Uma métrica num conjunto M é uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de elementos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:*

d1) $d(x, x) = 0$;

d2) Se $x \neq y$ *então* $d(x, y) > 0$;

d3) $d(x, y) = d(y, x)$;

d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Um espaço métrico é um par (M, d)*, onde* M *é um conjunto e* d *é uma métrica em* M.

Definição 5.4.2 *Seja* $\boldsymbol{E}$ *um Espaço Vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*. Uma* ***Norma*** *em* $\boldsymbol{E}$ *é uma função real* $|| \; || : \boldsymbol{E} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$*, que associa a cada vetor* $x \in \boldsymbol{E}$ *o número real* $||x||$*, chamado a norma de* x*, de modo a serem cumpridas as condições abaixo:*

(a) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ *para todos* $x \in \boldsymbol{E}, \lambda \in \mathbb{K}$;

(b) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *para todos* $x, y \in \boldsymbol{E}$;

(c) $||x|| = 0$ *implica* $x = 0$ *para todo* $x \in \boldsymbol{E}$.

A um Espaço Vetorial munido de uma norma chamamos ***Espaço Normado.***

Definição 5.4.3 *Uma seqüência* (x_k) *em* $\mathbb{R}^N$ *diz-se uma seqüência de Cauchy quando para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $k, r > k_0 \Rightarrow |x_k - x_r| < \epsilon$.

Definição 5.4.4 *Diz-se que o espaço métrico* M *é completo quando toda seqüência de Cauchy em* M *é convergente.*

Definição 5.4.5 *Um* ***Espaço de Banach*** *é um espaço normado que é completo com a métrica* d *dada por* $d(x, y) = ||x - y||$ *para* $x, y \in \boldsymbol{E}$*. Ou seja, é um espaço normado tal que toda seqüência de Cauchy no espaço considerado é convergente.*

Definição 5.4.6 *Chamase espaço de Hilbert a todo espaço vetorial* E*, munido de um produto interno* $\langle x, y \rangle$ *e completo relativamente à norma* $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Definição 5.4.7 *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^N$*. O segmento de reta de extremos* x, y *é o conjunto*

$$[x, y] = \{(1 - t)x + ty;\; 0 \leq t \leq 1\}.$$

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ *diz-se convexo quando contém qualquer segmento de reta cujos extremos pertençam a* X*, ou seja,* $x, y \in X \Rightarrow [x, y] \subset X$.

Definição 5.4.8 *Um subconjunto* $X \subset \mathbb{R}^N$ *diz-se limitado quando existe um número real* $c > 0$ *tal que* $|x| \leq c$ *para todo* $x \in X$*. Isto equivale a dizer que* X *está contido na bola fechada de centro na origem e raio* c*.*

Definição 5.4.9 *Seja X um subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$. Um ponto $a \in X$ chama-se um ponto interior a X quando é centro de alguma bola aberta contida em X, ou seja, quando existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow x \in X$.*
O interior de X é o conjunto $intX$, formado pelos pontos interiores a X.

Definição 5.4.10 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x; \delta) \subset X$.*

Definição 5.4.11 *Um ponto $a \in \mathbb{R}^N$ diz-se aderente a um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ quando é limite de uma seqüência de pontos desse conjunto.*
O conjunto dos pontos aderentes a X chama-se o fecho de X e é indicado com a notação $\overline{X}$.

Definição 5.4.12 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ chama-se fechado quando contém todos seus pontos aderentes, isto é, quando $X = \overline{X}$.*

Definição 5.4.13 *Diremos que um conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$ é compacto quando ele for limitado e fechado.*

Definição 5.4.14 *Seja $X \subset \mathbb{R}^N$. Uma cobertura de X é uma família $\mathcal{C} = \{C_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, tal que $C_\lambda \subset X$, para todo $\lambda \in \Lambda$, e $X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$.*
Se

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in \Delta} C_\lambda$$

onde $\Delta \subset \Lambda$, dizemos então que $\mathcal{C}' = \{C_\lambda, \lambda \in \Delta\} \subset \mathcal{C}$ é uma subcobertura, ou refinamento, de $\mathcal{C}$. Se $card(\Lambda) < \infty$, dizemos que a cobertura $\mathcal{C}$ é finita. Se os conjuntos C_λ são abertos, dizemos que a cobertura $\mathcal{C}$ é aberta.

Definição 5.4.15 *Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ é dito ser compacto se toda subcobertura $C_\lambda, \lambda \in \Lambda$, tal que*

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in \Delta} C_\lambda$$

admite um refinamento finito, isto é, existem índices $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$, tais que

$$X \subset C_{\lambda_1} \cup \cdots \cup C_{\lambda_N}.$$

Um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^N$ é dito ser compacto se toda cobertura aberta possui uma subcobertura finita.

Definição 5.4.16 *Dizse que um subconjunto S de um espaço topológico X é relativamente compacto quando seu fecho $\overline{S}$ é um subconjunto compacto de X.*

Definição 5.4.17 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que f é contínua no ponto $a \in X$ quando, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, se pode obter $\delta > 0$ tal que todo ponto $x \in X$ cuja distância ao ponto a seja menor do que δ é transformado por f num ponto $f(x)$ que dista de $f(a)$ menos que ϵ. Em linguagem simbólica*

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0;\ x \in X,\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Definição 5.4.18 *Uma aplicação $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$, definida em $X \subset \mathbb{R}^m$, diz-se uniformemente contínua quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, pode-se obter $\delta > 0$ tal que*

$$x, y \in X,\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Definição 5.4.19 *Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. Um conjunto E de aplicações $f : X \longrightarrow M$ diz-se eqüicontínuo no ponto $x_0 \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança V de x_0 em X tal que, para todo $x \in V, d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, qualquer que seja $f \in E$.*

Se E é eqüicontínuo no ponto x_0, então todas as aplicações $f \in E$ são contínuas no ponto x_0 e todo subconjunto de E é eqüicontínuo no ponto x_0.

Diz-se que um conjunto E de aplicações $f : X \longrightarrow M$ é eqüicontínuo quando E é eqüicontínuo em todos os pontos de X.

Se X também for um espaço métrico, um conjunto E de aplicações $f : X \longrightarrow M$ dirse-á uniformemente eqüicontínuo se, para cada $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$, $x, y \in X$, implique $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, qualquer que seja $f \in E$.

Definição 5.4.20 *Seja X um espaço métrico e suponha que $D \subset A \subset X$. Dizemos que D é denso em A se toda bola aberta centrada em elementos de A contém algum elemento de D. Observe que isso significa que todo elemento de A é aderente a D. Então, D é denso em A se $\overline{D} \supset A$.*

Um subconjunto $A \subset X$ é dito separável se possui um conjunto enumerável denso.

Definição 5.4.21 *Sejam X e Y espaços normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(X; Y)$ o espaço vetorial das aplicações lineares contínuas (ou limitadas) de X em Y. As operações de espaço vetorial em $\mathcal{L}(X; Y)$ são as usuais.*

Em particular, se $Y = \mathbb{K}$ denotaremos $\mathcal{L}(X; \mathbb{K})$ por X^*. Ou seja, X^* é o espaço de todos os funcionais lineares <u>contínuos</u> definidos em X. Note que X^* é sempre Banach, pois $\mathbb{K}$ é completo.

Definição 5.4.22 *Se X é um espaço normado, o dual (topológico) de X é o espaço de Banach $X^* \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mathcal{L}(X;\mathbb{K})$. O espaço vetorial dos funcionais lineres em X é chamado de dual algébrico de X e é denotado por $X^{\#}$.*

Definição 5.4.23 *Seja X um espaço normado. O bidual é o espaço de Banach $X^{**} \stackrel{\text{def}}{=\!=} (X^*)^*$.*

Definição 5.4.24 *Um espaço normado é reflexivo se a imersão canônica $i_X : X \longrightarrow X^{**}$ for sobrejetora.*