

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Luíz Guilherme Rezende Rodrigues

**MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO-COMUTATIVOS NAS TEORIAS DE
HOŘAVA-LIFSHITZ E RELATIVIDADE GERAL.**

Juiz de Fora
10 de junho de 2021

Luíz Guilherme Rezende Rodrigues

**MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO-COMUTATIVOS NAS TEORIAS DE
HOŘAVA-LIFSHITZ E RELATIVIDADE GERAL.**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Física, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Juiz de Fora

10 de junho de 2021

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Rezende Rodrigues, Luíz Guilherme.

MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO-COMUTATIVOS NAS TEORIAS
DE HOŘAVA-LIFSHITZ E RELATIVIDADE GERAL. / Luíz Guilherme
Rezende Rodrigues. – 10 de junho de 2021.

192 f. : il.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Tese – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas.
Programa de Pós-Graduação em Física, 10 de junho de 2021.

1. Não-comutatividade. 2. Modelos cosmológicos. 3. Expansão
acelerada. I. Oliveira Neto, Gil. Título.

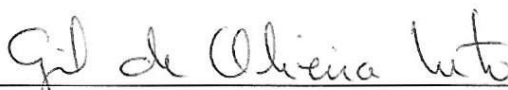
Luiz Guilherme Rezende Rodrigues

"Modelos Cosmológicos Não-Comutativos nas Teorias de Horava-Lifshitz e Relatividade Geral".

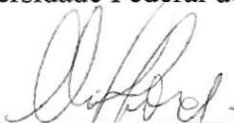
Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Doutor em Física. Área de Concentração: Física.

Aprovada em 11 de setembro de 2019.

BANCA EXAMINADORA



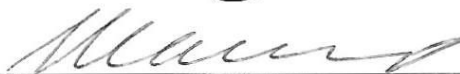
Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora



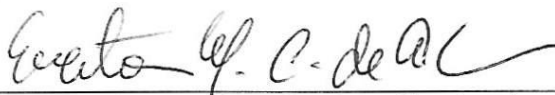
Prof. Dr. Clifford Neves Pinto
Universidade Estadual do Rio de Janeiro



Prof. Dr. Edison de Souza Moreira Junior
Universidade Federal de Itajubá



Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro
Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus por escrever tantas batalhas, vitórias e derrotas em minha vida que servem de aprendizado para que me torne cada vez mais gigante.
- Aos heróis de minha educação e meus grandes amores sem os quais não chegaria até aqui: Meu pai Luíz Guilherme de Oliveira Rodrigues, minha mãe Evanise de Souza Rezende e meu tio Éverson de Souza Rezende, que sempre deram prioridade a minha educação e meu estudo. Sempre insistentes e perseverantes me ensinando a ter humildade, paciência e caráter.
- Aos meus irmãos: Pedro Augusto Rezende Rodrigues e Lívia Rezende Rodrigues por todo o carinho e apoio.
- Ao professor Dr. Gil de Oliveira Neto que compartilhou de maneira brilhante todo seu conhecimento. Agradeço pela amizade, paciência, dedicação e pelo grande exemplo de profissional que é.
- A minha namorada que tanto amo e parceira de todas as horas Monise Menezes Furtado.
- Aos grandes amigos de graduação Alan Corrêa Diniz e Luiz Henrique de Carmo Castro, sem os quais não chegaria aqui.
- A todos os amigos que conquistei durante esta caminhada, que contribuíram direta ou indiretamente em minha vida pessoal e profissional.
- À Universidade Federal de Juiz de Fora, ao Programa de Pós-Graduação em Física, ao órgão financiador CAPES.

“...Muita gente riu de mim
Quando eu disse que podia fazer o que quisesse da minha vida
Foram muitos anos de vivência,
Muitos baldes de água fria na cabeça
Muitos goles a mais, alguns passos para trás
Só flagrando a cena
Eu aprendi o bastante pra poder sorrir
Pois ainda estou aqui, tentando conquistar o meu espaço
Com algumas dificuldades
Mas a cabeça não abaixo...”.

Charlie Brown Jr..

RESUMO

Na presente tese estudamos modelos cosmológicos clássicos não-comutativos do ponto de vista da teoria gravitacional de Hořava-Lifshitz e também da Relatividade Geral. Ambos os modelos foram estudados com a métrica Friedmann-Robertson-Walker, cujas seções espaciais podem ter curvatura constante positiva ($k = 1$), negativa ($k = -1$) ou zero ($k = 0$). O conteúdo material é descrito por diferentes fluidos perfeitos. A dinâmica dos modelos não-comutativos é descrita no formalismo Hamiltoniano, com o auxílio da formulação ADM e do formalismo variacional de Schutz. O espaço de fase dos modelos é dado pelas variáveis $a(t)$, $T(t)$, $P_a(t)$ e $P_T(t)$, em que $a(t)$ é o fator de escala do Universo, $T(t)$ é a coordenada associada ao fluido e $P_a(t)$, $P_T(t)$ seus respectivos momentos canonicamente conjugados. A introdução da não-comutatividade é feita através do formalismo de Faddeev-Jackiw. Esse formalismo introduziu de maneira natural transformações de coordenadas que nos levaram a variáveis comutativas, mais um parâmetro não-comutativo α . Combinando as equações de Hamilton, obtidas a partir da Hamiltoniana escrita em termos das variáveis comutativas, mais o parâmetro α , chegamos a uma equação diferencial de primeira ordem e uma equação diferencial de segunda ordem para o fator de escala $a(t)$. Tais equações descrevem a dinâmica dos modelos não-comutativos e dependem de vários parâmetros. Obtivemos soluções numéricas para essas equações. Com as soluções encontradas, estudamos as novas propriedades introduzidas pela não-comutatividade, com o objetivo de obter resultados que auxiliem na explicação da atual expansão acelerada do Universo. Além dos parâmetros comuns, as soluções não-comutativas apresentaram um parâmetro adicional α , em comparação com as soluções comutativas correspondentes. Tal parâmetro influencia de maneira significativa o tipo de comportamento de cada solução. Para determinados valores dos parâmetros envolvidos algumas soluções podem ser consideradas como possíveis candidatas à explicação da atual expansão do Universo. Finalmente, estimamos o valor do parâmetro não-comutativo α nos diferentes casos considerados.

Palavras-chave: Não-comutatividade. Modelos cosmológicos. Aceleração do Universo.

ABSTRACT

In the present thesis we study classical noncommutative cosmological models from the point of view of Horava-Lifshitz gravitational theory and also of General Relativity. Both models were studied with the Friedmann-Robertson-Walker metric, whose spatial sections can have positive ($k = 1$), negative ($k = -1$), or zero ($k = 0$) constant curvature. The material content is described by different perfect fluids. The dynamics of noncommutative models is described in Hamiltonian formalism, with the aid of the ADM formulation and Schutz's variational formalism. The phase space of the models is given by the variables $a(t)$, $T(t)$, $P_a(t)$ and $P_T(t)$, where $a(t)$ is the scale factor of the universe, $T(t)$ is the coordinate associated with the fluid, and $P_a(t)$, $P_T(t)$ their respective canonically conjugated moments. The introduction of noncommutativity is done through the Faddeev-Jackiw formalism. This formalism naturally introduced coordinate transformations that led us to commutative variables, plus a non-commutative parameter α . Combining the Hamilton equations, obtained from the Hamiltonian written in terms of commutative variables, plus the α parameter, we arrive at a first-order differential equation and a second-order differential equation for the scale factor $a(t)$. Such equations describe the dynamics of noncommutative models and depend on several parameters. We obtained numerical solutions for these equations. With the solutions found, we study the new properties introduced by noncommutativity, in order to obtain results that help explain the current accelerated expansion of the universe. In addition to the common parameters, non-commutative solutions have an additional α parameter compared to the corresponding commutative solutions. Such parameter significantly influences the type of behavior of each solution. For certain parameter values involved some solutions can be considered as possible candidates for the explanation of the current expansion of the universe. Finally, we estimate the value of the non-commutative parameter α in the different cases considered.

Key-words: Cosmological model. Noncommutativity. Acceleration of the Universe.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Potenciais das duas teorias.	69
Figura 2 – Fatores de escala correspondentes a Figura 1 e condições iniciais contidas na região $]0, a_{cr1}[$	69
Figura 3 – Fatores de escala correspondentes a Figura 1 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr2}, +\infty[$	70
Figura 4 – Potenciais das duas teorias.	70
Figura 5 – Fator de escala correspondente a Figura 4 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr1}, a_{ncr2}[$	70
Figura 6 – Fatores de escala correspondentes a Figura 4 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	71
Figura 7 – Potenciais das duas teorias.	72
Figura 8 – Fatores de escala correspondentes a Figura 7 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, a_{cr2}[$	72
Figura 9 – Fatores de escala correspondentes a Figura 7 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr3}, +\infty[$	73
Figura 10 – Potenciais das duas teorias.	73
Figura 11 – Fator de escala correspondente a Figura 10 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr1}, a_{ncr2}[$	73
Figura 12 – Fatores de escala correspondentes a Figura 10 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	74
Figura 13 – Potenciais das duas teorias.	75
Figura 14 – Fator de escala correspondente a Figura 13 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr1}, a_{ncr2}[$	75
Figura 15 – Potenciais das duas teorias.	75
Figura 16 – Fator de escala correspondente a Figura 15 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr2}, a_{ncr3}[$	75
Figura 17 – Potenciais das duas teorias.	76
Figura 18 – Fatores de escala correspondentes a Figura 17 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr2}, a_{cr3}[$	76
Figura 19 – Potenciais das duas teorias.	88
Figura 20 – Fator de escala correspondente a Figura 19 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr2}, a_{ncr3}[$	88
Figura 21 – Potenciais das duas teorias.	90
Figura 22 – Fatores de escala correspondentes a Figura 21 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr2}, a_{cr3}[$	90
Figura 23 – Potenciais das duas teorias.	99
Figura 24 – Fator de escala correspondente a Figura 23 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr2}, +\infty[$	99

Figura 25 – Potenciais das duas teorias.	100
Figura 26 – Fator de escala correspondente a Figura 25 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, \infty[$	100
Figura 27 – Potenciais das duas teorias.	101
Figura 28 – Fator de escala correspondente a Figura 27 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr1}, +\infty[$	101
Figura 29 – Potenciais das duas teorias.	102
Figura 30 – Fator de escala correspondente a Figura 29 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr1}, a_{ncr2}[$	102
Figura 31 – Fator de escala correspondente a Figura 29 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr3}, +\infty[$	102
Figura 32 – Potenciais das duas teorias.	103
Figura 33 – Fator de escala correspondente a Figura 32 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr3}, +\infty[$	103
Figura 34 – Potenciais das duas teorias.	104
Figura 35 – Fator de escala correspondente a Figura 34 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr2}, \infty[$	104
Figura 36 – Potenciais das duas teorias.	105
Figura 37 – Fatores de escala correspondentes a Figura 36 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr2}, a_{cr3}[$	105
Figura 38 – Potenciais das duas teorias.	105
Figura 39 – Fatores de escala correspondentes a Figura 38 e condições iniciais contidas na região $]0, a_{cr1}[$	105
Figura 40 – Fatores de escala correspondentes a Figura 38 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr2}, a_{cr3}[$	106
Figura 41 – Potenciais das duas teorias.	107
Figura 42 – Fatores de escala correspondentes a Figura 41 e condições iniciais contidas na região $]0, a_{cr1}[$	107
Figura 43 – Potenciais das duas teorias.	113
Figura 44 – Potenciais das duas teorias.	116
Figura 45 – Fatores de escala correspondentes a Figura 44 e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	116
Figura 46 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	117
Figura 47 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	117
Figura 48 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	118

Figura 49 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	118
Figura 50 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	119
Figura 51 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	121
Figura 52 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	121
Figura 53 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	122
Figura 54 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	122
Figura 55 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	123
Figura 56 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	123
Figura 57 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	124
Figura 58 – Potenciais das duas teorias.	126
Figura 59 – Fatores de escala para as duas teorias correspondentes a Figura 58 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	126
Figura 60 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	127
Figura 61 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	127
Figura 62 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	128
Figura 63 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	128
Figura 64 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	129
Figura 65 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	129
Figura 66 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	130
Figura 67 – Potenciais das duas teorias.	132
Figura 68 – Fatores de escala para as duas teorias correspondentes a Figura 67 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	132

Figura 69 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	133
Figura 70 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	133
Figura 71 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	134
Figura 72 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	134
Figura 73 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	135
Figura 74 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	137
Figura 75 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	137
Figura 76 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	138
Figura 77 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	138
Figura 78 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	139
Figura 79 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	139
Figura 80 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	140
Figura 81 – Potenciais das duas teorias.	142
Figura 82 – Fatores de escala para as duas teorias correspondentes a Figura 81 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	142
Figura 83 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	143
Figura 84 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	143
Figura 85 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	144
Figura 86 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	144
Figura 87 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	145
Figura 88 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$	145

Figura 89 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.	146
Figura 90 – Potenciais das duas teorias.	148
Figura 91 – Fatores de escala para as duas teorias correspondentes a Figura 67 e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	148
Figura 92 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	149
Figura 93 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	149
Figura 94 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	150
Figura 95 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	150
Figura 96 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	151
Figura 97 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	153
Figura 98 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	153
Figura 99 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	154
Figura 100 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	154
Figura 101 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	155
Figura 102 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	155
Figura 103 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	156
Figura 104 – Potenciais das duas teorias.	158
Figura 105 – Fatores de escala para as duas teorias correspondentes a Figura 104 e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	158
Figura 106 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	159
Figura 107 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	159
Figura 108 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.	160

Figura 109 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	160
Figura 110 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	161
Figura 111 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	161
Figura 112 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$	162
Figura 113 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de k	163
Figura 114 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de k	163
Figura 115 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de k	164
Figura 116 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de k	164
Figura 117 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de k	165
Figura 118 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de k	165

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resultados obtidos pelos modelos com matéria rígida, curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda > 0$ e combinações de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$, $\Omega > 0$.	63
Tabela 2 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de matéria rígida.	67
Tabela 3 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de matéria rígida.	68
Tabela 4 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 1 e 2.	69
Tabela 5 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 1 e 3.	70
Tabela 6 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 4 e 5.	71
Tabela 7 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 4 e 6.	71
Tabela 8 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 7 e 8.	72
Tabela 9 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 7 e 9.	73
Tabela 10 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 10 e 11.	74
Tabela 11 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 10 e 12.	74
Tabela 12 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 13 e 14.	75
Tabela 13 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 15 e 16.	76
Tabela 14 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 17 e 18.	76
Tabela 15 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com matéria rígida e radiação.	77
Tabela 16 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de radiação.	77
Tabela 17 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de radiação.	78
Tabela 18 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com Matéria Rígida e Radiação nos casos com curvatura negativa.	79
Tabela 19 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de radiação.	79
Tabela 20 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de radiação.	80
Tabela 21 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com radiação e poeira.	80
Tabela 22 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de poeira.	81
Tabela 23 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de poeira.	81
Tabela 24 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com radiação e poeira.	82

Tabela 25 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de poeira.	83
Tabela 26 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de poeira.	83
Tabela 27 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com matéria rígida, radiação e cordas cósmicas.	84
Tabela 28 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de cordas cósmicas.	84
Tabela 29 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de cordas cósmicas.	85
Tabela 30 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda < 0$ e combinações de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$, $g_s > 0$	86
Tabela 31 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com matéria rígida, radiação e cordas cósmicas.	87
Tabela 32 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de cordas cósmicas.	88
Tabela 33 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de cordas cósmicas.	88
Tabela 34 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 19 e 20.	89
Tabela 35 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 21 e 22.	90
Tabela 36 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com cordas cósmicas e paredes de domínio.	91
Tabela 37 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com matéria rígida, radiação, cordas cósmicas e constante cosmológica.	92
Tabela 38 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $\Omega > 0$ e fluido perfeito de constante cosmológica.	92
Tabela 39 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $\Omega < 0$ e combinações de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$, $g_s > 0$	93
Tabela 40 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com matéria rígida, radiação, cordas cósmicas e constante cosmológica.	96
Tabela 41 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $\Omega > 0$ e fluido perfeito de constante cosmológica.	97
Tabela 42 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $\Omega < 0$ e fluido perfeito de constante cosmológica.	97
Tabela 43 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 23 e 24.	100
Tabela 44 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 25 e 26.	100
Tabela 45 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 27 e 28.	101
Tabela 46 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 29 e 30.	102
Tabela 47 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 31.	103

Tabela 48 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 32 e 33.	103
Tabela 49 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 34 e 35.	104
Tabela 50 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 36 e 37.	105
Tabela 51 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 38 e 39.	106
Tabela 52 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 38 e 40.	106
Tabela 53 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 41 e 42.	107
Tabela 54 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 43.	113
Tabela 55 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 44 e 45.	116
Tabela 56 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 46.	117
Tabela 57 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 47.	117
Tabela 58 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 48.	118
Tabela 59 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 49.	118
Tabela 60 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 50.	119
Tabela 61 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 51.	121
Tabela 62 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 52.	121
Tabela 63 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 53.	122
Tabela 64 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 54.	122
Tabela 65 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 55.	123
Tabela 66 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 56.	123
Tabela 67 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 57.	124
Tabela 68 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 58 e 59.	126
Tabela 69 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 60.	127
Tabela 70 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 61.	127
Tabela 71 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 62.	128
Tabela 72 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 63.	128
Tabela 73 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 64.	129
Tabela 74 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 65.	129
Tabela 75 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 66.	130
Tabela 76 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 67 e 68.	132
Tabela 77 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 69.	133
Tabela 78 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 70.	133
Tabela 79 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 71.	134
Tabela 80 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 72.	134
Tabela 81 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 73.	135
Tabela 82 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 74.	137
Tabela 83 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 75.	137
Tabela 84 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 76.	138
Tabela 85 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 77.	138
Tabela 86 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 78.	139

Tabela 87 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 79.	139
Tabela 88 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 80.	140
Tabela 89 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 81 e 82.	142
Tabela 90 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 83.	143
Tabela 91 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 84.	143
Tabela 92 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 85.	144
Tabela 93 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 86.	144
Tabela 94 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 87.	145
Tabela 95 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 88.	145
Tabela 96 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 89.	146
Tabela 97 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 90 e 91.	148
Tabela 98 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 92.	149
Tabela 99 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 93.	149
Tabela 100 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 94.	150
Tabela 101 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 95.	150
Tabela 102 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 96.	151
Tabela 103 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 97.	153
Tabela 104 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 98.	153
Tabela 105 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 99.	154
Tabela 106 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 100.	154
Tabela 107 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 101.	155
Tabela 108 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 102.	155
Tabela 109 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 103.	156
Tabela 110 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 104 e 105.	158
Tabela 111 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 106.	159
Tabela 112 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 107.	159
Tabela 113 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 108.	160
Tabela 114 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 109.	160
Tabela 115 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 110.	161
Tabela 116 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 111.	161
Tabela 117 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 112.	162
Tabela 118 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 113.	163
Tabela 119 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 114.	163
Tabela 120 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 115.	164
Tabela 121 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 116.	164
Tabela 122 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 117.	165
Tabela 123 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 118.	165
Tabela 124 – Tabela com as estimativas para α e o tempo do Universo.	167

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

NC	Não-Comutatividade
HL	Hořava-Lifshitz
RG	Relatividade Geral
ADM	Arnowit-Deser-Misner
FJ	Faddeev-Jackiw
FRW	Friedmann-Robertson-Walker

Notações e Convenções:

No decorrer do presente texto será convencionado:

A derivada temporal de uma função $g(t)$ será representada por $\dot{g}(t)$.

Dois índices repetidos, sendo um subscrito e o outro sobrescrito, denotam soma.

Índices gregos variam de 0 a 3.

Índices latinos variam de 1 a 3.

O índice 0 representa no geral a coordenada temporal.

A métrica possui assinatura $(-, +, +, +)$.

O determinante da métrica é denotado por g .

A derivada parcial de um tensor T em relação a coordenada x^β é denotada por:

$$\frac{\partial T}{\partial x^\beta} = \partial_\beta T = T_{,\beta}$$

A derivada covariante de um tensor T em relação a coordenada x^β é denotada por:

$$\nabla_\beta T = T_{;\beta}$$

As constantes c e G são iguais a 1.

SUMÁRIO

1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	23
1.1	INTRODUÇÃO	23
1.2	UM BREVE HISTÓRICO	23
1.3	MOTIVAÇÃO	24
1.4	ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS	25
2	FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS	26
2.1	INTRODUÇÃO	26
2.2	COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA	26
2.2.1	O Universo de Friedmann-Robertson-Walker	26
2.2.2	Os espaços de FRW e sua geometria	27
2.2.2.1	<i>Caso $k = 1$</i>	<i>27</i>
2.2.2.2	<i>Caso $k = 0$</i>	<i>28</i>
2.2.2.3	<i>Caso $k = -1$</i>	<i>29</i>
2.3	TÓPICOS DA FORMULAÇÃO ADM	29
2.4	O FLUIDO PERFEITO	32
2.5	O FORMALISMO DE SCHUTZ NA REPRESENTAÇÃO DE POTEN- CIAIS VELOCIDADE	34
2.6	FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DO UNIVERSO FRW COM FLUIDO PERFEITO	35
2.6.1	Cálculo dos momentos canonicamente conjugados	36
2.7	O FORMALISMO DE FADDEEV-JACKIW	37
3	OS MODELOS COSMOLÓGICOS DE HOŘAVA-LIFSHITZ	40
3.1	INTRODUÇÃO	40
3.2	A TEORIA GRAVITACIONAL DE HL	40
3.3	AÇÃO DA TEORIA DE HL	41
3.4	EQUAÇÃO DE FRIEDMANN	43
3.5	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	43
4	OS MODELOS COSMOLÓGICOS DE HL NÃO-COMUTATIVOS	45
4.1	INTRODUÇÃO	45
4.2	APLICAÇÃO DO FORMALISMO DE FJ	45
4.3	NÃO-COMUTATIVIDADE DO TIPO $\sigma = \gamma = \chi = 0$	55
5	RESULTADOS OBTIDOS DOS MODELOS COSMOLÓGICOS DE HL NC's	57

5.1	INTRODUÇÃO	57
5.2	O FLUIDO PERFEITO NC	57
5.2.1	O fluido perfeito NC e o setor de matéria	58
5.2.1.1	<i>Matéria Rígida: $\omega = 1$</i>	58
5.2.1.2	<i>Radiação: $\omega = 1/3$</i>	59
5.2.1.3	<i>Poeira: $\omega = 0$</i>	59
5.2.1.4	<i>Cordas Cósmicas: $\omega = -1/3$</i>	59
5.2.1.5	<i>Paredes de Domínio: $\omega = -2/3$</i>	59
5.2.1.6	<i>Constante Cosmológica: $\omega = -1$</i>	59
5.3	SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	60
5.3.1	Matéria Rígida: $\omega = 1$	61
5.3.1.1	<i>Curvatura positiva $k = 1$</i>	61
5.3.1.1.1	Caso $g_\Lambda > 0$	62
5.3.1.1.2	Caso $g_\Lambda < 0$	66
5.3.1.2	<i>Curvatura negativa $k = -1$</i>	66
5.3.1.2.1	Caso $g_\Lambda > 0$	67
5.3.1.2.2	Caso $g_\Lambda < 0$	67
5.3.2	Radiação: $\omega = 1/3$	76
5.3.2.1	<i>Curvatura positiva $k = 1$</i>	76
5.3.2.1.1	Caso $g_\Lambda > 0$	77
5.3.2.1.2	Caso $g_\Lambda < 0$	77
5.3.2.2	<i>Curvatura negativa $k = -1$</i>	78
5.3.2.2.1	Caso $g_\Lambda > 0$	79
5.3.2.2.2	Caso $g_\Lambda < 0$	79
5.3.3	Poeira: $\omega = 0$	80
5.3.3.1	<i>Curvatura positiva $k = 1$</i>	80
5.3.3.1.1	Caso $g_\Lambda > 0$	81
5.3.3.1.2	Caso $g_\Lambda < 0$	81
5.3.3.2	<i>Curvatura negativa $k = -1$</i>	82
5.3.3.2.1	Caso $g_\Lambda > 0$	82
5.3.3.2.2	Caso $g_\Lambda < 0$	83
5.3.4	Cordas Cósmicas: $\omega = -1/3$	83
5.3.4.1	<i>Curvatura positiva $k = 1$</i>	83
5.3.4.1.1	Caso $g_\Lambda > 0$	84
5.3.4.1.2	Caso $g_\Lambda < 0$	85
5.3.4.2	<i>Curvatura negativa $k = -1$</i>	87
5.3.4.2.1	Caso $g_\Lambda > 0$	87
5.3.4.2.2	Caso $g_\Lambda < 0$	88
5.3.5	Paredes de Domínio: $\omega = -2/3$	90

5.3.6	Constante Cosmológica: $\omega = -1$	91
5.3.6.1	<i>Curvatura positiva $k = 1$</i>	91
5.3.6.1.1	Caso $\Omega > 0$	92
5.3.6.1.2	Caso $\Omega < 0$	92
5.3.6.2	<i>Curvatura negativa $k = -1$</i>	96
5.3.6.2.1	Caso $\Omega > 0$	96
5.3.6.2.2	Caso $\Omega < 0$	97
5.4	ESTIMATIVA DO PARÂMETRO NC	107
5.5	CONCLUSÃO	108
6	OS MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO-COMUTATIVOS EM RG	110
6.1	INTRODUÇÃO	110
6.2	OS MODELOS COSMOLÓGICOS DE RG NC's	110
6.3	METODOLOGIA	111
6.4	RESULTADOS OBTIDOS	112
6.4.1	Fluidos Fantasmas	113
6.4.1.1	<i>Curvatura nula $k = 0$</i>	114
6.4.1.1.1	Caso $\Lambda = 0$	114
6.4.1.1.2	Caso $\Lambda \neq 0$	120
6.4.1.2	<i>Curvatura positiva $k = 1$</i>	131
6.4.1.2.1	Caso $\Lambda = 0$	131
6.4.1.2.2	Caso $\Lambda \neq 0$	136
6.4.1.3	<i>Curvatura negativa $k = -1$</i>	147
6.4.1.3.1	Caso $\Lambda = 0$	147
6.4.1.3.2	Caso $\Lambda \neq 0$	152
6.4.1.4	<i>Diferentes curvaturas</i>	163
6.4.1.5	<i>Estimativa do parâmetro NC</i>	166
6.5	CONCLUSÃO	167
7	CONCLUSÃO	168
	REFERÊNCIAS	169
	APÊNDICE A – COMPLEMENTOS DO CAPÍTULO 3	173
A.1	ELEMENTOS DA AÇÃO	173
A.1.1	Parte cinética	173
A.1.2	Parte potencial	174
A.1.3	Ação completa	179

	APÊNDICE B – COMPLEMENTOS DO CAPÍTULO 4 . . .	180
B.1	A MATRIZ SIMPLÉTICA	180
B.2	OS PARÊNTESES DE POISSON	188
	APÊNDICE C – COMPLEMENTOS DO CAPÍTULO 5 . . .	190
C.1	CONSERVAÇÃO DE ENERGIA NOS MODELOS COSMOLÓGICOS COMUTATIVOS DE HL	190
C.2	O FLUIDO PERFEITO COM EQUAÇÃO DE ESTADO $p = \omega\rho$	191

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

1.1 INTRODUÇÃO

A presente tese apresenta como objetivo principal uma possível explicação para a atual expansão acelerada do Universo através da introdução e do estudo da Não-Comutatividade (NC). Esta NC será introduzida através de modelos cosmológicos baseados na teoria da gravitação de Hořava-Lifshitz (HL) e em Relatividade Geral (RG). É importante destacar que no presente trabalho foi aplicado pela primeira vez o método de introdução da NC considerado aqui, na teoria gravitacional de HL.

No primeiro momento da presente tese, será considerada que a interação gravitacional é descrita, mesmo que em baixas energias, pela teoria gravitacional de HL. Já no segundo momento, será considerada que a interação gravitacional é descrita pela RG. Através da introdução da NC, será buscada uma explicação em que não será usada algum tipo de conteúdo material que represente energia escura. A explicação aqui será dada a partir de deformações na álgebra dos parênteses de Poisson, entre as variáveis do espaço de fase, que descrevem o Universo. Para isso, será utilizado o formalismo de Faddeev-Jackiw (FJ ou formalismo simplético). Todos os resultados obtidos na presente tese deram origem aos artigos [1] e [2].

No presente capítulo são apresentados um breve histórico sobre a atual expansão acelerada do Universo e a origem da NC. Além disso, são citados alguns trabalhos onde a NC é aplicada em diversas áreas da física. Em seguida, são apresentadas as motivações para a introdução da NC. Para finalizar o presente capítulo é apresentado um pequeno resumo sobre a estrutura e as ideias dos capítulos seguintes.

1.2 UM BREVE HISTÓRICO

Em 1998, ocorreu uma grande descoberta em Cosmologia. Em uma série de observações de supernovas distantes duas equipes de astrônomos descobriram que nosso Universo está passando por uma fase de expansão acelerada [3, 4]. Se considerarmos que nosso Universo é tudo o que existe, essa descoberta significa que algum tipo desconhecido de substância, com propriedades muito incomuns deve existir em nosso Universo. Em vez de ser gravitacionalmente atrativa, como todas as outras substâncias conhecidas, essa substância deve ser repulsiva. Além disso, deve ser o tipo dominante de matéria presente no nosso Universo. Baseado na escala da aceleração observada em nosso Universo, a estimativa é que cerca de 70% do conteúdo total de matéria de nosso Universo é feito dessa substância desconhecida [5]. Desde então, muitos pesquisadores formularam propostas diferentes para essa substância desconhecida, também conhecida na literatura como energia escura. Entre eles, podemos citar alguns exemplos: Uma constante cosmológica positiva,

fluido fantasma, gás de Chaplygin, gás de Chaplygin generalizado, quintessência, quintom, k-essência [6].

Há muitos anos, a ideia de NC, a qual vem ganhando espaço atualmente, foi introduzida e logo adormecida. A ideia de NC teve início no decorrer da construção da mecânica quântica com Heisenberg ao estudar auto-energia do elétron [7]. Inicialmente a proposta era de considerar não nula a incerteza entre as coordenadas espaciais afim de remover singularidades presentes na teoria [8]. Algum tempo depois, W. Pauli comunicou essas ideias a Oppenheimer e esse se tornou um fato fundamental para a primeira publicação sobre NC entre as coordenadas do espaço-tempo [9]. O primeiro artigo sobre tal assunto foi publicado por Hartland S. Snyder (orientando de Oppenheimer) em 1947 [10]. Nele foi proposto uma NC entre as variáveis do espaço-tempo com a finalidade de eliminar divergências teóricas em teoria quântica de campos. A ideia de Snyder foi a base para uma posterior publicação de Yang [11]. Nela, Yang usou a NC em escalas pequenas de comprimento objetivando remover divergências em eletrodinâmica quântica. Com o desenvolvimento e o sucesso dos processos de renormalização [12], essas teorias NC foram esquecidas e ficaram adormecidas durante anos.

1.3 MOTIVAÇÃO

Atualmente, sabe-se que um dos maiores desafios da física teórica é a tentativa de unificação das teorias que governam o mundo microscópico (regido pela mecânica quântica) e o mundo macroscópico (descrito pela RG) [13]. Através da teoria das cordas, que é a grande candidata a unificar essas teorias, foram obtidos resultados em que a NC surge de maneira natural. Tais resultados vem fazendo com que os estudos de teorias NC's ganhe grandes proporções atualmente, além disso, indicam que essas teorias NC's podem assumir papéis importantes no auxílio da construção desta unificação [14].

O cenário atual das pesquisas relacionadas a teorias NC's é composto por várias obras de diversas áreas da física além da Cosmologia podendo ser citadas [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. A NC também passou a ser aplicada em alguns sistemas físicos como por exemplo o oscilador harmônico quântico, o efeito hall quântico, física de buracos negros [23], entre outros. O presente trabalho foi fundamentado e desenvolvido com o auxílio de algumas dessas obras. Através delas foram construídas as presentes teorias NC's. Como já mencionado, é importante destacar que a principal motivação, na presente tese, para a aplicação da NC em Cosmologia refere-se à atual expansão acelerada do Universo.

Acredita-se que o Universo em sua fase inicial pode ter apresentado propriedades muito diferentes das de hoje. Desta forma, uma maneira de introduzir a NC, e que será considerada na presente tese, seria a hipótese de que nesta fase inicial as coordenadas do espaço de fase que descrevem o Universo, satisfariam uma álgebra não-comutativa dos parênteses de Poisson. Assim, será suposto o fato de que algum vestígio desta NC

pode estar sendo mantido na fase atual do Universo, através de uma quantidade que será introduzida e denominada parâmetro não-comutativo (parâmetro NC). Tal parâmetro carregará toda a informação sobre a NC presente nos modelos cosmológicos. Com a teoria não-comutativa descrita em termos do parâmetro NC, serão comparadas as novas propriedades dos modelos cosmológicos NC's, com as propriedades dos modelos comutativos. Além disso, será estimado o valor do parâmetro NC. Para finalizar, serão verificados e discutidos como os resultados obtidos pela NC podem auxiliar na explicação da atual expansão acelerada do Universo.

1.4 ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS

No segundo capítulo, será apresentada uma breve revisão sobre a teoria da Cosmologia Relativística destacando seus resultados mais importantes para o desenvolvimento da presente tese. Além disso, serão destacados alguns tópicos fundamentais dos formalismos necessários para o desenvolvimento dos modelos NC's. São eles: O formalismo ADM, o formalismo variacional de Schutz e o formalismo de Faddeev-Jackiw.

No terceiro capítulo, será apresentada e desenvolvida a teoria para os modelos cosmológicos comutativos no contexto da gravitação de HL.

No quarto capítulo, será desenvolvida a teoria para os modelos cosmológicos de HL NC's utilizando os formalismos desenvolvidos no Capítulo 2.

No quinto capítulo, são apresentados os resultados obtidos referentes aos modelos cosmológicos de HL NC's. Nestes resultados, será introduzido a noção do fluido perfeito não-comutativo (fluido perfeito NC), comparada a teoria NC com a teoria comutativa e feita uma estimativa para o parâmetro NC, utilizando dados observacionais recentes. A discussão de tais resultados serão baseadas na possível explicação da expansão atual do Universo.

No sexto capítulo, é desenvolvida a teoria para os modelos de RG NC's e apresentados os resultados obtidos. Nestes resultados, será comparada a teoria NC com a teoria comutativa e feita uma estimativa para o parâmetro NC, utilizando dados observacionais recentes. A discussão de tais resultados serão baseadas na possível explicação da expansão atual do Universo.

Para finalizar, no último capítulo da presente tese, serão destacados os principais resultados obtidos.

2 FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

2.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo é a base teórica para o desenvolvimento da presente tese. Nele será apresentada uma breve revisão sobre a Cosmologia. Também serão apresentados alguns resultados importantes introduzidos pelo formalismo ADM, fluido perfeito, formalismo de Schutz e formalismo de FJ que serão utilizados nos capítulos seguintes para a construção dos modelos cosmológicos NC's.

2.2 COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA

O avanço da Cosmologia moderna na busca de informações sobre a descrição do Universo se deu após o desenvolvimento da RG e seu reconhecimento por parte da comunidade científica.

Atualmente a Cosmologia se encontra fundamentada sobre dois princípios básicos. O primeiro, denominado princípio cosmológico, propõe que o Universo em grande escala apresenta o mesmo aspecto em todos os pontos. Isso quer dizer que suas propriedades não são diferentes em nenhum ponto. Logo, o Universo deve ser homogêneo (a geometria do Universo é a mesma em qualquer ponto) e isotrópico (a geometria do Universo é invariante sob rotações ou seja, possui simetria esférica ao redor de qualquer um de seus pontos) [24]. O segundo princípio refere-se na maneira de representar o substrato no qual ocorrem os fenômenos físicos. O princípio de Weyl propõe um Universo equivalente a um fluido perfeito, sob boa aproximação, com o seguinte tensor momento-energia na forma contravariante [24],

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

em que U^μ é a quadri-velocidade do fluido perfeito, ρ sua densidade e p sua pressão. A homogeneidade e isotropia impostas pelo princípio cosmológico implicam que a pressão p e a densidade ρ devem possuir apenas dependência temporal. Estas dependências serão omitidas por questões de simplicidade.

2.2.1 O Universo de Friedmann-Robertson-Walker

Uma consequência importante imposta pela homogeneidade e isotropia do princípio cosmológico leva a espaços-tempos com métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Nestes modelos as seções espaciais tridimensionais tem curvatura constante representadas pelo parâmetro k . A constante de curvatura k pode assumir os valores $0, +1, -1$.

O elemento de linha das seções espaciais tridimensionais dos modelos de FRW pode ser obtido com a ajuda da seguinte equação para o tensor de Riemann, na presente

situação,

$$R_{abcd} = k (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}), \quad (2.2)$$

e o seguinte *ansatz* para a métrica das seções espaciais tridimensionais $d\sigma^2$,

$$d\sigma^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi). \quad (2.3)$$

Neste intervalo invariante, θ e ϕ são ângulos esféricos, r é o raio da esfera e $\lambda(r)$ é uma função radial a determinar. É importante destacar que usa-se a exponencial em (2.3) apenas para manter a função $e^{\lambda(r)}$ positiva.

Utilizando as equações (2.2) e (2.3) determina-se a função $\lambda(r)$ e então (2.3) assume a seguinte forma,

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi). \quad (2.4)$$

A consequência do princípio cosmológico de que todos os pontos do espaço devem se contrair ou expandir igualmente é introduzida através do fator de escala $a(t)$. O fator de escala é uma função com dependência temporal. Assim, basta multiplicar o intervalo invariante (2.4).

Finalmente, obtêm-se o seguinte intervalo invariante quadridimensional,

$$ds^2 = -dt^2 + [a(t)^2] \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi) \right\}. \quad (2.5)$$

Este é o denominado elemento de linha de FRW. A partir daqui, todos os cálculos realizados na presente seção serão baseados em (2.5).

2.2.2 Os espaços de FRW e sua geometria

Nesta subseção, serão exploradas as geometrias dos espaços referentes a cada valor de curvatura k considerando um valor constante para o tempo ($t = t_0$), dessa forma, será considerado que $a(t_0) = a_0$. Considerando apenas a parte espacial de (2.5) obtém-se,

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi) \right\}. \quad (2.6)$$

2.2.2.1 Caso $k = 1$

O elemento de linha espacial (2.6) fica:

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi) \right\}. \quad (2.7)$$

É importante destacar a singularidade $r \rightarrow 1$. A eliminação de tal singularidade é feita após a seguinte mudança de variável,

$$r = \text{sen}\chi. \quad (2.8)$$

Com a nova variável χ a parte espacial do elemento de linha (2.7) fica:

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left(d\chi^2 + \text{sen}^2 \chi \left[d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2 \right] \right). \quad (2.9)$$

Para entender a geometria deste espaço é conveniente introduzi-lo em um novo espaço euclidiano quadridimensional descrito pela equação,

$$d\sigma^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.10)$$

Tal introdução é feita de acordo com as seguintes transformações de coordenadas,

$$w = a_0 \cos \chi, \quad (2.11)$$

$$x = a_0 \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \quad (2.12)$$

$$y = a_0 \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \quad (2.13)$$

$$z = a_0 \sin \chi \cos \theta. \quad (2.14)$$

Por meio destas transformações de coordenadas obtém-se a seguinte equação [24],

$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a_0^2. \quad (2.15)$$

Esta equação descreve uma superfície esférica tridimensional com raio a_0 e intervalos de coordenadas $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Conclui-se então que o Universo com a curvatura $k = 1$ é descrito por uma superfície esférica. Tal Universo é denominado fechado [24].

2.2.2.2 Caso $k = 0$

O elemento (2.6) fica:

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left\{ dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi \right) \right\}. \quad (2.16)$$

Ao inserir as seguintes transformações de coordenadas,

$$x = a_0 r \text{sen} \theta \cos \phi, \quad (2.17)$$

$$y = a_0 r \text{sen} \theta \text{sen} \phi, \quad (2.18)$$

$$z = a_0 r \cos \theta, \quad (2.19)$$

obtém-se a seguinte equação,

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.20)$$

Esta equação descreve o espaço euclidiano tridimensional em coordenadas cartesianas. Então, a geometria representada pelo elemento de linha (2.16) é plana. Conclui-se então que o Universo com curvatura $k = 0$ é descrito por uma superfície plana. Tal Universo é denominado aberto [24].

2.2.2.3 Caso $k = -1$

O elemento de linha (2.6) fica:

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left\{ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right\}. \quad (2.21)$$

Introduzindo uma nova variável χ na forma,

$$r = \text{senh}\chi, \quad (2.22)$$

obtém-se a seguinte equação,

$$d\sigma^2 = [a_0]^2 \left(d\chi^2 + \text{senh}^2\chi [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2] \right). \quad (2.23)$$

Diferente do caso $k = 1$, a alternativa para entender a geometria deste espaço é introduzi-lo em um espaço plano de Minkowski quadridimensional descrito pela seguinte equação,

$$d\sigma^2 = -dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.24)$$

Esta introdução é feita de acordo com as seguintes transformações de coordenadas,

$$w = a_0 \cosh\chi, \quad (2.25)$$

$$x = a_0 \text{senh}\chi \text{sen}\theta \cos\phi, \quad (2.26)$$

$$y = a_0 \text{senh}\chi \text{sen}\theta \text{sen}\phi, \quad (2.27)$$

$$z = a_0 \text{senh}\chi \cos\theta. \quad (2.28)$$

Por meio destas transformações de coordenadas, obtém-se como equação [24],

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = a_0^2, \quad (2.29)$$

que descreve uma superfície hiperbólica com os intervalos de coordenadas $0 \leq \chi < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Conclui-se então que o Universo com curvatura $k = -1$ é descrito por uma superfície hiperbólica. Tal Universo é denominado aberto [24].

Destaca-se neste momento que na presente tese serão considerados apenas os espaços com as topologias mais simples referentes a cada valor de k .

2.3 TÓPICOS DA FORMULAÇÃO ADM

A formulação ADM foi desenvolvida para a quantização canônica da RG. Neste formalismo a teoria da gravitação considerada ¹ fica descrita no formalismo Hamiltoniano. A ideia fundamental deste formalismo é separar o espaço do tempo. Desta forma, o espaço-tempo é tratado como foliações de hipersuperfícies espaciais tridimensionais parametrizadas

¹ No caso da presente tese as teorias de gravitação consideradas são a gravitação de HL e também a RG

por um parâmetro t . Este parâmetro é associado ao tempo coordenado [25]. Para cada valor constante de t , obtém-se uma hipersuperfície espacial tridimensional que é descrita pela métrica h_{ij} . Esta métrica é identificada como variável fundamental da teoria da gravitação considerada ². Logo, a evolução dinâmica de h_{ij} resulta na métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}$. A decomposição do espaço-tempo em foliações é denominada decomposição 3+1. Por questões didáticas, o formalismo ADM será introduzido considerando a RG como teoria da gravitação.

O formalismo ADM escreve o intervalo invariante da seguinte maneira [26],

$$ds^2 = - \left(N^2 - N_i N^i \right) dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.30)$$

sendo N a função lapso, N_i a função *shift* e h_{ij} a métrica das hipersuperfícies espaciais tridimensionais.

A ação de Einstein-Hilbert é reescrita em termos das novas quantidades h_{ij} , N , N_i da seguinte maneira [26],

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^3x dt N h^{\frac{1}{2}} \left[K_{ij} K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R - 2\Lambda \right] + \mathcal{S}_m. \quad (2.31)$$

Nesta ação, Λ é a constante cosmológica, N a função lapso, h o determinante da métrica tridimensional, ${}^{(3)}R$ o escalar de Ricci nas hipersuperfícies espaciais tridimensionais, \mathcal{S}_m a ação referente à matéria K_{ij} a curvatura extrínseca das hipersuperfícies espaciais tridimensionais e K^2 é o traço ao quadrado deste último tensor.

A curvatura extrínseca denotada por K_{ij} é uma quantidade introduzida pelo formalismo ADM e mede a variação de um vetor normal à hipersuperfície quando transladado de um ponto a outro. Esta quantidade é definida da seguinte forma [26],

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + 2D_j N_i \right], \quad (2.32)$$

sendo D_j a derivada covariante com direção j na hipersuperfície.

Nota-se em (2.31), que o elemento quadridimensional $d^4x \sqrt{-g}$ é reescrito neste formalismo na forma $d^3x dt N h^{\frac{1}{2}}$.

Através da ação (2.31) obtém-se a seguinte densidade de Lagrangiana relacionada ao campo gravitacional,

$$\mathcal{L}_g = N h^{\frac{1}{2}} \left[K_{ij} K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R - 2\Lambda \right]. \quad (2.33)$$

Considerando (2.33) e $\Lambda = 0$, determina-se a forma Hamiltoniana da teoria a partir do cálculo dos momentos canonicamente conjugados às variáveis da teoria. Estes

² Na verdade as variáveis fundamentais da teoria são as classes de equivalência dos h_{ij} frente aos difeomorfismo nas hipersuperfícies tridimensionais espaciais.

momentos são definidos na seguinte forma geral [27],

$$\Pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{h}_{ab}} = \sqrt{h} [h^{ab}K - K^{ab}]. \quad (2.34)$$

Através de (2.33) demonstra-se que os momentos canonicamente conjugados aos parâmetros N e N_i são nulos, ou seja,

$$P_N = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{N}} = 0, \quad P_{N_i} = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{N}_i} = 0. \quad (2.35)$$

Isto quer dizer que os parâmetros N e N_i não são variáveis da teoria. Em outras palavras isto indica que esta teoria contém vínculos. Na linguagem das teorias vinculadas N e N_i são multiplicadores de Lagrange. Consequentemente podem assumir valores arbitrários.

Com o auxílio das informações acima, o setor geométrico da ação (2.31) é escrita na seguinte forma Hamiltoniana [26],

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x [\Pi^{ij}\dot{h}_{ij} - NH_g - N_i H_g^i], \quad (2.36)$$

sendo H_g a superhamiltoniana e H_g^i o supermomento. Estas quantidades assumem as seguintes formas explícitas [26],

$$\begin{aligned} H_g &= \left[\frac{1}{2} h^{-\frac{1}{2}} (h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}) \right] \Pi^{ij}\Pi^{kl} - {}^{(3)}R\sqrt{h} \\ &= G_{ijkl}\Pi^{ij}\Pi^{kl} - {}^{(3)}R\sqrt{h}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$H_g^i = -2D_j\Pi_i^j. \quad (2.38)$$

Em (2.37), o termo G_{ijkl} é denominada métrica do superespaço.

Imediatamente através da ação (2.36), obtêm-se a seguinte densidade de Hamiltoniana,

$$\mathcal{H} = NH_g + N_i H_g^i. \quad (2.39)$$

As equações da RG podem ser obtidas variando a ação (2.36) em relação a h_{ij} , Π^{ij} , N e N_i e podem ser encontradas em [27]. Particularmente variando a ação (2.36) em relação a N e N_i obtêm-se respectivamente os vínculos da superhamiltoniana $H_g = 0$ e do supermomento $H_g^i = 0$ da teoria.

O vínculo $H_g = 0$ equivale à componente G_{00} das equações de Einstein para o vácuo. Já o vínculo $H_g^i = 0$ equivale à componente G_{0i} .

Em Cosmologia, ao considerar o modelo homogêneo e isotrópico, o único vínculo existente é o da superhamiltoniana (pois $N_i = 0$). Como já mencionado este vínculo equivale à equação de Friedmann.

O setor de matéria é introduzido considerando um campo de matéria denotado por Φ^A . Logo, o momento canonicamente conjugado Π_Φ^A é obtido da seguinte maneira,

$$\Pi_\Phi^A = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{\Phi}^A}. \quad (2.40)$$

Então, a equação (2.36) é reescrita com os termos adicionais referentes à matéria da seguinte maneira [26],

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left[\Pi^{ij} \dot{h}_{ij} + \Pi_{\Phi}^A \dot{\Phi}_A - NH_{total} - N_i H_{total}^i \right]. \quad (2.41)$$

Finalmente, obtêm-se a seguinte densidade de Hamiltoniana,

$$\mathcal{H} = NH_{total} + N_i H_{total}^i. \quad (2.42)$$

Em que agora,

$$H_{total} = H_g + H_m, \quad (2.43)$$

$$H_{total}^i = H_g^i + H_m^i. \quad (2.44)$$

Nestas equações, H_m e H_m^i são, respectivamente, a superhamiltoniana e o supermomento do setor de matéria.

2.4 O FLUIDO PERFEITO

Já foi mencionado no presente capítulo que o princípio de Weyl impõe que a matéria do Universo deve ser descrita como um fluido perfeito. Dessa forma, na presente seção, serão estudadas algumas propriedades desse fluido, incluindo algumas propriedades termodinâmicas. Estas propriedades serão utilizadas na obtenção da densidade de Hamiltoniana referente ao setor de matéria via formalismo de Schutz. Para isso, será considerado um fluido perfeito composto por bárions, pois, sabe-se que bárions podem sofrer transmutação, assim a massa de uma amostra desse fluido não será conservada. Em contrapartida, o número de bárions irá permanecer constante, pois estamos considerando uma época do Universo em que a energia é tão alta que há um equilíbrio entre processos de formação e aniquilação desses bárions. Se isso não for verdade, estaremos em uma época do Universo em que as energias não serão altas o suficientes para que aconteça esses processos. Então, será considerada que uma amostra de fluido contendo Z bárions apresente a seguinte energia interna [28],

$$U = M - mZ, \quad (2.45)$$

sendo M a massa total, mZ a massa de repouso e m a massa do hidrogênio no estado fundamental.

Dividindo a equação (2.45) por mZ obtêm-se,

$$\bar{U} + 1 = \frac{M}{mZ} \quad \Rightarrow \quad \frac{mZ}{V} (\bar{U} + 1) = \frac{M}{V}, \quad (2.46)$$

sendo $\bar{U} \equiv U/mZ$ a energia interna específica. A equação acima pode ser reescrita na seguinte forma,

$$\rho = \rho_0 (\bar{U} + 1), \quad (2.47)$$

sendo $\rho_0 \equiv mZ/V$ a densidade de massa de repouso e $\rho \equiv M/V$ a densidade de bárions.

Em seguida, escreve-se a primeira lei da Termodinâmica da seguinte forma,

$$dq = d\bar{U} + pd \left(\frac{1}{\rho_0} \right) = TdS. \quad (2.48)$$

Nesta equação q é a energia por unidade de massa de repouso, p é a pressão, T é a temperatura a que estão sujeitas os componentes do fluido perfeito, ou seja, a temperatura do Universo e S é a entropia. Todas essas grandezas referem-se à amostra de fluido [29].

Se a entalpia é definida na forma,

$$\mu = \frac{\rho + p}{\rho_0} = \bar{U} + 1 + \frac{p}{\rho_0}, \quad (2.49)$$

em que $\rho + p$ é a massa inercial por unidade de volume, fica conveniente reescrever (2.48), após a diferenciação de (2.49), da seguinte maneira,

$$dp = \rho_0 d\mu - \rho_0 T dS. \quad (2.50)$$

Dessa forma, obtêm-se ρ_0 e \bar{U} como funções da entalpia μ e da entropia S para que a equação de estado do fluido seja expressa na forma $p \equiv p(\mu, S)$. Isto é possível utilizando a seguinte equação de estado para um fluido perfeito,

$$p = \omega \rho. \quad (2.51)$$

Nesta equação, ω é uma constante que caracteriza o tipo de fluido considerado. Introduzindo (2.51) em (2.48), e com o auxílio de (2.47), obtêm-se a seguinte equação,

$$(1 + \bar{U}) \left[d \left[\ln(1 + \bar{U}) - \omega \ln \rho_0 \right] \right] = T dS. \quad (2.52)$$

Esta equação leva aos seguintes resultados,

$$T = (1 + \bar{U}), \quad (2.53)$$

$$S = \ln(1 + \bar{U}) - \omega \ln \rho_0. \quad (2.54)$$

Com essas informações, obtêm-se ρ_0 , ρ e p através de (2.54), (2.52), (2.49) e (2.47).

Logo:

$$\rho_0 = \left(\frac{\mu}{\omega + 1} \right)^{\frac{1}{\omega}} e^{-\frac{S}{\omega}}, \quad (2.55)$$

$$\rho = \left(\frac{\mu}{\omega + 1} \right)^{\frac{1}{\omega} + 1} e^{-\frac{S}{\omega}}, \quad (2.56)$$

$$p = \omega \left(\frac{\mu}{\omega + 1} \right)^{\frac{1}{\omega} + 1} e^{-\frac{S}{\omega}}. \quad (2.57)$$

Finalizando a presente seção será apenas mencionado que as leis de conservação para o número total de bárions Z e para o tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$ do fluido perfeito podem ser encontradas em [28].

2.5 O FORMALISMO DE SCHUTZ NA REPRESENTAÇÃO DE POTENCIAIS VELOCIDADE

O formalismo de Schutz é utilizado para a obtenção da densidade de Hamiltoniana referente ao setor de matéria. O ponto de partida deste formalismo é escrever a quadri-velocidade de um fluido relativístico através de 6 potenciais escalares termodinâmicos da seguinte forma [30],

$$U_\nu = \frac{1}{\mu} (\epsilon_{,\nu} + \zeta\beta_{,\nu} + \Theta S_{,\nu}), \quad (2.58)$$

sendo S a entropia específica e μ a entalpia. Os potenciais ζ e β estão ligados à rotação e assumem valores nulos para sistemas homogêneos, como nos modelos cosmológicos considerados no presente trabalho. Finalmente os potenciais ϵ e Θ não possuem interpretações físicas claras [31].

Utilizando a condição de normalização da quadri-velocidade $U^\nu U_\nu = -1$, obtêm-se a seguinte equação para o potencial μ ,

$$\mu^2 = -g^{\sigma\nu} (\epsilon_{,\sigma} + \zeta\beta_{,\sigma} + \Theta S_{,\sigma}) (\epsilon_{,\nu} + \zeta\beta_{,\nu} + \Theta S_{,\nu}). \quad (2.59)$$

Através desta equação percebe-se que o potencial μ fica dado em termos dos potenciais independentes ϵ , ζ , β , Θ , S e da métrica $g^{\sigma\nu}$.

Através da seguinte ação, que envolve o setor geométrico mais o setor de matéria,

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} (R + 16\pi p), \quad (2.60)$$

obtêm-se a seguinte densidade de Lagrangiana [30],

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} (R + 16\pi p). \quad (2.61)$$

Variando a ação (2.60) em termos da métrica $g^{\mu\nu}$ são obtidas as equações de Einstein, contendo como matéria um fluido perfeito. Ou seja,

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^4x \left\{ \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + 16\pi \frac{\delta(\sqrt{-g}p)}{\delta g^{\mu\nu}} \right\} = 0, \quad (2.62)$$

com [28],

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \sqrt{-g}, \quad (2.63)$$

$$\frac{\delta(\sqrt{-g}p)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}p g_{\mu\nu} \sqrt{-g} + \frac{\delta p}{\delta \mu} \frac{\delta \mu}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g}. \quad (2.64)$$

O termo $\frac{\delta p}{\delta \mu}$ é obtido da primeira lei da Termodinâmica (2.50) com o auxílio de (2.49). Já o termo $\frac{\delta \mu}{\delta g^{\mu\nu}}$ é obtido de (2.59). Logo:

$$\frac{\delta p}{\delta \mu} = \frac{\rho + p}{\mu}, \quad \frac{\delta \mu}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\mu}{2} U_\mu U_\nu. \quad (2.65)$$

Com os resultados obtidos (2.63)-(2.65), a variação da ação (2.62) resulta na seguinte equação de Einstein contendo como matéria um fluido perfeito,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi [pg_{\mu\nu} + (\rho + p)U_\mu U_\nu] = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.66)$$

Finalmente, menciona-se que a variação da ação (2.62) em relação aos potenciais independentes (ϵ , ζ , β , Θ , S) resultam nas equações de movimento para os mesmos. Este processo é feito em [29].

2.6 FORMULAÇÃO HAMILTONIANA DO UNIVERSO FRW COM FLUIDO PERFEITO

Nesta seção é importante destacar a importância da descrição das teorias, consideradas na presente tese, no formalismo Hamiltoniano. Para isso, serão aplicados os resultados obtidos nas seções anteriores.

O intervalo invariante descrito em (2.5) é reescrito, de acordo com o formalismo ADM, na forma de (2.30). Logo:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.67)$$

A forma de (2.67) é uma versão particular de (2.30) devido à homogeneidade e isotropia dos modelos aqui considerados. Estas propriedades no espaço-tempo fazem com que as funções a , N e os potenciais termodinâmicos não nulos μ , ϵ , Θ , S tenham apenas dependência temporal, que por questões de simplicidade e conveniência estão sendo omitidos.

Utilizando a métrica (2.67) no setor gravitacional da ação (2.31) obtêm-se,

$$\mathcal{S}_g = \int dt d^3x \left[-\frac{6a\dot{a}^2}{N} + 6kaN \right], \quad (2.68)$$

que leva à seguinte densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L}_g = -\frac{6a\dot{a}^2}{N} + 6kaN. \quad (2.69)$$

De maneira análoga, o setor de matéria da ação (2.60) é reescrita, de acordo com o formalismo ADM, na seguinte forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_f &= 16\pi \int dt d^3x N h^{\frac{1}{2}} p, \\ &= \xi \int dt N a^3 p. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Nesta ação, o termo ξ é uma constante numérica resultante da integração referente à parte espacial de (2.70).

Utilizando (2.59), em que $\zeta = \beta = 0$, e considerando que o sistema de coordenada adotado é comóvel (sendo $U_\nu = (N, 0, 0, 0)$), obtêm-se,

$$\mu = \left[-g^{00}(\epsilon_{,0} + \Theta S_{,0})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\dot{\epsilon} + \Theta \dot{S}}{N}. \quad (2.71)$$

Assim a ação (2.70) com o auxílio das equações (2.51), (2.56) e (2.71), assume a seguinte forma,

$$\mathcal{S}_f = \xi \int dt \left[N^{\frac{-1}{\omega}} a^3 \omega \frac{(\dot{\epsilon} + \Theta \dot{S})^{1+\frac{1}{\omega}}}{(\omega + 1)^{\frac{1}{\omega}+1}} e^{-\frac{S}{\omega}} \right]. \quad (2.72)$$

que leva à seguinte densidade de Lagrangeana:

$$\mathcal{L}_f = N^{\frac{-1}{\omega}} a^3 \omega \frac{(\dot{\epsilon} + \Theta \dot{S})^{1+\frac{1}{\omega}}}{(\omega + 1)^{\frac{1}{\omega}+1}} e^{-\frac{S}{\omega}}. \quad (2.73)$$

2.6.1 Cálculo dos momentos canonicamente conjugados

A presente seção é dedicada aos cálculos dos momentos canonicamente conjugados não nulos às variáveis dinâmicas utilizando as densidades de Lagrangianas (2.69) e (2.73).

Como os modelos considerados na presente tese são homogêneos e isotrópicos, são dotados de alta simetria. Então, os cálculos dos momentos canonicamente conjugados realizados aqui são equivalentes aos descritos pelas equações (2.34) e (2.40). Logo:

$$P_a = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{a}} = -\frac{12a\dot{a}}{N}, \quad (2.74)$$

$$P_\epsilon = \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial \dot{\epsilon}} = N^{\frac{-1}{\omega}} a^3 (\dot{\epsilon} + \Theta \dot{S})^{\frac{1}{\omega}} (\omega + 1)^{-\frac{1}{\omega}} e^{-\frac{S}{\omega}}, \quad (2.75)$$

$$P_S = \frac{\partial \mathcal{L}_f}{\partial \dot{S}} = \Theta P_\epsilon. \quad (2.76)$$

Conclui-se que, para a matéria, o único momento independente é P_ϵ . Com os momentos canonicamente conjugados (2.74)-(2.76) e as densidades de Lagrangeanas (2.69) e (2.73) obtêm-se a densidade de Hamiltoniana para o modelo. De acordo com (2.42),

$$\mathcal{H} = \sum \dot{q}_i P_i - \mathcal{L} = NH, \quad (2.77)$$

sendo q_i as coordenadas generalizadas a , Θ , ϵ e P_i seus respectivos momentos canonicamente conjugados. Substituindo estas grandezas já calculadas (2.74), (2.75) e (2.76) obtêm-se,

$$\mathcal{H} = -N \frac{P_a^2}{24a} + NP_\epsilon^{\omega+1} a^{-3\omega} e^S - N6ka. \quad (2.78)$$

Ao introduzir as transformações canônicas [28],

$$T = -P_S e^{-S} P_\epsilon^{-(\omega+1)}, \quad (2.79)$$

$$P_T = P_\epsilon^{\omega+1} e^S, \quad (2.80)$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon - (\omega + 1) \frac{P_S}{P_\epsilon}, \quad (2.81)$$

$$\bar{P}_\epsilon = P_\epsilon, \quad (2.82)$$

a densidade de Hamiltoniana (2.78) fica dada por,

$$\mathcal{H} = NH = -N \frac{P_a^2}{24a} + N \frac{P_T}{a^{3\omega}} - N6ka. \quad (2.83)$$

Com a densidade de Hamiltoniana acima e impondo a condição de vínculo, segundo o formalismo ADM, obtêm-se a seguinte equação de Friedmann,

$$NH = -N \frac{P_a^2}{24a} + N \frac{P_T}{a^{3\omega}} - N6ka = 0. \quad (2.84)$$

Como já mencionado, a equação de Friedmann equivale ao vínculo da superhamiltoniana.

Finalmente, o espaço de fase da teoria Hamiltoniana obtida é descrito pelas variáveis a e T junto a seus respectivos momentos canonicamente conjugados P_a e P_T . Todas as variáveis apresentam dependência temporal.

Conclui-se então que através do formalismo de Schutz, são introduzidas as variáveis relacionadas ao fluido T e P_T .

2.7 O FORMALISMO DE FADDEEV-JACKIW

O formalismo de Faddeev e Jackiw (ou formalismo simplético) [32] é uma maneira alternativa de obter os parênteses de Poisson generalizados da teoria considerada, os quais são conhecidos como parênteses de Dirac [33]. Os quais são necessários para realização do processo de quantização generalizada consistente com sistemas que apresentam vínculos. O método simplético trabalha com lagrangianas de primeira ordem.

Considera-se um sistema dinâmico descrito pela seguinte Lagrangeana de primeira ordem,

$$L = a_j \dot{\xi}^j - H(\xi^k), \quad (2.85)$$

onde $H(\xi^k)$ é a Hamiltoniana do sistema e ξ^j são as variáveis simpléticas.

Utilizando a Lagrangeana (2.85) obtêm-se da equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j} \right) \dot{\xi}^j = \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i} \quad \Rightarrow \quad f_{ij} \dot{\xi}^j = \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i}. \quad (2.86)$$

Se os coeficientes $a_j(\xi^k)$ fazem f_{ij} ser não-singular sua inversa será dada por f^{ij} e as velocidades assumem a seguinte forma,

$$\dot{\xi}^j = f^{ij} \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i}. \quad (2.87)$$

Por outro lado, esta equação também pode ser obtida através dos parênteses de Poisson na formulação Hamiltoniana, ou seja,

$$\dot{\xi}^j = \{ \xi^j, H(\xi^k) \} = \{ \xi^j, \xi^i \} \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^i}. \quad (2.88)$$

Comparando (2.87) e (2.88) obtêm-se os seguintes parênteses de Poisson da teoria,

$$f^{ij} = \{\xi^j, \xi^i\}. \quad (2.89)$$

Se a matriz f_{ij} fosse singular, o sistema apresentaria vínculos ou teria simetria de calibre. Então f_{ij} não poderia ser identificado como tensor simplético, pois, como ele faz o papel da métrica do espaço simplético, deveria possuir inversa. Portanto, à princípio, não será possível determinar os parênteses de Poisson da teoria [13].

Na presença de vínculos, o formalismo simplético introduz os vínculos deformando a estrutura geométrica da teoria considerada. Ou seja, os vínculos são utilizados até se obter a matriz simplética não-singular. Então, obtêm-se sua inversa $f^{ij} = \{\xi^j, \xi^i\}$, cujas entradas são dadas pelos parênteses de Poisson generalizados. Será apresentada uma aplicação detalhada desse formalismo no estudo dos modelos cosmológicos de HL NC.

Agora, será considerado que exista uma quantidade não-nula dada por $C(\xi^k)$, que possua os parênteses de Poisson com as variáveis simpléticas ξ^i , nulos, ou seja,

$$\{\xi^i, C(\xi^k)\} = f^{ij} \frac{\partial C(\xi^k)}{\partial \xi^j} \Rightarrow f^{ij} \frac{\partial C(\xi^k)}{\partial \xi^j} = 0. \quad (2.90)$$

Assim, se existe $C(\xi^k)$ então f^{ij} é não-singular, e possui os seguintes modos zeros dados por, $\frac{\partial C(\xi^k)}{\partial \xi^j}$.

Considerando que a matriz simplética $f_{ij}^{(0)}$ seja singular, com os modos-zeros $\omega_l^{(0)}$ para $(l < 2N)$, tem-se

$$f_{lm}^{(0)} \omega_m^{(0)} = 0. \quad (2.91)$$

Multiplicando a equação (2.86), pelo lado esquerdo, por $\omega_l^{(0)}$, considerando que a parte cinética do Hamiltoniano só depende das velocidades, ou seja, não depende das ξ^k e usando a equação acima obtêm-se,

$$f_{il} \omega_l^{(0)} \dot{\xi}^i = \omega_l^{(0)} \frac{\partial H(\xi^k)}{\partial \xi^l} \Rightarrow \omega_l^{(0)} \frac{\partial V(\xi^k)}{\partial \xi^l} = 0, \quad (2.92)$$

onde $V(\xi^k)$ denota energia potencial.

Geralmente, essa equação representa os vínculos do sistema [13]. Estes vínculos são introduzidos na Lagrangiana através de multiplicadores de Lagrange ³. É importante mencionar que a introdução dos multiplicadores de Lagrange $\lambda_l^{(0)}$ estendem o espaço de configuração. Agora, introduzindo os vínculos na parte cinética da lagrangiana, obtêm-se

$$L^{(1)} = \left(a_i^{(0)} + \lambda_l \frac{\partial \Omega_l^{(0)}}{\partial \xi^i} \right) \dot{\xi}^i - V((\xi^k)). \quad (2.93)$$

³ E como já mencionado causam uma deformação da matriz simplética $f_{ij}^{(0)}$

Donde são identificados diretamente os novos vetores,

$$a_i^{(1)} = a_i^{(0)} + \lambda_l \frac{\partial \Omega_l^{(0)}}{\partial \xi^i}; \quad a_l^{(0)} = 0. \quad (2.94)$$

Aqui $\Omega_l^{(0)}$ são os vínculos decorrentes de (2.92). Dessa forma, as novas componentes do tensor simplético são dados por,

$$f_{ij}^{(1)} = \partial_i a_j^{(1)} - \partial_j a_i^{(1)}, \quad (2.95)$$

$$f_{il}^{(1)} = \partial_i a_l^{(1)} - \partial_l a_i^{(1)} = -\partial_l a_i^{(1)}, \quad (2.96)$$

$$f_{lm}^{(1)} = \partial_l a_m^{(1)} - \partial_m a_l^{(1)} = 0, \quad (2.97)$$

onde denota $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \xi^i}$.

Caso $\det f^{(1)} \neq 0$, os vínculos da teoria são eliminados e encontra-se a matriz simplética adequada, que funcionará como a métrica do espaço. Da inversa da matriz simplética f^{ij} , os parênteses de Poisson são obtidos e então o objetivo final do formalismo simplético é completado.

Por outro lado, se o tensor $f^{(1)}$ ainda for singular, é necessário encontrar seus modo zeros, que geralmente irão fornecer novos vínculos. Estes vínculos são introduzidos na Lagrangeana de primeira iteração $L^{(1)}$, através de multiplicadores de Lagrange. Isto provocará uma deformação do espaço que irá possibilitar a obtenção de um novo tensor simplético.

Novamente, se $\det f^{(2)} \neq 0$ o processo é encerrado, pois, o objetivo foi concluído. Caso contrário, o processo acima realizado, é repetido até se obter um tensor simplético não-singular.

Quando os modo-zeros de uma matriz singular fornecem o mesmo vínculo nas próximas interações, esta teoria apresenta simetria de calibre. Nesse caso, as condições de calibre devem ser fixadas e o tensor simplético é determinado.

3 OS MODELOS COSMOLÓGICOS DE HOŘAVA-LIFSHITZ

3.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo será introduzida a gravitação de HL, e através da ação dessa teoria, serão calculadas as equações de movimento dos modelos cosmológicos comutativos.

3.2 A TEORIA GRAVITACIONAL DE HL

A descrição para gravidade de Hořava-Lifshitz $4D$ foi inspirada em sistemas de matéria condensada de estruturas dinâmicas críticas [34]. Esta descrição apresenta uma invariância espacial explícita de covariância geral e de reparametrização $3D$, que será introduzida adiante. No entanto, obtêm-se uma covariância geral $4D$ em um limite de grande distância do infra-vermelho [1]. Além disso, esta descrição também pode ser descrita em uma linguagem análoga ao formalismo canônico da RG (formalismo ADM).

Quando aplicada à Cosmologia, a NC produziu resultados muito importantes [15, 16, 17]. Até agora, estes resultados foram restritos a modelos cosmológicos baseados na RG. Em situações extremas de intensa interação gravitacional, para condições muito gerais, os espaços-tempos descritos pela RG apresentam singularidades. Nestas situações, a RG não pode descrever corretamente a interação gravitacional [1]. Uma proposta para eliminar essas singularidades foi a tentativa de quantização da RG. Infelizmente, foi mostrado que RG não é uma teoria renormalizável, por métodos perturbativos [35]. Após essa descoberta, muitas teorias geométricas de gravitação, diferentes da RG e renormalizáveis, por métodos perturbativos, foram introduzidas. Infelizmente, teorias deste tipo produzem fantasmas massivos em seu espectro físico e não são teorias unitárias [36].

Um exemplo interessante de teoria geométrica da gravidade é a de HL [34]. Como já mencionado, esta teoria apresenta assimetria entre espaço e tempo, que se manifesta através de uma escala anisotrópica entre espaço e tempo. Isto quer dizer que a simetria de Lorentz é violada, pelo menos em altas energias, onde ocorre assimetria entre espaço e tempo. Em baixas energias, a teoria HL recai na RG, recuperando a simetria de Lorentz.

A escala anisotrópica entre espaço e tempo na gravitação de HL é dada por,

$$t \rightarrow b^z t \quad e \quad \vec{x} \rightarrow b\vec{x}, \quad (3.1)$$

onde b é um parâmetro de escala e z é o expoente dinâmico crítico.

Segundo Hořava [34], uma teoria da gravidade usando essas ideias é renormalizável, em $3 + 1$ dimensões, com $z = 3$. Além disso, para $z \rightarrow 1$, a simetria entre tempo e espaço é recuperada. Nesse limite a teoria descreve a interação gravitacional de forma covariante, em particular, este é o valor do expoente z da RG. Devido à assimetria entre

espaço e tempo presente em sua teoria geométrica da gravidade, Hořava decidiu utilizar o formalismo ADM, que como já visto no Capítulo 2, separa o espaço do tempo [37]. Em seu trabalho original, Hořava considerou a função lapso N com apenas dependência temporal [34]. Esta consideração ficou conhecida como versão projetável ¹. É importante mencionar que na presente tese será considerada a versão projetável da gravitação de HL.

A ação gravitacional da teoria HL foi proposta de tal forma que o setor cinético foi construído separadamente do setor potencial. O setor cinético foi motivado pela RG, introduzindo o parâmetro livre λ , ausente na RG. No limite em que $\lambda \rightarrow 1$, recupera-se o setor cinético da RG. O setor potencial deve depender apenas da métrica espacial e suas derivadas espaciais. Como uma teoria geométrica da gravidade, o setor potencial da teoria de HL deve ser escrito em termos de combinações de contrações escalares do tensor de Riemann e suas derivadas espaciais.

Em seu artigo original [34], Hořava considerou uma simplificação para reduzir o número de possíveis termos contribuindo para o componente potencial de sua teoria. Esta simplificação é chamada de condição de balanço detalhado. Na presente tese, não será considerada a condição de balanço detalhado. A teoria HL foi aplicada à cosmologia e produziu modelos muito interessantes [16, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48].

3.3 AÇÃO DA TEORIA DE HL

Como já mencionado, a ação total da teoria de HL é definida em termos da formulação ADM. Esta ação, para a versão projetável e sem a condição de balanço detalhado para o potencial é definida da seguinte maneira [43],

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{HL} = & \frac{M_p^2}{2} \int_{\mathcal{M}} d^3x dt N \sqrt{h} \left[K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2 - g_0 M_p^{-2} - g_1 R - M_p^{-2} (g_2 R^2 + g_3 R_{ij} R^{ij}) \right. \\ & - M_p^{-4} (g_4 R^3 + g_5 R R^i_j R^j_i + g_6 R^i_j R^j_k R^k_i + g_7 R \nabla^2 R + g_8 \nabla_i R_{jk} \nabla^i R^{jk}) \left. \right] \\ & + M_p^2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} K. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nela, M_p é a massa de Plank, h_{ij} é a métrica das hipersuperfícies espaciais tridimensionais, $K_{ij} K^{ij} - \lambda K^2$ é a parte cinética da ação, K_{ij} é a curvatura extrínseca, R é o escalar de curvatura, R_{ij} é o tensor de Ricci e os termos g_j com $(j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ são constantes de acoplamento. Essas últimas juntas com a constante λ são fatores de correção da teoria de HL em relação a teoria da RG. O último termo é um termo de superfície [43].

Na presente tese, será utilizada a métrica de FRW dada por (2.67). É importante mencionar que todas as quantidades presentes apresentam apenas dependência temporal. Por questões de simplicidade, estas dependências serão omitidas. Com a métrica (2.67)

¹ Embora muitos trabalhos tem sido escrito sobre a teoria HL usando esta condição, alguns autores consideram, em seus trabalhos, a versão não projetável. Em outras palavras, eles consideraram que a função lapso N apresenta dependência temporal e espacial [38, 39].

são calculados os termos presentes no apêndice A. Dessa forma, obtêm-se a seguinte ação total da teoria de HL, sem o termo de superfície [43].

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{HL} = & \eta \int dt N \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + \frac{1}{3(3\lambda - 1)} \left(6ka - 2\Lambda a^3 - \frac{12k^2}{aM_p^2} (3g_2 + g_3) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{24k^3}{a^3 M_p^4} (9g_4 + 3g_5 + g_6) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Em que,

$$\eta = 3\beta(3\lambda - 1), \quad (3.4)$$

$$\beta = \frac{M_p^2}{2} V_0 \quad (3.5)$$

$$V_0 = \int d^3x \frac{r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (3.6)$$

$$1 = \frac{3M_p^2 V_0 (3\lambda - 1)}{2}, \quad (3.7)$$

$$g_c = \frac{2}{3\lambda - 1}, \quad (3.8)$$

$$g_\Lambda = \frac{2\Lambda}{3(3\lambda - 1)}, \quad (3.9)$$

$$g_r = 6V_0(3g_2 + g_3), \quad (3.10)$$

$$g_s = 18V_0^2(3\lambda - 1)(9g_4 + 3g_5 + g_6). \quad (3.11)$$

Aqui, η é uma constante numérica resultante da integração referente à parte espacial da ação. Os termos g_c , g_Λ , g_r e g_s são as novas constantes de acoplamento. A constante de acoplamento g_c assume apenas valores positivos e as demais, g_Λ , g_r e g_s , podem assumir valores positivos ou negativos.

A equação (3.7) implica que,

$$V_0 = \frac{2}{3(3\lambda - 1)M_p^2}. \quad (3.12)$$

Substituindo as quantidades (3.4)-(3.11) e utilizando a condição (3.12) na ação (3.3) obtêm-se,

$$\mathcal{S}_{HL} = \eta \int dt N \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + g_c k a - g_\Lambda a^3 - g_r \frac{k^2}{a} - g_s \frac{k^3}{a^3} \right]. \quad (3.13)$$

Desta ação, obtêm-se a seguinte densidade de Lagrangiana referente ao setor geométrico da teoria de HL,

$$\mathcal{L}_{HL} = N \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + g_c k a - g_\Lambda a^3 - g_r \frac{k^2}{a} - g_s \frac{k^3}{a^3} \right]. \quad (3.14)$$

Através dela, calcula-se o seguinte momento canonicamente conjugado a variável a ,

$$P_a = \frac{\partial \mathcal{L}_{HL}}{\partial \dot{a}} = \frac{\partial}{\partial \dot{a}} \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N} \right] = -\frac{2\dot{a}a}{N}. \quad (3.15)$$

Com a densidade de Lagrangeana (3.14) e o momento canonicamente conjugado (3.15) calcula-se a seguinte densidade de Hamiltoniana dos modelos referente ao setor geométrico,

$$\mathcal{H}_{HL} = N \left[-\frac{P_a^2}{4a} - g_c k a + g_\Lambda a^3 + g_r \frac{k^2}{a} + g_s \frac{k^3}{a^3} \right]. \quad (3.16)$$

Como já mencionado no Capítulo 2, o setor de matéria, representado pelo fluido perfeito, é obtido pelo formalismo de Schutz, que apresentou o seguinte resultado,

$$\mathcal{H}_f = N \frac{P_T}{a^{3\omega}}. \quad (3.17)$$

Finalmente ao somar (3.16) e (3.17), obtêm-se a densidade de Hamiltoniana total do modelo, ou seja,

$$\mathcal{H} = N \left[-\frac{P_a^2}{4a} - g_c k a + g_\Lambda a^3 + g_r \frac{k^2}{a} + g_s \frac{k^3}{a^3} + \frac{P_T}{a^{3\omega}} \right]. \quad (3.18)$$

3.4 EQUAÇÃO DE FRIEDMANN

De acordo com o formalismo ADM, com a densidade de Hamiltoniana (3.18) e com o momento canonicamente conjugado (3.15), é imposta a condição de vínculo ², para encontrar a equação de Friedmann do presente modelo. Ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = N \left[-\frac{P_a^2}{4a} - g_c k a + g_\Lambda a^3 + g_r \frac{k^2}{a} + g_s \frac{k^3}{a^3} + \frac{P_T}{a^{3\omega}} \right] &= 0, \\ \frac{\dot{a}^2}{N^2} + g_c k - g_\Lambda a^2 - g_r \frac{k^2}{a^2} - g_s \frac{k^3}{a^4} - \frac{P_T}{a^{3\omega+1}} &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Com ela pode-se escrever uma equação análoga a da conservação da energia. Consequentemente, é possível determinar o potencial dos modelos cosmológicos comutativos de HL. Isto quer dizer que, o potencial da teoria assume a seguinte forma,

$$V(a) = g_c k - g_\Lambda a^2 - g_r \frac{k^2}{a^2} - g_s \frac{k^3}{a^4} - \frac{P_T}{a^{3\omega+1}}. \quad (3.20)$$

3.5 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Com a densidade de Hamiltoniana (3.18) são calculadas as seguintes equações de movimento de Hamilton,

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_a} \frac{\partial a}{\partial a} = -N \frac{P_a}{2a}, \\ \dot{P}_a &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a} \frac{\partial P_a}{\partial P_a} \end{aligned} \quad (3.21)$$

² A condição de vínculo segundo o formalismo ADM é dada por $H = 0$.

$$= N \left[-\frac{P_a^2}{4a^2} + g_c k - 3g_\Lambda a^2 + g_r \frac{k^2}{a^2} + 3g_s \frac{k^3}{a^4} + 3\omega \frac{P_T}{a^{3\omega+1}} \right], \quad (3.22)$$

$$\dot{T} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_T} \frac{\partial T}{\partial T} = \frac{N}{a^{3\omega}}, \quad (3.23)$$

$$\dot{P}_T = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T} \frac{\partial P_T}{\partial P_T} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_T = C. \quad (3.24)$$

A combinação das equações de movimento (3.21)-(3.24) resulta em uma equação diferencial de segunda ordem no fator de escala a . Esta equação é obtida substituindo (3.15), (3.21), (3.22) e (3.24) na derivada temporal de (3.21). Como resultado obtêm-se,

$$\ddot{a} - \frac{\dot{N}\dot{a}}{N} + \frac{\dot{a}^2}{2a} = -\frac{N^2}{2a} \left[g_c k - 3g_\Lambda a^2 + g_r \frac{k^2}{a^2} + 3g_s \frac{k^3}{a^4} + 3\omega \frac{C}{a^{3\omega+1}} \right]. \quad (3.25)$$

Na presente tese será considerado o *gauge* $N = 1$, dessa forma, as equações de movimento (3.19) e (3.25) se reduzem respectivamente nas seguintes equações,

$$\dot{a}^2 + g_c k - g_\Lambda a^2 - g_r \frac{k^2}{a^2} - g_s \frac{k^3}{a^4} - \frac{P_T}{a^{3\omega+1}} = 0, \quad (3.26)$$

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} = -\frac{1}{2a} \left[g_c k - 3g_\Lambda a^2 + g_r \frac{k^2}{a^2} + 3g_s \frac{k^3}{a^4} + 3\omega \frac{C}{a^{3\omega+1}} \right]. \quad (3.27)$$

É interessante mencionar que, para os casos em que a curvatura é nula ($k = 0$), os modelos cosmológicos de HL recaem nos modelos cosmológicos descritos pela RG.

4 OS MODELOS COSMOLÓGICOS DE HL NÃO-COMUTATIVOS

4.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo serão descritos os modelos não-comutativos, para uma versão particular de NC, acoplados a fluidos perfeitos em que a não-comutatividade é introduzida de maneira geométrica através do formalismo de FJ. Em seguida, serão obtidas as equações de movimento para os modelos cosmológicos de HL NC.

4.2 APLICAÇÃO DO FORMALISMO DE FJ

A versão NC dos modelos cosmológicos de HL será obtida através da aplicação do formalismo de FJ introduzido no Capítulo 2. Este formalismo, conforme será visto, introduz naturalmente, de maneira geométrica, transformações de coordenadas que levam as variáveis comutativas, mais um parâmetro não-comutativo α . Este parâmetro, denominado parâmetro NC, carrega todas as informações sobre a NC presentes nos modelos cosmológicos de HL.

Como ponto de partida, seguindo o formalismo de FJ, será utilizada a seguinte densidade de Hamiltoniana (3.18) [17],

$$\mathcal{H} = N \left[-\frac{P_a^2}{4a} - g_c a k + g_\Lambda a^3 + k^2 \frac{g_r}{a} + k \frac{g_s}{a^3} + \frac{P_T}{a^{3\omega}} \right]. \quad (4.1)$$

Partindo da densidade de Hamiltoniana acima, e iniciando a aplicação do formalismo, obtêm-se a seguinte densidade de Lagrangeana de interação zero do sistema,

$$\mathcal{L}^{(0)} = P_a \dot{a} + P_T \dot{T} - V^{(0)}(a, P_a, T, P_T). \quad (4.2)$$

Nela $V^{(0)}(a, P_a, T, P_T)$ é o potencial simplético dado por,

$$V^{(0)}(a, P_a, T, P_T) = N\Omega = N \left[-\frac{P_a^2}{4a} - g_c a k + g_\Lambda a^3 + k^2 \frac{g_r}{a} + k \frac{g_s}{a^3} + \frac{P_T}{a^{3\omega}} \right]. \quad (4.3)$$

Neste caso, as variáveis simpléticas do sistema são dadas por,

$$\xi_i^{(0)} = (a, P_a, T, P_T, N). \quad (4.4)$$

Identifica-se de (4.2) a correspondência dos seguintes momentos 1-forma de interação zero,

$$A_a^{(0)} = P_a, \quad (4.5)$$

$$A_{P_a}^{(0)} = 0, \quad (4.6)$$

$$A_T^{(0)} = P_T, \quad (4.7)$$

$$A_{P_T}^{(0)} = 0, \quad (4.8)$$

$$A_N^{(0)} = 0. \quad (4.9)$$

Através da seguinte definição (2.86), introduzida no Capítulo 2,

$$f_{\xi^i \xi^j} = \frac{\partial A_{\xi^j}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial A_{\xi^i}}{\partial \xi^j}, \quad (4.10)$$

obtêm-se os seguinte elementos de matriz,

$$f_{aa} = \frac{\partial A_a}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial a} = 0, \quad (4.11)$$

$$f_{aP_a} = \frac{\partial A_{P_a}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial P_a} = 0 - 1 = -1, \quad (4.12)$$

$$f_{aT} = \frac{\partial A_T}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial T} = 0, \quad (4.13)$$

$$f_{aP_T} = \frac{\partial A_{P_T}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial P_T} = 0, \quad (4.14)$$

$$f_{P_a a} = -f_{aP_a} = 1, \quad (4.15)$$

$$f_{P_a P_a} = \frac{\partial A_{P_a}}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial P_a} = 0, \quad (4.16)$$

$$f_{P_a T} = \frac{\partial A_T}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial T} = 0, \quad (4.17)$$

$$f_{P_a P_T} = \frac{\partial A_{P_T}}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial P_T} = 0, \quad (4.18)$$

$$f_{T a} = -f_{aT} = 0, \quad (4.19)$$

$$f_{T P_a} = -f_{P_a T} = 0, \quad (4.20)$$

$$f_{T T} = \frac{\partial A_T}{\partial T} - \frac{\partial A_T}{\partial T} = 0, \quad (4.21)$$

$$f_{T P_T} = \frac{\partial A_{P_T}}{\partial T} - \frac{\partial A_T}{\partial P_T} = 0 - 1 = -1, \quad (4.22)$$

$$f_{P_T a} = -f_{aP_T} = 0, \quad (4.23)$$

$$f_{P_T P_a} = -f_{P_a P_T} = 0, \quad (4.24)$$

$$f_{P_T T} = -f_{T P_T} = 1, \quad (4.25)$$

$$f_{P_T P_T} = \frac{\partial A_{P_T}}{\partial T} - \frac{\partial A_{P_T}}{\partial T} = 0, \quad (4.26)$$

$$f_{a N} = \frac{\partial A_N}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial N} = 0, \quad (4.27)$$

$$f_{P_a N} = \frac{\partial A_N}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial N} = 0, \quad (4.28)$$

$$f_{T N} = \frac{\partial A_N}{\partial T} - \frac{\partial A_T}{\partial N} = 0, \quad (4.29)$$

$$f_{P_T N} = \frac{\partial A_N}{\partial P_T} - \frac{\partial A_{P_T}}{\partial N} = 0, \quad (4.30)$$

$$f_{N N} = \frac{\partial A_N}{\partial N} - \frac{\partial A_N}{\partial N} = 0. \quad (4.31)$$

Logo, com as entradas (4.11)-(4.31), a matriz simplética de interação zero assume a forma,

$$f^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Esta matriz é singular (não possui inversa). Seguindo o formalismo de FJ, é necessário encontrar o modo-zero da matriz (4.32). O modo-zero é um vetor ν que quando multiplicado a matriz (4.32) leva ao vetor nulo [17]. Ou seja,

$$f^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

com,

$$a = 0, \quad (4.34)$$

$$b = 0, \quad (4.35)$$

$$d = 0, \quad (4.36)$$

$$c = 0, \quad (4.37)$$

$$e = \forall, \quad (4.38)$$

Por questões de conveniência será escolhido $e = 1$. Então, o modo zero da matriz simplética de interação zero (4.32) fica dado por,

$$\nu^{(0)} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1). \quad (4.39)$$

Contraindo o modo zero (4.39) com o gradiente do potencial simplético (4.3), obtêm-se um vínculo,

$$\sum_{i=1}^5 \nu_i^{(0)} \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^i} = \nu_N \frac{\partial(N\Omega)}{\partial N} = \Omega = 0. \quad (4.40)$$

Seguindo o formalismo, tal vínculo é introduzido na parte cinética da densidade de Lagrangiana de primeira ordem, através do multiplicador de Lagrange τ [17]. Assim,

$$\mathcal{L}^{(1)} = P_a \dot{a} + P_T \dot{T} + \Omega \dot{\tau} - V^{(1)}(a, P_a, T, P_T). \quad (4.41)$$

Agora, $V^{(1)}(a, P_a, T, P_T) = V^{(0)}(a, P_a, T, P_T) = N\Omega$, τ é um multiplicador de Lagrange e $\xi_i^{(1)} = (a, P_a, T, P_T, N, \tau)$ são as novas variáveis simpléticas do sistema. Os momentos

canônicos 1-forma de primeira interação, relacionados à densidade de Lagrangeana (4.41), são identificados como,

$$A_a^{(1)} = P_a, \quad (4.42)$$

$$A_{P_a}^{(1)} = 0, \quad (4.43)$$

$$A_T^{(1)} = P_T, \quad (4.44)$$

$$A_{P_T}^{(1)} = 0, \quad (4.45)$$

$$A_N^{(1)} = 0, \quad (4.46)$$

$$A_\tau^{(1)} = \Omega. \quad (4.47)$$

Com essas informações e utilizando (4.10), obtêm-se os seguintes elementos de matriz,

$$f_{a\tau}^{(1)} = \frac{\partial A_\tau}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial \tau} = \frac{\partial \Omega}{\partial a}, \quad (4.48)$$

$$f_{P_a\tau}^{(1)} = \frac{\partial A_\tau}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial \tau} = \frac{\partial \Omega}{\partial P_a}, \quad (4.49)$$

$$f_{T\tau}^{(1)} = \frac{\partial A_\tau}{\partial T} - \frac{\partial A_T}{\partial \tau} = \frac{\partial \Omega}{\partial T}, \quad (4.50)$$

$$f_{P_T\tau}^{(1)} = \frac{\partial A_\tau}{\partial P_T} - \frac{\partial A_{P_T}}{\partial \tau} = \frac{\partial \Omega}{\partial P_T}, \quad (4.51)$$

$$f_{N\tau}^{(1)} = \frac{\partial A_\tau}{\partial N} - \frac{\partial A_N}{\partial \tau} = \frac{\partial \Omega}{\partial N}, \quad (4.52)$$

$$f_{\tau\tau}^{(1)} = \frac{\partial A_\tau}{\partial \tau} - \frac{\partial A_\tau}{\partial \tau} = 0. \quad (4.53)$$

Utilizando os resultados obtidos (4.11)-(4.31) e (4.48)-(4.53) obtêm-se a seguinte matriz simplética de primeira interação,

$$f^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial a} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial P_a} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial P_T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \Omega}{\partial a} & -\frac{\partial \Omega}{\partial P_a} & 0 & -\frac{\partial \Omega}{\partial P_T} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Esta matriz é singular e apresenta as seguintes equações à determinar o modo zero,

$$f^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial a} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial P_a} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial P_T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \Omega}{\partial a} & -\frac{\partial \Omega}{\partial P_a} & 0 & -\frac{\partial \Omega}{\partial P_T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

$$-b + f \frac{\partial \Omega}{\partial a} = 0 \Rightarrow b = f \frac{\partial \Omega}{\partial a}, \quad (4.56)$$

$$a + f \frac{\partial \Omega}{\partial P_a} = 0 \Rightarrow a = -f \frac{\partial \Omega}{\partial P_a}, \quad (4.57)$$

$$d = 0, \quad (4.58)$$

$$c + f \frac{\partial \Omega}{\partial P_T} = 0 \Rightarrow c = -f \frac{\partial \Omega}{\partial P_T}, \quad (4.59)$$

$$e = \forall, \quad (4.60)$$

$$-a \frac{\partial \Omega}{\partial a} - b \frac{\partial \Omega}{\partial P_a} - d \frac{\partial \Omega}{\partial P_T} = 0. \quad (4.61)$$

Substituindo (4.56), (4.57) e (4.59) em (4.61) obtêm-se,

$$f \frac{\partial \Omega}{\partial P_a} \frac{\partial \Omega}{\partial a} - f \frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial \Omega}{\partial P_a} = 0 \Rightarrow f = \forall. \quad (4.62)$$

Novamente, por questões de conveniência é escolhido $e = 1$ e $f = 1$. Logo, obtêm-se o seguinte modo zero de primeira interação,

$$\nu^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Omega}{\partial P_a} & \frac{\partial \Omega}{\partial a} & -\frac{\partial \Omega}{\partial P_T} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.63)$$

Repetindo o processo, já realizado, contraindo o modo zero de primeira interação (4.63) com o gradiente do potencial (4.3) obtêm-se,

$$\sum_{i=1}^6 \nu_i^{(1)} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \xi^i} = -N \frac{\partial \Omega}{\partial P_a} \frac{\partial \Omega}{\partial a} + N \frac{\partial \Omega}{\partial a} \frac{\partial \Omega}{\partial P_a} + \Omega = 0. \quad (4.64)$$

Conclui-se que o modo zero de primeira interação (4.63) fornece o mesmo vínculo já obtido em (4.40). Como já mencionado no capítulo 2, esta situação ocorre quando o sistema apresenta simetria de calibre. Neste caso, para prosseguir o formalismo, o calibre deve ser fixado e introduzido na densidade de Lagrangeana de interação zero (4.2) [17]. Como o calibre considerado é $N = 1$, sua fixação será introduzida na forma,

$$\Sigma = N - 1, \quad (4.65)$$

o que implica em $N = 1$. Novamente, usa-se um multiplicador de Lagrange η para a introdução do calibre (4.65). Logo,

$$\mathcal{L}^{(0)} = P_a \dot{a} + P_T \dot{T} + \Sigma \dot{\eta} - V^{(0)}(a, P_a, T, P_T). \quad (4.66)$$

Na densidade de Lagrangeana acima $V^{(0)}(a, P_a, T, P_T) = N\Omega$ e $\xi_i^{(0)} = (a, P_a, T, P_T, N, \eta)$ são as novas variáveis simpléticas do sistema.

Os momentos canônicos 1-forma de interação zero, relacionados a densidade de Lagrangeana (4.66), são identificados como,

$$A_a^{(0)} = P_a, \quad (4.67)$$

$$A_{P_a}^{(0)} = 0, \quad (4.68)$$

$$A_T^{(0)} = P_T, \quad (4.69)$$

$$A_{P_T}^{(0)} = 0, \quad (4.70)$$

$$A_N^{(0)} = 0, \quad (4.71)$$

$$A_\tau^{(0)} = \Omega, \quad (4.72)$$

$$A_\eta^{(0)} = \Sigma = N - 1. \quad (4.73)$$

Com essas informações e utilizando (4.10) obtêm-se os seguintes elementos de matriz,

$$f_{a\eta}^{(0)} = \frac{\partial A_\eta}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial \eta} = 0, \quad (4.74)$$

$$f_{P_a\eta}^{(0)} = \frac{\partial A_\eta}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial \eta} = 0, \quad (4.75)$$

$$f_{T\eta}^{(0)} = \frac{\partial A_\eta}{\partial T} - \frac{\partial A_T}{\partial \eta} = 0, \quad (4.76)$$

$$f_{P_T\eta}^{(0)} = \frac{\partial A_\eta}{\partial P_T} - \frac{\partial A_{P_T}}{\partial \eta} = 0, \quad (4.77)$$

$$f_{N\eta}^{(0)} = \frac{\partial A_\eta}{\partial N} - \frac{\partial A_N}{\partial \eta} = 1, \quad (4.78)$$

$$f_{\tau\eta}^{(0)} = \frac{\partial A_\eta}{\partial \tau} - \frac{\partial A_\tau}{\partial \eta} = 0, \quad (4.79)$$

$$f_{\eta\eta}^{(0)} = \frac{\partial A_\eta}{\partial \eta} - \frac{\partial A_\eta}{\partial \eta} = 0, \quad (4.80)$$

$$f_{N\eta}^{(0)} = -f_{\eta N}^{(1)} = -1. \quad (4.81)$$

Utilizando os resultados obtidos (4.11)-(4.31) e (4.74)-(4.81), obtêm-se a seguinte matriz simplética de interação zero,

$$f^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.82)$$

Agora, esta matriz é não singular e apresenta a seguinte inversa,

$$[f^{(0)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

No presente momento, de maneira geométrica, será introduzida a NC. Para introduzi-la, será suposto as seguintes relações entre os parênteses de Poisson, entre

as variáveis NC's,

$$\{a, T\} = \sigma, \quad (4.84)$$

$$\{P_a, P_T\} = \alpha, \quad (4.85)$$

$$\{a, P_T\} = \gamma, \quad (4.86)$$

$$\{T, P_a\} = \chi, \quad (4.87)$$

$$\{a, P_a\} = \{T, P_T\} = 1, \quad (4.88)$$

sendo σ , α , γ e χ os parâmetros NC's. Os parênteses de Poisson devem ser satisfeitos em primeira ordem nos parâmetros NC's, por isso, tais parâmetros devem ser pequenos. Substituindo as propostas (4.84)-(4.88) na inversa da matriz simplética (4.83) obtêm-se,

$$[f^{(0)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sigma & \gamma & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\chi & \alpha & 0 & 0 \\ -\sigma & \chi & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma & -\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.89)$$

A matriz simplética é encontrada a partir da inversa de (4.89). Este processo foi realizado no apêndice B. Finalmente, obtêm-se a seguinte matriz simplética,

$$f^{(0)} = \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\alpha & -\chi & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma & -\sigma & 0 & 0 \\ \alpha & -\gamma & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \chi & \sigma & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.90)$$

em que, $\Gamma = (\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma$ e $(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma \neq 0$.

Retornando à densidade de Lagrangiana de interação zero (4.66), definida pelas variáveis simpléticas $\xi_i^{(0)} = (a, P_a, T, P_T, N, \eta)$ e momentos 1-forma de interação zero não nulos $A_a^{(0)} = P_a, A_T^{(0)} = P_T, A_\eta^{(0)} = N - 1$, obtêm-se, utilizando (4.10) associada a matriz simplética (4.90) os seguintes elementos de matriz,

$$\frac{\partial A_{P_a}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial P_a} = 0 + \frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma}, \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial A_T}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial T} = 0 - \frac{\alpha}{\Gamma} = -\frac{\alpha}{\Gamma}, \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial A_{P_T}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial P_T} = 0 - \frac{\chi}{\Gamma} = -\frac{\chi}{\Gamma}, \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial A_{P_T}}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial P_T} = 0 - \frac{\sigma}{\Gamma} = -\frac{\sigma}{\Gamma}, \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial A_T}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial T} = 0 - \left(-\frac{\gamma}{\Gamma}\right) = \frac{\gamma}{\Gamma}, \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial A_{P_T}}{\partial T} - \frac{\partial A_T}{\partial P_T} = 0 - \left(-\frac{1}{\Gamma}\right) = \frac{1}{\Gamma}, \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial A_\eta}{\partial N} - \frac{\partial A_N}{\partial \eta} = 1 - 0 = 1. \quad (4.97)$$

No presente momento, com as informações obtidas e sabendo quem são as variáveis simpléticas do sistema, será proposta a seguinte densidade de Lagrangeana geral,

$$\tilde{\mathcal{L}} = A_a \dot{a} + A_{P_a} \dot{P}_a + A_T \dot{T} + A_{P_T} \dot{P}_T + A_\eta \dot{\eta} + A_N \dot{N} - N\Omega. \quad (4.98)$$

Para que o modelo ainda permaneça de segunda ordem nas velocidades, os momentos 1-forma mais gerais possíveis, relacionados a densidade de Lagrangeana (4.98), devem ser dados por ¹,

$$A_a(P_a, T, P_T) = bP_a + cT + dP_T, \quad (4.99)$$

$$A_{P_a}(a, T, P_T) = ea + fT + gP_T, \quad (4.100)$$

$$A_T(a, P_a, P_T) = ha + iP_a + jP_T, \quad (4.101)$$

$$A_{P_T}(a, P_a, T) = ka + lP_a + mT, \quad (4.102)$$

$$A_N(\eta) = n\eta, \quad (4.103)$$

$$A_\eta(N) = oN + p. \quad (4.104)$$

Nas equações acima, $b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o$ e p são os coeficientes a serem determinadas.

As equações (4.91)-(4.97) são resolvidas após as substituições de (4.99)-(4.104).

Ou seja,

$$\frac{\partial A_{P_a}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial P_a} = e - b = \frac{1}{\Gamma} \Rightarrow e = \frac{2}{\Gamma}, \quad b = \frac{1}{\Gamma}, \quad (4.105)$$

$$\frac{\partial A_T}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial T} = h - c = -\frac{\alpha}{\Gamma} \Rightarrow h = \frac{\alpha}{\Gamma}, \quad c = \frac{2\alpha}{\Gamma}, \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial A_{P_T}}{\partial a} - \frac{\partial A_a}{\partial P_T} = k - d = -\frac{\chi}{\Gamma} \Rightarrow k = \frac{\chi}{\Gamma}, \quad d = \frac{2\chi}{\Gamma}, \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial A_{P_T}}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial P_T} = l - g = -\frac{\sigma}{\Gamma} \Rightarrow l = \frac{\sigma}{\Gamma}, \quad g = \frac{2\sigma}{\Gamma}, \quad (4.108)$$

$$\frac{\partial A_T}{\partial P_a} - \frac{\partial A_{P_a}}{\partial T} = i - f = \frac{\gamma}{\Gamma} \Rightarrow i = \frac{2\gamma}{\Gamma}, \quad f = \frac{\gamma}{\Gamma}, \quad (4.109)$$

$$\frac{\partial A_{P_T}}{\partial T} - \frac{\partial A_T}{\partial P_T} = m - j = \frac{1}{\Gamma} \Rightarrow m = \frac{2}{\Gamma}, \quad j = \frac{1}{\Gamma}, \quad (4.110)$$

$$\frac{\partial A_\eta}{\partial N} - \frac{\partial A_N}{\partial \eta} = o - n = 1 \Rightarrow o = 2, \quad n = 1. \quad (4.111)$$

¹ Devem ser escolhidos dessa forma para não originar termos de segunda ordem do tipo $P_a \dot{P}_a = 1/2(P_a^2)$ etc.

Substituindo os resultados encontrados (4.105)-(4.111) em (4.99)-(4.104) obtêm-se,

$$A_a = \frac{1}{\Gamma} (P_a + 2\alpha T + 2\chi P_T), \quad (4.112)$$

$$A_{P_a} = \frac{1}{\Gamma} (2a + \gamma T + 2\sigma P_T), \quad (4.113)$$

$$A_T = \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + 2\gamma P_a + P_T), \quad (4.114)$$

$$A_{P_T} = \frac{1}{\Gamma} (\chi a + \sigma P_a + 2T), \quad (4.115)$$

$$A_N = \eta, \quad (4.116)$$

$$A_\eta = 2N + p. \quad (4.117)$$

A densidade de Lagrangeana (4.98) para os modelos cosmológicos de HL NC's, após as substituições de (4.112)-(4.117), fica,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{\Gamma} (P_a + 2\alpha T + 2\chi P_T) \dot{a} + \frac{1}{\Gamma} (2a + \gamma T + 2\sigma P_T) \dot{P}_a \\ &+ \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + 2\gamma P_a + P_T) \dot{T} + \frac{1}{\Gamma} (\chi a + \sigma P_a + 2T) \dot{P}_T \\ &+ \eta \dot{N} + (2N + p) \dot{\eta} - N\Omega. \end{aligned} \quad (4.118)$$

É importante perceber que a densidade de Lagrangeana acima apresenta alguns termos envolvendo derivadas temporais das velocidades \dot{a} e \dot{T} . Para eliminar essa inconsistência, que significa termos acelerações na Lagrangeana, basta considerar apenas os seguintes termos de primeira ordem,

$$A_{P_a} = \frac{1}{\Gamma} (2a + \gamma T), \quad (4.119)$$

$$A_{P_T} = \frac{1}{\Gamma} (\chi a + 2T). \quad (4.120)$$

Assim, a densidade de Lagrangeana (4.118) é reduzida à,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{\Gamma} (P_a + 2\alpha T + 2\chi P_T) \dot{a} + \frac{1}{\Gamma} (2a + \gamma T) \dot{P}_a \\ &+ \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + 2\gamma P_a + P_T) \dot{T} + \frac{1}{\Gamma} (\chi a + 2T) \dot{P}_T \\ &+ \eta \dot{N} + (2N + p) \dot{\eta} - N\Omega. \end{aligned} \quad (4.121)$$

Os termos restantes de segunda ordem nas velocidades são eliminados após integrações por partes. Realizando este processo, considerando $p = -1$ e reorganizando os termos, a densidade de Lagrangeana (4.121) fica,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} &= \frac{1}{\Gamma} (-P_a + 2\alpha T + \chi P_T) \dot{a} + \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + \gamma P_a - P_T) \dot{T} + (N - 1) \dot{\eta} - N\Omega \\ &= \tilde{P}_a \dot{a} + \tilde{P}_T \dot{T} + \Sigma \dot{\eta} - N\Omega. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Como será destacado em seguida, é importante mencionar que o formalismo de FJ introduziu de maneira natural variáveis não-comutativas em termos das variáveis comutativas

mais os parâmetros NC's. Isto quer dizer que, transformações de coordenadas, surgiram de maneira natural a partir da densidade de Lagrangeana (4.122). Estas transformações são dadas por,

$$\tilde{a} = a, \quad (4.123)$$

$$\tilde{T} = T, \quad (4.124)$$

$$\tilde{P}_a = \frac{1}{\Gamma} (-P_a + 2\alpha T + \chi P_T), \quad (4.125)$$

$$\tilde{P}_T = \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + \gamma P_a - P_T), \quad (4.126)$$

sendo \tilde{a} , \tilde{T} , \tilde{P}_a e \tilde{P}_T as coordenadas comutativas.

No presente momento é importante verificar a validade, em primeira ordem dos parâmetros NC's, dos Parênteses de Poisson, considerando as NC's introduzidas (4.84)-(4.88). Esta validade é verificada no apêndice B.

De acordo com a transformação (4.123) e (4.124), conclui-se que $\sigma = 0$. Somando equação (4.126) com a equação (4.125) multiplicada por γ explicar melhor e considerando apenas os termos em primeira ordem dos parâmetros NC's obtêm-se,

$$P_T = \tilde{P}_T + \gamma \tilde{P}_a + \alpha a. \quad (4.127)$$

De maneira análoga, fazendo (4.125) + λ (4.126) obtêm-se,

$$P_a = \tilde{P}_a + \chi \tilde{P}_T + 2\alpha T. \quad (4.128)$$

Substituindo (4.127) e (4.128) em (4.1) obtêm-se finalmente a densidade de Hamiltoniana da teoria NC, escrita em termos das coordenadas comutativas mais os parâmetros NC's, no calibre $N = 1$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= -\frac{1}{4a} \left(\tilde{P}_a + \chi \tilde{P}_T + 2\alpha T \right)^2 - kg_c a + g_\Lambda a^3 + k^2 \frac{g_r}{a} + k^3 \frac{g_s}{a^3} \\ &+ \frac{1}{a^{3\alpha}} \left(\tilde{P}_T + \gamma \tilde{P}_a + \alpha a \right). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Utilizando a densidade de Hamiltoniana NC (4.129), obtêm-se as seguintes equações de Hamilton para os modelos NC's, em primeira ordem dos parâmetros NC's,

$$\dot{a} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{P}_a} \frac{\partial a}{\partial a} = -\frac{1}{2a} \left(\tilde{P}_a + \chi \tilde{P}_T + 2\alpha T \right) + \frac{\gamma}{a^{3\omega}}, \quad (4.130)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}_a &= -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial a} \frac{\partial \tilde{P}_a}{\partial \tilde{P}_a} = -\frac{1}{4a^2} \left(\tilde{P}_a^2 + 2\chi \tilde{P}_a \tilde{P}_T + 4\alpha \tilde{P}_a T \right) + kg_c - 3g_\Lambda a^2 + k^2 \frac{g_r}{a^2} + 3k^3 \frac{g_s}{a^4} \\ &+ \frac{3\omega}{a^{(3\omega+1)}} \left(\tilde{P}_T + \gamma \tilde{P}_a \right) + (3\omega - 1) \frac{\alpha}{a^{3\omega}}, \end{aligned} \quad (4.131)$$

$$\dot{T} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{P}_T} \frac{\partial T}{\partial T} = \frac{1}{a^{3\omega}} - \frac{\chi \tilde{P}_a}{2a}, \quad (4.132)$$

$$\dot{\tilde{P}}_T = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial T} \frac{\partial \tilde{P}_T}{\partial \tilde{P}_T} = \frac{\alpha \tilde{P}_a}{a}. \quad (4.133)$$

Essas são as equações de Hamilton para o caso mais geral possível.

4.3 NÃO-COMUTATIVIDADE DO TIPO $\sigma = \gamma = \chi = 0$

Na presente seção, por questões de simplicidade, será escolhida um tipo particular de NC em que os parêntese de Poisson (4.84)-(4.88), entre as variáveis NC's, se reduzem à,

$$\{a, T\} = 0, \quad (4.134)$$

$$\{P_a, P_T\} = \alpha, \quad (4.135)$$

$$\{a, P_T\} = 0, \quad (4.136)$$

$$\{T, P_a\} = 0, \quad (4.137)$$

$$\{a, P_a\} = \{T, P_T\} = 1. \quad (4.138)$$

Isso quer dizer que $\sigma = \gamma = \chi = 0$. A NC tratada a partir daqui é a mesma considerada em [17], nos modelos cosmológicos de RG NC's. Substituindo as escolhas das NC's (4.134)-(4.138) nas equações de Hamilton (4.130)-(4.133) obtêm-se, em primeira ordem no parâmetro NC,

$$\dot{a} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{P}_a} \frac{\partial a}{\partial a} = -\frac{1}{2a} (\tilde{P}_a + 2\alpha T), \quad (4.139)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}}_a &= -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial a} \frac{\partial \tilde{P}_a}{\partial \tilde{P}_a} = -\frac{1}{4a^2} (\tilde{P}_a^2 + 4\alpha \tilde{P}_a T) + kg_c - 3g_\Lambda a^2 + k^2 \frac{g_r}{a^2} + 3k^3 \frac{g_s}{a^4} \\ &+ \frac{3\omega}{a^{(3\omega+1)}} \tilde{P}_T + (3\omega - 1) \frac{\alpha}{a^{3\omega}}, \end{aligned} \quad (4.140)$$

$$\dot{T} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial \tilde{P}_T} \frac{\partial T}{\partial T} = \frac{1}{a^{3\omega}}, \quad (4.141)$$

$$\dot{\tilde{P}}_T = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial T} \frac{\partial \tilde{P}_T}{\partial \tilde{P}_T} = \frac{\alpha \tilde{P}_a}{a}. \quad (4.142)$$

Fazendo $2\alpha(4.139) + (4.142)$ e eliminando os termos de ordem superiores,

$$\begin{aligned} 2\alpha\dot{a} + \dot{\tilde{P}}_T &= 0 \\ \int (2\alpha\dot{a} + \dot{\tilde{P}}_T) dt &= C \\ 2\alpha a + \tilde{P}_T &= C \\ \tilde{P}_T &= C - 2\alpha a. \end{aligned} \quad (4.143)$$

Isolando \tilde{P}_a em (4.139) obtém-se,

$$\tilde{P}_a = -2a\dot{a} - 2\alpha T. \quad (4.144)$$

Substituindo (4.140), (4.141), (4.143), (4.144) na derivada temporal de (4.139), e eliminando os termos de ordem superiores no parâmetro NC, encontra-se a seguinte equação de segunda ordem no tempo para o fator de escala,

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} = -\frac{1}{2a} \left\{ kg_c - 3g_\Lambda a^2 + k^2 \frac{g_r}{a^2} + 3k^3 \frac{g_s}{a^4} + \frac{3\omega C}{a^{(3\omega+1)}} + \frac{\alpha}{a^{3\omega}} [-3\omega + 1] \right\} \quad (4.145)$$

Ao substituir as quantidades (4.143), (4.144) na densidade de Hamiltoniana (4.129), impondo a condição de vínculo, e considerando apenas os termos de primeira ordem no parâmetro NC, obtêm-se a seguinte equação de Friedmann,

$$\tilde{\mathcal{H}} = \dot{a}^2 + kg_c - g_\Lambda a^2 - k^2 \frac{g_r}{a^2} - k^3 \frac{g_s}{a^4} - \frac{C}{a^{3\omega+1}} + \frac{\alpha}{a^{3\omega}} = 0, \quad (4.146)$$

onde identifica-se o seguinte potencial dos modelos cosmológicos NC's,

$$\tilde{V}(a) = kg_c - g_\Lambda a^2 - k^2 \frac{g_r}{a^2} - k^3 \frac{g_s}{a^4} - \frac{C}{a^{3\omega+1}} + \frac{\alpha}{a^{3\omega}}. \quad (4.147)$$

Estas são as equações de movimento para o fator de escala dos modelos cosmológicos NC's na teoria gravitacional de HL. A partir do presente momento, será utilizado o potencial (4.147) para estudar as soluções dos modelos cosmológicos comutativos e NC's referentes à gravitação de HL, no próximo capítulo. O caso comutativo é recuperado fazendo $\alpha = 0$ e $C = P_T$ em (4.147). Por questões de simplicidade, será omitido o sobrescrito em (4.147), ou seja, será denotado que $\tilde{V}(a) = V(a)$.

Os resultados referentes à introdução da NC (4.135)-(4.138) e as soluções das equações de movimento (4.145)-(4.146), para os modelos cosmológicos de HL NC's, serão exploradas no capítulo seguinte.

5 RESULTADOS OBTIDOS DOS MODELOS COSMOLÓGICOS DE HL NC's

5.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo será obtida a lei da conservação de energia dos modelos cosmológicos NC's em que o termo NC das equações de movimentos será interpretado como um fluido perfeito NC. Além disso, serão obtidas as equações de estado e da conservação de energia para tal fluido NC. Também serão obtidas as soluções das equações de movimento para diferentes tipos de fluidos perfeitos. Algumas destas soluções serão utilizadas na tentativa de explicar a atual expansão acelerada do Universo. Estas soluções serão apresentadas por meio de comparações entre as soluções não-comutativas e suas correspondentes comutativas. Em seguida será obtida uma estimativa para o parâmetro NC, baseada nos dados observacionais atuais.

5.2 O FLUIDO PERFEITO NC

É importante mencionar que através das equações de movimento (4.145)-(4.146), para os modelos comutativos ($\alpha = 0$), é possível obter uma equação de conservação de energia. Para este caso, esta equação é obtida no apêndice B. De maneira análoga, será obtida e analisada uma equação de conservação de energia para os modelos cosmológicos NC's. Esta equação resultará no que será denominado fluido NC.

Através da equação de Friedmann (C.1), que é equivalente a (4.146), será considerada como densidade de energia do fluido NC a seguinte quantidade,

$$\vartheta = -\frac{\alpha}{a^{3\omega+2}}. \quad (5.1)$$

Substituindo (5.1) na equação da conservação da energia (C.7) obtém-se,

$$\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\alpha}{a^{3\omega+2}} (3\omega - 1) + 3\tilde{p} \right) = 0. \quad (5.2)$$

Como $\dot{a} \neq 0$ e $a \neq 0$ em, quaisquer instante de tempo,

$$\tilde{p} = \tilde{\gamma}\vartheta = \frac{1}{3} (3\omega - 1) \left(-\frac{\alpha}{a^{3\omega+2}} \right). \quad (5.3)$$

Nesta equação, \tilde{p} é a pressão do fluido NC. Ou seja, o fluido NC apresenta uma equação de estado $\tilde{p} = \tilde{\gamma}\vartheta$, sendo $\tilde{\gamma}$ uma constante do tipo $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\omega)$. Isso quer dizer que o fluido NC depende do fluido perfeito com equação de estado $p = \omega\rho$. A verificação do presente resultado é realizada substituindo (5.3) em (C.9). Ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{3(\vartheta + \tilde{p})} &= -\frac{da}{a} \\ \frac{d\vartheta}{3\left(\vartheta + \frac{1}{3}(3\omega - 1)\vartheta\right)} &= -\frac{da}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vartheta}{\vartheta(2+3\omega)} &= -\frac{da}{a} \\
\frac{d\vartheta}{\vartheta} &= -(2+3\omega)\frac{da}{a} \\
\ln\vartheta &= -(2+3\omega)\ln a + B.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Na solução acima B é uma constante de integração. Através de algumas manipulações a solução (5.4) se transforma em,

$$\begin{aligned}
\ln\vartheta + (2+3\omega)\ln a &= B \\
\ln(\vartheta a^{3\omega+2}) &= B \\
\vartheta a^{3\omega+2} &= e^B.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

No instante inicial em que $t = 0$ são considerados $\vartheta(t = 0) = \vartheta_0$ e $a(t = 0) = a_0$, logo,

$$\vartheta_0 a_0^{3\omega+2} = e^B. \tag{5.6}$$

Substituindo a constante de integração (5.6) em (5.5) obtêm-se,

$$\begin{aligned}
\vartheta a^{3\omega+2} &= \vartheta_0 a_0^{3\omega+2} \\
\vartheta &= \vartheta_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\omega+2}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Mas, de acordo com (5.1), é preciso considerar o sinal negativo da densidade de energia ϑ . Assim,

$$\vartheta = -\vartheta_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3\omega+2}. \tag{5.8}$$

Como pode-se perceber o presente resultado está de acordo com (5.1) onde ϑ_0 pode assumir valores positivos ou negativos, a_0 apenas valores positivos e $\alpha = \vartheta_0 a_0^{3\omega+2}$. Isso quer dizer que a constante α apresenta uma relação com a densidade de energia ϑ do fluido NC. Como já mencionado tal relação é do tipo (5.1).

5.2.1 O fluido perfeito NC e o setor de matéria

A presente seção refere-se ao estudo do fluido NC, através de (5.3), na presença de seis fluidos perfeitos diferentes. São eles: matéria rígida, radiação, poeira, cordas cósmicas, paredes de domínio e constante cosmológica. Estes fluidos apresentam respectivamente os seguintes valores para a constante ω : $(1, 1/3, 0, -1/3, -2/3, -1)$. Serão considerados os mesmos fluidos ao estudar as soluções dos modelos cosmológicos, no capítulo seguinte.

5.2.1.1 Matéria Rígida: $\omega = 1$

Para o modelo NC com o setor de matéria descrito por matéria rígida em que $\omega = 1$ o fluido NC apresentará a seguinte pressão,

$$\tilde{p}_{MR} = \frac{1}{3}(3-1)\left(-\frac{\alpha}{a^{3+2}}\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{\alpha}{a^5}\right). \tag{5.9}$$

5.2.1.2 *Radiação: $\omega = 1/3$*

Para o modelo NC com o setor de matéria descrito por radiação em que $\omega = 1/3$ o fluido NC apresentará a seguinte pressão,

$$\tilde{p}_R = \frac{1}{3}(1-1)\left(-\frac{\alpha}{a^3}\right) = 0. \quad (5.10)$$

5.2.1.3 *Poeira: $\omega = 0$*

Para o modelo NC com o setor de matéria descrito por poeira em que $\omega = 0$ o fluido NC apresentará a seguinte pressão,

$$\tilde{p}_P = \frac{1}{3}(0-1)\left(-\frac{\alpha}{a^2}\right) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{\alpha}{a^2}\right). \quad (5.11)$$

5.2.1.4 *Cordas Cóslicas: $\omega = -1/3$*

Para o modelo NC com o setor de matéria descrito por cordas cósmicas em que $\omega = -1/3$ o fluido NC apresentará a seguinte pressão,

$$\tilde{p}_{CC} = \frac{1}{3}(-1-1)\left(-\frac{\alpha}{a^{-1+2}}\right) = -\frac{2}{3}\left(-\frac{\alpha}{a}\right). \quad (5.12)$$

5.2.1.5 *Paredes de Domínio: $\omega = -2/3$*

Para o modelo NC com o setor de matéria descrito por paredes de domínio em que $\omega = -2/3$ o fluido NC apresentará a seguinte pressão,

$$\tilde{p}_{PD} = \frac{1}{3}(-2-1)\left(-\frac{\alpha}{a^{-2+2}}\right) = -(-\alpha). \quad (5.13)$$

5.2.1.6 *Constante Cosmológica: $\omega = -1$*

Para o modelo NC com o setor de matéria descrito por constante cosmológica em que $\omega = -1$ o fluido NC apresentará a seguinte pressão,

$$\tilde{p}_\Lambda = \frac{1}{3}(-3-1)\left(-\frac{\alpha}{a^{-3+2}}\right) = -\frac{4}{3}(-\alpha a). \quad (5.14)$$

Como pode-se perceber, quando $\alpha > 0$ o fluido NC apresenta pressão negativa ($\tilde{p} < 0$) apenas para matéria rígida ($\omega = 1$), sendo pressão nula ($\tilde{p} = 0$) para radiação ($\omega = 1/3$) e positiva ($\tilde{p} > 0$) para os restantes ($\omega < 1/3$). Isso quer dizer que o fluido NC com pressão negativa terá maior influência nos estágios iniciais do Universo. Por outro lado, quando $\alpha < 0$ o fluido NC com matéria rígida ($\omega = 1$) é o único que apresenta pressão positiva ($\tilde{p} > 0$), sendo pressão nula ($\tilde{p} = 0$) para radiação ($\omega = 1/3$) e negativa ($\tilde{p} < 0$) para os restantes ($\omega < 1/3$). Isso quer dizer que o fluido NC com pressão negativa terá maior influência nos estágios mais atuais do Universo.

É fundamental mencionar que a introdução da NC (4.134)-(4.138) foi feita de maneira geométrica, conseqüentemente resultou em um termo geométrico adicional envolvendo o parâmetro NC, definido por α , nas equações de movimento (4.145)-(4.146). Este termo, pode ser interpretado como um fluido perfeito NC. Dessa forma, apesar do termo adicional ser de origem geométrica, pode ser relacionado com o setor de matéria dos modelos cosmológicos NC's.

5.3 SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

A análise dos resultados foi realizada de maneira numérica e detalhada através de comparações entre os potenciais dos modelos NC's e seus correspondentes comutativos. Além disso, também foram comparados as possíveis soluções das equações de movimento correspondentes aos respectivos potenciais de ambas as teorias. O estudo é baseado no potencial (4.147) e nas equações de movimento (4.145)-(4.146), no *gauge* $N = 1$. É importante destacar que as equações para o modelo comutativo são obtidas fazendo $\alpha = 0$ e $C = P_T$.

Como já mencionado a equação de Friedmann (4.146) é resolvida de maneira numérica, porém, em alguns casos ela não fornecerá a solução devido à necessidade de mais uma condição inicial. Nos casos ressaltados acima a equação que requer duas condições iniciais, e que será utilizada, é a equação da aceleração do fator de escala (4.145). As condições iniciais $a(t = 0)$ para a equação de Friedmann (4.146) serão obtidas através do comportamento qualitativo do potencial (4.147). Já para a equação da aceleração do fator de escala (4.145) as condições iniciais $a(t = 0)$ e $\dot{a}(t = 0)$ serão obtidas através do comportamento qualitativo do potencial (4.147) e da equação de Friedmann (4.146) respectivamente. É importante destacar que na análise qualitativa realizada foram considerados apenas os pontos críticos e raízes dos potenciais com valores positivos. Dessa forma, os fatores de escala sempre terão condição inicial $a(t = 0) > 0$ e sofrerão inicialmente uma expansão dada por $\dot{a}(t = 0) > 0$.

Serão destacados apenas os casos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvaturas não nula, pois, o caso de curvatura nula reduz os presentes modelos nos descritos pela RG em [17].

Primeiramente é importante destacar duas características dos modelos cosmológicos de HL estudados no presente trabalho. Através do potencial (4.147) percebe-se que quando o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$) e sendo o parâmetro g_s positivo ($g_s > 0$), $\lim_{a \rightarrow 0^+} V(\omega, \alpha, a) = -\infty$ independente do fluido perfeito considerado no presente texto. Isso quer dizer que os Universos obtidos por esses modelos apresentam fatores de escala com singularidades iniciais do tipo *Big Bang*. Tal característica também está presente nos modelos cujo espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$) e parâmetro g_s negativo ($g_s < 0$). Outra

característica importante a ser mencionada é que nos casos onde há a combinação $k = 1$ e $g_s < 0$ e também $k = -1$ e $g_s > 0$, $\lim_{a \rightarrow 0^+} V(\omega, \alpha, a) = \infty$ independente do fluido perfeito considerado no presente texto. Isso quer dizer que os fatores de escalas dos Universos obtidos por esses modelos não apresentam singularidades iniciais do tipo *Big Bang*.

É importante mencionar que independente do tipo de matéria considerado no presente texto o potencial (4.147) poderá não apresentar raiz, apresentar apenas uma, duas ou no máximo três raízes reais e positivas. Além disso pode não apresentar ponto crítico, apresentar apenas um ou no máximo dois pontos críticos reais e positivos.

Uma das questões mais importantes que fundamenta o presente trabalho e que merece destaque é a possível influência da NC no comportamento qualitativo dos fatores de escala impedindo que esses evoluam no tempo para singularidades do tipo *Big Crunch*. Ou seja, a NC pode evitar que o Universo, dadas suas condições iniciais, entre em colapso. Também existe a possibilidade da NC influenciar na existência de Universos quando esses não são previstos pela teoria comutativa. Essas mudanças nos comportamentos qualitativos dos fatores de escala resultam do fato da NC reduzir ou aumentar o número de raízes (pontos de retorno) do potencial (4.147). Como os resultados de interesse são principalmente motivados pela expansão acelerada do Universo, serão destacados os casos em que ambas as teorias, comutativa e NC, apresentam Universos em que os fatores de escala expandem infinitamente a partir das condições iniciais. Dentre estes casos, será visto que em diversas situações, a teoria NC apresenta um fator de escala com taxa de expansão mais rápida quando comparado ao obtido pela teoria comutativa. Essa situação junto as mencionadas anteriormente ocorrerão nos casos em que o parâmetro NC atua diminuindo o valor do potencial (4.147), ou seja, $\alpha < 0$. Além disso, outra motivação para que $\alpha < 0$ refere-se ao fluido NC. Neste caso, a densidade de energia (5.1) será positiva.

A partir dos argumentos utilizados serão considerados e apresentados no presente texto os modelos cosmológicos acoplados a seis diferentes fluidos perfeitos com equação de estado $p = \omega\rho$. São eles: matéria rígida, radiação, poeira, cordas cósmicas, paredes de domínio e constante cosmológica. Estes fluidos apresentam respectivamente os seguintes valores para a constante ω : $(1, 1/3, 0, -1/3, -2/3, -1)$. Além disso, também serão apresentados apenas os resultados referentes ao valor negativo do parâmetro NC ($\alpha < 0$).

5.3.1 Matéria Rígida: $\omega = 1$

5.3.1.1 Curvatura positiva $k = 1$

Para os modelos cujo espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$) e cujo setor de fluido perfeito é caracterizado por matéria rígida o potencial (4.147) assume a forma,

$$V_{MR}(k = 1, \omega = 1, a) = g_c - g_\Lambda a^2 - \frac{g_r}{a^2} - \frac{\Omega}{a^4} + \frac{\alpha}{a^3}. \quad (5.15)$$

Neste caso o setor do fluido perfeito acopla com a constante g_s . Logo, $\Omega = g_s + C$.

A equação de Friedmann (4.146) fica,

$$\dot{a}^2 + g_c - g_\Lambda a^2 - \frac{g_r}{a^2} - \frac{\Omega}{a^4} + \frac{\alpha}{a^3} = 0, \quad (5.16)$$

e a equação da aceleração do fator de escala (4.145),

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \left[g_c - 3g_\Lambda a^2 + \frac{g_r}{a^2} + 3\frac{\Omega}{a^4} - 2\frac{\alpha}{a^3} \right] = 0. \quad (5.17)$$

Por questões didáticas e de conveniência os resultados obtidos, apresentados em seguida, foram agrupados de acordo com o sinal do parâmetro g_Λ e também com a combinação entre os sinais dos parâmetros g_r e Ω .

5.3.1.1.1 *Caso* $g_\Lambda > 0$

a) $g_r > 0, \Omega > 0$

Para os modelos que apresentam a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r > 0$ e $\Omega > 0$ foram obtidos resultados em que os potenciais de ambas as teorias divergem para $-\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$, apresentam um crescimento até um ponto de máximo seguido de um decrescimento com uma divergência para $-\infty$ quando $a \rightarrow +\infty$. O ponto de máximo do potencial comutativo é dado por a_{c1} e o valor do potencial nesse ponto é positivo ($V_c(a_{c1}) > 0$). Além disso, o potencial comutativo apresenta duas raízes dadas por a_{cr1} e a_{cr2} tal que $a_{cr2} > a_{cr1}$. O ponto de máximo do potencial NC é dado por a_{nc1} e o valor do potencial nesse ponto é negativo ($V_{nc}(a_{nc1}) < 0$). Além disso, o potencial NC não apresenta nenhuma raiz. Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 1. O fato do potencial comutativo possuir duas raízes implica que os Universos obtidos pela teoria comutativa apresentarão fatores de escala com dois tipos de comportamentos distintos que dependerão das condições iniciais utilizadas. Já o fato do potencial NC não apresentar nenhuma raiz implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento independente das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.17) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]0, a_{cr1}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.16) a teoria comutativa deu origem a Universos em que os fatores de escala expandem inicialmente a partir da singularidade do *Big Bang* até um tamanho máximo dado por a_{cr1} , em seguida, sofrem contração até uma singularidade do tipo *Big Crunch* em um tempo t finito. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala expandem infinitamente em um tempo infinito a partir da singularidade do *Big Bang*. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 1 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 2. Ao

utilizar a equação de movimento (5.16) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{cr2}, +\infty[$ ambas as teorias deram origem a Universos em que os fatores de escala expandem infinitamente em um tempo infinito a partir da condição inicial $a(t = 0)$. Neste caso, o fator de escala da teoria NC apresenta uma taxa de expansão mais rápida quando comparado ao da teoria comutativa. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 1 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 3.

b) $g_r < 0, \Omega > 0$

Para os modelos que apresentam a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $\Omega > 0$ foram obtidos resultados em que os potenciais e os correspondentes fatores de escala de ambas as teorias apresentaram os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda > 0$
$g_r < 0$ e $\Omega > 0$
Figuras 1, 2 e 3.

Tabela 1 – Resultados obtidos pelos modelos com matéria rígida, curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda > 0$ e combinações de sinais entre os parâmetros $g_r < 0, \Omega > 0$.

c) $g_r > 0, \Omega < 0$

Para os modelos que apresentam a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r > 0$ e $\Omega < 0$ foram obtidos resultados em que os potenciais de ambas as teorias divergem para $+\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$, apresentam um decrescimento até um ponto de mínimo, seguido de um crescimento até um ponto de máximo, e novamente um decrescimento com uma divergência para $-\infty$ quando $a \rightarrow +\infty$ ¹. Os pontos de mínimo e máximo do potencial comutativo são dados por a_{c1} e a_{c2} respectivamente sendo positivos os valores do potencial nesses pontos ($V_c(a_{c1}) > 0$ e $V_c(a_{c2}) > 0$) e respeitando a relação $V_c(a_{c2}) > V_c(a_{c1})$. Além disso, tal potencial apresenta apenas uma raiz dada por a_{cr1} . Os pontos de mínimo e máximo do potencial NC são dados por a_{nc1} e a_{nc2} respectivamente sendo os valores do potencial nesses pontos negativo ($V_{nc}(a_{nc1}) < 0$) e positivo ($V_{nc}(a_{nc2}) > 0$). Além disso, tal potencial apresenta três raízes dadas por a_{ncr1}, a_{ncr2} e a_{ncr3} , tal que $a_{ncr3} > a_{ncr2} > a_{ncr1}$. Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 4. O fato do potencial comutativo possuir apenas uma raiz implica que os Universos obtidos pela teoria comutativa apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Já o fato do potencial NC possuir três raízes implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com dois comportamentos distintos que dependerão das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.17) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{ncr1}, a_{ncr2}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.16) a teoria comutativa não deu origem a nenhum tipo de Universo. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam comportamento oscilatório entre máximos e mínimos. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 4 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 5. Ao utilizar a equação de movimento (5.16) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$ ambas as teorias deram origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo tipo de comportamento qualitativo descrito pela Figura 3. Tais comportamentos são representados pela Figura 6. Ainda no mesmo caso em que há a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r > 0$ e $\Omega < 0$ foram obtidos resultados em que os valores do potencial comutativo nos pontos de mínimo e máximo são negativo ($V_c(a_{c1}) < 0$) e positivo ($V_c(a_{c2}) > 0$) respectivamente. Além disso, tal potencial apresenta três raízes dadas por a_{cr1}, a_{cr2} e a_{cr3} , tal que $a_{cr3} > a_{cr2} > a_{cr1}$. Já os valores do potencial NC nos pontos de mínimo e máximo são negativos ($V_{nc}(a_{nc1}) < 0$ e $V_{nc}(a_{nc2}) < 0$) respeitando a relação $V_c(a_{nc2}) > V_c(a_{nc1})$. Além disso, tal potencial apresenta apenas uma raiz dada por a_{ncr1} . Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 7. O fato do potencial comutativo possuir três raízes implica que os Universos obtidos pela teoria comutativa apresentarão fatores de escala

¹ Nesses casos os Universos obtidos não apresentam singularidades do *Big Bang*.

com dois comportamentos distintos que dependerão das condições iniciais utilizadas. Já o fato do potencial NC possuir apenas uma raiz implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.17) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{cr1}, a_{cr2}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.16) a teoria comutativa deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 5. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala expandem infinitamente em um tempo infinito a partir da condição inicial $a(t=0)$. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 7 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 8. Ao utilizar a equação de movimento (5.16) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{cr3}, +\infty[$ ambas as teorias deram origem a Universos em que os fatores de escala apresentam os mesmos comportamentos qualitativos descrito pela Figura 3. Tais comportamentos são representadas pelas Figuras 9.

d) $g_r < 0, \Omega < 0$

Para os modelos que apresentam a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $\Omega < 0$ foram obtidos resultados em que os potenciais de ambas as teorias divergem para $+\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$ e para $-\infty$ quando $a \rightarrow \infty$ ². O potencial comutativo apresenta apenas um decrescimento e uma raiz dada por a_{cr1} , enquanto, o potencial NC apresenta o mesmo comportamento qualitativo descrito no caso NC pela Figura 4. Os comportamentos descritos acima são representados pela Figura 10. O fato do potencial comutativo possuir apenas uma raiz implica que os Universos obtidos pela teoria comutativo apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Já o fato do potencial NC possuir três raízes implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com dois tipos de comportamentos distintos que dependerão das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.17) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{ncr1}, a_{ncr2}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.16) a teoria comutativa não deu origem a nenhum tipo de Universo. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo representado pela Figura 5. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 10 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 11. Ao utilizar a equação de movimento (5.16) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$ ambas as teorias deram origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo

² Nesses casos os Universos obtidos não apresentam singularidades do *Big Bang*.

comportamento qualitativo descrito pela Figura 3. Tais comportamentos são representados pela Figura 12.

5.3.1.1.2 *Caso* $g_\Lambda < 0$

a) $g_r > 0$ e $\Omega < 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$), constantes de acoplamento $g_\Lambda < 0$ e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), os únicos casos que apresentaram diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foram as combinações de sinais entre os parâmetros $g_r > 0$ e $\Omega < 0$ e também $g_r < 0$ e $\Omega < 0$. Nesses casos foram obtidos resultados em que os potenciais de ambas as teorias divergem para $+\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$, apresentam um decrescimento até um ponto de mínimo seguido de um crescimento com uma divergência para $+\infty$ quando $a \rightarrow +\infty$ ³. O ponto de mínimo do potencial comutativo é dado por a_{c1} sendo positivo o valor do potencial nesse ponto ($V_c(a_{c1}) > 0$). Além disso, tal potencial não apresenta raiz. O ponto de mínimo do potencial NC é dado por a_{nc1} sendo negativo o valor do potencial nesse ponto ($V_{nc}(a_{nc1}) < 0$). Além disso, tal potencial apresenta duas raízes dadas por a_{ncr1} e a_{ncr2} , tal que $a_{ncr2} > a_{ncr1}$. Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 13. O fato do potencial comutativo não possuir raiz implica que nenhum tipo de Universo pode ser obtido pela teoria comutativa. Já o fato do potencial NC possuir duas raízes implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.17) com as condições iniciais $a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{ncr1}, a_{ncr2}[$ e com $\dot{a}_{nc}(0)$ determinada pela equação de Friedmann (5.16) a teoria comutativa não deu origem a nenhum tipo de Universo. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo tipo de comportamento qualitativo descrito pela Figura 5. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 13 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 14.

5.3.1.2 *Curvatura negativa* $k = -1$

Para os modelos cujo espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$) o potencial (4.147) assume a forma,

$$V_{MR}(k = -1, \omega = 1, a) = -g_c - g_\Lambda a^2 - \frac{g_r}{a^2} - \frac{\Omega}{a^4} + \frac{\alpha}{a^3}. \quad (5.18)$$

Nesse caso, como já mencionado o setor do fluido perfeito acopla com a constante g_s . Mas, agora $\Omega = -g_s + C$.

³ Nesses casos os Universos obtidos não apresentam singularidades do *Big Bang*.

A equação de Friedmann (4.146) fica,

$$\dot{a}^2 - g_c - g_\Lambda a^2 - \frac{g_r}{a^2} - \frac{\Omega}{a^4} + \frac{\alpha}{a^3} = 0, \quad (5.19)$$

e a equação da aceleração do fator de escala (4.145),

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \left[-g_c - 3g_\Lambda a^2 + \frac{g_r}{a^2} + 3\frac{\Omega}{a^4} + -2\frac{\alpha}{a^3} \right] = 0. \quad (5.20)$$

Por questões didáticas e de conveniência os resultados obtidos, apresentados em seguida, foram agrupados de acordo com o sinal do parâmetro g_Λ e também com a combinação entre os sinais dos parâmetros g_r e Ω .

5.3.1.2.1 *Caso* $g_\Lambda > 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), constante de acoplamento g_Λ positiva ($g_\Lambda > 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso que apresentou diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foi a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $\Omega > 0$. Nesse caso, foram obtidos resultados que apresentam os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda > 0$			
$g_r > 0$ e $\Omega > 0$	$g_r < 0$ e $\Omega > 0$	$g_r > 0$ e $\Omega < 0$	$g_r < 0$ e $\Omega < 0$
Nada.	Figuras 1, 2 e 3.	Nada.	Nada.

Tabela 2 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de matéria rígida.

5.3.1.2.2 *Caso* $g_\Lambda < 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), constante de acoplamento g_Λ negativa ($g_\Lambda < 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso que não apresentou diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foi a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r > 0$ e $\Omega > 0$. Nos casos em que há as combinações de sinais $g_r > 0$ e $\Omega < 0$ e também $g_r < 0$ e $\Omega < 0$ foram obtidos resultados que apresentam os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda < 0$		
$g_r > 0$ e $\Omega > 0$	$g_r > 0$ e $\Omega < 0$	$g_r < 0$ e $\Omega < 0$
Nada.	Figuras 13 e 14.	Figuras 13 e 14.

Tabela 3 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de matéria rígida.

a) $g_r < 0$, $\Omega > 0$

Para os modelos que apresentam a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $\Omega > 0$ foram obtidos resultados em que ambos os potenciais divergem para $-\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$, apresentam um crescimento até um ponto de máximo, seguido de um decrescimento até um ponto de mínimo, e novamente um crescimento com uma divergência para $+\infty$ quando $a \rightarrow +\infty$. Os pontos de máximo e mínimo do potencial comutativo são dados por a_{c1} e a_{c2} respectivamente sendo positivos os valores do potencial nesses pontos ($V_c(a_{c1}) > 0$ e $V_c(a_{c2}) > 0$) e respeitando a relação $V_c(a_{c1}) > V_c(a_{c2})$. Além disso, tal potencial apresenta apenas uma raiz dada por a_{cr1} . Os pontos de máximo e mínimo do potencial NC são dados por a_{nc1} e a_{nc2} , respectivamente, e sendo os valores do potencial nesses pontos positivo ($V_{nc}(a_{nc1}) > 0$) e negativo ($V_{nc}(a_{nc2}) < 0$). Além disso, tal potencial apresenta três raízes dadas por a_{ncr1} , a_{ncr2} e a_{ncr3} , tal que $a_{ncr3} > a_{ncr2} > a_{ncr1}$. Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 15. O fato do potencial comutativo possuir apenas uma raiz implica que os Universos obtidos pela teoria comutativa apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Já o fato do potencial NC possuir três raízes implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com dois comportamentos distintos que dependerão das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.20) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{ncr2}, a_{ncr3}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.19) a teoria comutativa não deu origem a nenhum tipo de Universo. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 5. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 15 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 16. Ainda no mesmo caso em que há a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $\Omega > 0$ foram obtidos resultados em que os valores do potencial comutativo nos pontos de máximo e mínimo são positivo ($V_c(a_{c1}) > 0$) e negativo ($V_c(a_{c2}) < 0$) respectivamente. Além disso, tal potencial apresenta três raízes dadas por a_{cr1} , a_{cr2} e a_{cr3} , tal que $a_{cr3} > a_{cr2} > a_{cr1}$. Já os valores do potencial NC nos pontos de máximo e mínimo são negativos ($V_{nc}(a_{nc1}) < 0$ e $V_{nc}(a_{nc2}) < 0$) respeitando a relação $V_{nc}(a_{nc1}) > V_{nc}(a_{nc2})$. Além disso, tal potencial apresenta apenas uma raiz dada por a_{ncr1} . Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 17. O fato do potencial comutativo possuir três raízes implica que os Universos obtidos pela teoria comutativa

apresentarão fatores de escala com dois comportamentos distintos que dependerão das condições iniciais utilizadas. Já o fato do potencial NC possuir apenas uma raiz implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.20) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{cr2}, a_{cr3}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.19) a teoria comutativa deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 5. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala expandem inicialmente a partir da singularidade do *Big Bang* até um tamanho máximo dado por a_{ncr1} , em seguida, sofrem contração até uma singularidade do tipo *Big Crunch* em um tempo t finito. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 17 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 18.

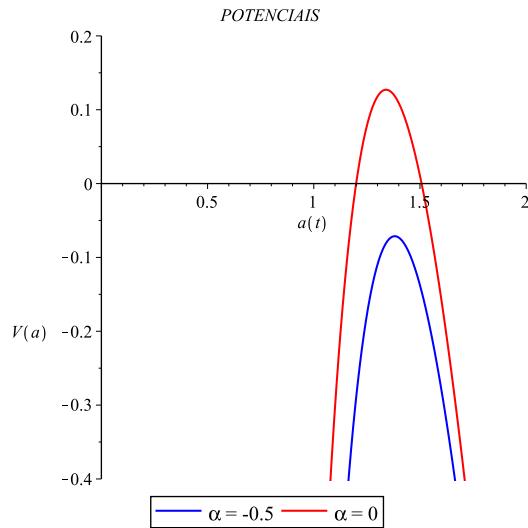


Figura 1 – Potenciais das duas teorias.

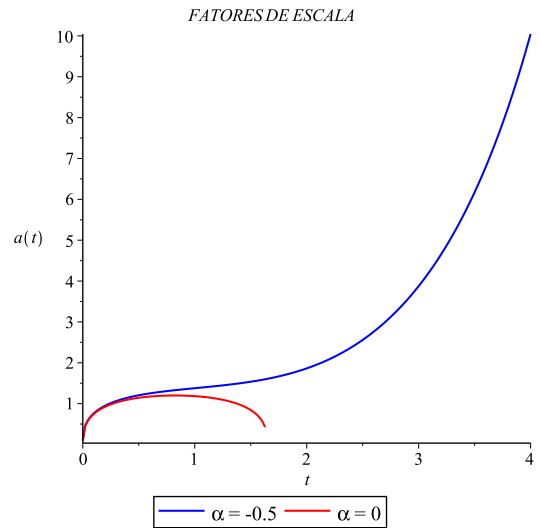


Figura 2 – Fatores de escala correspondentes a Figura 1 e condições iniciais contidas na região $]0, a_{cr1}[$.

k	g_c	g_Λ	g_r	Ω	α	$a(0)$	$\dot{a}_c(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	3, 1	1	1	2	-0, 5	0, 1	141, 7635708	143, 5162360

Tabela 4 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 1 e 2.

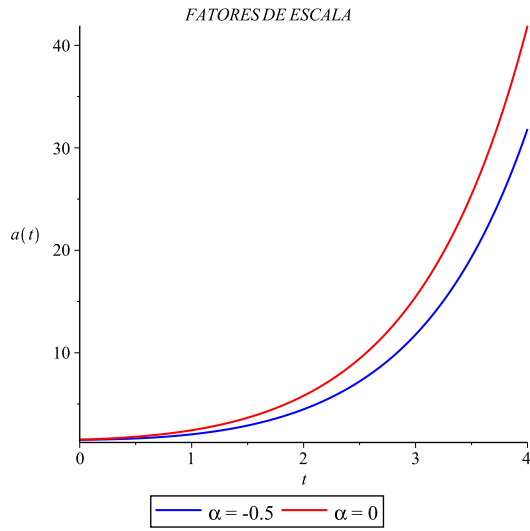


Figura 3 – Fatores de escala correspondentes a Figura 1 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr2}, +\infty[$.

k	g_c	g_Λ	g_r	Ω	α	$a(0)$
1	3,1	1	1	2	-0,5	1,51

Tabela 5 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 1 e 3.

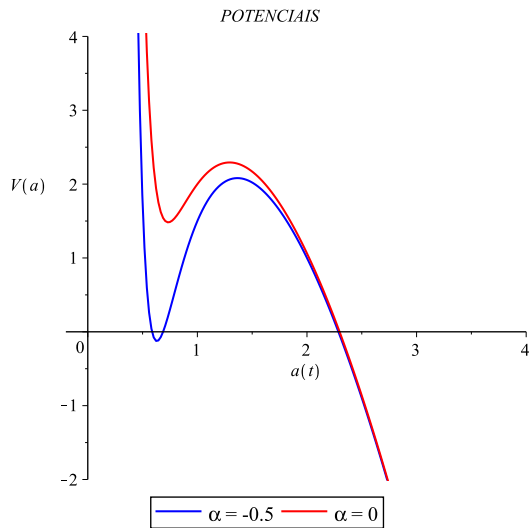


Figura 4 – Potenciais das duas teorias.

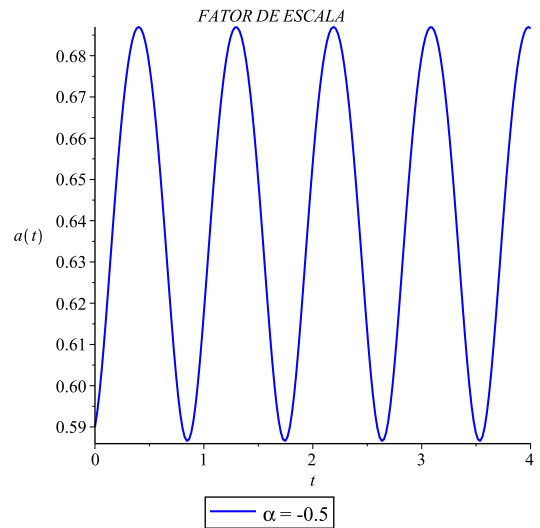
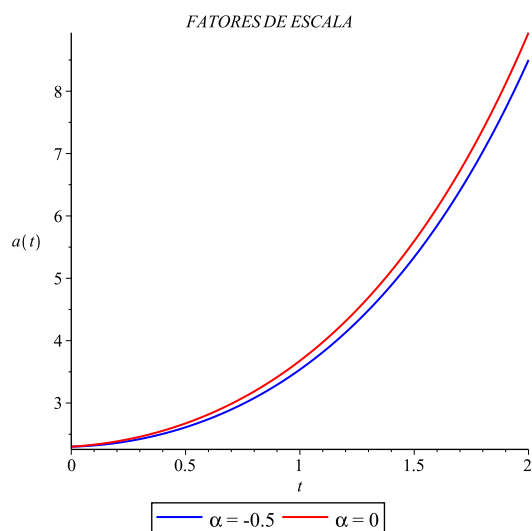


Figura 5 – Fator de escala correspondente a Figura 4 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr1}, a_{ncr2}[$.

k	g_c	g_Λ	g_r	Ω	α	$a(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	6	1	4	-1	-0,5	0,59	0,1447493282

Tabela 6 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 4 e 5.

Figura 6 – Fatores de escala correspondentes a Figura 4 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	g_c	g_Λ	g_r	Ω	α	$a(0)$
1	6	1	4	-1	-0,5	2,30

Tabela 7 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 4 e 6.

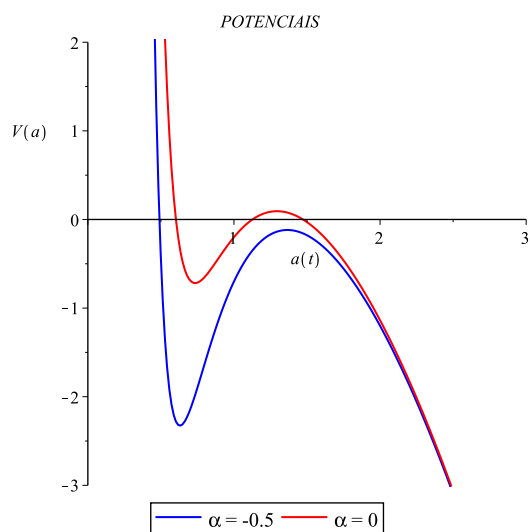


Figura 7 – Potenciais das duas teorias.

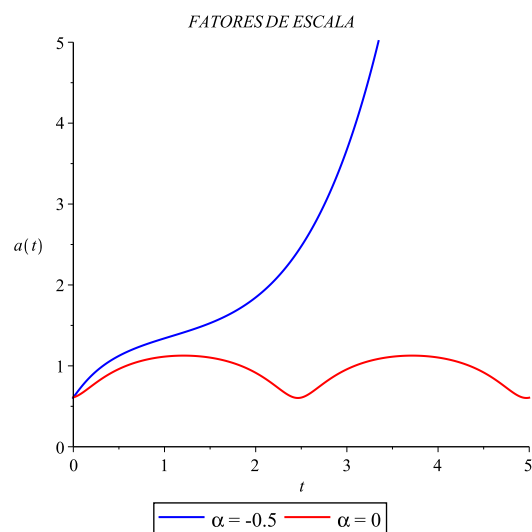


Figura 8 – Fatores de escala correspondentes a Figura 7 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, a_{cr2}[$.

k	g_c	g_Λ	g_r	Ω	α	$a(0)$	$\dot{a}_c(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	3,8	1	4	-1	-0,5	0,61	0,3154568623	1,517346560

Tabela 8 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 7 e 8.

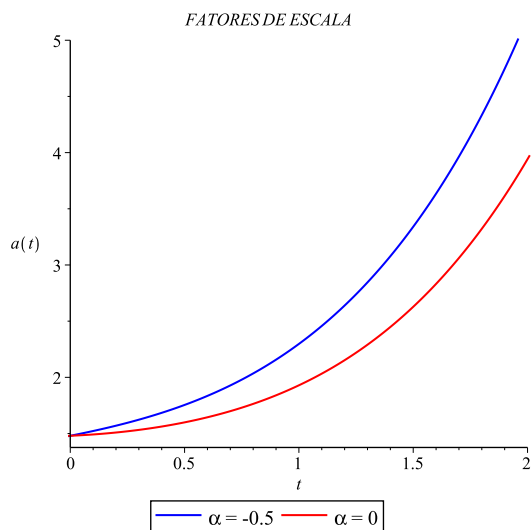


Figura 9 – Fatores de escala correspondentes a Figura 7 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr3}, +\infty[$.

k	g_c	g_Λ	g_r	Ω	α	$a(0)$
1	3, 8	1	4	-1	-0, 5	1, 48

Tabela 9 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 7 e 9.

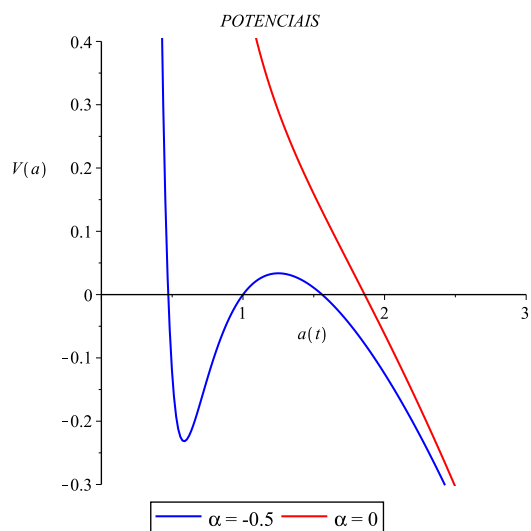


Figura 10 – Potenciais das duas teorias.

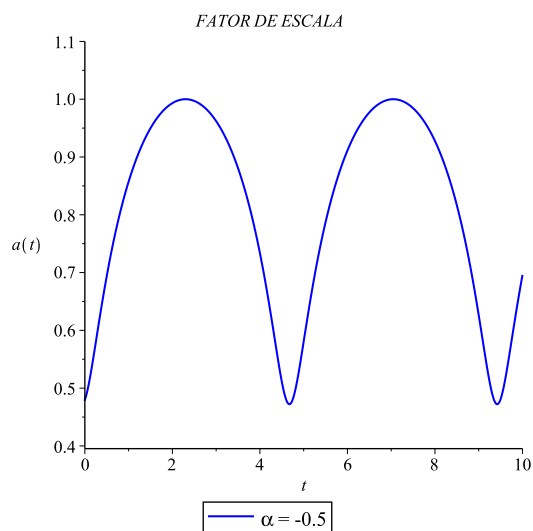
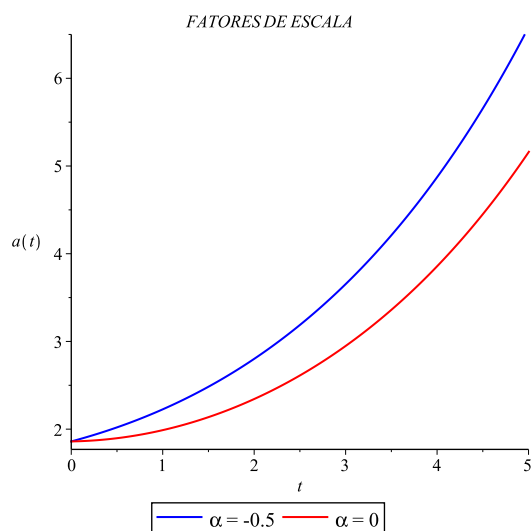


Figura 11 – Fator de escala correspondente a Figura 10 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr1}, a_{ncr2}[$.

k	g_c	g_Λ	g_r	Ω	α	$a(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	0,3	0,1	-0,1	-0,2	-0,5	0,48	0,2062345000

Tabela 10 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 10 e 11.

Figura 12 – Fatores de escala correspondentes a Figura 10 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	g_c	g_Λ	g_r	Ω	α	$a(0)$
1	0,3	0,1	-0,1	-0,2	-0,5	1,86

Tabela 11 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 10 e 12.

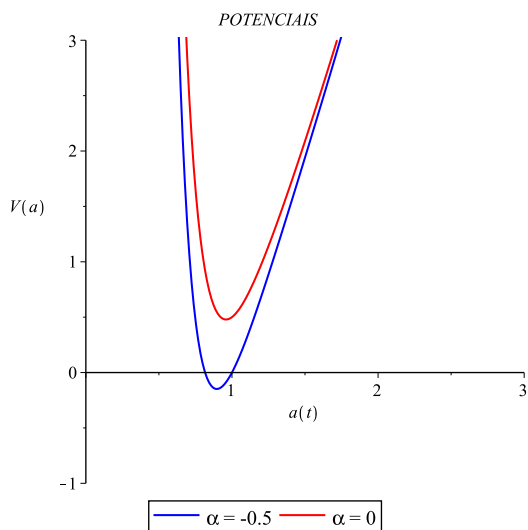


Figura 13 – Potenciais das duas teorias.

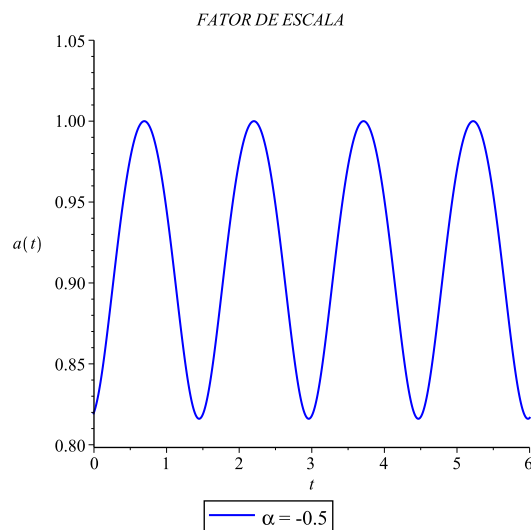


Figura 14 – Fator de escala correspondente a Figura 13 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr1}, a_{ncr2}[$.

k	g_c	g_Λ	g_r	Ω	α	$a(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	1	-1	3,5	-2	-0,5	0,82	0,1268195923

Tabela 12 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 13 e 14.

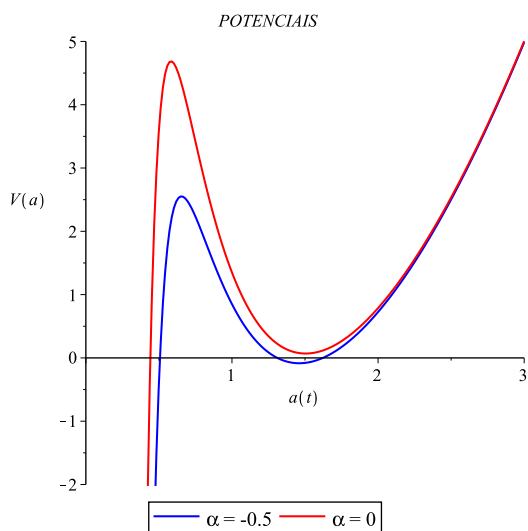


Figura 15 – Potenciais das duas teorias.

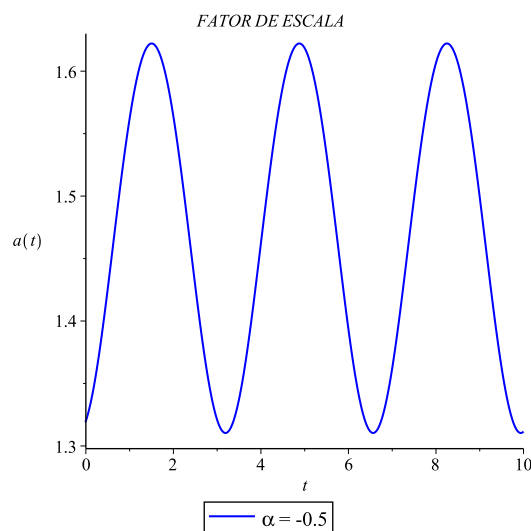


Figura 16 – Fator de escala correspondente a Figura 15 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr2}, a_{ncr3}[$.

k	g_c	g_Λ	g_r	Ω	α	$a(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
-1	4,65	-1	-6	1	-0,5	1,32	0,1041801560

Tabela 13 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 15 e 16.

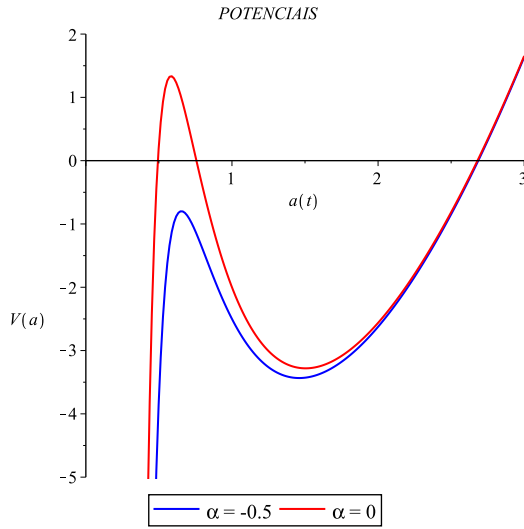
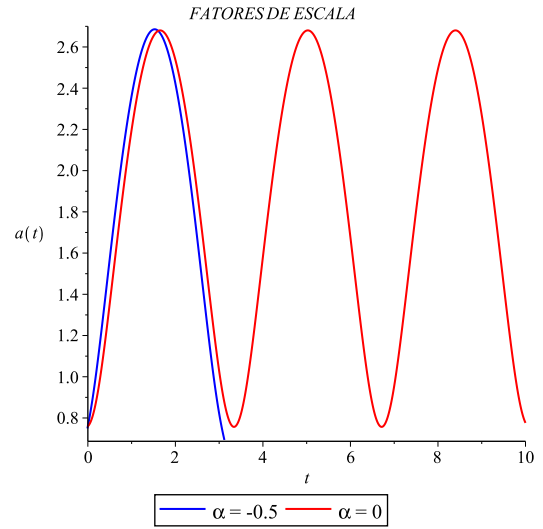


Figura 17 – Potenciais das duas teorias.

Figura 18 – Fatores de escala correspondentes a Figura 17 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr2}, a_{cr3}[$.

k	g_c	g_Λ	g_r	Ω	α	$a(0)$	$\dot{a}_c(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
-1	8	-1	-6	1	-0,5	0,76	0,1788708305	1,082131789

Tabela 14 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 17 e 18.

5.3.2 Radiação: $\omega = 1/3$

5.3.2.1 Curvatura positiva $k = 1$

Para os modelos cujo espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$) e cujo setor de fluido perfeito é caracterizado por radiação o potencial (4.147) assume a forma,

$$V_R(k = 1, \omega = 1/3, a) = g_c - g_\Lambda a^2 - \frac{\Omega}{a^2} - \frac{g_s}{a^4} + \frac{\alpha}{a}. \quad (5.21)$$

Nesse caso o setor do fluido perfeito acopla com a constante g_r . Logo, $\Omega = g_r + C$.

A equação de Friedmann (4.146) fica,

$$\dot{a}^2 + g_c - g_\Lambda a^2 - \frac{\Omega}{a^2} - \frac{g_s}{a^4} + \frac{\alpha}{a} = 0, \quad (5.22)$$

e a equação da aceleração do fator de escala (4.145),

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \left[g_c - 3g_\Lambda a^2 + \frac{\Omega}{a^2} + 3\frac{g_s}{a^4} \right] = 0. \quad (5.23)$$

Um fato curioso a ser destacado é a ausência do parâmetro NC na equação da aceleração para o fator de escala (5.23). Nesse caso, tal equação é equivalente ao do modelo comutativo correspondente. Dessa forma, a diferença entre as teorias comutativa e NC são obtidas através da equação de Friedmann (5.22) que fornecerá diferentes condições iniciais para a equação (5.23) das diferentes teorias.

Outro fator importante a ser destacado é que nas teorias comutativas ($\alpha = 0$) as equações para os modelos com matéria rígida (5.15)-(5.17) apresentam a mesma estrutura das equações para os modelos com radiação (5.21)-(5.23). A diferença está apenas nas seguintes renomeações das variáveis,

Matéria Rígida	Radiação
g_r	Ω
Ω	g_s

Tabela 15 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com matéria rígida e radiação.

Por questões didáticas e de conveniência os resultados obtidos, apresentados em seguida, foram agrupados de acordo com o sinal do parâmetro g_Λ e também com a combinação entre os sinais dos parâmetros Ω e g_s .

5.3.2.1.1 *Caso* $g_\Lambda > 0$

Para os modelos cujo espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$), constante de acoplamento g_Λ positiva ($g_\Lambda > 0$) e parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$) foram encontrados os mesmos resultados qualitativos já obtidos anteriormente. Tais resultados são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda > 0$			
$\Omega > 0$ e $g_s > 0$	$\Omega < 0$ e $g_s > 0$	$\Omega > 0$ e $g_s < 0$	$\Omega < 0$ e $g_s < 0$
Figuras 1, 2 e 3.	Figuras 1, 2 e 3	Figuras 4, 5, 6, 7, 8 e 9.	Figuras 10, 11 e 12,.

Tabela 16 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de radiação.

5.3.2.1.2 *Caso* $g_\Lambda < 0$

Para os modelos cujo espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$), constante de acoplamento g_Λ negativa ($g_\Lambda < 0$) e parâmetro NC

negativo ($\alpha < 0$) os únicos casos que apresentaram diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foram as combinações de sinais entre os parâmetros $\Omega > 0$ e $g_s < 0$ e também $\Omega < 0$ e $g_s < 0$. Nesses casos, foram encontrados os mesmos resultados qualitativos já obtidos anteriormente. Tais resultados são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda < 0$			
$\Omega > 0$ e $g_s > 0$	$\Omega < 0$ e $g_s > 0$	$\Omega > 0$ e $g_s < 0$	$\Omega < 0$ e $g_s < 0$
Nada.	Nada.	Figuras 13 e 14.	Figuras 13 e 14.

Tabela 17 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de radiação.

5.3.2.2 Curvatura negativa $k = -1$

Para os modelos cujo espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$) o potencial (4.147) assume a forma,

$$V_R(k = -1, \omega = 1/3, a) = -g_c - g_\Lambda a^2 - \frac{\Omega}{a^2} + \frac{g_s}{a^4} + \frac{\alpha}{a}. \quad (5.24)$$

Nesse caso, como já mencionado o setor do fluido perfeito acopla com a constante g_r . Ou seja, $\Omega = g_r + C$.

A equação de Friedmann (4.146) fica,

$$\dot{a}^2 - g_c - g_\Lambda a^2 - \frac{\Omega}{a^2} + \frac{g_s}{a^4} + \frac{\alpha}{a} = 0, \quad (5.25)$$

e a equação da aceleração do fator de escala (4.145),

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \left[-g_c - 3g_\Lambda a^2 + \frac{\Omega}{a^2} - 3\frac{g_s}{a^4} \right] = 0. \quad (5.26)$$

Como já mencionado, novamente, destaca-se a ausência do parâmetro NC na equação da aceleração para o fator de escala (5.26). Nesse caso tal equação também é equivalente ao do modelo comutativo correspondente. Logo, como já mencionado anteriormente, a diferença entre as teorias comutativas e NC's são obtidas através da equação de Friedmann (5.25) que fornecerá diferentes condições iniciais para a equação (5.26) das diferentes teorias.

Destaca-se também, mais uma vez que, nas teorias comutativas ($\alpha = 0$) as equações para os modelos com matéria rígida (5.18)-(5.20) apresentam a mesma estrutura das equações para os modelos com radiação (5.24)-(5.26). A diferença está apenas nas seguintes renomeações das variáveis,

Matéria Rígida	Radiação
g_r	Ω
Ω	$-g_s$

Tabela 18 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com Matéria Rígida e Radiação nos casos com curvatura negativa.

Por questões didáticas e de conveniência os resultados obtidos, apresentados em seguida, foram agrupados de acordo com o sinal do parâmetro g_Λ e também com a combinação entre os sinais dos parâmetros Ω e g_s .

5.3.2.2.1 *Caso* $g_\Lambda > 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), constante de acoplamento g_Λ positiva ($g_\Lambda > 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso que apresentou diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foi a combinação de sinais entre os parâmetros $\Omega < 0$ e $g_s < 0$. Nesse caso, foram obtidos resultados que apresentam os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda > 0$			
$\Omega > 0$ e $g_s > 0$	$\Omega < 0$ e $g_s > 0$	$\Omega > 0$ e $g_s < 0$	$\Omega < 0$ e $g_s < 0$
Nada.	Nada.	Nada.	Figuras 1, 2 e 3.

Tabela 19 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de radiação.

5.3.2.2.2 *Caso* $g_\Lambda < 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), constante de acoplamento g_Λ negativa ($g_\Lambda < 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso que não apresentou diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foi a combinação de sinais entre os parâmetros $\Omega > 0$ e $g_s < 0$. Nos outros casos foram obtidos resultados que apresentam os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda < 0$			
$\Omega > 0$ e $g_s > 0$	$\Omega < 0$ e $g_s > 0$	$\Omega > 0$ e $g_s < 0$	$\Omega < 0$ e $g_s < 0$
Figuras 13 e 14.	Figuras 13 e 14.	Nada.	Figuras 15, 16, 17, 18.

Tabela 20 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de radiação.

5.3.3 Poeira: $\omega = 0$

5.3.3.1 Curvatura positiva $k = 1$

Para os modelos cujo espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$) e cujo setor de fluido perfeito é caracterizado por poeira o potencial (4.147) assume a forma,

$$V_P(k = 1, \omega = 0, a) = \Omega - g_\Lambda a^2 - \frac{g_r}{a^2} - \frac{g_s}{a^4} - \frac{C}{a}. \quad (5.27)$$

Nesse caso o setor do fluido NC acopla com a constante g_c . Ou seja, $\Omega = g_c + \alpha$.

A equação de Friedmann (4.146) fica,

$$\dot{a}^2 + \Omega - g_\Lambda a^2 - \frac{g_r}{a^2} - \frac{g_s}{a^4} - \frac{C}{a} = 0, \quad (5.28)$$

e a equação da aceleração do fator de escala (4.145),

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \left[\Omega - 3g_\Lambda a^2 + \frac{g_r}{a^2} + 3\frac{g_s}{a^4} \right] = 0. \quad (5.29)$$

É importante perceber a ausência do termo contendo o fluido perfeito na equação da aceleração do fator de escala (5.29). Dessa forma, o fluido perfeito contribuirá através das condições iniciais obtidas pela equação de Friedmann (5.28).

Um fato curioso a ser destacado é que as equações para os modelos NC's com radiação (5.21)-(5.23) apresentam a mesma estrutura das equações para os modelos com poeira (5.27)-(5.29). A diferença está apenas nas seguintes renomeações das variáveis,

Radiação	Poeira
g_c	Ω
Ω	g_r
α	$-C$

Tabela 21 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com radiação e poeira.

É importante destacar que no caso de radiação o parâmetro g_c pode assumir apenas valores positivos enquanto o seu correspondente nos modelos com poeira (Ω) positivos ou negativos. Também é importante destacar que no caso de radiação o parâmetro NC (α)

pode assumir valores positivos ou negativos ⁴ enquanto o seu correspondente nos modelos com poeira (C) apenas positivo.

Por questões didáticas e de conveniência os resultados obtidos, apresentados em seguida, foram agrupados de acordo com o sinal do parâmetro g_Λ e também com a combinação entre os sinais dos parâmetros g_r e g_s .

5.3.3.1.1 *Caso* $g_\Lambda > 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$), constante de acoplamento g_Λ positiva ($g_\Lambda > 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$) foram encontrados os mesmos resultados qualitativos já obtidos anteriormente. Tais resultados são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda > 0$			
$g_r > 0$ e $g_s > 0$	$g_r < 0$ e $g_s > 0$	$g_r > 0$ e $g_s < 0$	$g_r < 0$ e $g_s < 0$
Figuras 1, 2 e 3.	Figuras 1, 2 e 3	Figuras 4, 5, 6, 7, 8 e 9.	Figuras 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Tabela 22 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de poeira.

5.3.3.1.2 *Caso* $g_\Lambda < 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$), constante de acoplamento g_Λ negativa ($g_\Lambda < 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso que não apresentou diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foi a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r > 0$ e $g_s > 0$. Nos outros casos foram obtidos resultados que apresentaram os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda < 0$			
$g_r > 0$ e $g_s > 0$	$g_r < 0$ e $g_s > 0$	$g_r > 0$ e $g_s < 0$	$g_r < 0$ e $g_s < 0$
Nada.	Figuras 15, 16, 17 e 18	Figuras 13 e 14.	Figuras 13 e 14.

Tabela 23 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de poeira.

⁴ Mas, no presente trabalho estão sendo considerados apenas os valores negativos de tal parâmetro.

5.3.3.2 Curvatura negativa $k = -1$

Para os modelos cujo espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$) o potencial (4.147) assume a forma,

$$V_P(k = -1, \omega = 0, a) = \Omega - g_\Lambda a^2 - \frac{g_r}{a^2} + \frac{g_s}{a^4} - \frac{C}{a}. \quad (5.30)$$

Nesse caso, como já mencionado o setor do fluido NC acopla com a constante g_c . Mas, agora $\Omega = -g_c + \alpha$.

A equação de Friedmann (4.146) fica,

$$\dot{a}^2 + \Omega - g_\Lambda a^2 - \frac{g_r}{a^2} + \frac{g_s}{a^4} - \frac{C}{a} = 0, \quad (5.31)$$

e a equação da aceleração do fator de escala (4.145),

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \left[\Omega - 3g_\Lambda a^2 + \frac{g_r}{a^2} - 3\frac{g_s}{a^4} \right] = 0. \quad (5.32)$$

Destaca-se novamente que as equações para os modelos NC's com radiação (5.24)-(5.26) apresentam a mesma estrutura das equações para os modelos com poeira (5.30)-(5.32). A diferença está apenas nas seguintes renomeações das variáveis,

Radiação	Poeira
$-g_c$	Ω
Ω	g_r
α	$-C$

Tabela 24 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com radiação e poeira.

Novamente destaca-se que no caso de radiação o parâmetro g_c pode assumir apenas valores positivos enquanto o seu correspondente nos modelos com poeira (Ω) positivos e negativos. Também é importante destacar que no caso de radiação o parâmetro NC (α) pode assumir valores positivos e negativos ⁵ enquanto o seu correspondente nos modelos com poeira (C) apenas positivo.

Por questões didáticas e de conveniência os resultados obtidos, apresentados em seguida, foram agrupados de acordo com o sinal do parâmetro g_Λ e também com a combinação entre os sinais dos parâmetros g_r e g_s .

5.3.3.2.1 **Caso** $g_\Lambda > 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), constante de acoplamento g_Λ positiva ($g_\Lambda > 0$) e

⁵ Mas, no presente trabalho estão sendo considerados apenas os valores negativos de tal parâmetro.

sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso em que as teorias comutativa e NC apresentaram diferenças qualitativas foi para a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $g_s < 0$. Nesse caso, foram obtidos resultados que apresentam os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda > 0$			
$g_r > 0$ e $g_s > 0$	$g_r < 0$ e $g_s > 0$	$g_r > 0$ e $g_s < 0$	$g_r < 0$ e $g_s < 0$
Nada.	Nada.	Nada.	Figuras 1, 2 e 3.

Tabela 25 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de poeira.

5.3.3.2.2 *Caso* $g_\Lambda < 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), constante de acoplamento g_Λ negativa ($g_\Lambda < 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso que não apresentou diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foi a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r > 0$ e $g_s < 0$. Nos outros casos foram obtidos resultados que apresentaram os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda < 0$			
$g_r > 0$ e $g_s > 0$	$g_r < 0$ e $g_s > 0$	$g_r > 0$ e $g_s < 0$	$g_r < 0$ e $g_s < 0$
Figuras 13 e 14.	Figuras 13 e 14.	Nada.	Figuras 15, 16, 17 e 18.

Tabela 26 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de poeira.

5.3.4 **Cordas Cóslicas:** $\omega = -1/3$

5.3.4.1 *Curvatura positiva* $k = 1$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$) e cujo o setor de fluido perfeito é caracterizado por cordas cósmicas o potencial (4.147) assume a forma,

$$V_{CC}(k = 1, \omega = -1/3, a) = \Omega - g_\Lambda a^2 - \frac{g_r}{a^2} - \frac{g_s}{a^4} + \alpha a. \quad (5.33)$$

Nesse caso o setor do fluido perfeito acopla com a constante g_c . Ou seja, $\Omega = g_c - C$.

A equação de Friedmann (4.146) fica,

$$\dot{a}^2 + \Omega - g_\Lambda a^2 - \frac{g_r}{a^2} - \frac{g_s}{a^4} + \alpha a = 0, \quad (5.34)$$

e a equação da aceleração do fator de escala (4.145),

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \left[\Omega - 3g_\Lambda a^2 + \frac{g_r}{a^2} + 3\frac{g_s}{a^4} + 2\alpha a \right] = 0. \quad (5.35)$$

Um fato curioso a ser destacado é que nas teorias comutativas ($\alpha = 0$) as equações para os modelos com matéria rígida (5.15)-(5.17) e também com radiação (5.21)-(5.23) apresentam a mesma estrutura das equações para os modelos com cordas cósmicas (5.33)-(5.35). A diferença está apenas nas seguintes renomeações das variáveis,

Matéria Rígida	Radiação	Cordas Cósmicas
g_c	g_c	Ω
g_r	Ω	g_r
Ω	g_s	g_s

Tabela 27 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com matéria rígida, radiação e cordas cósmicas.

É importante destacar que nos casos de matéria rígida e radiação o parâmetro g_c pode assumir apenas valores positivos enquanto o seu correspondente, nos modelos com cordas cósmicas (Ω), positivos ou negativos.

Por questões didáticas e de conveniência os resultados obtidos, apresentados em seguida, foram agrupados de acordo com o sinal do parâmetro g_Λ e também com a combinação entre os sinais dos parâmetros g_r e g_s .

5.3.4.1.1 *Caso* $g_\Lambda > 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$), constante de acoplamento g_Λ positiva ($g_\Lambda > 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso que não apresentou diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foi a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $g_s < 0$. Nos outros casos foram obtidos resultados que apresentaram os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda > 0$			
$g_r > 0$ e $g_s > 0$	$g_r < 0$ e $g_s > 0$	$g_r > 0$ e $g_s < 0$	$g_r < 0$ e $g_s < 0$
Figuras 1, 2 e 3	Figuras 1, 2 e 3	Figuras 4, 5, 6, 7, 8 e 9,	Nada.

Tabela 28 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de cordas cósmicas.

5.3.4.1.2 *Caso* $g_\Lambda < 0$

Para os modelos que apresentam as combinações de sinais entre os parâmetros $g_r > 0$ e $g_s < 0$ e também $g_r < 0$ e $g_s < 0$ foram obtidos resultados em que os potenciais e os correspondentes fatores de escala de ambas as teorias apresentaram os mesmos resultados qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda < 0$	
$g_r > 0$ e $g_s < 0$	$g_r < 0$ e $g_s < 0$
Figuras 13 e 14	Figuras 13 e 14.

Tabela 29 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de cordas cósmicas.

a) $g_r > 0$ e $g_s > 0$

Para os modelos que apresentam as combinações de sinais entre os parâmetros $g_r > 0$ e $g_s > 0$ foram obtidos resultados em que ambos os potenciais divergem para $-\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$ e para $+\infty$ quando $a \rightarrow \infty$. O potencial comutativo apresenta apenas um crescimento e uma raiz dada por a_{cr1} . O potencial NC apresenta um crescimento até um ponto de máximo, seguido de um decrescimento até um ponto de mínimo, e novamente um crescimento. Os pontos de máximo e mínimo do potencial NC são dados por a_{nc1} e a_{nc2} respectivamente, sendo positivo ($V_{nc}(a_{nc1}) > 0$) e negativo ($V_{nc}(a_{nc2}) < 0$) os valores do potencial nesses pontos, respectivamente. Além disso tal potencial apresenta três raízes dadas por a_{ncr1} , a_{ncr2} e a_{ncr3} , tal que $a_{ncr3} > a_{ncr2} > a_{ncr1}$. Os comportamentos descritos acima são representados pelas Figura 19. O fato do potencial comutativo possuir apenas uma raiz implica que os Universos obtidos pela teoria comutativa apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Já o fato do potencial NC possuir três raízes implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão dois tipos de comportamentos distintos que dependerão das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.35) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{ncr2}, a_{ncr3}[$ e com $\dot{a}_{nc}(0)$ determinada pela equação de Friedmann (5.34) a teoria comutativa não deu origem a nenhum tipo de Universo, já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo tipo de comportamento qualitativo descrito pela Figura 5. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 19 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 20.

b) $g_r < 0$ e $g_s > 0$

Para os modelos que apresentam as combinações de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $g_s > 0$ foram obtidos alguns resultados em que os potenciais e os correspondentes fatores de escala de ambas as teorias apresentam os mesmos resultados qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte.

$g_\Lambda < 0$
$g_r < 0$ e $g_s > 0$
Figuras 19 e 20.

Tabela 30 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $g_\Lambda < 0$ e combinações de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$, $g_s > 0$.

Além dos resultados obtidos acima, para a mesma combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $g_s > 0$ também foram obtidos resultados em que os potenciais de ambas as teorias apresentam um ponto de máximo e um de mínimo. Os pontos de máximo e mínimo da teoria comutativa são dados por a_{c1} e a_{c2} respectivamente sendo o valor do potencial nesses pontos positivo e negativo respectivamente ($V(a_{c1}) > 0$, $V(a_{c2}) < 0$). Além disso, tal potencial apresenta três raízes dadas por a_{cr1} , a_{cr2} e a_{cr3} , tal que $a_{cr3} > a_{cr2} > a_{cr1}$. Os pontos de máximo e mínimo da teoria NC são dados por a_{nc1} e a_{nc2} respectivamente, sendo o valor do potencial nesses pontos negativos ($V(a_{nc1}) < 0$ e $V(a_{nc2}) < 0$) e respeitando a relação $V(a_{nc1}) > V(a_{nc2})$. Além disso, tal potencial apresenta apenas uma raiz dada por a_{ncr1} . Os comportamentos descritos acima são representados pela Figura 21. O fato do potencial comutativo possuir três raízes implica que os Universos obtidos pela teoria comutativa apresentarão fatores de escala com dois tipos de comportamento distintos que dependerão das condições iniciais utilizadas. Já o fato do potencial NC possuir apenas uma raiz implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.35) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{cr2}, a_{cr3}[$ e com $\dot{a}_{nc}(0)$ determinada pela equação de Friedmann (5.34) a teoria comutativa deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 5. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pelo caso NC representado na Figura 18. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 21 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 22.

5.3.4.2 Curvatura negativa $k = -1$

Para os modelos cujo espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$) o potencial (4.147) assume a forma,

$$V_{CC}(k = -1, \omega = -1/3, a) = \Omega - g_{\Lambda}a^2 - \frac{g_r}{a^2} + \frac{g_s}{a^4} + \alpha a. \quad (5.36)$$

Nesse caso, como já mencionado o setor do fluido perfeito acopla com a constante g_c . Mas, agora $\Omega = -g_c - C$.

A equação de Friedmann (4.146) fica,

$$\dot{a}^2 + \Omega - g_{\Lambda}a^2 - \frac{g_r}{a^2} + \frac{g_s}{a^4} + \alpha a = 0, \quad (5.37)$$

e a equação da aceleração do fator de escala (4.145),

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \left[\Omega - 3g_{\Lambda}a^2 + \frac{g_r}{a^2} - 3\frac{g_s}{a^4} + 2\alpha a \right] = 0. \quad (5.38)$$

Destaca-se novamente o fato de que nas teorias comutativas ($\alpha = 0$) as equações para os modelos com matéria rígida (5.18)-(5.20) e também com radiação com radiação (5.24)-(5.26) apresentam a mesma estrutura das equações para os modelos com cordas cósmicas (5.36)-(5.38). A diferença está apenas nas seguintes renomeações das variáveis,

Matéria Rígida	Radiação	Cordas Cósmicas
g_c	g_c	Ω
g_r	Ω	g_r
Ω	$-g_s$	$-g_s$

Tabela 31 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com matéria rígida, radiação e cordas cósmicas.

Novamente é importante destacar que nos casos de matéria rígida e cordas cósmicas o parâmetro g_c pode assumir apenas valores positivos enquanto o seu correspondente nos modelos com radiação (Ω) positivos e negativos.

Por questões didáticas e de conveniência os resultados obtidos, apresentados em seguida, foram agrupados de acordo com o sinal do parâmetro g_{Λ} e também com a combinação entre os sinais dos parâmetros g_r e g_s .

5.3.4.2.1 *Caso* $g_{\Lambda} > 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), constante de acoplamento g_{Λ} positiva ($g_{\Lambda} > 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso que não apresentou diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foi a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $g_s > 0$. Nos outros casos foram obtidos resultados que apresentaram os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda > 0$			
$g_r > 0$ e $g_s > 0$	$g_r < 0$ e $g_s > 0$	$g_r > 0$ e $g_s < 0$	$g_r < 0$ e $g_s < 0$
Figuras 4, 5, 6, 7, 8 e 9.	Nada.	Figuras 1, 2 e 3.	Figuras 1, 2 e 3.

Tabela 32 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda > 0$ e fluido perfeito de cordas cósmicas.

5.3.4.2.2 *Caso* $g_\Lambda < 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), constante de acoplamento g_Λ negativa ($g_\Lambda < 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso que não apresentou diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foi a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r > 0$ e $g_s < 0$. Nos outros casos foram obtidos resultados que apresentaram os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$g_\Lambda < 0$			
$g_r > 0$ e $g_s > 0$	$g_r < 0$ e $g_s > 0$	$g_r > 0$ e $g_s < 0$	$g_r < 0$ e $g_s < 0$
Figuras 13 e 14.	Figuras 13 e 14.	Nada.	Figuras 15, 16, 17 e 18.

Tabela 33 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $g_\Lambda < 0$ e fluido perfeito de cordas cósmicas.

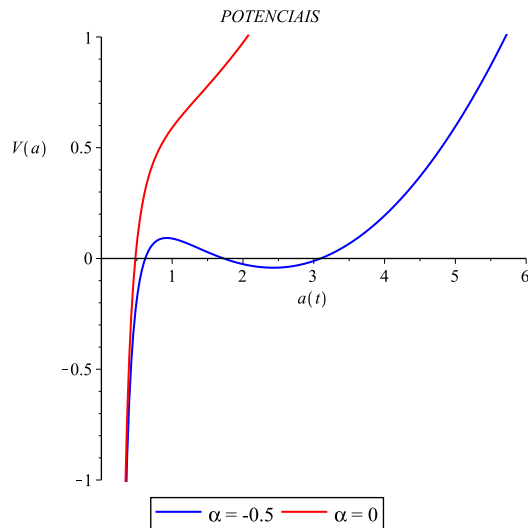


Figura 19 – Potenciais das duas teorias.

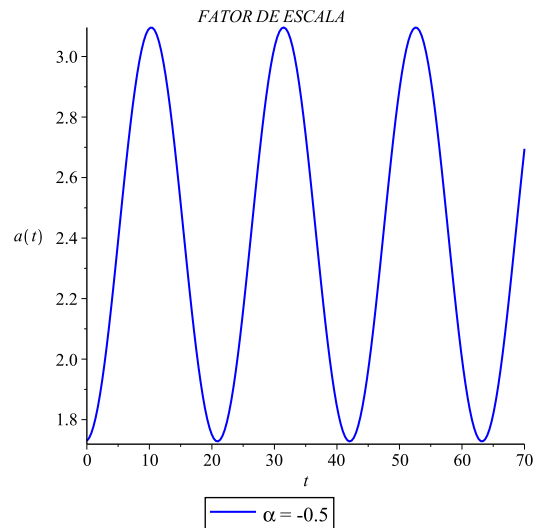


Figura 20 – Fator de escala correspondente a Figura 19 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr2}, a_{ncr3}[$.

k	Ω	g_Λ	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	0,6	-0,1	0,1	0,01	-0,5	1,73	0,01545310648

Tabela 34 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 19 e 20.

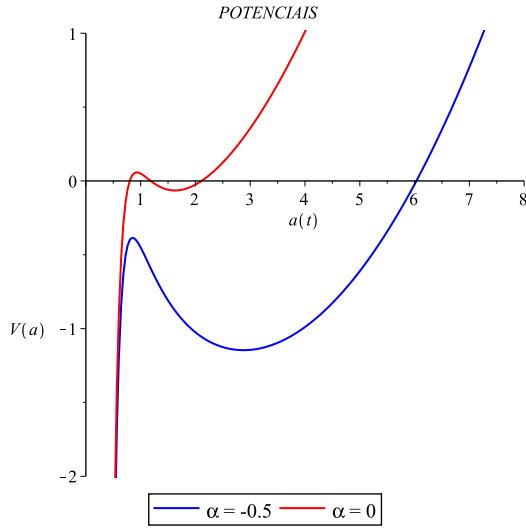
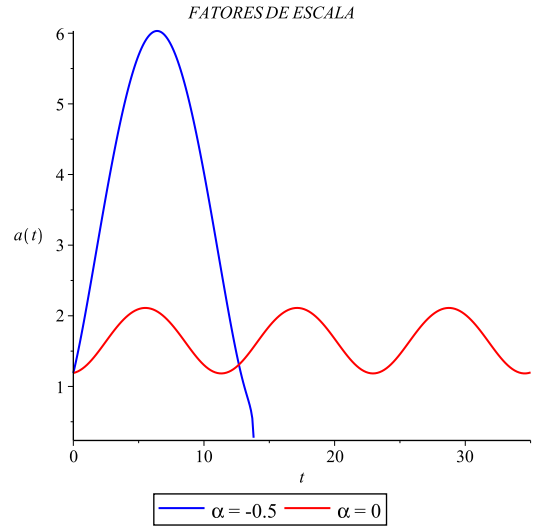


Figura 21 – Potenciais das duas teorias.

Figura 22 – Fatores de escala correspondentes a Figura 21 e condições iniciais contidas na região $[a_{cr2}, a_{cr3}]$.

k	Ω	g_Λ	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_c(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	-0,65	-0,1	-1	0,4	-0,5	1,19	0,04114221311	0,7724588544

Tabela 35 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 21 e 22.

5.3.5 Paredes de Domínio: $\omega = -2/3$

Independente da curvatura, para os modelos cujo setor de fluido perfeito é caracterizado por paredes de domínio o potencial (4.147) assume a forma,

$$V_{PD}(k, \omega = -2/3, a) = kg_c - \Omega a^2 - k^2 \frac{g_r}{a^2} - k^3 \frac{g_s}{a^4} - Ca. \quad (5.39)$$

Nesse caso o setor do fluido NC acopla com a constante g_Λ . Logo, $\Omega = g_\Lambda - \alpha$.

A equação de Friedmann (4.146) fica,

$$\dot{a}^2 + kg_c - \Omega a^2 - k^2 \frac{g_r}{a^2} - k^3 \frac{g_s}{a^4} - Ca = 0, \quad (5.40)$$

e a equação da aceleração do fator de escala (4.145),

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \left[kg_c - 3\Omega a^2 + k^2 \frac{g_r}{a^2} + 3k^3 \frac{g_s}{a^4} - 2Ca \right] = 0. \quad (5.41)$$

Um fato curioso a ser destacado é que as equações para os modelos NC's com cordas cósmicas (5.33)-(5.38) apresentam a mesma estrutura das equações para os modelos com paredes de domínio (5.39)-(5.41). A diferença está apenas nas seguintes renomeações das variáveis,

Cordas Cóslicas	Paredes de Domínio
Ω	kg_c
g_Λ	Ω
α	$-C$

Tabela 36 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com cordas cósmicas e paredes de domínio.

É importante destacar que no caso de cordas cósmicas o parâmetro Ω pode assumir valores positivos e negativos enquanto o seu correspondente, nos modelos com paredes de domínio, (g_c) positivos. Também é importante destacar que no caso de cordas cósmicas o parâmetro NC (α) pode assumir valores positivos e negativos ⁶ enquanto o seu correspondente nos modelos com paredes de domínio (C) apenas positivo.

Nos presentes modelos não foram obtidos nenhum resultado de interesse, pois nesses, a teoria comutativa sempre apresentou valores menores para os potenciais quando comparados ao valores obtidos pelos potenciais da teoria NC. Em respeito a expansão acelerada do Universo isso quer dizer que os resultados obtidos pela teoria comutativa apresentam taxas de expansão mais rápidas do que as obtidas pela teoria NC o que não é interessante na presente tese.

5.3.6 Constante Cosmológica: $\omega = -1$

5.3.6.1 Curvatura positiva $k = 1$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$) e cujo o setor de fluido perfeito é caracterizado por constante cosmológica o potencial (4.147) assume a forma,

$$V_\Lambda(k = 1, \omega = -1, a) = g_c - \Omega a^2 - \frac{g_r}{a^2} - \frac{g_s}{a^4} + \alpha a^3. \quad (5.42)$$

Nesse caso o setor do fluido perfeito acopla com a constante g_Λ . Ou seja, $\Omega = g_\Lambda + C$.

A equação de Friedmann (4.146) fica,

$$\dot{a}^2 + g_c - \Omega a^2 - \frac{g_r}{a^2} - \frac{g_s}{a^4} + \alpha a^3 = 0, \quad (5.43)$$

e a equação da aceleração do fator de escala (4.145),

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \left[g_c - 3\Omega a^2 + \frac{g_r}{a^2} + 3\frac{g_s}{a^4} + 4\alpha a^3 \right] = 0. \quad (5.44)$$

Um fato curioso a ser destacado é que as equações para os modelos comutativos ($\alpha = 0$) com matéria rígida (5.15)-(5.17), radiação (5.21)-(5.23) e cordas cósmicas (5.33)-(5.35), apresentam a mesma estrutura das equações para os modelos com constante cosmológica (5.42)-(5.44). A diferença está apenas nas seguintes renomeações das variáveis,

⁶ Mas, no presente trabalho estão sendo considerados apenas os valores negativos de tal parâmetro.

Matéria Rígida	Radiação	Cordas Cóslicas	Constante Cosmológica
g_c	g_c	Ω	g_c
Ω	g_s	g_s	g_s
g_Λ	g_Λ	g_Λ	Ω

Tabela 37 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com matéria rígida, radiação, cordas cólicas e constante cosmológica.

É importante destacar que no caso de cordas cólicas o parâmetro Ω pode assumir valores positivos e negativos enquanto os seus correspondentes nos modelos com radiação, cordas cólicas e constante cosmológica (g_c) positivos.

Por questões didáticas e de conveniência os resultados obtidos, apresentados em seguida, foram agrupados de acordo com o sinal do parâmetro Ω e também com a combinação entre os sinais dos parâmetros g_r e g_s .

5.3.6.1.1 *Caso* $\Omega > 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$), parâmetro Ω positivo ($\Omega > 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso que não apresentou diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foi a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $g_s < 0$. Nos outros casos foram obtidos resultados que apresentaram os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais resultados são apresentados na tabela seguinte,

$\Omega > 0$			
$g_r > 0$ e $g_s > 0$	$g_r < 0$ e $g_s > 0$	$g_r > 0$ e $g_s < 0$	$g_r < 0$ e $g_s < 0$
Figuras 1, 2 e 3.	Figuras 1, 2 e 3.	Figuras 4, 5, 6, 7, 8, e 9.	Nada.

Tabela 38 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $\Omega > 0$ e fluido perfeito de constante cosmológica.

5.3.6.1.2 *Caso* $\Omega < 0$

a) $g_r > 0$ e $g_s > 0$

Para os modelos que apresentam a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r > 0$ e $g_s > 0$ foram obtidos resultados em que o potencial da teoria comutativa diverge para $-\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$, apresenta um crescimento com uma divergência para $+\infty$ quando $a \rightarrow \infty$ e apenas uma raiz dada por a_{cr1} . Já o potencial da teoria NC diverge para $-\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$, apresenta um crescimento até um ponto de máximo seguido de um decréscimo para $-\infty$ quando $a \rightarrow \infty$. O ponto de máximo do potencial NC é dado por

a_{nc1} e o valor do potencial nesse ponto é positivo ($V_{nc}(a_{nc1}) > 0$). Além disso, o potencial NC apresenta duas raízes dadas por a_{ncr1} e a_{ncr2} , tal que $a_{ncr2} > a_{ncr1}$. Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 23. O fato do potencial comutativo possuir apenas uma raíz implica que os Universos obtidos pela teoria comutativa apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Já o fato do potencial NC apresentar duas raízes implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com dois tipos de comportamentos distintos que dependerão das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.44) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{ncr2}, +\infty[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.43) a teoria comutativa não deu origem a nenhum tipo de Universo. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala expandem infinitamente em um tempo infinito a partir da condição inicial $a(t = 0)$. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 23 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 24. Ainda para as mesmas combinações de sinais entre os parâmetros, foram obtidos resultados em que o valor do potencial NC no ponto de máximo é negativo ($V_{nc}(a_{nc1}) < 0$). Além disso, tal potencial não apresenta nenhuma raíz. Os potenciais descritos acima são representados pela Figura 25. O fato do potencial NC não apresentar nenhuma raíz implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que independe das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.44) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]0, a_{cr1}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.43) a teoria comutativa deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela caso comutativo representado pela Figura 2. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 24. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 25 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 26.

b) $g_r < 0$ e $g_s > 0$

Para os modelos que apresentam a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $g_s > 0$ foram encontrados os mesmos resultados qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$\Omega < 0$
$g_r < 0$ e $g_s > 0$
Figuras 23, 24, 25 e 26.

Tabela 39 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura positiva $k = 1$, $\Omega < 0$ e combinações de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$, $g_s > 0$.

c) $g_r > 0$ e $g_s < 0$

Para os modelos que apresentam a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r > 0$ e $g_s < 0$ foram obtidos resultados em que o potencial comutativo diverge para $+\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$, apresentam um decrescimento até um ponto de mínimo seguido de um crescimento com uma divergência para $+\infty$ quando $a \rightarrow \infty$ ⁷. Já o potencial NC diverge para $+\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$, apresentam um decrescimento até um ponto de mínimo seguido de um crescimento até um ponto de máximo e novamente um decrescimento com uma divergência para $-\infty$ quando $a \rightarrow \infty$ ⁸. O ponto de mínimo do potencial comutativo é dado por a_{c1} sendo positivo o valor do potencial nesse ponto ($V_c(a_{c1}) > 0$). Além disso, tal potencial não apresenta nenhuma raiz. Os pontos de mínimo e máximo do potencial NC são dados por a_{nc1} e a_{nc2} respectivamente sendo os valores do potencial nesses pontos positivos ($V_{nc}(a_{nc1}) > 0$ e $V_{nc}(a_{nc2}) > 0$) e mantendo a relação $V_{nc}(a_{nc1}) < V_{nc}(a_{nc2})$. Além disso, tal potencial apresenta apenas uma raiz dada por a_{ncr1} . Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 27. O fato do potencial comutativo não possuir raiz implica que nenhum tipo de Universo pode ser obtido pela teoria comutativa. Já o fato do potencial NC possuir uma raiz implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.44) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{ncr1}, +\infty[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.43) a teoria comutativa não deu origem a nenhum tipo de Universo. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo representado pela Figura 24. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 27 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 28. Ainda para a mesma combinação de sinais entre os parâmetros foram obtidos resultados em que os valores do potencial NC nos pontos de mínimo e máximo são negativo ($V_{nc}(a_{nc1}) < 0$) e positivo ($V_{nc}(a_{nc2}) > 0$) respectivamente. Além disso, tal potencial apresenta três raízes dadas por a_{ncr1}, a_{ncr2} e a_{ncr3} , tal que $a_{ncr3} > a_{ncr2} > a_{ncr1}$. Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 29. O fato do potencial comutativo não possuir raiz implica que nenhum tipo de Universo pode ser obtido pela teoria comutativa. Já o fato do potencial NC possuir três raízes implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com dois comportamentos distintos que dependerão das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.44) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{ncr1}, a_{ncr2}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.43) a teoria comutativa não deu origem a nenhum tipo de Universo. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo representado pela

⁷ Nesses casos os Universos obtidos não apresentam singularidades do *Big Bang*.

⁸ Nesses casos os Universos obtidos não apresentam singularidades do *Big Bang*.

Figura 5. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 29 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 30. Ao utilizar a equação de movimento (5.43) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{cr3}, +\infty[$ a teoria comutativa não deu origem a nenhum tipo de Universo. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 24. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 29 junto as condições iniciais mencionadas são representadas pela Figura 31. Também foram obtidos resultados em que o valor do potencial comutativo no ponto de mínimo é negativo ($V_c(a_{c1}) < 0$). Além disso, tal potencial apresenta duas raízes dadas por a_{cr1} e a_{cr2} , tal que $a_{cr2} > a_{cr1}$. Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 32. O fato do potencial comutativo possuir duas raízes implica que os Universos obtidos pela teoria comutativa apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.44) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{ncr3}, +\infty[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.43) a teoria comutativa não deu origem a nenhum tipo de Universo. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo representado pela Figura 24. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 32 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 33. Finalmente foram obtido resultados em que os pontos de mínimo e máximo do potencial NC são negativos mantendo a relação ($V_{nc}(a_{nc1}) < V_{nc}(a_{nc2})$). Além disso, tal potencial apresenta apenas uma raiz dada por a_{ncr1} . Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 34. O fato do potencial NC possuir apenas uma raiz implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.44) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{cr1}, a_{cr2}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.43) a teoria comutativa deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentaram o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 5. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo representado pela Figura 34. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 34 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 35.

d) $g_r < 0$ e $g_s < 0$

Para os modelos que apresentam a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $g_s < 0$ foram obtidos resultados em que as teorias comutativas e NC apresentaram os mesmo resultados qualitativos descritos pelas Figuras 27 e 28.

5.3.6.2 Curvatura negativa $k = -1$

Para os modelos cujo espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$) o potencial (4.147) assume a forma,

$$V_{\Lambda}(k = -1, \omega = -1, a) = -g_c - \Omega a^2 - \frac{g_r}{a^2} + \frac{g_s}{a^4} + \alpha a^3. \quad (5.45)$$

Nesse caso o setor do fluido perfeito acopla com a constante g_{Λ} . Logo, $\Omega = g_{\Lambda} + C$.

A equação de Friedmann (4.146) fica,

$$\dot{a}^2 - g_c - \Omega a^2 - \frac{g_r}{a^2} + \frac{g_s}{a^4} + \alpha a^3 = 0, \quad (5.46)$$

e a equação da aceleração do fator de escala (4.145),

$$\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a} + \frac{1}{2a} \left[-g_c - 3\Omega a^2 + \frac{g_r}{a^2} - 3\frac{g_s}{a^4} + 4\alpha a^3 \right] = 0. \quad (5.47)$$

Destaca-se novamente o fato de que as equações para os modelos comutativos com matéria rígida (5.18)-(5.20), radiação (5.24)-(5.26) e cordas cósmicas (5.36)-(5.38), apresentam a mesma estrutura das equações para os modelos com constante cosmológica (5.45)-(5.47). A diferença está apenas nas seguintes renomeações das variáveis,

Matéria Rígida	Radiação	Cordas Cósmicas	Constante Cosmológica
g_c	g_c	Ω	g_c
Ω	$-g_s$	$-g_s$	$-g_s$
g_{Λ}	g_{Λ}	g_{Λ}	Ω

Tabela 40 – Variáveis correspondentes entre as equações para os modelos com matéria rígida, radiação, cordas cósmicas e constante cosmológica.

Novamente é importante destacar que no caso de cordas cósmicas o parâmetro Ω pode assumir valores positivos e negativos enquanto os seus correspondentes nos modelos com radiação, cordas cósmicas e constante cosmológica (g_c) positivos.

Por questões didáticas e de conveniência os resultados obtidos, apresentados em seguida, foram agrupados de acordo com o sinal do parâmetro Ω e também com a combinação entre os sinais dos parâmetros g_r e g_s .

5.3.6.2.1 **Caso** $\Omega > 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), parâmetro Ω positivo ($\Omega > 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso que apresentou diferenças qualitativas nos potenciais e nos fatores de escala entre as duas teorias foi a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $g_s < 0$. Nesse caso foram obtidos resultados que apresentaram os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$\Omega > 0$			
$g_r > 0$ e $g_s > 0$	$g_r < 0$ e $g_s > 0$	$g_r > 0$ e $g_s < 0$	$g_r < 0$ e $g_s < 0$
Nada.	Nada.	Nada.	Figuras 1, 2 e 3.

Tabela 41 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $\Omega > 0$ e fluido perfeito de constante cosmológica.

5.3.6.2.2 *Caso* $\Omega < 0$

Para os modelos em que o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), parâmetro Ω negativo ($\Omega < 0$) e sendo o parâmetro NC negativo ($\alpha < 0$), o único caso em que as teorias comutativa e NC apresentaram novos comportamentos de diferenças qualitativas foi para a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $g_s < 0$. Nos outros casos foram obtidos resultados que apresentaram os mesmos comportamentos qualitativos já obtidos anteriormente. Tais comportamentos são apresentados na tabela seguinte,

$\Omega < 0$		
$g_r > 0$ e $g_s > 0$	$g_r < 0$ e $g_s > 0$	$g_r > 0$ e $g_s < 0$
Figuras 27-35.	Figuras 27-35.	Figuras 23, 24, 25 e 26.

Tabela 42 – Resultados obtidos pelos modelos com curvatura negativa $k = -1$, $\Omega < 0$ e fluido perfeito de constante cosmológica.

a) $g_r < 0$ e $g_r < 0$

Para os modelos que apresentam a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $g_r < 0$ foram obtidos resultados em que o potencial comutativo diverge para $-\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$, apresenta um crescimento até um ponto de máximo seguido de um decrescimento até um ponto de mínimo e novamente um crescimento com uma divergência para $+\infty$ quando $a \rightarrow +\infty$. Já o potencia NC diverge para $-\infty$ quando $a \rightarrow 0^+$, apresenta um crescimento até um ponto de máximo seguido de um decrescimento com uma divergência para $-\infty$ quando $a \rightarrow +\infty$. Os pontos de máximo e mínimo do potencial comutativo são dados por a_{c1} e a_{c2} respectivamente sendo positivos os valores do potencial nesses pontos ($V_c(a_{c1}) > 0$ e $V_c(a_{c2}) > 0$) e respeitando a relação $V_c(a_{c1}) > V_c(a_{c2})$. Além disso, tal potencial apresenta apenas uma raiz dada por a_{cr1} . O ponto de máximo do potencial NC é dados por a_{nc1} sendo o valor do potencial nesse ponto positivo ($V_{nc}(a_{nc1}) > 0$). Além disso, tal potencial apresenta duas raízes dadas por a_{ncr1} e a_{ncr2} , tal que $a_{ncr2} > a_{ncr1}$. Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 34. O fato do potencial comutativo possuir apenas uma raiz implica que os Universos obtidos pela teoria comutativa apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas.

Já o fato do potencial NC possuir duas raízes implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com dois tipos de comportamentos distintos que dependerão das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.47) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{ncr2}, +\infty[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.46) a teoria comutativa não deu origem a nenhum tipo de Universo. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 24. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 34 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 35. Ainda no mesmo caso em que há a combinação de sinais entre os parâmetros $g_r < 0$ e $g_r < 0$ foram obtidos resultados em que os valores do potencial comutativo nos pontos de máximo e mínimo são positivo ($V_c(a_{c1}) > 0$) e negativo ($V_c(a_{c2}) < 0$) respectivamente. Além disso, tal potencial apresenta três raízes dadas por a_{cr1} , a_{cr2} e a_{cr3} , tal que $a_{cr3} > a_{cr2} > a_{cr1}$. Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 36. O fato do potencial comutativo possuir três raízes implica que os Universos obtidos pela teoria comutativa apresentarão fatores de escala com dois tipos de comportamentos distintos que dependerão das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.47) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{cr2}, a_{cr3}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.46) a teoria comutativa deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 5. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 24. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 36 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 37. Também foram obtidos resultados em que o valor do potencial NC no ponto de máximo é negativo ($V_{nc}(a_{nc1}) < 0$). Além disso, tal potencial não apresenta nenhuma raiz. Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 38. O fato do potencial NC não possuir raízes implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que independe das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.47) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]0, a_{cr1}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.46) a teoria comutativa deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pelo caso comutativo representado pela Figura 2. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 24. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 38 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 39. Ao utilizar a equação de movimento (5.47) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]a_{cr2}, a_{cr3}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.46) a

teoria comutativa deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 5. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 24. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 38 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 40.

Finalmente foram obtidos resultados em que os valores do potencial comutativo nos pontos de máximo e mínimo são negativos ($V_c(a_{c1}) < 0$ e $V_c(a_{c2}) < 0$) e respeitando a relação $V_c(a_{c1}) > V_c(a_{c2})$. Além disso, tal potencial apresenta apenas uma raiz dada por a_{cr1} . Já o potencial NC apresentou o mesmo comportamento qualitativo descrito pelo caso NC apresentado pela Figura 38. Os comportamentos dos potenciais descritos acima são representados pela Figura 41. O fato do potencial comutativo possuir apenas uma raiz implica que os Universos obtidos pela teoria comutativa apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Já o fato do potencial NC não possuir raízes implica que os Universos obtidos pela teoria NC apresentarão fatores de escala com apenas um tipo de comportamento que dependerá das condições iniciais utilizadas. Ao utilizar a equação de movimento (5.47) com as condições iniciais $a_c(0) = a_{nc}(0) = a(0)$ contidas na região $]0, a_{cr2}[$ e com $\dot{a}_c(0)$ e $\dot{a}_{nc}(0)$ determinados pela equação de Friedmann (5.46) a teoria comutativa não deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentaram o mesmo tipo de comportamento da teoria comutativa descrita pela Figura 2. Já a teoria NC deu origem a Universos em que os fatores de escala apresentam o mesmo comportamento qualitativo descrito pela Figura 24. Os comportamentos descritos acima correspondentes aos potenciais descritos pela Figura 41 junto as condições iniciais mencionadas são representados pela Figura 42.

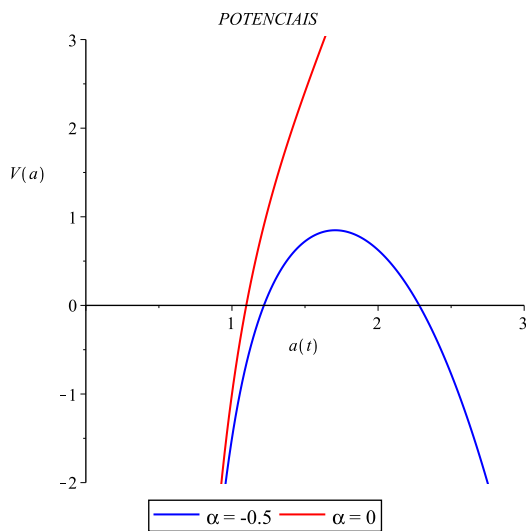


Figura 23 – Potenciais das duas teorias.

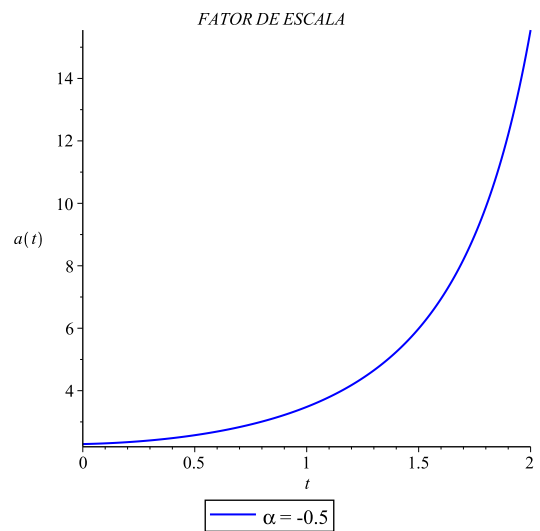


Figura 24 – Fator de escala correspondente a Figura 23 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr2}, +\infty[$.

k	g_c	Ω	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	1	-1	1	2	-0,5	2,29	0,1543072131

Tabela 43 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 23 e 24.

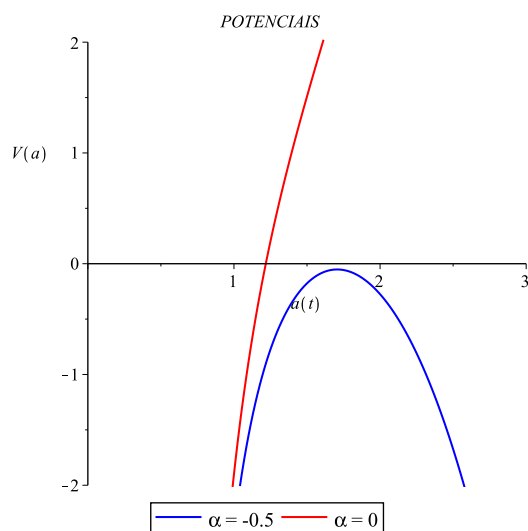
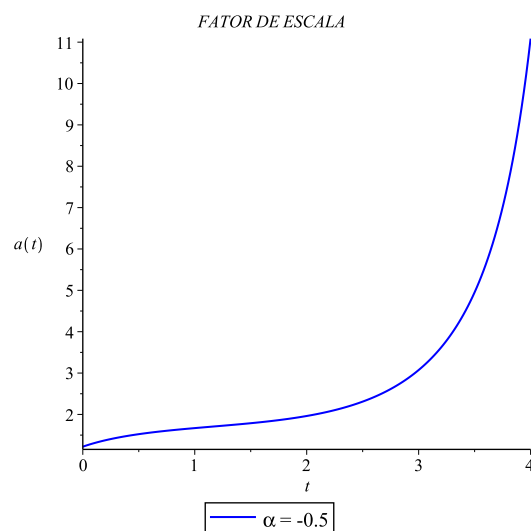


Figura 25 – Potenciais das duas teorias.

Figura 26 – Fator de escala correspondente a Figura 25 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, \infty[$.

k	g_c	Ω	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	0,1	-1	1	2	-0,5	1,22	0,9456133346

Tabela 44 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 25 e 26.

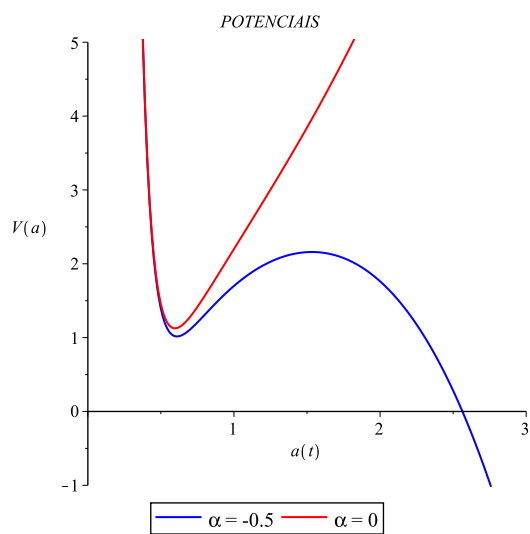


Figura 27 – Potenciais das duas teorias.

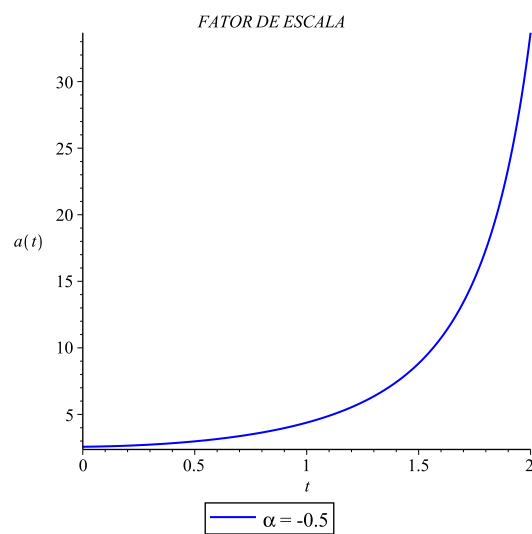


Figura 28 – Fator de escala correspondente a Figura 27 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr1}, +\infty[$.

k	g_c	Ω	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	2	-1	1	-0,2	-0,5	2,57	0,1709230470

Tabela 45 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 27 e 28.

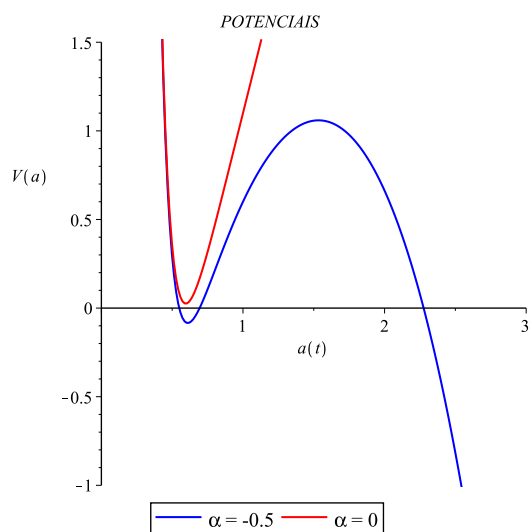


Figura 29 – Potenciais das duas teorias.

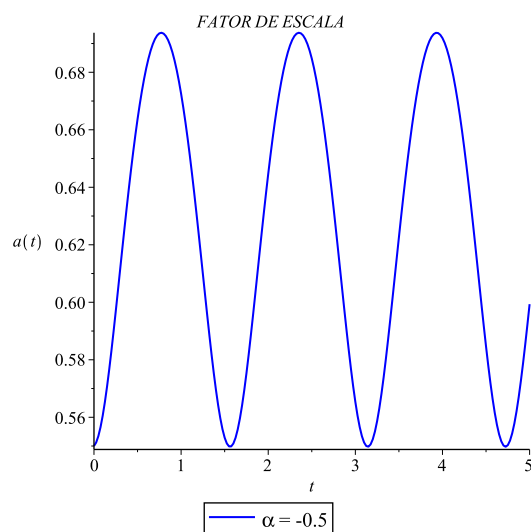


Figura 30 – Fator de escala correspondente a Figura 29 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr1}, a_{ncr2}[$.

k	g_c	Ω	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	0,9	-1	1	-0,2	-0,5	0,55	0,02880218742

Tabela 46 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 29 e 30.

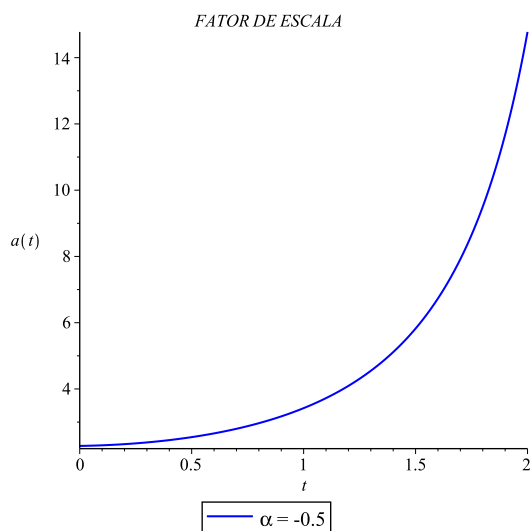


Figura 31 – Fator de escala correspondente a Figura 29 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr3}, +\infty[$.

k	g_c	Ω	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	0,9	-1	1	-0,2	-0,5	2,28	0,1128799318

Tabela 47 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 31.

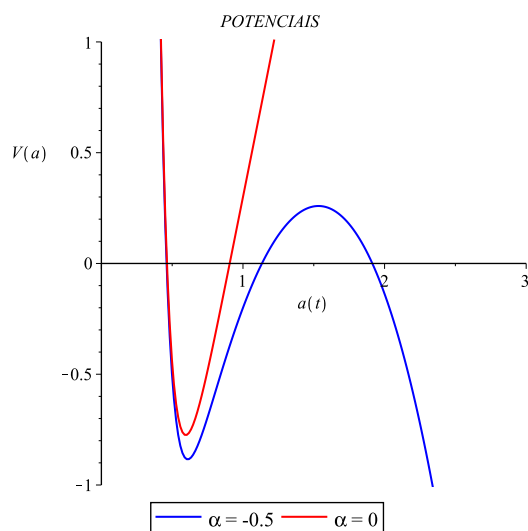
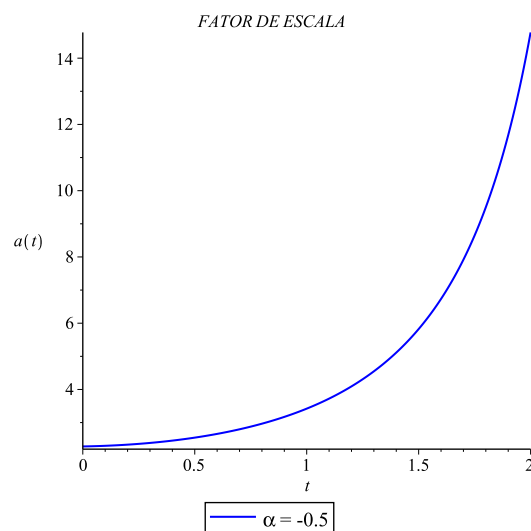


Figura 32 – Potenciais das duas teorias.

Figura 33 – Fator de escala correspondente a Figura 32 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr3}, +\infty[$.

k	g_c	Ω	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
1	0,1	-1	1	-0,2	-0,5	1,92	0,09536333153

Tabela 48 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 32 e 33.

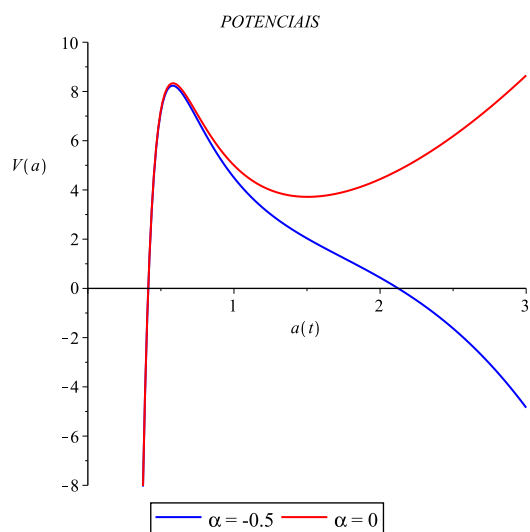


Figura 34 – Potenciais das duas teorias.

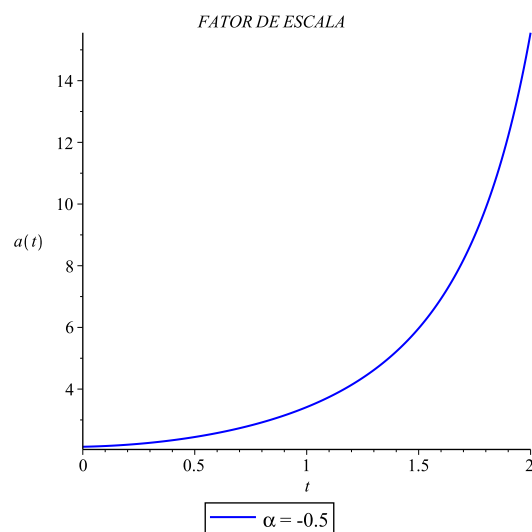


Figura 35 – Fator de escala correspondente a Figura 34 e condições iniciais contidas na região $]a_{ncr2}, \infty[$.

k	g_c	Ω	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
-1	1	-1	-6	-1	-0,5	2,13	0,1448870905

Tabela 49 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 34 e 35.

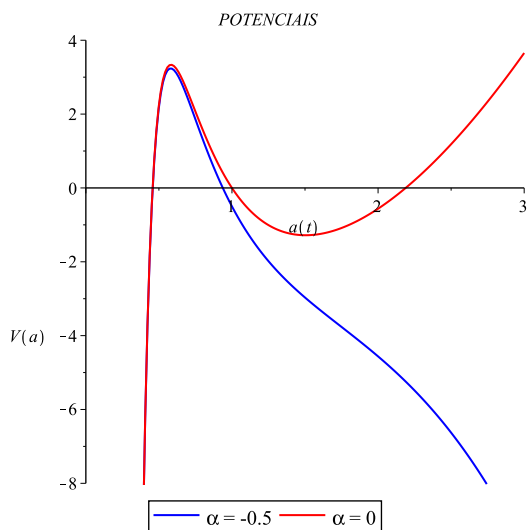


Figura 36 – Potenciais das duas teorias.

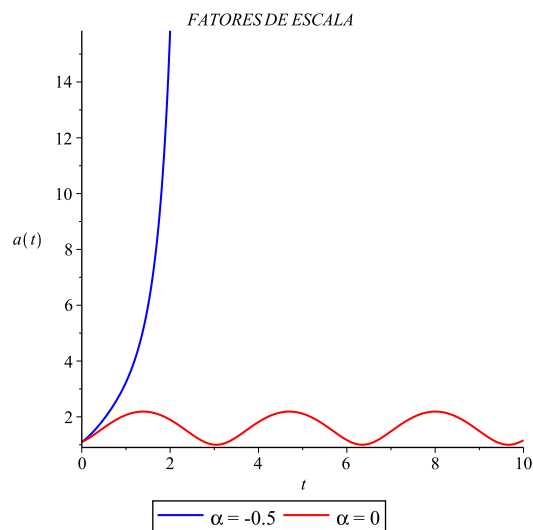


Figura 37 – Fatores de escala correspondentes a Figura 36 e condições iniciais contidas na região $[a_{cr2}, a_{cr3}]$.

k	g_c	Ω	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_c(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
-1	6	-1	-6	-1	-0,5	1, 1	0,7171720640	1,086202453

Tabela 50 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 36 e 37.

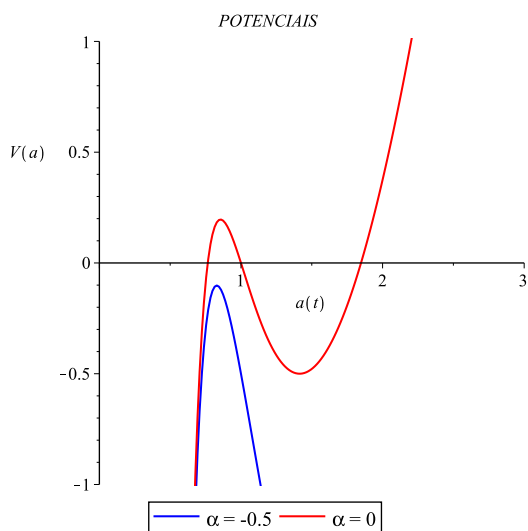


Figura 38 – Potenciais das duas teorias.

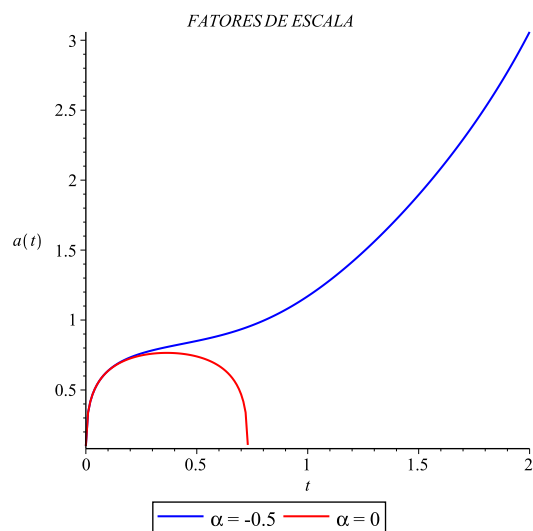
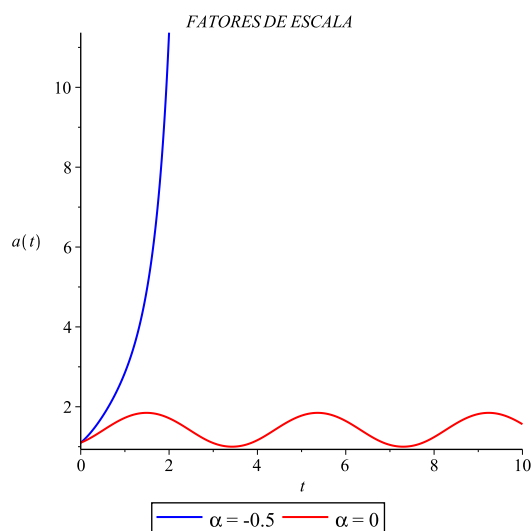


Figura 39 – Fatores de escala correspondentes a Figura 38 e condições iniciais contidas na região $]0, a_{cr1}[$.

k	g_c	Ω	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_c(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
-1	5	-1	-6	-2	-0,5	0,1	139,3017947	139,3017965

Tabela 51 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 38 e 39.

Figura 40 – Fatores de escala correspondentes a Figura 38 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr2}, a_{cr3}[$.

k	g_c	Ω	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_c(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
-1	5	-1	-6	-2	-0,5	1,1	0,4442400533	0,9288967784

Tabela 52 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 38 e 40.

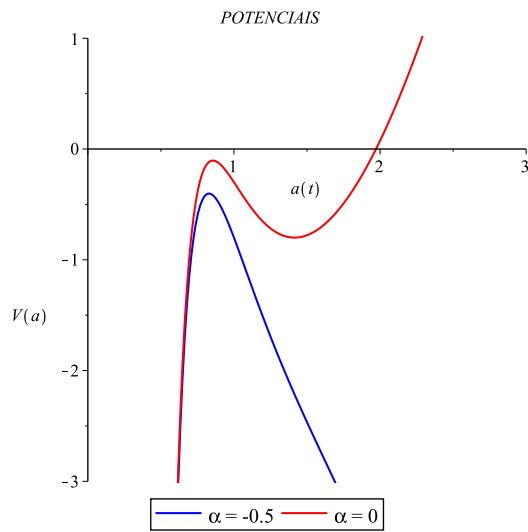
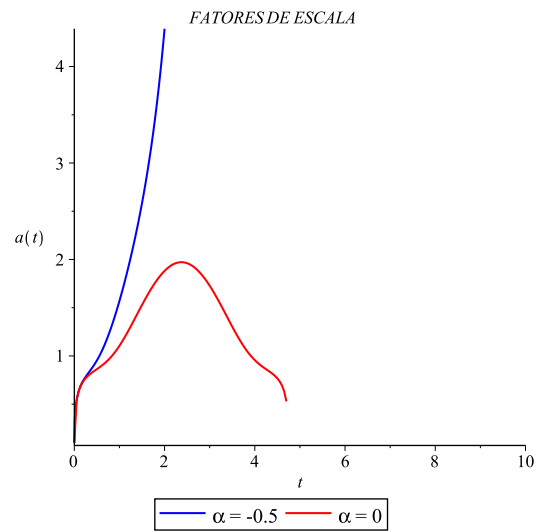


Figura 41 – Potenciais das duas teorias.

Figura 42 – Fatores de escala correspondentes a Figura 41 e condições iniciais contidas na região $]0, a_{cr1}[$.

k	g_c	Ω	g_r	g_s	α	$a(0)$	$\dot{a}_c(0)$	$\dot{a}_{nc}(0)$
-1	5,3	-1	-6	-2	-0,5	0,1	139,3028715	139,3028733

Tabela 53 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 41 e 42.

5.4 ESTIMATIVA DO PARÂMETRO NC

Através da equação de Friedmann dos modelos cosmológicos NC's (4.146) é possível obter numericamente um valor numérico para o parâmetro NC. Este processo será realizado fixando os outros parâmetros envolvidos de acordo com os dados observacionais atuais.

Inicialmente, serão consideradas as constantes G e c no sistema de unidades MKS, uma vez que se quer obter o tempo em sua unidade habitual. Em seguida, fixa-se $k = 0$, que é o valor mais aceito para o parâmetro de curvatura, atualmente. Fixa-se também $\Lambda = 0$. O parâmetro referente à energia do fluido perfeito C pode ser escrito como $C = \Omega_0 H_0^2 = 8\pi G \rho_0 / 3$, sendo $\Omega_0 = \rho_0 / \rho_c$ o parâmetro de massa da energia escura, $\rho_c = 3H^2 / (8\pi G)$ a densidade crítica, ρ_0 a densidade de matéria atual do Universo, H_0 a constante atual de Hubble e G a constante gravitacional. Aqui $\Omega_0 = 0.3$ e $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Introduzindo os valores destes parâmetros na equação de Friedmann NC (4.146), separando as variáveis, introduzindo um novo parâmetro NC $\psi = 3\alpha$ e considerando que, nos tempos atuais, o Universo é dominado por um fluido perfeito de poeira sem pressão ($\omega = 0$), obtêm-se,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1,538)10^{-36}a^{-1} - \frac{\psi}{3}}} da = \int_0^{4,32 \times 10^{17}} dt. \quad (5.48)$$

Na equação acima, foi fixado o valor atual do fator de escala $a_0 = 1$ e a presente idade do Universo $t_0 = 4,32 \times 10^{17} s$ ($\approx 13,7 \times 10^9$ anos). Numericamente foi encontrado que $\psi \approx -0,45 \times 10^{-35} s^{-2}$. Logo, foi obtido que o valor numérico de α é da mesma ordem de grandeza do valor atualmente estimado da constante cosmológica g_Λ , na teoria HL. Da literatura, este valor é aproximadamente, $g_{\Lambda 0} \approx 2,28 \times 10^{-35} s^{-2}$. A presente estimativa já foi realizada em [17] para modelos cosmológicos NC's em RG.

5.5 CONCLUSÃO

É importante destacar que no presente trabalho foi aplicado pela primeira vez o formalismo de FJ na teoria gravitacional de HL.

No presente trabalho, a introdução da NC, foi feita de maneira geométrica. Isto resultou em um termo geométrico adicional nas equações de movimento. Através de uma lei de conservação de energia foi obtida uma equação de estado para este termo. Isto possibilitou a interpretação deste termo como sendo um fluido perfeito NC. Conclui-se então que apesar do termo adicional ser de origem geométrica, foi relacionado com o setor de matéria dos modelos cosmológicos de HL NC's.

Depois de resolver as equações dinâmicas para diferentes modelos cosmológicos NC's, conclui-se que a introdução da NC na teoria cosmológica de HL, acoplados à fluidos perfeitos com equação de estado $p = \omega\rho$, altera de forma significativa a dinâmica dos modelos cosmológicos de HL NC's em relação aos seus correspondentes comutativos. Nos modelos cosmológicos de HL NC's, além de tornar a densidade de energia do fluido NC positiva, valores negativos do parâmetro NC ($\alpha < 0$), apresentaram o efeito de tornar a expansão do Universo mais fácil do que no modelo comutativo correspondente. Nos casos em que, no modelo comutativo, o Universo está se expandindo, a presença de um α negativo, no modelo NC correspondente, aumentou taxa de expansão. Como exemplo, estes resultados foram apresentados pelas Figuras 3, 6, 9 e 12. Por outro lado, nos casos em que, no modelo comutativo, o Universo está se contraindo para uma singularidade do tipo *Big Crunch*, ou ficam oscilando entre máximos e mínimos, a presença de um α negativo, no modelo NC correspondente, forçou o Universo a se expandir. Como exemplo, estes resultados foram apresentados pelas Figuras 2, 8, 37, 39, 40 e 42. Nos casos em que, no modelo comutativo, não deu origem a nenhum tipo de Universo, a presença de um α negativo, no modelo NC correspondente, deu origem a Universos que oscilam entre máximos e mínimos ou Universos que expandem de maneira infinita em um tempo infinito, a partir das condições iniciais. Como exemplo, estes resultados foram apresentados pelas Figuras 5, 11, 14, 16, 20, 24, 26, 28, 30, 31, 33 e 35.

Uma vez que busca-se descrever a atual expansão acelerada do nosso Universo, pode-se mencionar que, devido à NC introduzida aqui, foram obtidas soluções para o fator de escala compatíveis com a expansão. Como exemplo, estas soluções foram apresentadas

pelas Figuras 3, 6, 9, 12, 24, 26, 28, 31, 33 e 35. Além disso, a introdução da NC resultou na presença de um parâmetro adicional livre α (especialmente no caso de um α negativo) não presente no modelos comutativos correspondentes. Pode-se usar essa liberdade adicional para ajustar melhor os dados observacionais.

6 OS MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO-COMUTATIVOS EM RG

6.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo será considerada que a interação gravitacional é descrita pela RG. Os modelos cosmológicos de RG NC's serão descritos, para uma versão particular de NC, acoplados a fluidos perfeitos fantasmas. A NC será introduzida através de deformações na álgebra dos parênteses de Poisson, entre as variáveis do espaço de fase, que descrevem o Universo. Para isso será utilizado o formalismo de FJ. Esta NC, e sua introdução, serão dadas da mesma forma descrita nos capítulos anteriores. Em seguida, serão resolvidas as equações de movimento para os modelos cosmológicos de RG NC's.

6.2 OS MODELOS COSMOLÓGICOS DE RG NC's

Serão considerados no presente capítulo modelos cosmológicos homogêneos e isotrópicos de RG NC's acoplados a fluidos perfeitos fantasmas ($\omega < -1$) e uma constante cosmológica (Λ). Nesse modelos, o espaço-tempo é caracterizado pelas seções espaciais com curvatura nula ($k = 0$), positiva ($k = 1$) e negativa ($k = -1$). É importante mencionar que estes modelos já foram estudados na literatura com outros tipos de fluidos perfeitos [17].

Como nos modelos anteriores, a atenção será restrita apenas a soluções expansivas que podem representar a atual expansão do Universo. No presente caso, estas soluções geram singularidades do tipo *Big Rip*.

Com essas informações, os modelos cosmológicos comutativos são dados pela métrica de FRW (2.67), tensor momento energia (2.1) e equação de estado do fluido perfeito (2.51). Assim como nos modelos cosmológicos dos capítulos anteriores, os setores geométricos e de matéria são escritos em suas formas Hamiltonianas através do formalismo ADM e do formalismo variacional de Schutz respectivamente introduzidos no capítulo 2. Então, pode-se escrever a seguinte densidade de Hamiltoniana para os modelos cosmológicos comutativos [17],

$$\mathcal{H} = -\frac{P_a(t)^2}{12a(t)} - 3ka(t) + \Lambda a(t)^3 + P_T(t)a(t)^{-3\omega}. \quad (6.1)$$

Na equação acima $a(t)$ é o fator de escala, $T(t)$ é a coordenada relacionada ao fluido, $P_a(t)$ e $P_T(t)$ são os momentos canonicamente conjugados às variáveis $a(t)$ e $T(t)$ respectivamente, k é a curvatura das seções espaciais, Λ é a constante cosmológica e ω é a constante do fluido perfeito. Por questões de simplicidade será omitida a dependência temporal das variáveis.

A partir da densidade de Hamiltoniana (6.1), afim de obter uma Hamiltoniana NC, é aplicado o formalismo de FJ e os parênteses de Poisson (4.134)-(4.138) entre as variáveis canônicas NC's dadas por a, P_a, T e P_T . Os parâmetros σ e α , são parâmetros

NC's. Como já mencionado, nos modelos cosmológicos NC's anteriores, estes parâmetros devem ser pequenos restringindo o tratamento em primeira ordem dos mesmos.

Assim como nos modelos anteriores, o formalismo induziu as seguintes transformações entre as variáveis NC's e as novas variáveis comutativas (\tilde{P}_a, \tilde{P}_T) mais os parâmetros NC's,

$$\tilde{P}_a = \frac{P_a - \alpha T}{1 - \alpha\sigma}, \quad \tilde{P}_T = \frac{P_T}{1 - \alpha\sigma}. \quad (6.2)$$

Este novo conjunto de variáveis comutativas satisfaz os parênteses de Poisson (4.134)-(4.138) em primeira ordem dos parâmetros NC's. Baseados nos mesmos argumentos discutidos no Capítulo 5, através das transformações de coordenadas (4.123)-(4.124), concluiu-se que $\sigma = 0$. Assim, encontra-se a seguinte densidade de Hamiltoniana NC escrita em termos de variáveis comutativas mais o parâmetro NC,

$$\tilde{\mathcal{H}} = -\frac{(\tilde{P}_a + \alpha T)^2}{12a} - 3ka + \Lambda a^3 + \tilde{P}_T a^{-3\omega}, \quad (6.3)$$

onde foi usado $a = \tilde{a}$, $T = \tilde{T}$ e $\sigma = 0$. Fazendo $\alpha = 0$ obtêm-se o modelo comutativo.

Através da Hamiltoniana (6.3), foram encontradas as equações de Hamilton. Combinando as equações de Hamilton foram obtidas duas equações dinâmicas para o fator de escala $a(t)$ e uma equação para a conservação de energia. Impondo a condição de vínculo, foi obtido a seguinte equação de Friedmann NC,

$$\dot{a}^2 + k - \frac{\Lambda}{3}a^2 - \frac{C}{3a^{3\omega+1}} + \frac{\alpha}{3a^{3\omega}} = 0. \quad (6.4)$$

Na equação acima, C é uma constante de integração positiva relacionada à energia do fluido. Fazendo $\alpha = 0$ e $C = P_T$ obtêm-se as equações para os modelos comutativos correspondentes. Com os modelos cosmológicos de RG NC's construídos será resolvida a equação de Friedmann (6.4) para encontrar a dinâmica do fator de escala $a(t)$.

6.3 METODOLOGIA

A análise dos resultados foi realizada de maneira numérica e detalhada através de comparações entre os potenciais dos modelos cosmológicos de RG NC's e seus correspondentes comutativos. Além disso, também foram comparados as possíveis soluções das equações de movimento correspondentes aos respectivos potenciais de ambas as teorias. De acordo com a equação de Friedmann NC (6.4), o estudo das soluções será baseado no seguinte potencial,

$$V(a) = k - \frac{\Lambda}{3}a^2 - \frac{C}{3a^{3\omega+1}} + \frac{\alpha}{3a^{3\omega}}, \quad (6.5)$$

e nas seguintes equações de movimento,

$$\dot{a}^2 + k - \frac{\Lambda}{3}a^2 - \frac{C}{3a^{3\omega+1}} + \frac{\alpha}{3a^{3\omega}} = 0, \quad (6.6)$$

$$\ddot{a} - \frac{\Lambda}{3}a + \frac{C}{6a^{3\omega+2}} + \frac{\omega C}{2a^{3\omega+2}} - \frac{\omega\alpha}{2a^{3\omega+1}} = 0. \quad (6.7)$$

Novamente, destaca-se que as equações para os modelos comutativos são obtidas fazendo $\alpha = 0$ e $C = P_T$.

Assim como nos modelos cosmológicos dos capítulos anteriores, a equação de Friedmann (6.6) é resolvida de maneira numérica, porém, em alguns casos ela não fornecerá a solução devido à necessidade de mais uma condição inicial. Nos casos ressaltados acima a equação que requer duas condições iniciais e que será utilizada é a equação da aceleração do fator de escala (6.7). As condições iniciais $a(t=0)$ para a equação de Friedmann (6.6) serão obtidas através do comportamento qualitativo do potencial (6.5). Já para a equação da aceleração do fator de escala (6.7) as condições iniciais $a(t=0)$ e $\dot{a}(t=0)$ serão obtidas através do comportamento qualitativo do potencial (6.5) e da equação de Friedmann (6.6) respectivamente. É importante destacar que na análise qualitativa realizada foram considerados apenas os pontos críticos e raízes dos potenciais com valores reais e positivos. Dessa forma, os fatores de escala sempre terão condição inicial $a(t=0) > 0$ e sofrerão inicialmente uma expansão dada por $\dot{a}(t=0) > 0$.

Como já mencionado anteriormente, serão estudados os modelos cosmológicos contendo como matéria fluidos fantasmas ($\omega < -1$) em que o espaço-tempo é caracterizado pelas diferentes curvaturas das seções espaciais.

6.4 RESULTADOS OBTIDOS

Primeiramente é importante destacar duas características dos modelos cosmológicos estudados no presente trabalho. Através do potencial (6.5) percebe-se que quando $a(t) \rightarrow 0^+$, $\lim_{a \rightarrow 0^+} V(a) = k$. Outra característica importante a ser mencionada é que quando $a(t) \rightarrow \infty$, $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a) = \text{ sinal}(\alpha)\infty$, ou seja, depende do sinal do parâmetro NC.

É importante mencionar que no presente texto o potencial (6.5) poderá não apresentar raiz ou apresentar no máximo uma raiz real e positiva. Além disso pode não apresentar ponto crítico ou apresentar no máximo um ponto crítico real e positivo.

Uma das questões mais importantes que fundamenta o presente trabalho e que merece destaque é a possível influência da NC no comportamento qualitativo dos fatores de escala. Como os resultados de interesse são principalmente motivados pela expansão acelerada do Universo, serão destacados os casos em que ambas as teorias, comutativa e NC, apresentam Universos em que os fatores de escala expandem infinitamente em um tempo finito para uma singularidade do tipo *Big Rip*, a partir das condições iniciais. Dentre estes casos, será visto que em todas as situações, a teoria NC apresenta um fator de escala com taxa de expansão mais rápida quando comparado ao obtido pela teoria comutativa. Consequentemente o tempo para que a teoria NC chegue na singularidade do *Big Rip* é

menor quando comparado ao da teoria comutativa. A partir dos argumentos utilizados acima serão considerados e apresentados no presente texto os modelos cosmológicos de RG NC's acoplados a fluidos perfeitos fantasmas com equação de estado $p = \omega\rho$, em que $\omega < -1$.

6.4.1 Fluidos Fantasmas

O estudo numérico e detalhado do comportamento das soluções para os fatores de escala foi obtido da variação dos parâmetros presentes k , Λ , P_T , C , ω e α . É importante mencionar que, para valores positivos do parâmetro NC ($\alpha > 0$), os potenciais (6.5) apresentam comportamentos do tipo representados pela Figura 43. Estes casos não serão apresentados na presente tese, pois, os fatores de escala dos Universos NC's expandem até um tamanho máximo, seguido de uma contração. Logo, estes fatores de escala não apresentam expansão para a singularidade do *Big Rip*. Considerando as informações acima, foram encontrados os seguintes resultados.

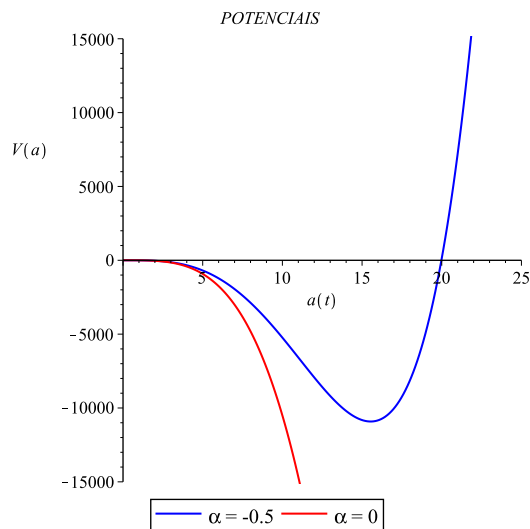


Figura 43 – Potenciais das duas teorias.

k	Λ	P_T	C	ω	α
0	-1	10	10	-1,5	0,5

Tabela 54 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 43.

6.4.1.1 Curvatura nula $k = 0$

No espaço-tempo caracterizado pelas seções espaciais com curvatura nula ($k = 0$), a dinâmica do Universo é obtida da equação (6.6) junto às condições iniciais determinadas pelo potencial (6.5).

Como já mencionado o caso comutativo é obtido fazendo $C = P_T$ e $\alpha = 0$.

6.4.1.1.1 **Caso** $\Lambda = 0$

No espaço-tempo caracterizado pelas seções espaciais com curvatura nula ($k = 0$) e na ausência da constante cosmológica ($\Lambda = 0$) a equação de Friedmann (6.6) para os modelos comutativos é dada por,

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{P_T}{3a^{3\omega+1}}}. \quad (6.8)$$

Essa é uma equação diferencial separável que pode ser diretamente integrada obtendo como solução,

$$a(t) = \left[\frac{(3\omega + 3)}{2} \sqrt{\frac{P_T}{3}} \left\{ t - t_0 + 2\sqrt{\frac{3}{P_T}} \left(\frac{a_0^{\frac{3\omega+3}{2}}}{3\omega + 3} \right) \right\} \right]^{\frac{2}{3\omega+3}}. \quad (6.9)$$

Com o fator de escala acima, considerando $t_0 = 0$, $a(t_0) = a_0$ e como $\omega < -1$ o tempo para o fator de escala atingir a singularidade do *Big Rip* fica dado por,

$$t = -\frac{2}{3\omega + 3} \sqrt{\frac{3}{P_T}} \left(a_0^{\frac{3\omega+3}{2}} \right). \quad (6.10)$$

É importante mencionar que o presente caso é o único que forneceu alguns resultados analíticos, como os encontrados acima. Por questões de conveniência, o tempo (6.10) será denominado como sendo o tempo analítico para os fatores de escala (6.9) dos Universos comutativos atingirem o *Big Rip*. Para os casos NC's não foi possível obter resultados deste tipo.

Para valores negativos do parâmetro NC os potenciais e os fatores de escala de ambas as teorias apresentam o mesmo comportamento qualitativo. Os potenciais não apresentam nenhuma raiz e são decrescentes com uma taxa de decrescimento mais rápida para a teoria NC. Os fatores de escala descrevem o Universo com início na singularidade do *Big Bang* no tempo inicial $t = 0$. Os Universos expandem de maneira infinita em um tempo finito até uma singularidade do tipo *Big Rip*. O tempo para o Universo da teoria NC chegar em tal singularidade é menor do que o Universo obtido pela teoria comutativa. A diferença entre tais tempos decorre da presença do parâmetro NC. Os comportamentos descritos acima são representados pelas Figuras 44 e 45, sendo t o tempo analítico da teoria

comutativa dado por (6.10) e τ o tempo numérico para os fatores de escala atingirem a singularidade do *Big Rip*.

a) Variação de P_T e C

A medida que o valor do parâmetro P_T e C aumentam, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 46 e 47.

b) Variação de ω

A medida que o valor do parâmetro ω diminui, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 48 e 49.

c) Variação de α

A medida que o valor do parâmetro α diminui, as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. Tais comportamentos são representados nas Figuras 50.

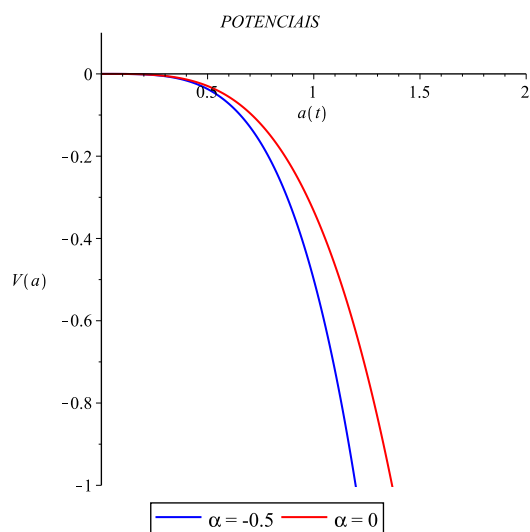


Figura 44 – Potenciais das duas teorias.

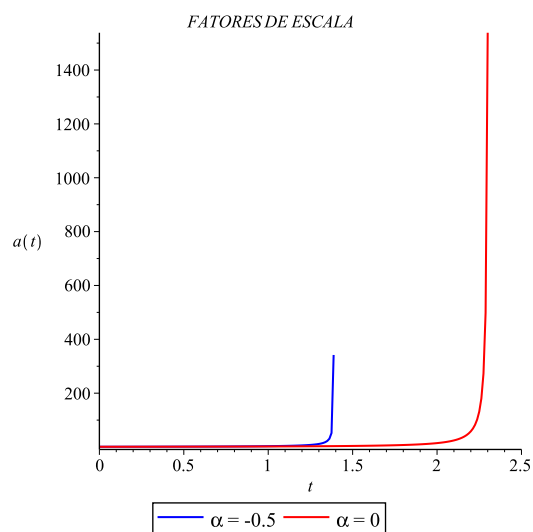


Figura 45 – Fatores de escala correspondentes a Figura 44 e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$

k	Λ	P_T	C	ω	α	$a(0)$	t_c	τ_c	τ_{NC}
0	0	1	1	-1,5	-0,5	1	2,309401077	2,3094011	1,3888308

Tabela 55 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 44 e 45.

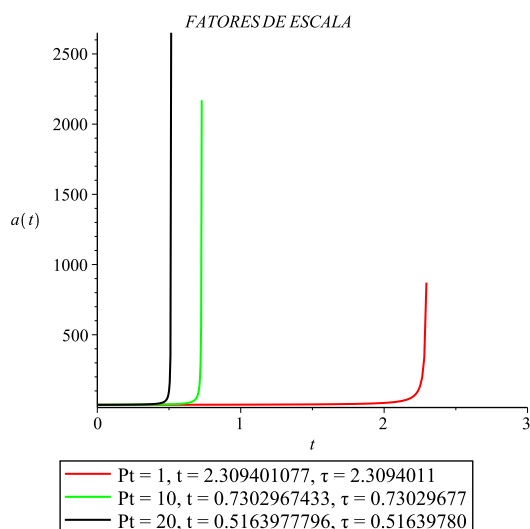


Figura 46 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

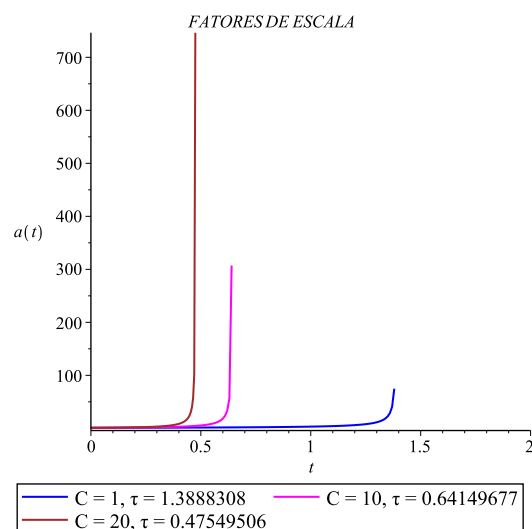


Figura 47 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	t	τ
0	0	1	-1,5	1	2,309401077	2,3094011
0	0	10	-1,5	1	0,7302967433	0,73029677
0	0	20	-1,5	1	0,5163977796	0,51639780

Tabela 56 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 46.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
0	0	1	-1,5	-0,5	1	1,3888308
0	0	10	-1,5	-0,5	1	0,64149677
0	0	20	-1,5	-0,5	1	0,47549506

Tabela 57 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 47.

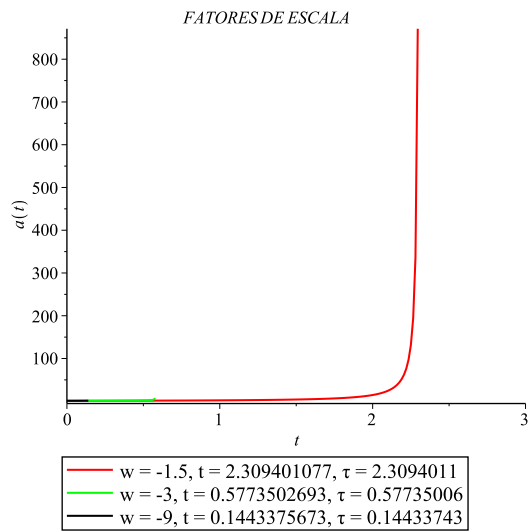


Figura 48 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

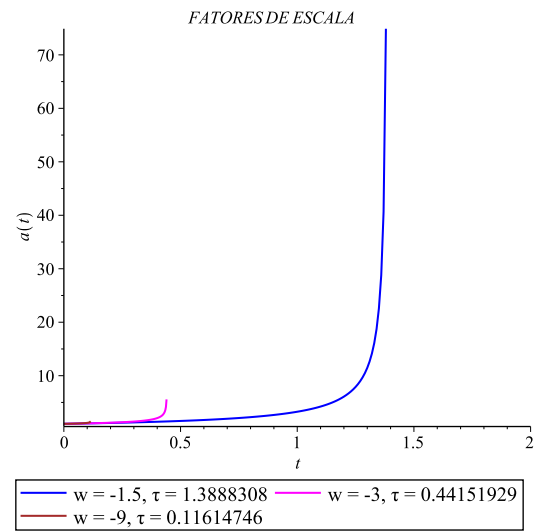


Figura 49 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	t	τ
0	0	1	-1,5	1	2,309401077	2,3094011
0	0	1	-3	1	0,5773502693	0,57735006
0	0	1	-9	1	0,1443375673	0,14433743

Tabela 58 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 48.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
0	0	1	-1,5	-0,5	1	1,3888308
0	0	1	-3	-0,5	1	0,44151929
0	0	1	-9	-0,5	1	0,11614746

Tabela 59 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 49.

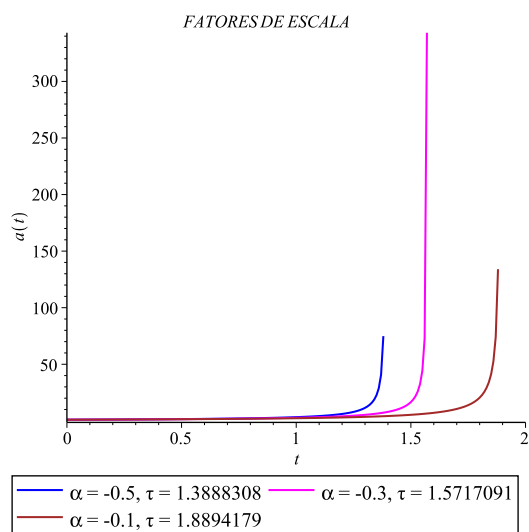


Figura 50 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
0	0	1	-1,5	-0,1	1	1,8894179
0	0	1	-1,5	-0,3	1	1,5717091
0	0	1	-1,5	-0,5	1	1,3888308

Tabela 60 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 50.

6.4.1.1.2 *Caso* $\Lambda \neq 0$

a) Caso $\Lambda > 0$

Para valores negativos do parâmetro NC os potenciais e os fatores de escala de ambas as teorias apresentam os mesmos comportamentos qualitativos descritos pelas Figuras 44 e 45.

a.i) Variação de P_T e C

A medida que o valor do parâmetro P_T e C aumentam, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 51 e 52.

a.ii) Variação de Λ

A medida que o valor do parâmetro Λ aumenta, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 53 e 54.

a.iii) Variação de ω

A medida que o valor do parâmetro ω diminui, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 55 e 56.

a.iv) Variação de α

A medida que o valor do parâmetro α diminui, as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. Tais comportamentos são representados nas Figuras 57.

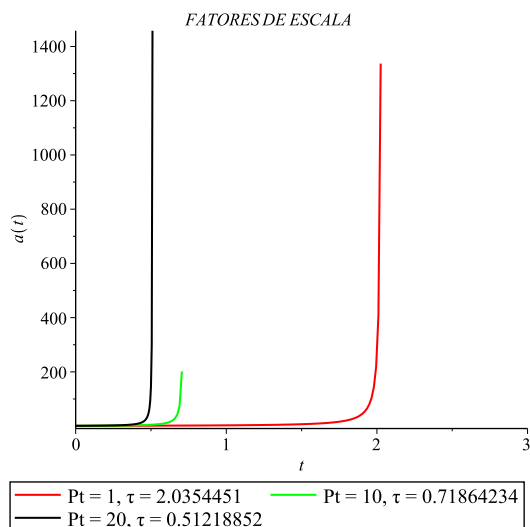


Figura 51 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

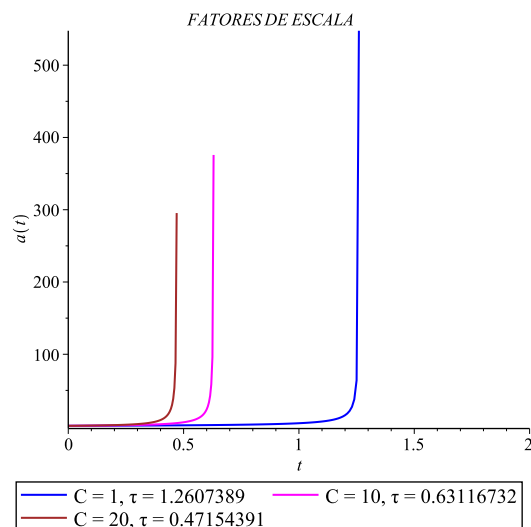


Figura 52 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
0	1	1	-1,5	1	2,0354451
0	1	10	-1,5	1	0,71864234
0	1	20	-1,5	1	0,51218852

Tabela 61 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 51.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
0	1	1	-1,5	-0,5	1	1,2607389
0	1	10	-1,5	-0,5	1	0,63116732
0	1	20	-1,5	-0,5	1	0,47154391

Tabela 62 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 52.

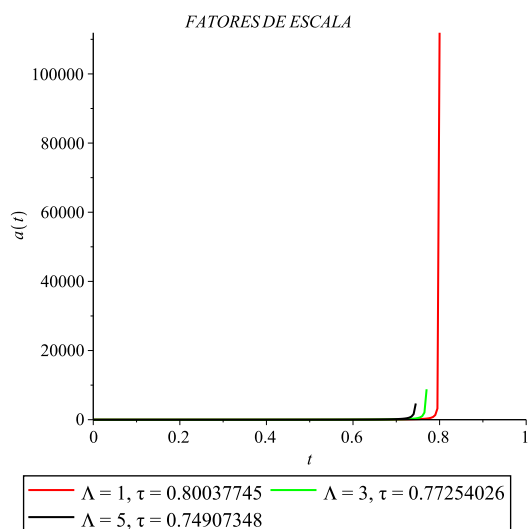


Figura 53 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

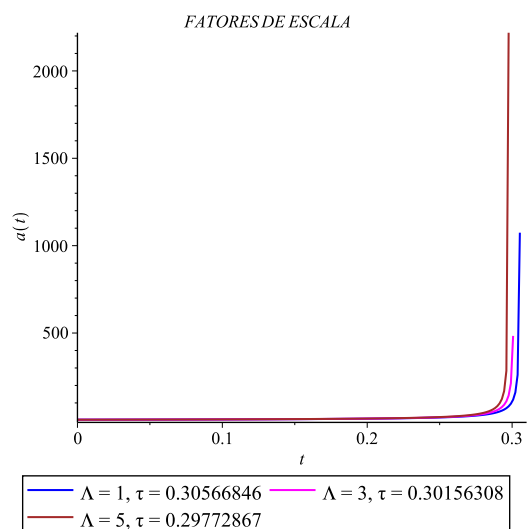


Figura 54 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
0	1	1	-1,5	4	0,80037745
0	3	1	-1,5	4	0,77254026
0	5	1	-1,5	4	0,74907348

Tabela 63 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 53.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
0	1	1	-1,5	-0,5	4	0,30566846
0	3	1	-1,5	-0,5	4	0,30156308
0	5	1	-1,5	-0,5	4	0,29772867

Tabela 64 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 54.

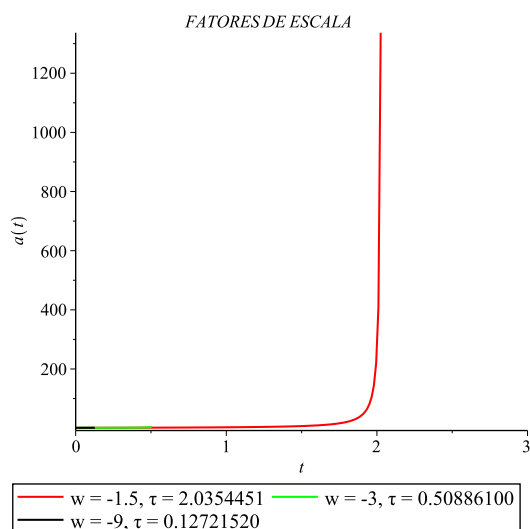


Figura 55 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

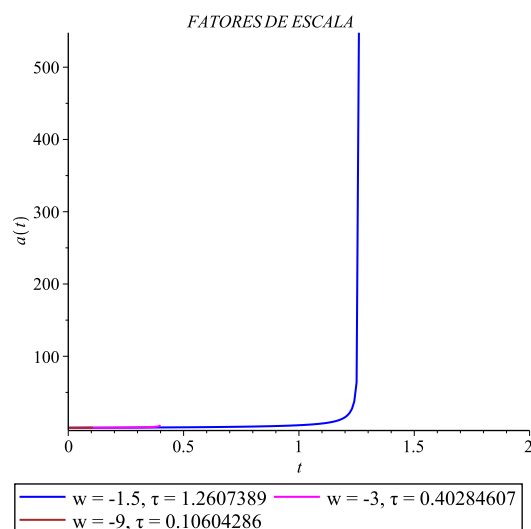


Figura 56 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
0	1	1	-1,5	1	2,0354451
0	1	1	-3	1	0,50886100
0	1	1	-9	1	0,12721520

Tabela 65 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 55.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
0	1	1	-1,5	-0,5	1	1,2607389
0	1	1	-3	-0,5	1	0,40284607
0	1	1	-9	-0,5	1	0,10604286

Tabela 66 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 56.

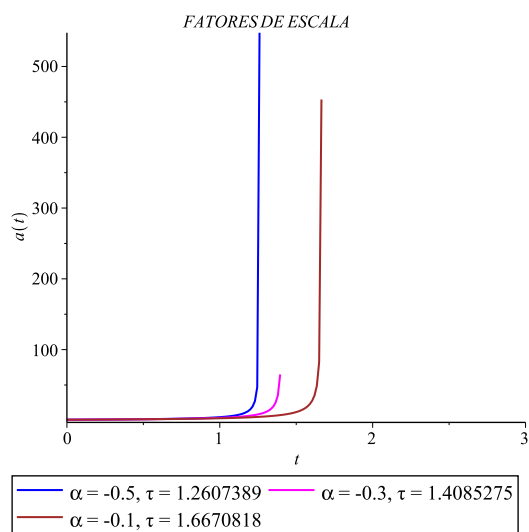


Figura 57 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
0	1	1	-1,5	-0,1	1	1,6670818
0	1	1	-1,5	-0,3	1	1,4085275
0	1	1	-1,5	-0,5	1	1,2607389

Tabela 67 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 57.

b) Caso $\Lambda < 0$

Para valores negativos do parâmetro NC os potenciais de ambas as teorias apresentam o mesmo comportamento qualitativo. Os potenciais apresentam um crescimento até um ponto de máximo seguido de um decrescimento. O potencial da teoria comutativa apresenta uma raiz, dada por a_{cr1} . O potencial da teoria NC também apresenta uma raiz, dada por a_{ncr1} . Os fatores de escala de ambas as teorias descrevem o Universo com início na singularidade do *Big Bang*, no tempo inicial $t = 0$. Os Universos expandem de maneira infinita em um tempo finito, a partir da condição inicial a_{cr1} , até uma singularidade do tipo *Big Rip*. Os comportamentos mencionados acima são representados pelas Figuras 58 e 59.

b.i) Variação de P_T e C

A medida que o valor do parâmetro P_T e C aumentam, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 60 e 61.

b.ii) Variação de Λ

A medida que o valor do parâmetro Λ aumenta, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 62 e 63.

b.iii) Variação de ω

A medida que o valor do parâmetro ω diminui, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 64 e 65.

b.iv) Variação de α

A medida que o valor do parâmetro α diminui, as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. Tais comportamentos são representados nas Figuras 66.

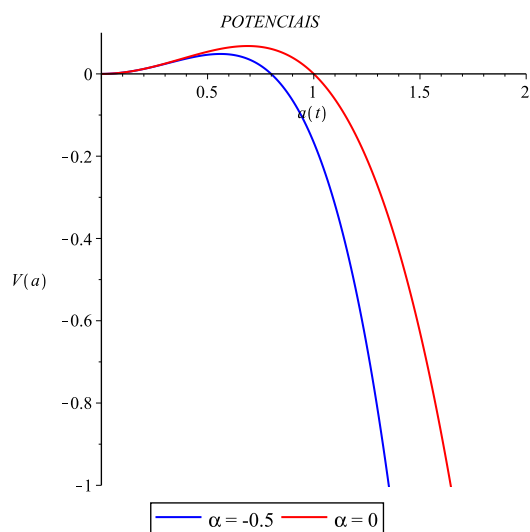


Figura 58 – Potenciais das duas teorias.

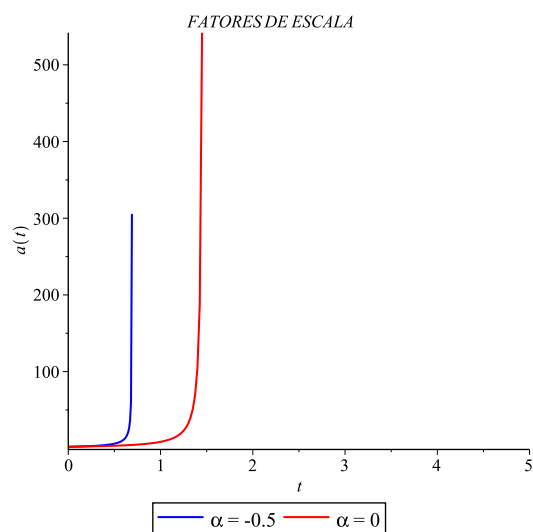


Figura 59 – Fatores de escala para as duas teorias correspondentes a Figura 58 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	C	ω	α	$a(0)$	τ_c	τ_{NC}
0	-1	1	1	-1,5	-0,5	2	1,4705631	0,69153077

Tabela 68 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 58 e 59.

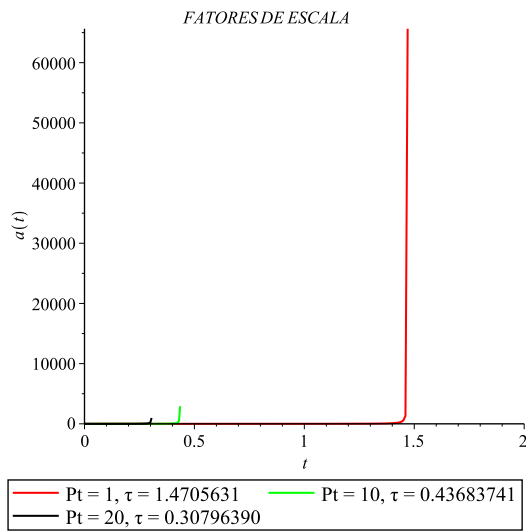


Figura 60 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

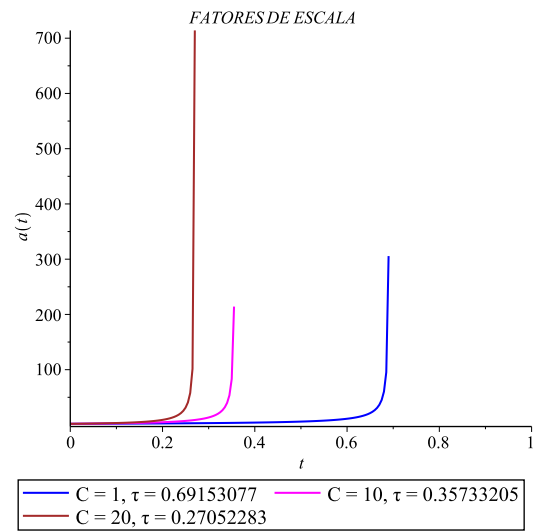


Figura 61 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
0	-1	1	-1,5	2	1,4705631
0	-1	10	-1,5	2	0,43683741
0	-1	20	-1,5	2	0,30796390

Tabela 69 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 60.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
0	-1	1	-1,5	-0,5	2	0,69153077
0	-1	10	-1,5	-0,5	2	0,35733205
0	-1	20	-1,5	-0,5	2	0,27052283

Tabela 70 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 61.

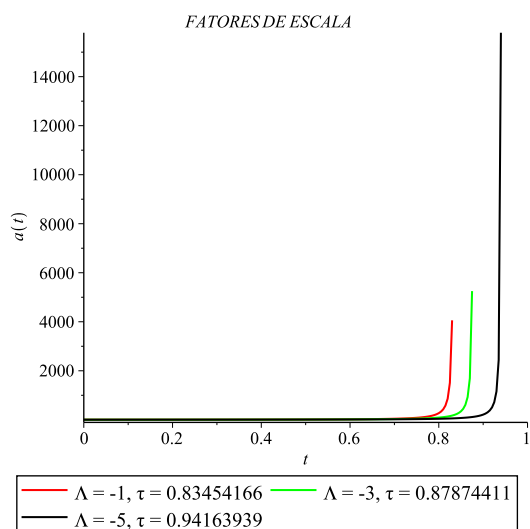


Figura 62 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

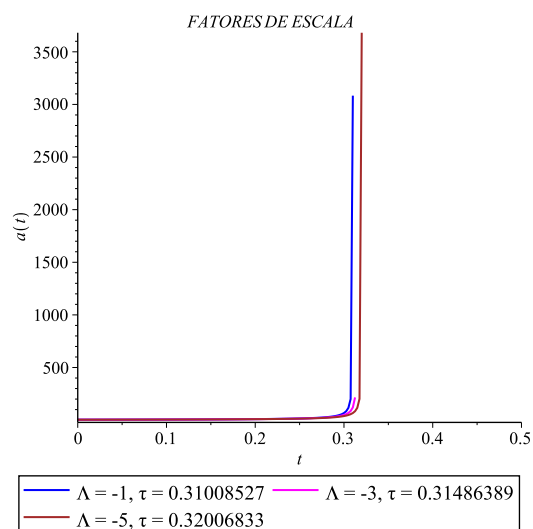


Figura 63 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
0	-1	1	-1,5	4	0,83454166
0	-3	1	-1,5	4	0,87874411
0	-5	1	-1,5	4	0,94163939

Tabela 71 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 62.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
0	-1	1	-1,5	-0,5	4	0,31008527
0	-3	1	-1,5	-0,5	4	0,31486389
0	-5	1	-1,5	-0,5	4	0,32006833

Tabela 72 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 63.

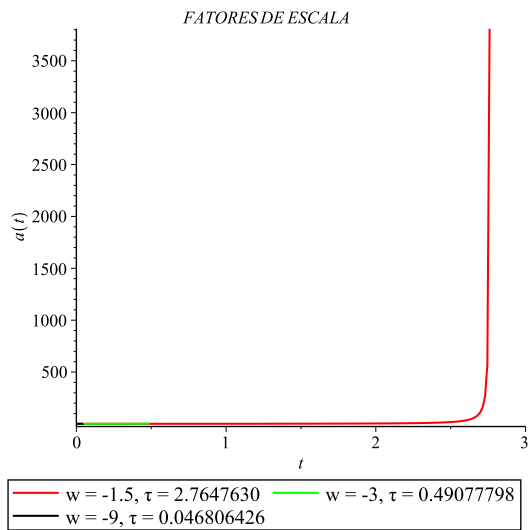


Figura 64 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

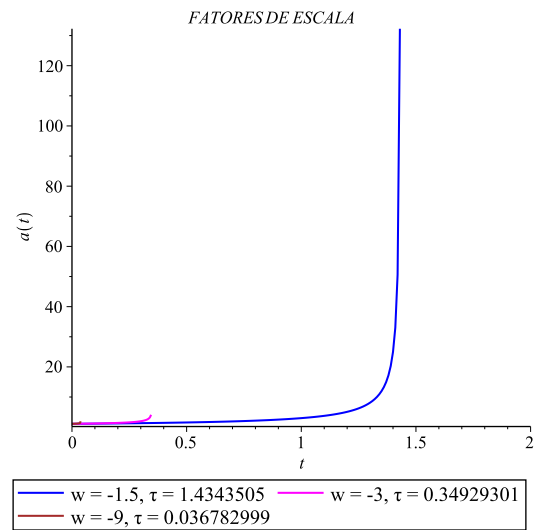


Figura 65 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
0	-1	1	-1,5	1,1	2,7647630
0	-1	1	-3	1,1	0,49077798
0	-1	1	-9	1,1	0,046806426

Tabela 73 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 64.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
0	-1	1	-1,5	-0,5	1,1	1,4343505
0	-1	1	-3	-0,5	1,1	0,34929301
0	-1	1	-9	-0,5	1,1	0,036782999

Tabela 74 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 65.

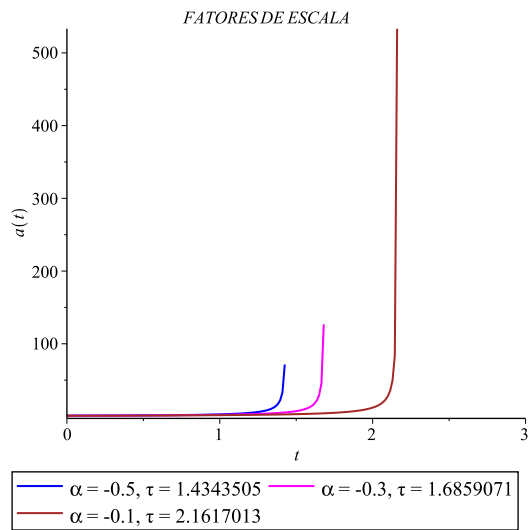


Figura 66 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
0	-1	1	-1,5	-0,1	1,1	2,1617013
0	-1	1	-1,5	-0,3	1,1	1,6859071
0	-1	1	-1,5	-0,5	1,1	1,4343505

Tabela 75 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 66.

6.4.1.2 *Curvatura positiva $k = 1$*

No espaço-tempo caracterizado pelas seções espaciais com curvatura positiva ($k = 1$), a dinâmica do Universo é obtida da equação (6.6) junto às condições iniciais determinadas pelo potencial (6.5).

Como já mencionado o caso comutativo pode ser obtido fazendo $C = P_T$ e $\alpha = 0$.

6.4.1.2.1 **Caso** $\Lambda = 0$

Para valores negativos do parâmetro NC os potenciais de ambas as teorias apresentam o mesmo comportamento qualitativo. Os potenciais apresentam um decrescimento a partir do valor da constante $k = 1$. O potencial da teoria comutativa apresentam uma raiz, dada por a_{cr1} . O potencial da teoria NC também apresenta uma raiz, dada por a_{ncr1} . Os fatores de escala de ambas as teorias descrevem o Universo com início na singularidade do *Big Bang*, no tempo inicial $t = 0$. Os Universos expandem de maneira infinita em um tempo finito, a partir da condição inicial a_{cr1} , até uma singularidade do tipo *Big Rip*. Os comportamentos mencionados acima são representados pelas Figuras 67 e 68.

a) Variação de P_T e C

A medida que o valor do parâmetro P_T e C aumentam, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 69 e 70.

b) Variação de ω

A medida que o valor do parâmetro ω diminui, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 71 e 72.

c) Variação de α

A medida que o valor do parâmetro α diminui, as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. Tais comportamentos são representados nas Figuras 73.

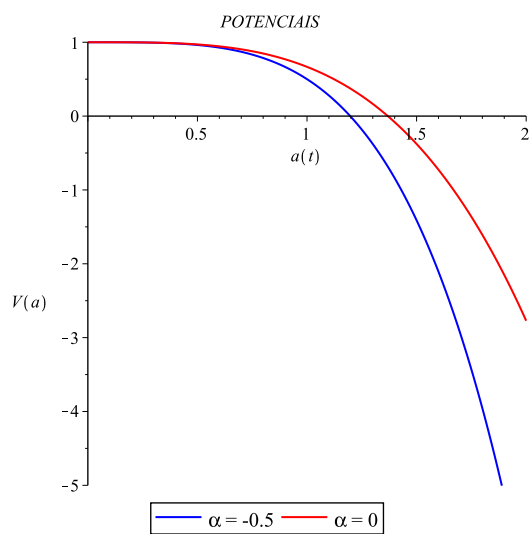


Figura 67 – Potenciais das duas teorias.

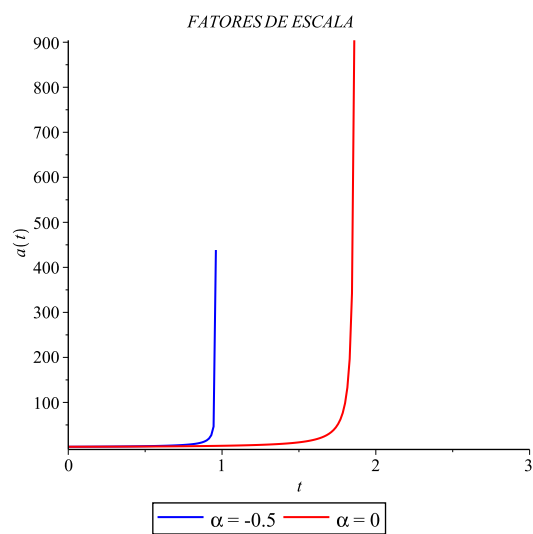


Figura 68 – Fatores de escala para as duas teorias correspondentes a Figura 67 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	C	ω	α	$a(0)$	τ_c	τ_{NC}
1	0	1	1	-1,5	-0,5	1,5	1,8740039	0,96097541

Tabela 76 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 67 e 68.

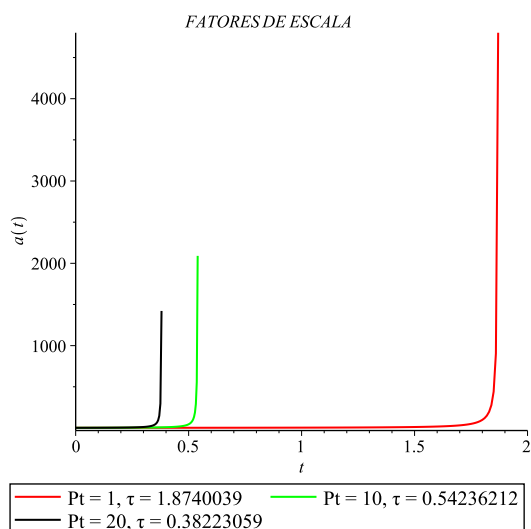


Figura 69 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

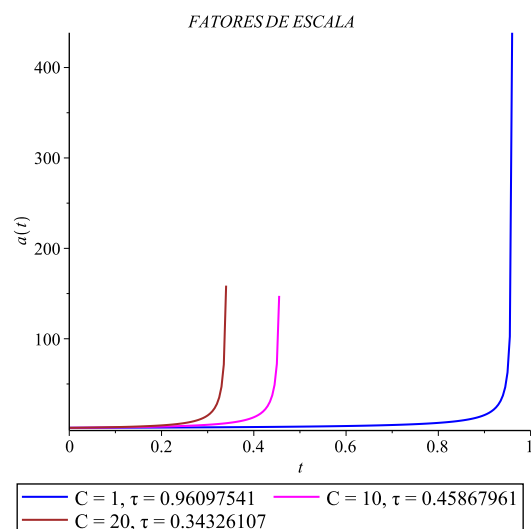


Figura 70 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
1	0	1	-1,5	1,5	1,8740039
1	0	10	-1,5	1,5	0,54236212
1	0	20	-1,5	1,5	0,38223059

Tabela 77 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 69.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
1	0	1	-1,5	-0,5	1,5	0,96097541
1	0	10	-1,5	-0,5	1,5	0,45867961
1	0	20	-1,5	-0,5	1,5	0,34326107

Tabela 78 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 70.

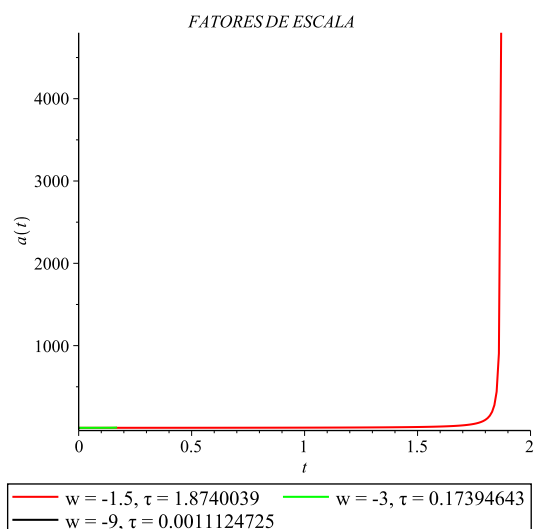


Figura 71 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

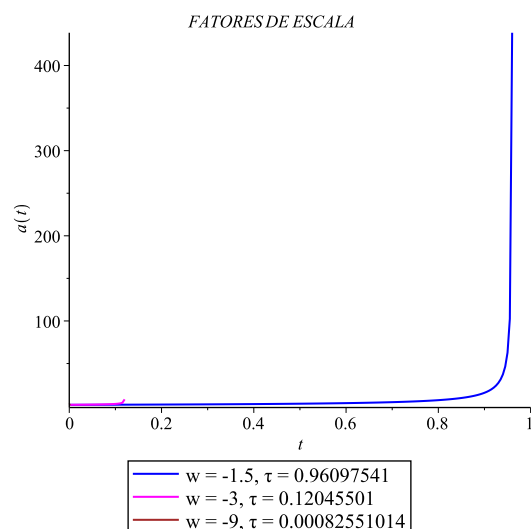


Figura 72 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
1	0	1	-1,5	1,5	1,8740039
1	0	1	-3	1,5	0,17394643
1	0	1	-9	1,5	0,0011124725

Tabela 79 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 71.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
1	0	1	-1,5	-0,5	1,5	0,96097541
1	0	1	-3	-0,5	1,5	0,12045501
1	0	1	-9	-0,5	1,5	0,00082551014

Tabela 80 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 72.

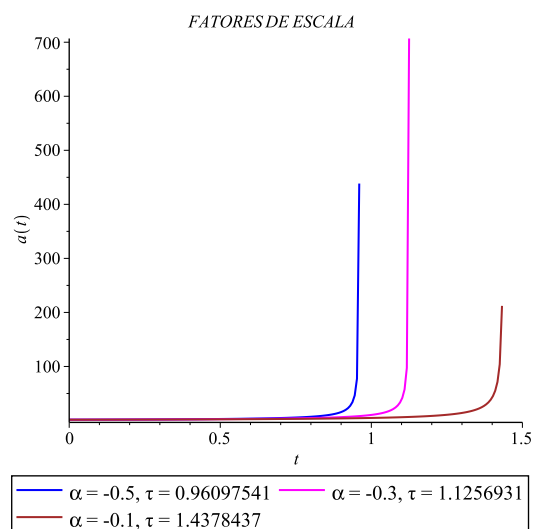


Figura 73 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
1	0	1	-1,5	-0,1	1,5	1,4378437
1	0	1	-1,5	-0,3	1,5	1,1256931
1	0	1	-1,5	-0,5	1,5	0,96097541

Tabela 81 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 73.

6.4.1.2.2 *Caso* $\Lambda \neq 0$

a) Caso $\Lambda > 0$

Para valores negativos do parâmetro NC os potenciais e os fatores de escala de ambas as teorias apresentam os mesmos comportamentos qualitativo descritos pelas Figuras 67 e 68.

a.i) Variação de P_T e C

A medida que o valor do parâmetro P_T e C aumentam, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 74 e 75.

a.ii) Variação de Λ

A medida que o valor do parâmetro Λ aumenta, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 76 e 77.

a.iii) Variação de ω

A medida que o valor do parâmetro ω diminui, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 78 e 79.

a.iv) Variação de α

A medida que o valor do parâmetro α diminui, as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. Tais comportamentos são representados na Figura 80.

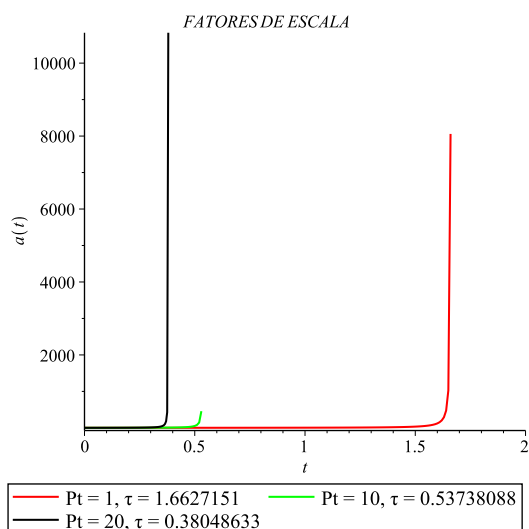


Figura 74 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

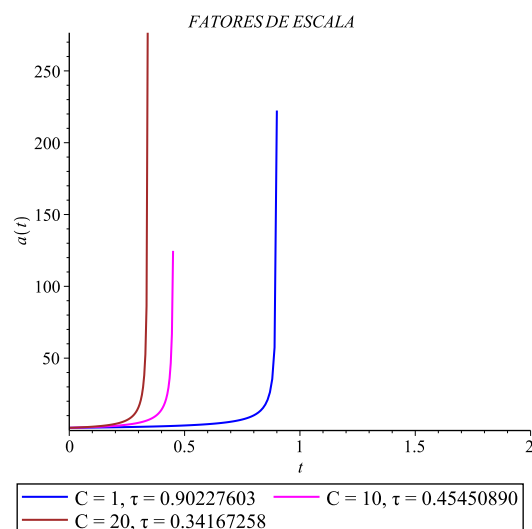


Figura 75 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
1	1	1	-1,5	1,5	1,6627151
1	1	10	-1,5	1,5	0,53738088
1	1	20	-1,5	1,5	0,38048633

Tabela 82 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 74.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
1	1	1	-1,5	-0,5	1,5	0,90227603
1	1	10	-1,5	-0,5	1,5	0,45450890
1	1	20	-1,5	-0,5	1,5	0,34167258

Tabela 83 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 75.

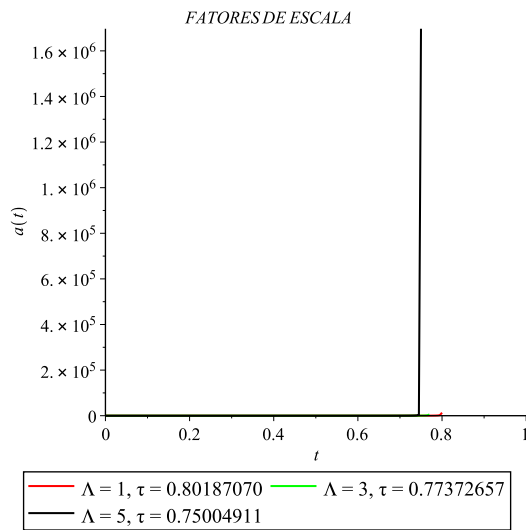


Figura 76 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

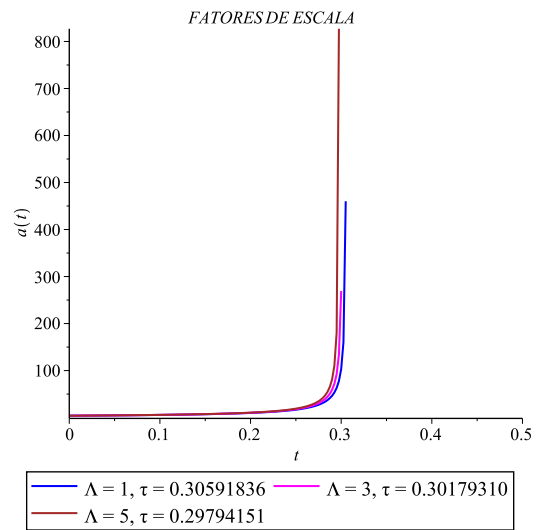


Figura 77 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
1	1	1	-1,5	4	0,80187070
1	3	1	-1,5	4	0,77372657
1	5	1	-1,5	4	0,75004911

Tabela 84 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 76.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
1	1	1	-1,5	-0,5	4	0,30591836
1	3	1	-1,5	-0,5	4	0,30179310
1	5	1	-1,5	-0,5	4	0,29794151

Tabela 85 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 77.

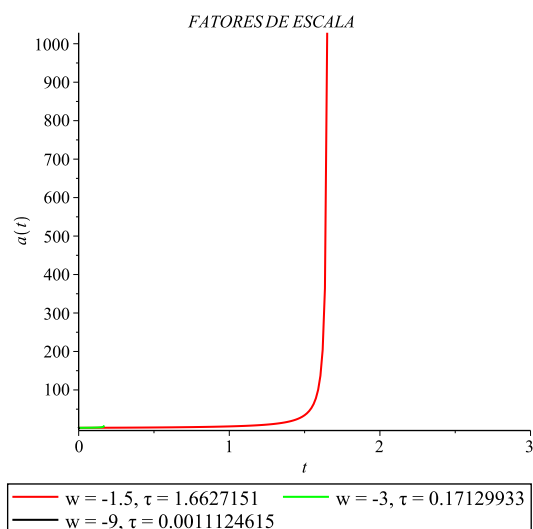


Figura 78 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

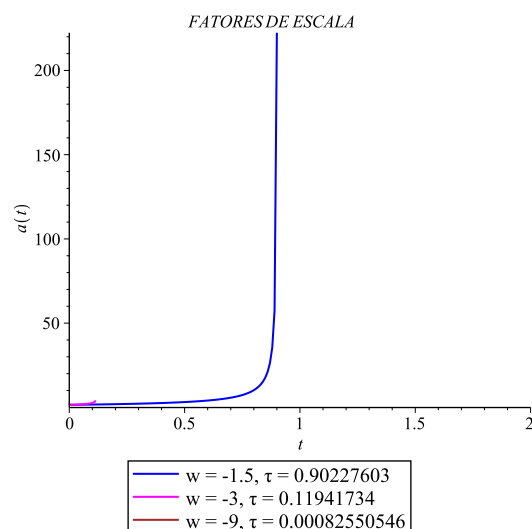


Figura 79 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
1	1	1	-1,5	1,5	1,6627151
1	1	1	-3	1,5	0,17129933
1	1	1	-9	1,5	0,0011124615

Tabela 86 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 78.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
1	1	1	-1,5	-0,5	1,5	0,90227603
1	1	1	-3	-0,5	1,5	0,11941734
1	1	1	-9	-0,5	1,5	0,00082550546

Tabela 87 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 79.

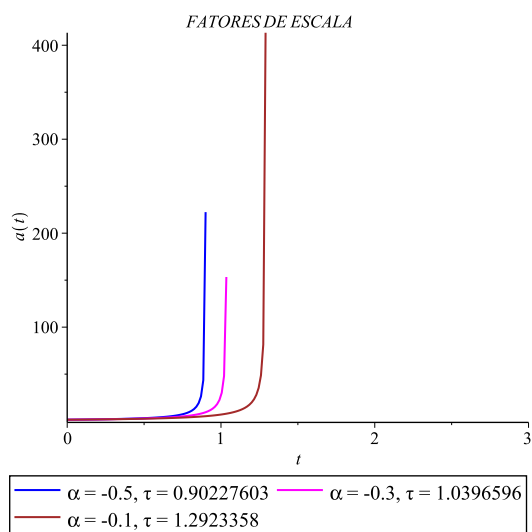


Figura 80 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
1	1	1	-1,5	-0,1	1,5	1,2923358
1	1	1	-1,5	-0,3	1,5	1,0396596
1	1	1	-1,5	-0,5	1,5	0,90227603

Tabela 88 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 80.

b) Caso $\Lambda < 0$

Para valores negativos do parâmetro NC os potenciais de ambas as teorias apresentam o mesmo comportamento qualitativo. Os potenciais apresentam um crescimento, a partir do valor da constante $k = 1$, até um ponto de máximo seguido de um decréscimo. O potencial da teoria comutativa apresenta uma raiz, dada por a_{cr1} . O potencial da teoria NC também apresenta uma raiz, dada por a_{ncr1} . Os fatores de escala de ambas as teorias descrevem o Universo com início na singularidade do *Big Bang*, no tempo inicial $t = 0$. Os Universos expandem de maneira infinita em um tempo finito, a partir da condição inicial a_{cr1} , até uma singularidade do tipo *Big Rip*. Os comportamentos mencionados acima são representados pelas Figuras 81 e 82.

b.i) Variação de P_T e C

A medida que o valor do parâmetro P_T e C aumentam, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 83 e 84.

b.ii) Variação de Λ

A medida que o valor do parâmetro Λ aumenta, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 85 e 86.

b.iii) Variação de ω

A medida que o valor do parâmetro ω diminui, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 87 e 88.

b.iv) Variação de α

A medida que o valor do parâmetro α diminui, as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. Tais comportamentos são representados nas Figuras 89.

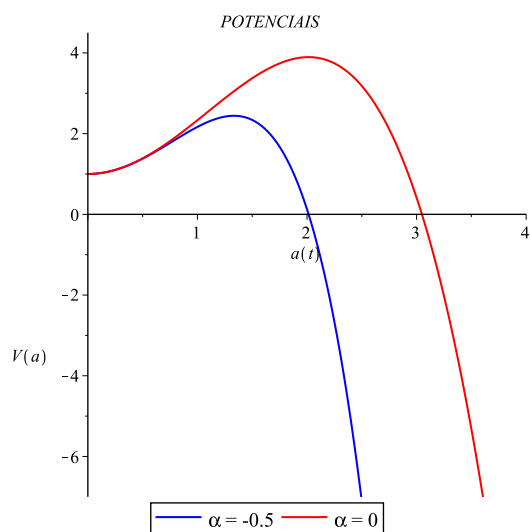


Figura 81 – Potenciais das duas teorias.

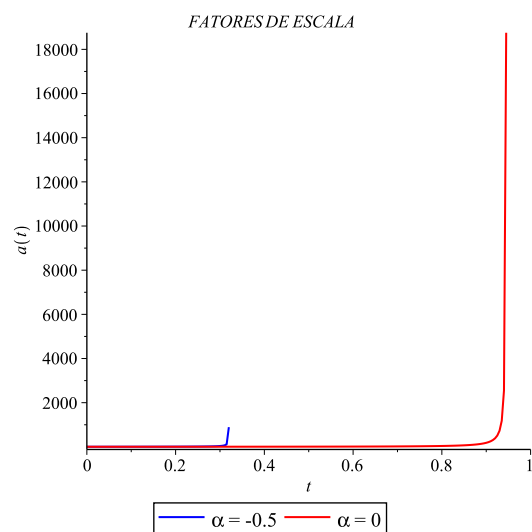


Figura 82 – Fatores de escala para as duas teorias correspondentes a Figura 81 e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	C	ω	α	$a(0)$	τ_e	τ_{NC}
1	-5	1	1	-1,5	-0,5	4	0,94644114	0,32040206

Tabela 89 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 81 e 82.

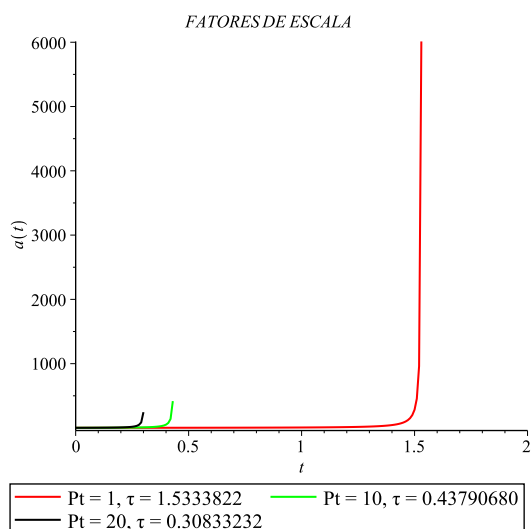


Figura 83 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

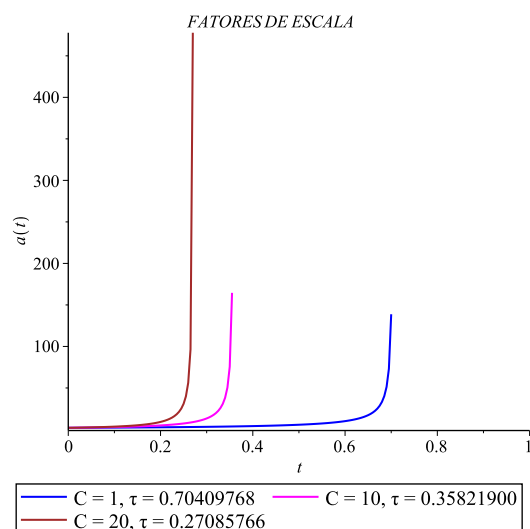


Figura 84 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
1	-1	1	-1,5	2	1,5333822
1	-1	10	-1,5	2	0,43790680
1	-1	20	-1,5	2	0,30833232

Tabela 90 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 83.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
1	-1	1	-1,5	-0,5	2	0,70409768
1	-1	10	-1,5	-0,5	2	0,35821900
1	-1	20	-1,5	-0,5	2	0,27085766

Tabela 91 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 84.

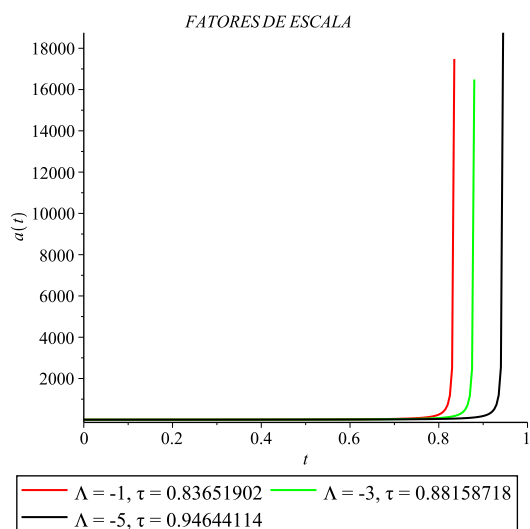


Figura 85 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

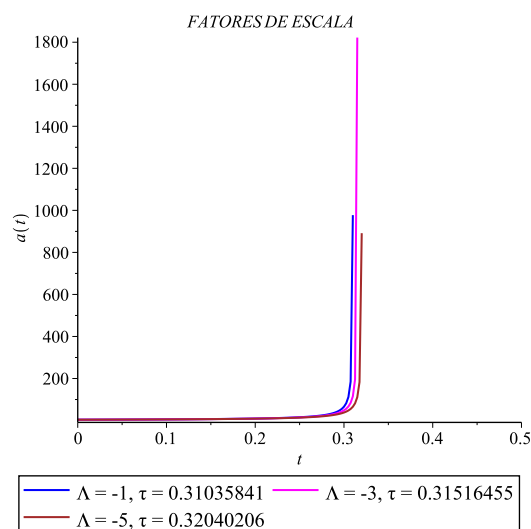


Figura 86 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
1	-1	1	-1,5	4	0,83651902
1	-3	1	-1,5	4	0,88158718
1	-5	1	-1,5	4	0,94644114

Tabela 92 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 85.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
1	-1	1	-1,5	-0,5	4	0,31035841
1	-3	1	-1,5	-0,5	4	0,31516455
1	-5	1	-1,5	-0,5	4	0,32040206

Tabela 93 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 86.

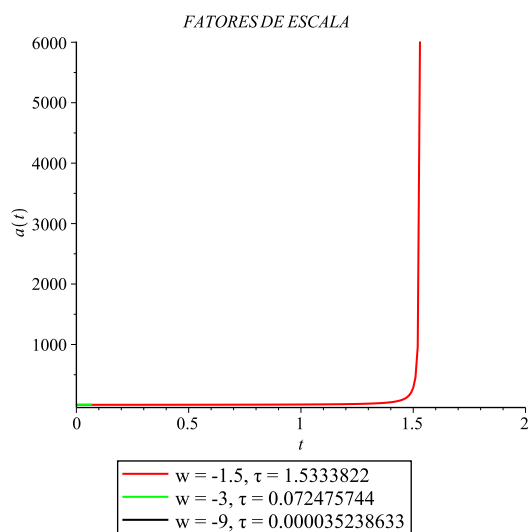


Figura 87 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

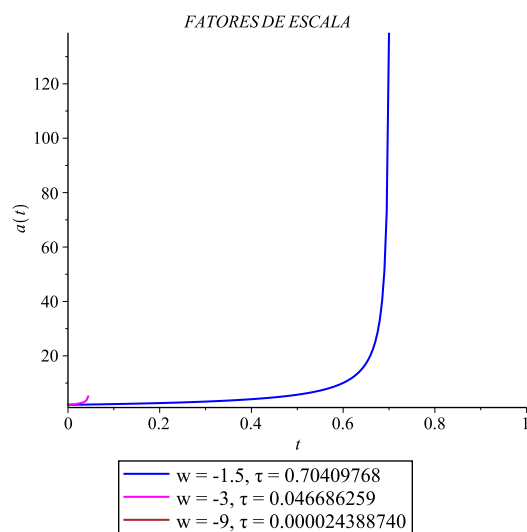


Figura 88 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
1	-1	1	-1,5	2	1,5333822
1	-1	1	-3	2	0,072475744
1	-1	1	-9	2	0,000035238633

Tabela 94 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 87.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
1	-1	1	-1,5	-0,5	2	0,70409768
1	-1	1	-3	-0,5	2	0,046686259
1	-1	1	-9	-0,5	2	0,000024388740

Tabela 95 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 88.

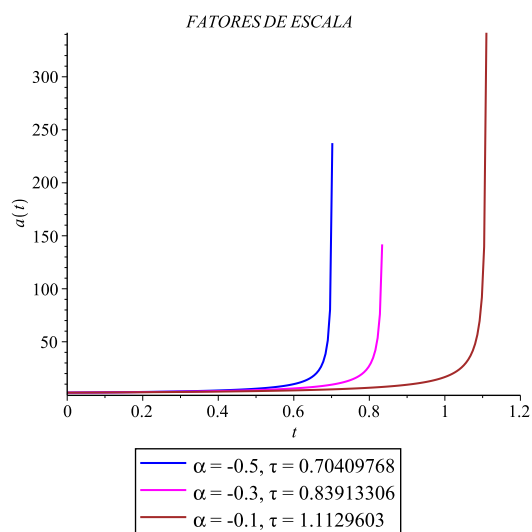


Figura 89 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]a_{cr1}, +\infty[$.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
1	-1	1	-1,5	-0,1	2	1,1129603
1	-1	1	-1,5	-0,3	2	0,83913306
1	-1	1	-1,5	-0,5	2	0,70409768

Tabela 96 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 89.

6.4.1.3 *Curvatura negativa* $k = -1$

No espaço-tempo caracterizado pelas seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), a dinâmica do Universo é obtida da equação (6.6) junto às condições iniciais determinadas pelo potencial (6.5).

Como já mencionado o caso comutativo pode ser obtido fazendo $C = P_T$ e $\alpha = 0$.

6.4.1.3.1 **Caso** $\Lambda = 0$

Para valores negativos do parâmetro NC os potenciais de ambas as teorias apresentam o mesmo comportamento qualitativo. Os potenciais apresentam um decrescimento a partir da valor da constante $k = -1$. Os potenciais não apresentam nenhuma raiz. Os fatores de escala de ambas as teorias apresentam o mesmo comportamento qualitativo descritos pela Figura 45. Os comportamentos mencionados acima são representados pelas Figuras 90 e 91.

a) Variação de P_T e C

A medida que o valor do parâmetro P_T e C aumentam, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 92 e 93.

b) Variação de ω

A medida que o valor do parâmetro ω diminui, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 94 e 95.

c) Variação de α

A medida que o valor do parâmetro α diminui, as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. Tais comportamentos são representados nas Figuras 96.

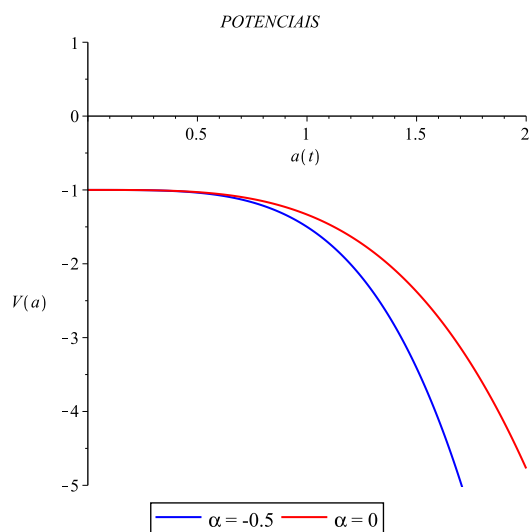


Figura 90 – Potenciais das duas teorias.

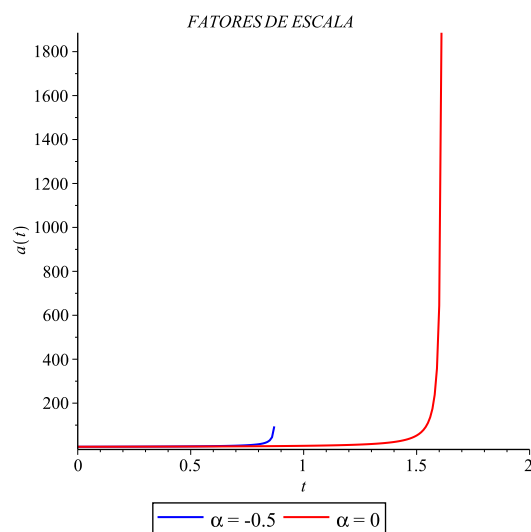


Figura 91 – Fatores de escala para as duas teorias correspondentes a Figura 67 e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	C	ω	α	$a(0)$	τ_c	τ_{NC}
-1	0	1	1	-1,5	-0,5	1,5	1,6180693	0,87663300

Tabela 97 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 90 e 91.

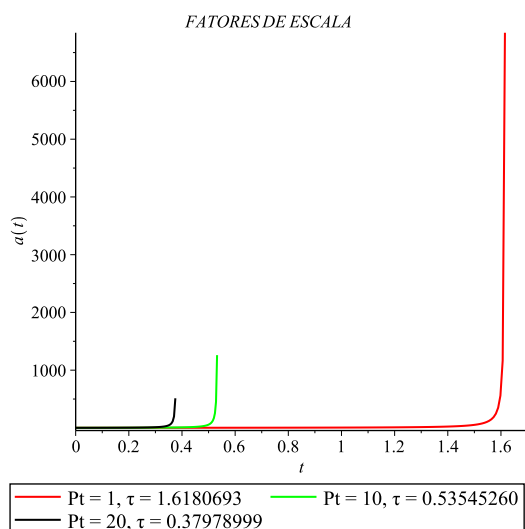


Figura 92 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

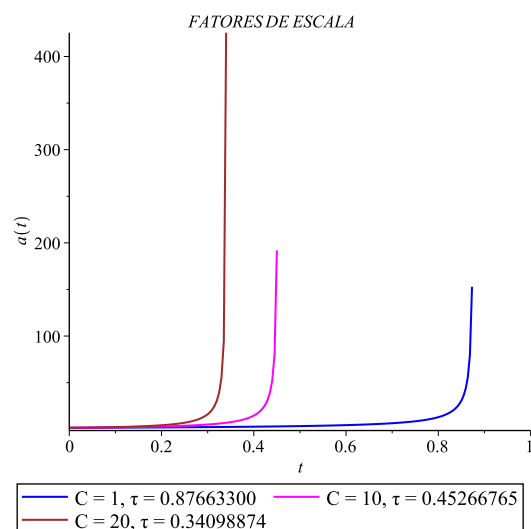


Figura 93 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
- 1	0	1	-1,5	1,5	1,6180693
- 1	0	10	-1,5	1,5	0,53545260
- 1	0	20	-1,5	1,5	0,37978999

Tabela 98 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 92.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
- 1	0	1	-1,5	-0,5	1,5	0,87663300
- 1	0	10	-1,5	-0,5	1,5	0,45266765
- 1	0	20	-1,5	-0,5	1,5	0,34098874

Tabela 99 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 93.

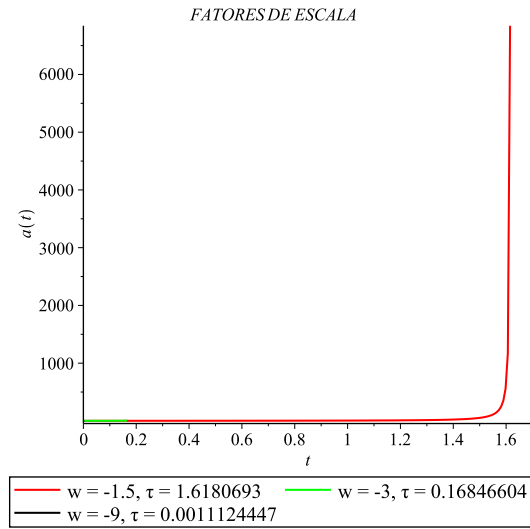


Figura 94 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

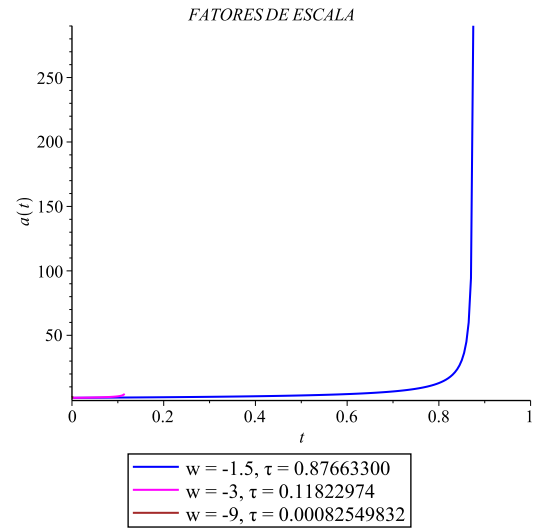


Figura 95 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
- 1	0	1	-1,5	1,5	1,6180693
- 1	0	1	-3	1,5	0,16846604
- 1	0	1	-9	1,5	0,0011124447

Tabela 100 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 94.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
- 1	0	1	-1,5	-0,5	1,5	0,87663300
- 1	0	1	-3	-0,5	1,5	0,11822974
- 1	0	1	-9	-0,5	1,5	0,00082549832

Tabela 101 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 95.

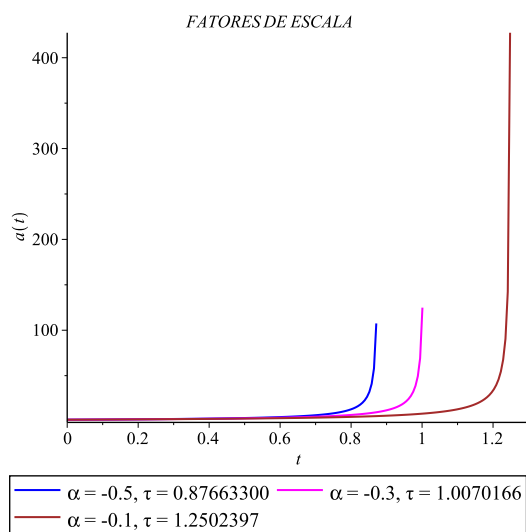


Figura 96 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
- 1	0	1	-1,5	-0,1	1,5	1,2502397
- 1	0	1	-1,5	-0,3	1,5	1,0070166
- 1	0	1	-1,5	-0,5	1,5	0,87663300

Tabela 102 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 96.

6.4.1.3.2 *Caso* $\Lambda \neq 0$

a) Caso $\Lambda > 0$

Para valores negativos do parâmetro NC os potenciais e os fatores de escala de ambas as teorias apresentam os mesmos comportamentos qualitativos descritos pelas Figuras 90 e 91.

a.i) Variação de P_T e C

A medida que o valor do parâmetro P_T e C aumentam, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 97 e 98.

a.ii) Variação de Λ

A medida que o valor do parâmetro Λ aumenta, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 99 e 100.

a.iii) Variação de ω

A medida que o valor do parâmetro ω diminui, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 101 e 102.

a.iv) Variação de α

A medida que o valor do parâmetro α diminui, as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. Tais comportamentos são representados nas Figuras 103.

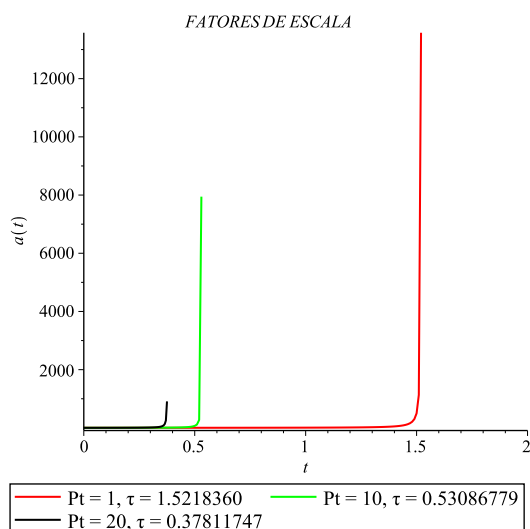


Figura 97 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

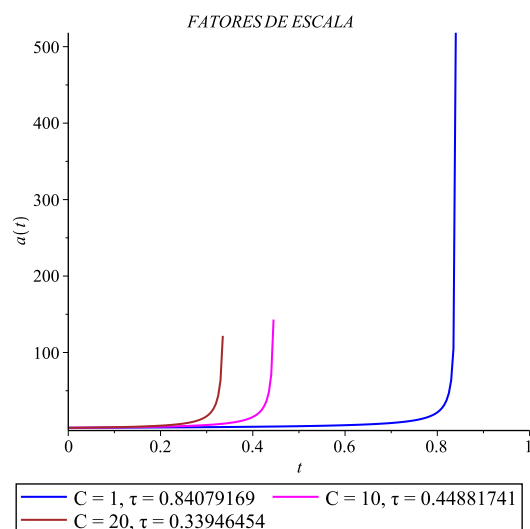


Figura 98 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
-1	1	1	-1,5	1,5	1,5218360
-1	1	10	-1,5	1,5	0,53086779
-1	1	20	-1,5	1,5	0,37811747

Tabela 103 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 97.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
-1	1	1	-1,5	-0,5	1,5	0,84079169
-1	1	10	-1,5	-0,5	1,5	0,44881741
-1	1	20	-1,5	-0,5	1,5	0,33946454

Tabela 104 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 98.

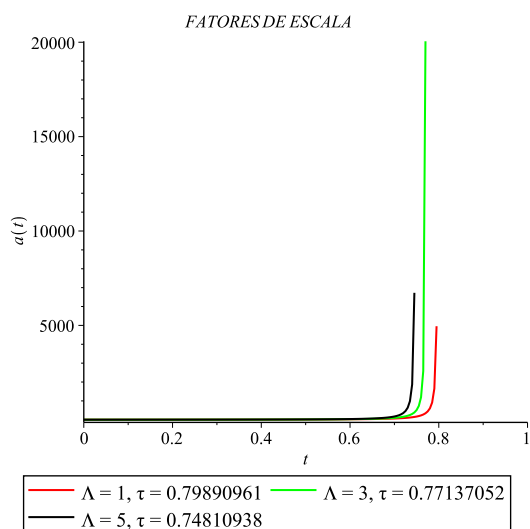


Figura 99 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

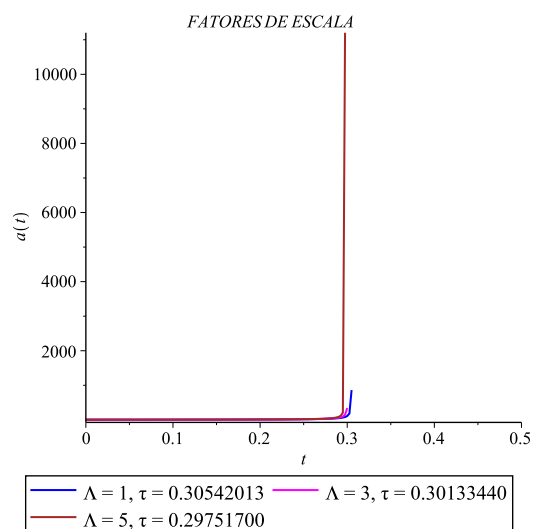


Figura 100 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
-1	1	1	-1,5	4	0,79890961
-1	3	1	-1,5	4	0,77137052
-1	5	1	-1,5	4	0,74810938

Tabela 105 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 99.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
-1	1	1	-1,5	-0,5	4	0,30542013
-1	3	1	-1,5	-0,5	4	0,30133440
-1	5	1	-1,5	-0,5	4	0,29751700

Tabela 106 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 100.

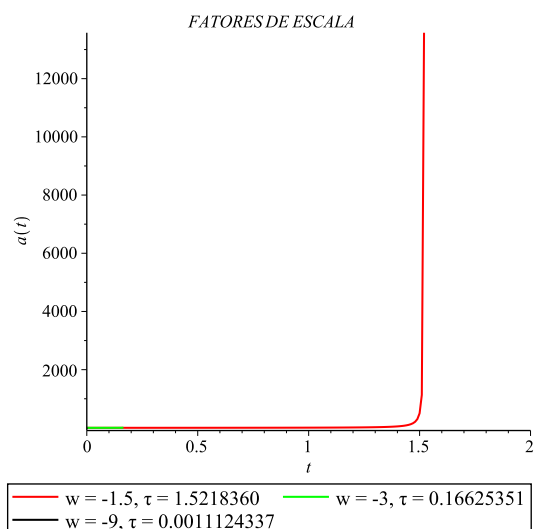


Figura 101 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

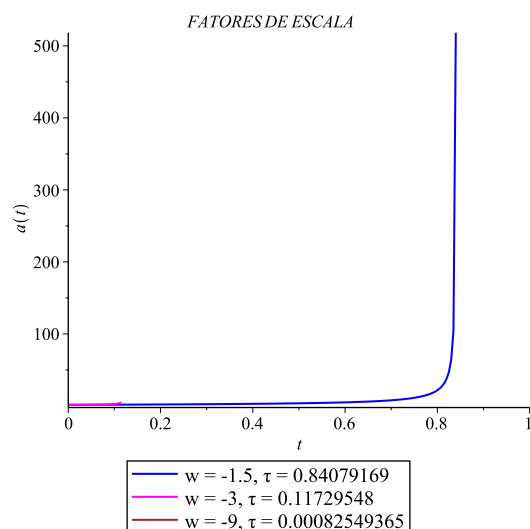


Figura 102 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
-1	1	1	-1,5	1,5	1,5218360
-1	1	1	-3	1,5	0,16625351
-1	1	1	-9	1,5	0,0011124337

Tabela 107 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 101.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
-1	1	1	-1,5	-0,5	1,5	0,84079169
-1	1	1	-3	-0,5	1,5	0,11729548
-1	1	1	-9	-0,5	1,5	0,00082549365

Tabela 108 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 102.

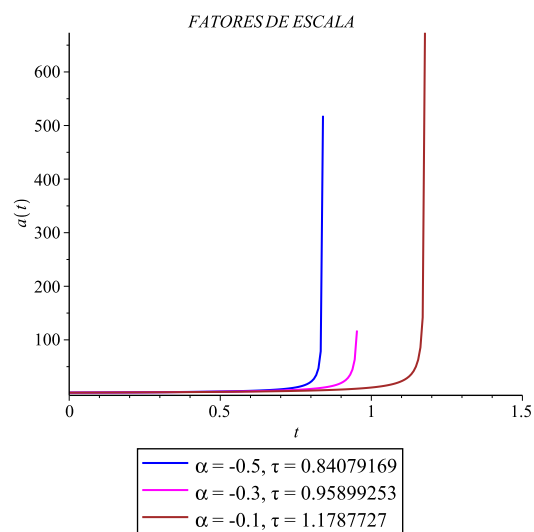


Figura 103 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
-1	1	1	-1,5	-0,1	1,5	1,1787727
-1	1	1	-1,5	-0,3	1,5	0,95899253
-1	1	1	-1,5	-0,5	1,5	0,84079169

Tabela 109 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 103.

b) Caso $\Lambda < 0$

Para valores negativos do parâmetro NC os potenciais de ambas as teorias apresentam os mesmos comportamentos qualitativos. Os potenciais apresentam um crescimento, a partir do valor da constante $k = -1$, até um ponto de máximo seguido de um decréscimo. Os potenciais não apresentam nenhuma raiz. Os fatores de escala de ambas as teorias apresentam o mesmo comportamento qualitativo descritos pela Figura 91. Os comportamentos mencionados acima são representados pelas Figuras 104 e 105.

b.i) Variação de P_r e C

A medida que o valor do parâmetro P_r e C aumentam, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 106 e 107.

b.ii) Variação de Λ

A medida que o valor do parâmetro Λ aumenta, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 108 e 109.

b.iii) Variação de ω

A medida que o valor do parâmetro ω diminui, ambas as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. A solução comutativa continua a expandir com uma taxa de expansão mais lenta quando comparada a solução NC. Tais comportamentos são representados nas Figuras 110 e 111.

b.iv) Variação de α

A medida que o valor do parâmetro α diminui, as soluções expandem mais rapidamente e apresentam um tempo menor para chegar a singularidade do *Big Rip*. Tais comportamentos são representados nas Figuras 112.

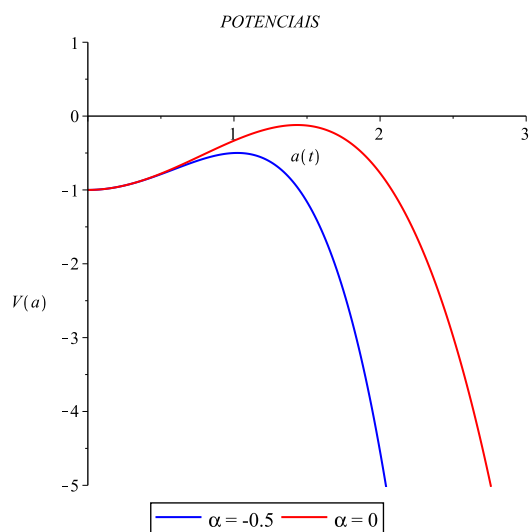


Figura 104 – Potenciais das duas teorias.

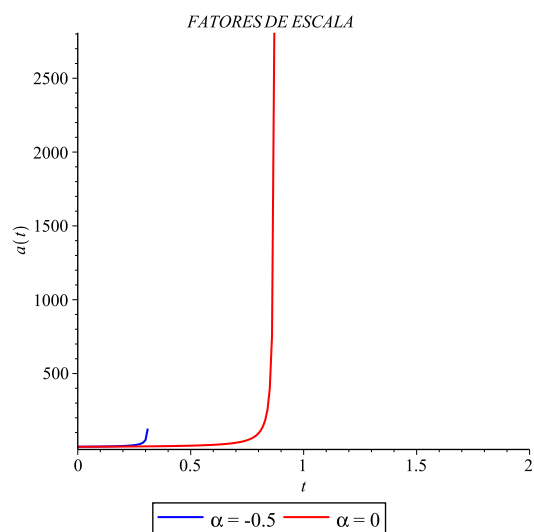


Figura 105 – Fatores de escala para as duas teorias correspondentes a Figura 104 e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	C	ω	α	$a(0)$	τ_c	τ_{NC}
-1	-3	1	1	-1,5	-0,5	4	0,87598654	0,31456547

Tabela 110 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes as Figuras 104 e 105.

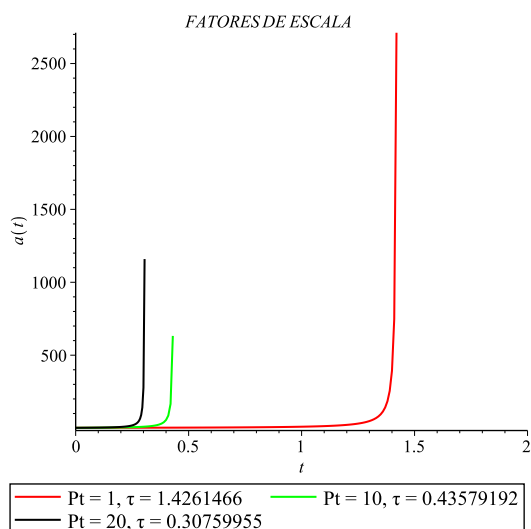


Figura 106 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de P_T e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

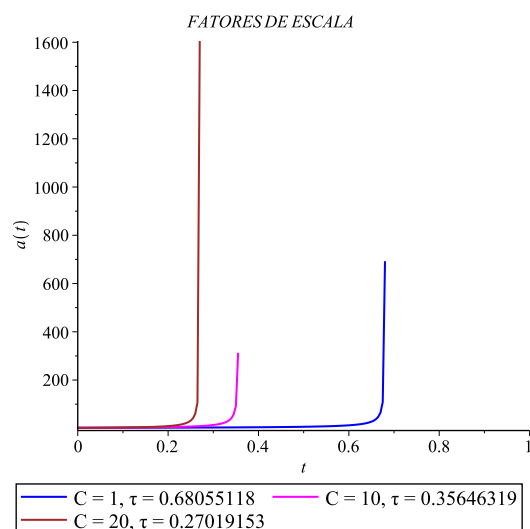


Figura 107 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de C e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
-1	-1	1	-1,5	2	1,4261466
-1	-1	10	-1,5	2	0,43579192
-1	-1	20	-1,5	2	0,30759955

Tabela 111 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 106.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
-1	-1	1	-1,5	-0,5	2	0,68055118
-1	-1	10	-1,5	-0,5	2	0,35646319
-1	-1	20	-1,5	-0,5	2	0,27019153

Tabela 112 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 107.

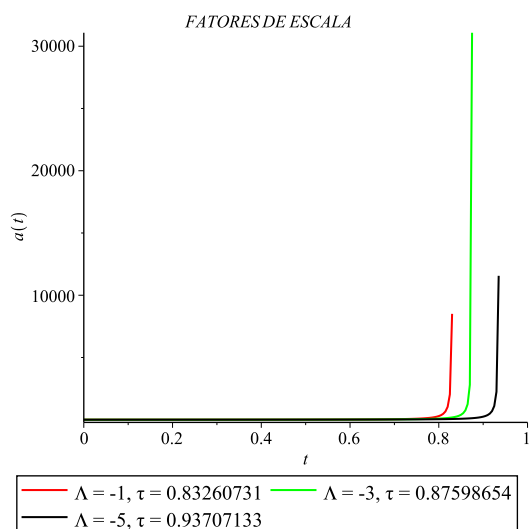


Figura 108 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

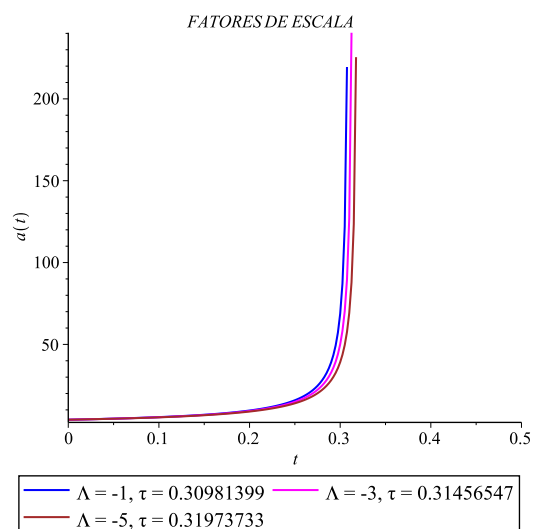


Figura 109 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de Λ e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
-1	-1	1	-1,5	4	0,83260731
-1	-3	1	-1,5	4	0,87598654
-1	-5	1	-1,5	4	0,93707133

Tabela 113 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 108.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
-1	-1	1	-1,5	-0,5	4	0,30981399
-1	-3	1	-1,5	-0,5	4	0,31456547
-1	-5	1	-1,5	-0,5	4	0,31973733

Tabela 114 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 109.

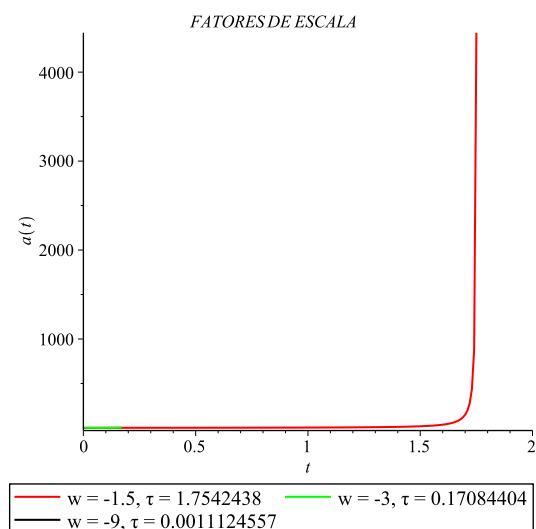


Figura 110 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

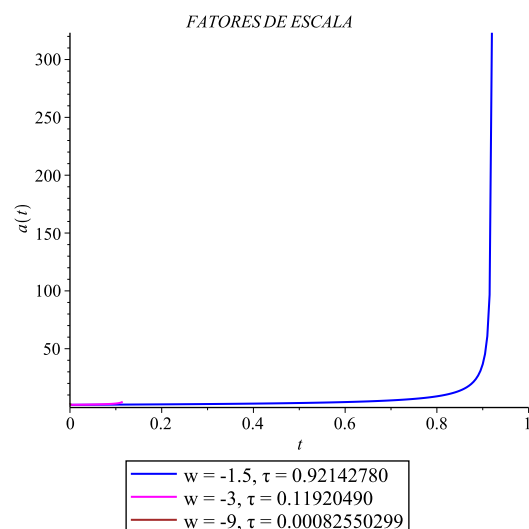


Figura 111 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de w e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
-1	-1	1	-1,5	1,5	1,7542438
-1	-1	1	-3	1,5	0,17084404
-1	-1	1	-9	1,5	0,0011124557

Tabela 115 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 110.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
-1	-1	1	-1,5	-0,5	1,5	0,92142780
-1	-1	1	-3	-0,5	1,5	0,11920490
-1	-1	1	-9	-0,5	1,5	0,00082550299

Tabela 116 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 111.

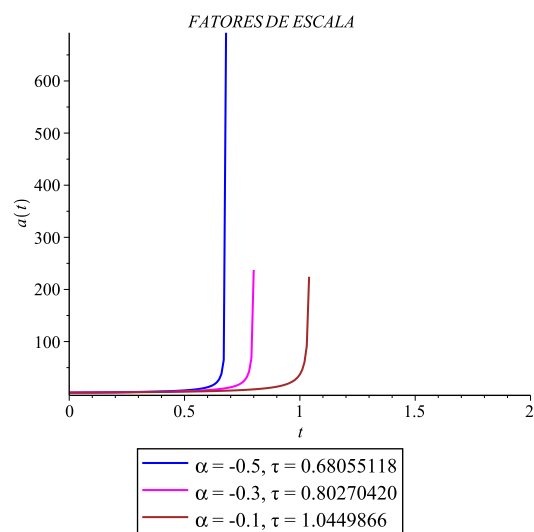


Figura 112 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de α e condições iniciais contidas na região $]0, +\infty[$.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
-1	-1	1	-1,5	-0,1	2	1,0449866
-1	-1	1	-1,5	-0,3	2	0,80270420
-1	-1	1	-1,5	-0,5	2	0,68055118

Tabela 117 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 112.

6.4.1.4 Diferentes curvaturas

Os modelos de ambas as teorias apresentaram, em ordem, uma taxa de expansão mais rápida para o caso das seções espaciais com curvatura negativa ($k = -1$), nula ($k = 0$) e positiva ($k = 1$) respectivamente. Tais comportamentos são representados pelas Figuras 113, 114, 115, 116, 117 e 118.

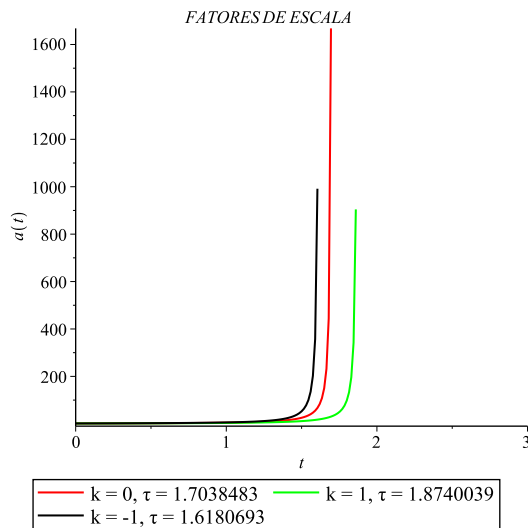


Figura 113 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de k .

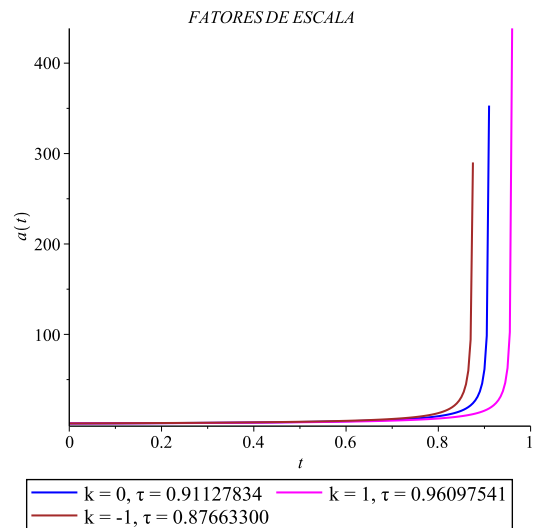


Figura 114 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de k .

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
-1	0	1	-1,5	1,5	1,6180693
1	0	1	-1,5	1,5	1,8740039
0	0	1	-1,5	1,5	1,7038483

Tabela 118 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 113.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
-1	0	1	-1,5	-0,5	1,5	0,87663300
0	0	1	-1,5	-0,5	1,5	0,91127834
1	0	1	-1,5	-0,5	1,5	0,96097541

Tabela 119 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 114.

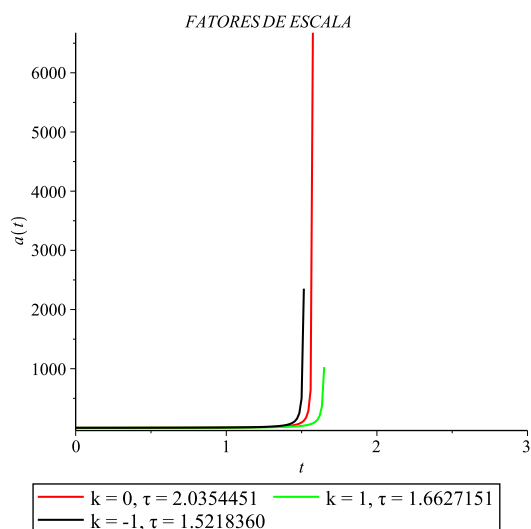


Figura 115 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de k .

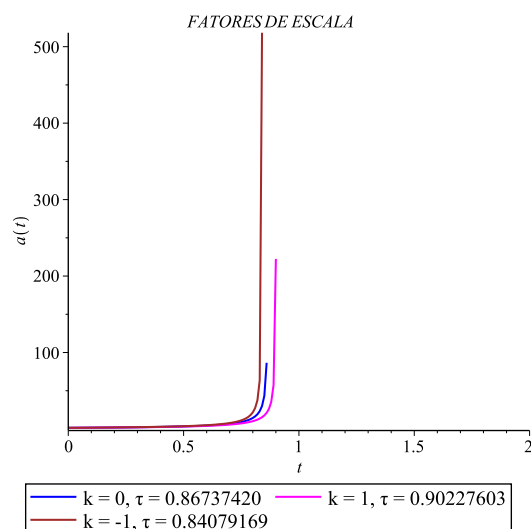


Figura 116 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de k .

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
-1	1	1	-1,5	1,5	1,5218360
0	1	1	-1,5	1,5	2,0354451
1	1	1	-1,5	1,5	1,6627151

Tabela 120 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 115.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
-1	1	1	-1,5	-0,5	1,5	0,84079169
0	1	1	-1,5	-0,5	1,5	0,86737420
1	1	1	-1,5	-0,5	1,5	0,90227603

Tabela 121 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 116.

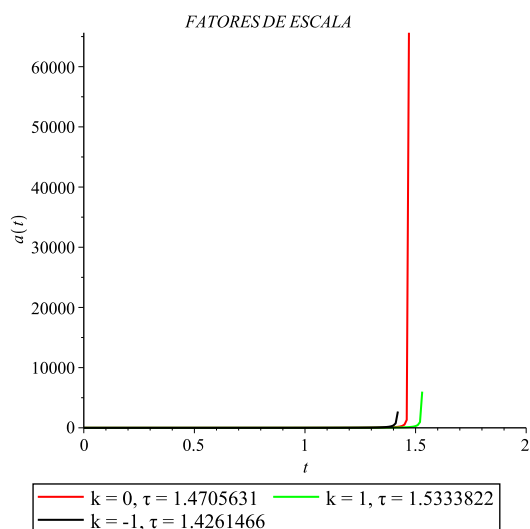


Figura 117 – Fatores de escala da teoria comutativa para diferentes valores de k .

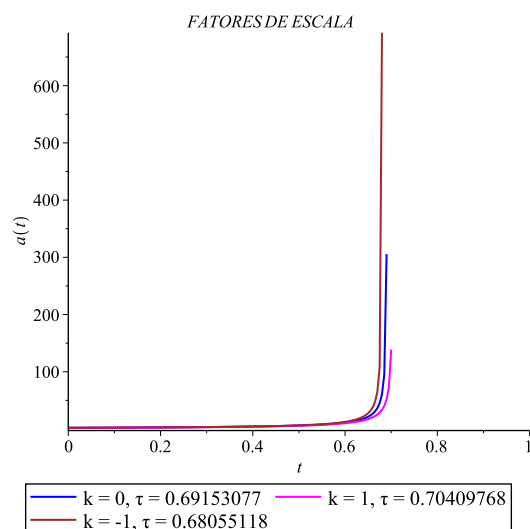


Figura 118 – Fatores de escala da teoria NC para diferentes valores de k .

k	Λ	P_T	ω	$a(0)$	τ
-1	-1	1	-1,5	2	1,4261466
0	-1	1	-1,5	2	1,4705631
1	-1	1	-1,5	2	1,5333822

Tabela 122 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 117.

k	Λ	C	ω	α	$a(0)$	τ_{NC}
-1	-1	1	-1,5	-0,5	2	0,68055118
0	-1	1	-1,5	-0,5	2	0,69153077
1	-1	1	-1,5	-0,5	2	0,70409768

Tabela 123 – Valores dos parâmetros utilizados correspondentes a Figura 118.

6.4.1.5 Estimativa do parâmetro NC

Através da equação de Friedmann dos modelos cosmológicos NC's (6.4) é possível obter numericamente um valor para o parâmetro NC. Este processo será realizado fixando os outros parâmetros envolvidos de acordo com os dados observacionais atuais.

Inicialmente, serão consideradas as constantes G e c no sistema de unidades MKS, uma vez que se quer obter o tempo em sua unidade habitual. Em seguida, fixa-se $k = 0$, que é o valor mais aceito para o parâmetro de curvatura, atualmente. Fixa-se também $\Lambda = 0$. Será considerado que a única fonte de energia escura é o fluido perfeito fantasma. Fixa-se o parâmetro do fluido perfeito $\omega = -1,01$, de acordo com as observações, sendo aqui $\Omega_{de} = 0,7$ e $H_0 = 72 km s^{-1} Mpc^{-1}$. O parâmetro C pode ser escrito como $C = \Omega_{de} H_0^2$ onde Ω_{de} é o parâmetro de massa da energia escura e H_0 é a constante atual de Hubble [16].

Introduzindo os valores dos parâmetros mencionados acima na equação de Friedmann NC (6.4) e separando as variáveis obtêm-se,

$$\int_{a_h}^1 \frac{da}{\sqrt{((4,614 \times 10^{-36})a^{2,02} - 3\alpha a^{3,03})}} = \frac{1}{3} \int_{t_h}^{4,32 \times 10^{17}} dt. \quad (6.11)$$

Na equação acima fixa-se o valor atual do fator de escala $a_0 = 1$ e a presente idade do Universo $t_0 = 4,32 \times 10^{17} s$ ($\approx 13,7 \times 10^9$ anos). O tempo t_h significa a idade do Universo, no início da expansão acelerada, e a_h dá o valor do fator de escala correspondente, naquele tempo. Os valores de a_h e t_h são obtidos supondo que o Universo é dominado inicialmente por um fluido de poeira.

A equação (6.11) foi resolvida para nove conjuntos diferentes de valores de a_h , t_h encontrando nove valores diferentes para α . Depois disso, para cada valor de α obtido, foi resolvida a equação de Friedmann NC (6.4), usando os mesmos valores dos parâmetros e usando, como condições iniciais, os valores apropriados de a_h e t_h [16]. Com isso foi calculado o tempo (t_{BR}) para o universo atingir a singularidade do *Big Rip*. Os dados obtidos são apresentados na Tabela 124.

a_h	$t_h(\text{Ganos})$	α	$t_{BR}(\text{Ganos})$
0,9	12,0224	$-1,280207183 \times 10^{-35}$	29,9959
0,8	10,5167	$-1,479734788 \times 10^{-35}$	29,6796
0,7	8,9511	$-1,764159846 \times 10^{-35}$	29,1685
0,6	7,3488	$-2,190432606 \times 10^{-35}$	28,4103
0,5	5,7470	$-2,870500485 \times 10^{-35}$	27,3511
0,4	4,1973	$-4,0483989954 \times 10^{-35}$	25,9431
0,3	2,7629	$-6,34762679 \times 10^{-35}$	24,1457
0,2	1,5148	$-11,839727650 \times 10^{-35}$	21,9076
0,1	0,5370	$-3,229384375 \times 10^{-34}$	19,0753

Tabela 124 – Tabela com as estimativas para α e o tempo do Universo.

Com os dados obtidos, observa-se que na medida em que α diminui t_h diminui. Esse resultado concorda com a ideia inicial apresentada no capítulo 1 de que a não-comutatividade deveria ter sido mais importante no início do Universo. Outro resultado é que para valores menores de α , t_{BR} diminui, ou seja, o fator de escala se expande mais rapidamente.

6.5 CONCLUSÃO

Depois de resolver as equações dinâmicas para diferentes modelos cosmológicos de RG NC's, conclui-se que a introdução da NC na teoria cosmológica da RG, acoplados à fluidos perfeitos fantasmas com equação de estado $p = \omega\rho$ e $\omega < -1$, altera de forma significativa a dinâmica dos modelos cosmológicos NC's em relação aos seus correspondentes comutativos.

Nos casos apresentados, em que no modelo comutativo, o Universo está se expandindo, a presença de um α negativo, no modelo NC correspondente, aumentou taxa de expansão. Consequentemente, o tempo para que o Universo atinja a singularidade do *Big Rip* foi diminuído.

Uma vez que busca-se descrever a atual expansão acelerada do nosso Universo, pode-se mencionar que, devido a NC introduzida aqui, foram obtidas soluções para o fator de escala compatíveis com a expansão. Além disso, a introdução da NC resultou na presença de um parâmetro adicional livre α (considerando $\alpha < 0$) não presente no modelos comutativos correspondentes. Pode-se usar essa liberdade adicional para ajustar melhor a teoria aos dados observacionais.

7 CONCLUSÃO

Como já mencionado, no presente trabalho foi aplicado pela primeira vez o formalismo de FJ na teoria gravitacional de HL.

Nos modelos cosmológicos considerados na presente tese, a introdução da NC, foi feita de maneira geométrica. Isto resultou em um termo geométrico adicional nas equações de movimento. Através de uma lei de conservação de energia foi obtida uma equação de estado para este termo. Isto possibilitou a interpretação deste termo como sendo um fluido perfeito NC. Então, apesar deste termo adicional ser de origem geométrica, foi relacionado com o setor de matéria dos modelos cosmológicos.

Depois de resolver as equações dinâmicas para diferentes modelos cosmológicos, acoplados à fluidos perfeitos com equação de estado $p = \omega\rho$, concluiu-se que a introdução da NC nas duas teorias gravitacionais consideradas, altera-se de forma significativa a dinâmica dos modelos cosmológicos NC's em relação aos seus correspondentes comutativos.

Nos modelos cosmológicos de HL NC's, além de tornar a densidade de energia do fluido NC positiva, valores negativos do parâmetro NC ($\alpha < 0$), apresentaram o efeito de tornar a expansão do Universo mais fácil do que no modelo comutativo correspondente. Isto quer dizer que, nos casos em que, no modelo comutativo, o Universo está se expandindo, a presença de um α negativo, no modelo NC correspondente, aumentou taxa de expansão. Como exemplo, estes resultados foram apresentados pelas Figuras 3, 6, 9 e 12. Nos casos em que, no modelo comutativo, não deu origem a nenhum tipo de Universo, a presença de um α negativo, nos modelos de HL NC's correspondente, deu origem a Universos que expandem de maneira infinita em um tempo infinito, a partir das condições iniciais. Como exemplo, estes resultados foram apresentados pelas Figuras 24, 26, 28, 30, 31, 33 e 35.

Nos modelos cosmológicos de RG NC's, em que no modelo comutativo, o Universo está se expandindo, a presença de um α negativo, no modelo NC correspondente, aumentou a taxa de expansão. Consequentemente, o tempo para que o Universo atinja a singularidade do *Big Rip* diminuiu.

Uma vez que busca-se descrever a atual expansão acelerada do Universo, pode-se mencionar que, devido à NC introduzida aqui, foram obtidas soluções para o fator de escala compatíveis com a expansão, como as destacadas acima. Além disso, a introdução da NC resultou na presença de um parâmetro adicional livre α (especialmente no caso de um α negativo) não presente no modelos comutativos correspondentes. Pode-se usar essa liberdade adicional para ajustar melhor a teoria aos dados observacionais.

REFERÊNCIAS

- [1] ABREU, E. M. C.; MENDES, A. C. R.; OLIVEIRA-NETO, G. et al. Hořava-Lifshitz cosmological models in noncommutative space-times. *Gen Relativ Gravit.* (2019), 51: 95.
- [2] OLIVEIRA-NETO, G.; REZENDE RODRIGUES, L. G. Noncommutative cosmological models induced by a symplectic formalism coupled to phantom fluids. *Int. J. Mod. Phys. A.* 31, 1950206, (2019).
- [3] RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and cosmological constant. *Astron. J.* 116, 1009 (1998).
- [4] PERLMUTTER, S. et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys. J.* 517, 565 (1999).
- [5] AN, R.; FENG, C.; WANG, B. Constraints on the dark matter and dark energy interactions from weak lensing bispectrum tomography. *JCAP.* 10, 49, (2017).
- [6] LI, M.; LI, X. D.; WANG, S.; WANG S. Dark Energy. *Commun. Theor. Phys.* 56, 525604 (2004).
- [7] See WOLFGANG, P. *Scientific Correspondence.* Vol II, p.15, Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag, 1993.
- [8] SZABO, R. J. Quantum field theory on noncommutative spaces. *Physics Reports*, v. 378, p. 207-299, 2003.
- [9] See WOLFGANG, P. *Scientific Correspondence.* Vol III, Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag, 1993.
- [10] SNYDER, H. S. Quantized space-time. *Physical Review*, v.71, p.38-41, 1947.
- [11] YANG, C. N. On quantized space-time. *Physical Review*, v.72, p.874, 1947.
- [12] AMORIM, R. et al. Função de Wigner-80 anos e as origens da geometria não-comutativa. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 35, p.3604, 2013.
- [13] MARCIAL, M. V. *Não-comutatividade via estruturas simpléticas com aplicações em sistemas não lineares, mecânica clássica e cosmologia.* Tese de Doutorado, Instituto de Ciências Exatas - Universidade Federal de Juiz de Fora.
- [14] SEIBERG, N., WITTEN E., String theory and noncommutative geometry. *Journal of High Energy Physics* v.1999, no. 9, p.032, 1999.
- [15] NEVES, C.; MONERAT, G.; CORRÊA SILVA, E. V.; OLIVEIRA-NETO, G.; REZENDE RODRIGUES, L. G.; SILVA de OLIVEIRA, M. Can noncommutativity affect the whole history of the universe? *Int. J. Mod. Phys. D*, v.26, 1750022, 2016.
- [16] OLIVEIRA-NETO, G.; VAZ, A. R. Noncommutative cosmological model in the presence of a phantom fluid. *Eur. Phys. J. Plus.* 132:131 (2017).
- [17] ABREU, E. M. C.; MARCIAL. M. V.; MENDES, A. C. R.; OLIVEIRA W.; OLIVEIRA-NETO, G. Noncommutative cosmological models coupled to a perfect fluid and a cosmological constant. *Journal of High Energy Physics*, v.05, p.144, 2012.

- [18] GARCÍA-COPEÁN, H.; OBREGÓN, O.; RAMÍREZ, C.; SABIDO, M. Noncommutative self-dual gravity. *Physical Review D*, v.68, 044015, 2003.
- [19] GARCÍA-COPEÁN, H.; OBREGÓN, O.; RAMÍREZ, C.; SABIDO, M. Noncommutative topological theories of gravity. *Physical Review D*, v.68, 045010, 2003.
- [20] GARCÍA-COPEÁN, H.; OBREGÓN, O.; RAMÍREZ, C. Noncommutative topological half-flat gravity. *General Relativity and Gravitation*, v.37, p. 713-722, 2005.
- [21] OBREGON, O.; QUIROS, I. Can noncommutative effects account for the present speed up of the cosmic expansion? *Physical Review D*, v.84, 044005, 2011.
- [22] GARCÍA COPEÁN, H.; OBREGÓN, O.; RAMÍREZ, C. Noncommutative quantum cosmology. *Physical Review Letters*, v.88, 161301, 2002.
- [23] BANERJEE, R.; CHAKRABORTY, B.; GHOSH, S.; MUKHERJEE, P.; SAMANTA, S. Topics in Noncommutative Geometry Inspired Physics. *Foundations of Physics*, v.39, p.1297, 2009.
- [24] D'YNERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. 1 ed. [S.l.]: Clarendon Press, 1992.
- [25] ALCOFORADO, M. A. *Métodos espectrais aplicados a relatividade numérica: determinação dos dados iniciais*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física Armando Dias Tavares - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2012.
- [26] HALLIWELL, J. J. em *Proceedings of the Jerusalem Winter School on Quantum Cosmology and Baby Universes*. eds. Coleman, S.; Hartle, J. B.; Piran, T.; Weinberg, S., World Scientific, 1991.
- [27] WALD, R. M. *General Relativity*. 1 ed. [S.l.]: The University of Chicago Press, 1984.
- [28] FRACALOSSI, R. *Modelos Cosmológicos Quânticos com Fluido Perfeito*. Dissertação de Mestrado, Centro de Ciências Exatas - Universidade Federal do Espírito Santo, 2007.
- [29] MOURA, F. F. *Quantização do Modelo de Mini-superespaço de Friedmann-Robertson-Walker Permeado por Poeira e uma Constante Cosmológica*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense, 2010.
- [30] SCHUTZ, B. F. Perfect Fluids in General Relativity: Velocity Potentials and a Variational Principle. *Physical Review*, v.2, n.12, p. 2762-2773, 1970.
- [31] AMARAL, G. M. *Universos Clássicos e Quânticos de Friedmann-Robertson-Walker.*, Tese de Doutorado, Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense, 2003.
- [32] FADDEEV, L.D.; JACKIW, R. Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems. *Phys.Rev.Lett.* 60, 1692 (1988).
- [33] DIRAC, P.A.M. Generalized hamiltonian dynamics. *Canadian Journal of Mathematics*. 2, 129 (1950).
- [34] HOŘAVA, P. Quantum gravity at a Lifshitz point. *Phys. Rev. D*. 79 (2009) 084008.

- [35] For an introduction to this subject see: S. Weinberg, in *General Relativity. An Einstein Centenary Survey*, ed. S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- [36] STELLE, K. S. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. *Phys. Rev. D.* 16, (1977), 953.
- [37] R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, in *Gravitation: an introduction to current research.* ed. L. Witten (Wiley, New York, 1962), pp. 227-264, gr-qc/0405109.
- [38] BLAS, D.; PUJOLAS, O.; SIBIRYAKOV, S. Consistent Extension of Hořava Gravity. *Phys. Rev. Lett.* 104, (2010), 181302.
- [39] BLAS, D.; PUJOLAS, O.; SIBIRYAKOV, S. Models of non-relativistic quantum gravity: the good, the bad and the healthy. *JHEP.* 04, (2011), 018.
- [40] WANG, A.; WU, Y. Thermodynamics and classification of cosmological models in the Horava-Lifshitz theory of gravity. *JCAP.* 07, (2009), 012.
- [41] BERTOLAMI, O.; ZARRO, C. A. D. Hořava-Lifshitz quantum cosmology. *Phys. Rev. D.* 84, (2011), 044042.
- [42] PAUL, B. C.; THAKUR, P.; SAHA A. Modified Chaplygin gas in Horava-Lifshitz gravity and constraints on its B parameter. *Phys. Rev. D.* 85, (2012), 024039.
- [43] KORD, V.; VAKILI, B. Classical and quantum Hořava-Lifshitz cosmology in a mini-superspace perspective. *Gen. Relativ. Gravit.* 45:1313-1331, 2013.
- [44] ARDEHALI, H.; PEDRAM, P. Chaplygin gas Hořava-Lifshitz quantum cosmology. *Phys. Rev. D.* 93, (2016), 043532.
- [45] TAWFIK, A. N.; DIAB, A. M.; DAHAB, E. A. Friedmann inflation in Horava–Lifshitz gravity with a scalar field. *Int. J. Mod. Phys. A.* 31, (2016), 1650042.
- [46] POURHASSAM, B. Extended Chaplygin gas in Horava–Lifshitz gravity. *Phys. Dark Univ.* 13, (2016), 132.
- [47] SHABABI, H.; PEDRAM, P. Hořava–Lifshitz quantum cosmology in the presence of Chaplygin gas: Exact solutions and the late-time acceleration. *Int. J. Mod. Phys. D.* 26, (2017), 1750081.
- [48] GIANI, L.; KAMENSHCHIK, A. Y. Hořava–Lifshitz gravity inspired Bianchi-II cosmology and the mixmaster universe. *Class. Quantum Grav.* 34, (2017), 085007.
- [49] ABREU, E. M. et al. Lagrangian formulation for noncommutative nonlinear systems. *International Journal of Modern Physics*, v.27, n.9, 2012.
- [50] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* 1 ed. [S.l.]: Jhon Wiley & Sons, 1972.
- [51] SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity.* 2 ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [52] MISNER, C. D.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation.* 1 ed. [S.l.]: W. H. Freeman and Company, 1973.

- [53] CORRÊA SILVA, E. V.; FERREIRA FILHO, L. G.; MONERAT, G.; NEVES, C.; OLIVEIRA-NETO, G. Symplectic Method in Quantum Cosmology. *Phys. Rev. D.* 047302, 2009.

APÊNDICE A – COMPLEMENTOS DO CAPÍTULO 3

A.1 ELEMENTOS DA AÇÃO

É utilizada no presente modelo a seguinte métrica de FRW,

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (\text{A.1})$$

onde r , θ e φ são coordenadas esféricas, $a(t)$ o fator de escala do Universo e $N(t)$ a função lapso obtidas à partir do formalismo ADM. Por questões de conveniência e simplicidade, será omitida a dependência temporal da função lapso e das outras quantidades.

No formalismo ADM a forma matricial da métrica acima fica,

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -N^2 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

$$h_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \text{sen}^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$$h^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1-kr^2}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a(t)^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a(t)^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$\sqrt{h} = \sqrt{\det(h)} = \sqrt{\frac{a(t)^6 r^4 \text{sen}^2 \theta}{1-kr^2}} = \frac{a(t)^3 r^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (\text{A.5})$$

A.1.1 Parte cinética

Esta seção é dedicada aos cálculos dos elementos referentes a parte cinética da ação (3.2). Para isso será usada a seguinte definição de curvatura extrínseca,

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + 2D_j N_i \right]. \quad (\text{A.6})$$

Para o caso particular da métrica (2.67) a curvatura extrínseca se reduz à ¹:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Logo, calcula-se os seguintes termos,

$$K_{rr} = \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{rr}}{\partial t} \right] = -\frac{\dot{a}a}{N(1-kr^2)}, \quad (\text{A.8})$$

$$K_{\theta\theta} = \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{\theta\theta}}{\partial t} \right] = -\frac{\dot{a}ar^2}{N}, \quad (\text{A.9})$$

$$K_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2N} \left[-\frac{\partial h_{\varphi\varphi}}{\partial t} \right] = -\frac{\dot{a}ar^2 \text{sen}^2 \theta}{N}. \quad (\text{A.10})$$

¹ A métrica FRW não apresenta função *shift* ($N_i = 0$).

Os índices de (A.8)-(A.10) são levantados através da seguinte contração com a métrica h^{ij} ,

$$K^{ij} = h^{li} h^{mj} K_{lm}.$$

Dessa forma, obtêm-se os resultados,

$$K^{rr} = h^{lr} h^{mr} K_{lm} = h^{rr} h^{rr} K_{rr} = -\frac{\dot{a}(1 - kr^2)}{Na^3}, \quad (\text{A.11})$$

$$K^{\theta\theta} = h^{l\theta} h^{m\theta} K_{lm} = h^{\theta\theta} h^{\theta\theta} K_{\theta\theta} = -\frac{\dot{a}}{Na^3 r^2}, \quad (\text{A.12})$$

$$K^{\varphi\varphi} = h^{l\varphi} h^{m\varphi} K_{lm} = h^{\varphi\varphi} h^{\varphi\varphi} K_{\varphi\varphi} = -\frac{\dot{a}}{Na^3 r^2 \text{sen}^2\theta}. \quad (\text{A.13})$$

Com os resultados (A.8)-(A.13) obtêm-se,

$$K_{ij} K^{ij} = K_{rr} K^{rr} + K_{\theta\theta} K^{\theta\theta} + K_{\varphi\varphi} K^{\varphi\varphi} = \frac{3\dot{a}^2}{N^2 a^2}. \quad (\text{A.14})$$

Novamente, após uma contração com a métrica h_{ij} obtêm-se,

$$K = h_{ij} K^{ij} = h_{rr} K^{rr} + h_{\theta\theta} K^{\theta\theta} + h_{\varphi\varphi} K^{\varphi\varphi} = -\frac{3\dot{a}}{Na}. \quad (\text{A.15})$$

Consequentemente,

$$K^2 = \frac{9\dot{a}^2}{N^2 a^2}. \quad (\text{A.16})$$

Substituindo os resultados (A.5), (A.14) e (A.16) na parte cinética da ação (3.2) obtêm-se que,

$$S_{cin} = \frac{M_p^2}{2} \int_{\mathcal{M}} dx^3 dt N \frac{r^2 a^3 \text{sen}\theta}{\sqrt{1 - kr^2}} \left(\frac{3\dot{a}^2}{N^2 a^2} - \lambda \frac{9\dot{a}^2}{N^2 a^2} \right). \quad (\text{A.17})$$

A.1.2 Parte potencial

Esta seção é dedicada aos cálculos dos elementos referentes a parte potencial da ação (3.2)². Para isso serão utilizadas as seguintes definições,

$$R^i{}_{jkl} = \Gamma^i{}_{jl,k} - \Gamma^i{}_{jk,l} + \Gamma^i{}_{mk} \Gamma^m{}_{jl} - \Gamma^i{}_{ml} \Gamma^m{}_{jk}, \quad (\text{A.18})$$

$$R_{ij} = h^{kl} R_{kilj}, \quad (\text{A.19})$$

$$R_{ijkl} = h_{im} R^m{}_{jkl}, \quad (\text{A.20})$$

$$R = h^{ij} R_{ij}, \quad (\text{A.21})$$

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} h^{li} (h_{lj,k} + h_{lk,j} - h_{kj,l}), \quad (\text{A.22})$$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk} = R_{klij}, \quad (\text{A.23})$$

$$R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0. \quad (\text{A.24})$$

² Exceto o termo de superfície.

Utilizando as definições acima obtêm-se,

$$R = h^{ij}R_{ij} = h^{rr}R_{rr} + h^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + h^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi}, \quad (\text{A.25})$$

$$R_{rr} = h^{kl}R_{krlr} = h^{rr}R_{rrrr} + h^{\theta\theta}R_{\theta r\theta r} + h^{\varphi\varphi}R_{\varphi r\varphi r}, \quad (\text{A.26})$$

$$R_{rrrr} = h_{rr}R^r_{rrr}, \quad (\text{A.27})$$

$$R^r_{rrr} = \Gamma^r_{rr,r} - \Gamma^r_{rr,r} + \Gamma^r_{mr}\Gamma^m_{rr} - \Gamma^r_{mr}\Gamma^m_{rr} = 0. \quad (\text{A.28})$$

Esse resultado implica diretamente em,

$$R_{rrrr} = 0. \quad (\text{A.29})$$

$$R_{\theta r\theta r} = h_{\theta\theta}R^{\theta}_{r\theta r}, \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} R^{\theta}_{r\theta r} &= \Gamma^{\theta}_{rr,\theta} - \Gamma^{\theta}_{r\theta,r} + \Gamma^{\theta}_{m\theta}\Gamma^m_{rr} - \Gamma^{\theta}_{mr}\Gamma^m_{r\theta} \\ &= \Gamma^{\theta}_{rr,\theta} - \Gamma^{\theta}_{r\theta,r} + \Gamma^{\theta}_{r\theta}\Gamma^r_{rr} + \Gamma^{\theta}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{rr} + \Gamma^{\theta}_{\varphi\theta}\Gamma^{\varphi}_{rr} \\ &\quad - \Gamma^{\theta}_{rr}\Gamma^r_{r\theta} - \Gamma^{\theta}_{\theta r}\Gamma^{\theta}_{r\theta} - \Gamma^{\theta}_{\varphi r}\Gamma^{\varphi}_{r\theta}, \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\Gamma^{\theta}_{rr} = \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{jr,r} + h_{jr,r} - h_{rr,j}) = \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta r,r} + h_{\theta r,r} - h_{rr,\theta}) = \Gamma^{\theta}_{rr} = 0, \quad (\text{A.32})$$

$$\Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{jr,\theta} + h_{j\theta,r} - h_{\theta r,j}) = \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta r,\theta} + h_{\theta\theta,r} - h_{\theta r,\theta}) = \frac{1}{r}, \quad (\text{A.33})$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}h^{jr}(h_{jr,r} + h_{jr,r} - h_{rr,j}) = \frac{1}{2}h^{rr}(h_{rr,r} + h_{rr,r} - h_{rr,r}) = \frac{kr}{1 - kr^2}, \quad (\text{A.34})$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{j\theta,\theta} + h_{j\theta,\theta} - h_{\theta\theta,j}) = \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta\theta,\theta} + h_{\theta\theta,\theta} - h_{\theta\theta,\theta}) = 0, \quad (\text{A.35})$$

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{j\varphi,\theta} + h_{j\theta,\varphi} - h_{\theta\varphi,j}) = \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta\varphi,\theta} + h_{\theta\theta,\varphi} - h_{\theta\varphi,\theta}) = 0, \quad (\text{A.36})$$

$$\Gamma^{\varphi}_{rr} = \frac{1}{2}h^{j\varphi}(h_{jr,r} + h_{jr,r} - h_{rr,j}) = \frac{1}{2}h^{\varphi\varphi}(h_{\varphi r,r} + h_{\varphi r,r} - h_{rr,\varphi}) = 0, \quad (\text{A.37})$$

$$\Gamma^r_{r\theta} = \Gamma^r_{\theta r} = \frac{1}{2}h^{jr}(h_{jr,\theta} + h_{j\theta,r} - h_{\theta r,j}) = \frac{1}{2}h^{rr}(h_{rr,\theta} + h_{r\theta,r} - h_{\theta r,r}) = 0, \quad (\text{A.38})$$

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi r} = \Gamma^{\theta}_{r\varphi} = \frac{1}{2}h^{j\theta}(h_{j\varphi,r} + h_{jr,\varphi} - h_{r\varphi,j}) = \frac{1}{2}h^{\theta\theta}(h_{\theta\varphi,r} + h_{\theta r,\varphi} - h_{r\varphi,\theta}) = 0, \quad (\text{A.39})$$

$$\Gamma^{\varphi}_{r\theta} = \Gamma^{\varphi}_{\theta r} = \frac{1}{2}h^{j\varphi}(h_{jr,\theta} + h_{j\theta,r} - h_{\theta r,j}) = \frac{1}{2}h^{\varphi\varphi}(h_{\varphi r,\theta} + h_{\varphi\theta,r} - h_{\theta r,\varphi}) = 0, \quad (\text{A.40})$$

Agora, ao substituir os símbolos de Kristoffel (A.32)-(A.40) em (A.31) obtêm-se,

$$R^{\theta}_{r\theta r} = \frac{k}{1 - kr^2}. \quad (\text{A.41})$$

Finalmente substituindo (A.41) em (A.30) obtêm-se que,

$$R_{\theta r\theta r} = \frac{a^2 r^2 k}{1 - kr^2}. \quad (\text{A.42})$$

De maneira análoga são calculados,

$$R_{\varphi r\varphi r} = h_{\varphi\varphi}R^{\varphi}_{r\varphi r}, \quad (\text{A.43})$$

$$R^{\varphi}_{r\varphi r} = \Gamma^{\varphi}_{rr,\varphi} - \Gamma^{\varphi}_{r\varphi,r} + \Gamma^{\varphi}_{m\varphi}\Gamma^m_{rr} - \Gamma^{\varphi}_{mr}\Gamma^m_{r\varphi}$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma_{rr,\varphi}^\varphi - \Gamma_{r\varphi,r}^\varphi + \Gamma_{r\varphi}^\varphi \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \Gamma_{rr}^\theta + \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi \Gamma_{rr}^\varphi \\
&- \Gamma_{rr}^\varphi \Gamma_{r\varphi}^r - \Gamma_{\theta r}^\varphi \Gamma_{r\varphi}^\theta - \Gamma_{\varphi r}^\varphi \Gamma_{r\varphi}^\varphi,
\end{aligned} \tag{A.44}$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{2} h^{j\varphi} (h_{jr,\varphi} + h_{j\varphi,r} - h_{\varphi r,j}) = \frac{1}{2} h^{\varphi\varphi} (h_{\varphi r,\varphi} + h_{\varphi\varphi,r} - h_{\varphi r,\varphi}) = \frac{1}{r} \tag{A.45}$$

Ao substituir (A.32), (A.34), (A.37), (A.40) e (A.45) em (A.44) encontra-se que,

$$R_{r\varphi r}^\varphi = \frac{k}{1 - kr^2}. \tag{A.46}$$

Substituindo (A.46) em (A.43),

$$R_{\varphi r \varphi r} = \frac{ka^2 r^2 \text{sen}^2 \theta}{1 - kr^2}. \tag{A.47}$$

Finalmente, ao substituir (A.29), (A.42) e (A.47) em (A.26) obtêm-se,

$$R_{rr} = \frac{2k}{1 - kr^2}. \tag{A.48}$$

Da mesma maneira são calculados,

$$\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= h^{kl} R_{k\theta l\theta} \\
&= h^{rr} R_{r\theta r\theta} + h^{\theta\theta} R_{\theta\theta\theta\theta} + h^{\varphi\varphi} R_{\varphi\theta\varphi\theta}.
\end{aligned} \tag{A.49}$$

Pela antissimetria (A.23) obtêm-se que,

$$R_{\theta\theta\theta\theta} = 0 \tag{A.50}$$

$$R_{r\theta r\theta} = R_{\theta r \theta r} = \frac{ka^2 r^2}{1 - kr^2}. \tag{A.51}$$

Logo, resta calcular apenas o termo,

$$R_{\varphi\theta\varphi\theta} = h_{\varphi\varphi} R_{\varphi\theta\varphi\theta}^\varphi, \tag{A.52}$$

$$\begin{aligned}
R_{\varphi\theta\varphi\theta}^\varphi &= \Gamma_{\theta\theta,\varphi}^\varphi - \Gamma_{\theta\varphi,\theta}^\varphi + \Gamma_{m\varphi}^\varphi \Gamma_{\theta\theta}^m - \Gamma_{m\theta}^\varphi \Gamma_{\theta\varphi}^m \\
&= \Gamma_{\theta\theta,\varphi}^\varphi - \Gamma_{\theta\varphi,\theta}^\varphi + \Gamma_{r\varphi}^\varphi \Gamma_{\theta\theta}^r + \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi \Gamma_{\theta\theta}^\varphi \\
&- \Gamma_{r\theta}^\varphi \Gamma_{\theta\varphi}^r - \Gamma_{\theta\theta}^\varphi \Gamma_{\theta\varphi}^\theta - \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi,
\end{aligned} \tag{A.53}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^\varphi = \frac{1}{2} h^{j\varphi} (h_{j\theta,\theta} + h_{j\theta,\theta} - h_{\theta\theta,j}) = \frac{1}{2} h^{\varphi\varphi} (h_{\varphi\theta,\theta} + h_{\varphi\theta,\theta} - h_{\theta\theta,\varphi}) = 0, \tag{A.54}$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{1}{2} h^{j\varphi} (h_{j\theta,\varphi} + h_{j\varphi,\theta} - h_{\varphi\theta,j}) = \frac{1}{2} h^{\varphi\varphi} (h_{\varphi\theta,\varphi} + h_{\varphi\varphi,\theta} - h_{\varphi\theta,\varphi}) = \text{cotg}\theta, \tag{A.55}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2} h^{jr} (h_{j\theta,\theta} + h_{j\theta,\theta} - h_{\theta\theta,j}) = \frac{1}{2} h^{rr} (h_{r\theta,\theta} + h_{r\theta,\theta} - h_{\theta\theta,r}) = -r (1 - kr^2), \tag{A.56}$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = \frac{1}{2} h^{j\varphi} (h_{j\varphi,\varphi} + h_{j\varphi,\varphi} - h_{\varphi\varphi,j}) = \frac{1}{2} h^{\varphi\varphi} (h_{\varphi\varphi,\varphi} + h_{\varphi\varphi,\varphi} - h_{\varphi\varphi,\varphi}) = 0. \tag{A.57}$$

Ao substituir (A.35), (A.36), (A.40) e (A.54)-(A.57) em (A.53) obtêm-se,

$$R_{\varphi\theta\varphi\theta}^\varphi = kr^2. \tag{A.58}$$

Substituindo (A.58) em (A.52),

$$R_{\varphi\theta\varphi\theta} = ka^2r^4\text{sen}^2\theta. \quad (\text{A.59})$$

Finalmente, substituindo (A.50), (A.51) e (A.59) em (A.49) obtêm-se,

$$R_{\theta\theta} = 2kr^2. \quad (\text{A.60})$$

Agora só resta o último termo,

$$\begin{aligned} R_{\varphi\varphi} &= h^{kl}R_{kl\varphi\varphi} \\ &= h^{rr}R_{r\varphi r\varphi} + h^{\theta\theta}R_{\theta\varphi\theta\varphi} + h^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi\varphi\varphi}. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Novamente pela antissimetria,

$$R_{r\varphi r\varphi} = R_{\varphi r\varphi r} = \frac{ka^2r^2\text{sen}^2\theta}{1-kr^2} \quad (\text{A.62})$$

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = R_{\varphi\theta\varphi\theta} = ka^2r^4\text{sen}^2\theta \quad (\text{A.63})$$

$$R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} = 0. \quad (\text{A.64})$$

Substituindo (A.62)-(A.64) em (A.61) obtêm-se,

$$R_{\varphi\varphi} = 2kr^2\text{sen}^2\theta. \quad (\text{A.65})$$

As equações (A.48), (A.60) e (A.65) são generalizadas de acordo com a métrica, logo,

$$R_{ij} = \frac{2k}{a^2}h_{ij}. \quad (\text{A.66})$$

Finalizando esta tarefa árdua, basta substituir (A.48), (A.60) e (A.65) em (A.25) para obter o seguinte escalar de Ricci,

$$R = \frac{6k}{a^2}. \quad (\text{A.67})$$

Esse resultado implica em,

$$R^2 = \frac{36k^2}{a^4}, \quad (\text{A.68})$$

$$R^3 = \frac{216k^3}{a^6}. \quad (\text{A.69})$$

Os índices de (A.66) são levantados através da seguinte contração com a métrica h^{ij} ,

$$R^{ij} = h^{ki}h^{lj}R_{kl} = \frac{2k}{a^2}h^{ki}h^{lj}h_{kl} = \frac{2k}{a^2}h^{ij}. \quad (\text{A.70})$$

Com (A.66) e (A.70) obtêm-se,

$$R^{ij}R_{ij} = \frac{2k}{a^2}h^{ij}\frac{2k}{a^2}h_{ij} = \frac{4k^2}{a^4}h^{ij}h_{ij} = \frac{4k^2}{a^4}\left(h^{rr}h_{rr} + h^{\theta\theta}h_{\theta\theta} + h^{\varphi\varphi}h_{\varphi\varphi}\right) = \frac{12k^2}{a^4} \quad (\text{A.71})$$

Calcula-se também,

$$R^i_j = h^{ki} R_{kj} = h^{ki} \left[\frac{2k}{a^2} h_{kj} \right] = \frac{2k}{a^2} h^{ki} h_{kj} = \frac{2k}{a^2} h^i_j. \quad (\text{A.72})$$

Logo,

$$R^i_j R^j_i = \left[\frac{2k}{a^2} \right] \left[\frac{2k}{a^2} \right] h^i_j h^j_i = \frac{4k^2}{a^4} h^i_i = \frac{12k^2}{a^4}. \quad (\text{A.73})$$

Finalmente, com (A.67) e (A.73) obtêm-se,

$$RR^i_j R^j_i = \left[\frac{6k}{a^2} \right] \left[\frac{12k^2}{a^4} \right] = \frac{72k^3}{a^6}. \quad (\text{A.74})$$

O outro elemento seguinte também é calculado,

$$R^i_j R^j_k R^k_i = \frac{8k^3}{a^6} h^i_j h^j_k h^k_i = \frac{8k^3}{a^6} h^i_j h^j_i = \frac{8k^3}{a^6} h^i_i = \frac{24k^3}{a^6}. \quad (\text{A.75})$$

Ao observar (A.66) percebe-se que ele depende apenas da métrica e de escalares. Como a derivada covariante da métrica é nula, então,

$$R_{jk} \nabla^i R^{jk} = 0. \quad (\text{A.76})$$

O último termo a ser calculado é o que envolve o laplaciano. Sabe-se que o laplaciano de uma função genérica f é dado por,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\sqrt{h} h^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right].$$

Para o caso de interesse em que $f = R$ obtêm-se,

$$\begin{aligned} \nabla^2 R &= \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \text{sen}\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{1-kr^2}{a^2} \right) \frac{\partial R}{\partial r} \right] \right\} \\ &+ \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \text{sen}\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{1}{a^2 r^2} \right) \frac{\partial R}{\partial \theta} \right] \right\} \\ &+ \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \text{sen}\theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{a^3 r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}} \left(\frac{1}{a^2 r^2 \text{sen}^2 \theta} \right) \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Como o escalar de Ricci (A.67) independe das coordenadas r , θ e φ , então,

$$\nabla^2 R = 0. \quad (\text{A.78})$$

Esse resultado implica em,

$$R \nabla^2 R = 0. \quad (\text{A.79})$$

A.1.3 Ação completa

De acordo [43] são considerados $g_0 M_p^2 = 2\Lambda$, $g_1 = -1$. Além disso, substituindo os elementos calculados (A.14), (A.16), (A.67), (A.68), (A.69), (A.71), (A.74), (A.75), (A.76) e (A.79), na ação total de Hořava-Lifshitz (3.2) obtêm-se,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{HL} &= \beta \int dt N \left[3(1-3\lambda) \frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + 6ka - 2\Lambda a^3 - M_p^{-2} \left\{ \frac{12k^2}{a} (3g_2 + g_3) \right\} \right. \\
&\quad \left. - M_p^{-4} \left\{ \frac{24k^3}{a^3} (9g_4 + 3g_5 + g_6) \right\} \right] \\
&= \eta \int dt N \left[-\frac{\dot{a}^2 a}{N^2} + \frac{1}{3(3\lambda-1)} \left(6ka - 2\Lambda a^3 - \frac{12k^2}{a M_p^2} (3g_2 + g_3) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{24k^3}{a^3 M_p^4} (9g_4 + 3g_5 + g_6) \right]. \tag{A.80}
\end{aligned}$$

Em que,

$$\beta = \frac{M_p^2}{2} \int d^3x \frac{r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}}, \tag{A.81}$$

$$\eta = 3\beta(3\lambda-1), \tag{A.82}$$

$$V_0 = \int d^3x \frac{r^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{1-kr^2}}, \tag{A.83}$$

$$1 = \frac{3M_p^2 V_0 (3\lambda-1)}{2}, \tag{A.84}$$

$$g_c = \frac{2}{3\lambda-1}, \tag{A.85}$$

$$g_\Lambda = \frac{2\Lambda}{3(3\lambda-1)}, \tag{A.86}$$

$$g_r = 6V_0(3g_2 + g_3), \tag{A.87}$$

$$g_s = 18V_0^2(3\lambda-1)(9g_4 + 3g_5 + g_6). \tag{A.88}$$

APÊNDICE B – COMPLEMENTOS DO CAPÍTULO 4

B.1 A MATRIZ SIMPLÉTICA

Partindo da matriz (4.89), calcula-se a seguinte inversa,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \sigma & \gamma & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\chi & \alpha & 0 & 0 \\ -\sigma & \chi & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma & -\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B & C & D & E & F \\ G & H & I & J & K & L \\ M & N & O & P & Q & R \\ S & U & V & X & Y & W \\ \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} & \bar{D} & \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{G} & \bar{H} & \bar{I} & \bar{J} & \bar{L} & \bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Esta operação resulta nos seguintes sistemas de equações à determinar.

Para a primeira coluna obtêm-se,

$$G + \sigma M + \gamma S = 1 \quad (\text{B.1})$$

$$-A - \chi M + \alpha S = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$-\sigma A + \chi G + S = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$-\gamma A - \alpha G - M = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$-\bar{G} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\bar{A} = 0. \quad (\text{B.6})$$

De (B.2) obtêm-se,

$$-A - \chi M + \alpha S = 0$$

$$A = -\chi M + \alpha S. \quad (\text{B.7})$$

Substituindo (B.7) em (B.4) obtêm-se,

$$-\gamma A - \alpha G - M = 0$$

$$-\gamma(-\chi M + \alpha S) - \alpha G - M = 0$$

$$\gamma\chi M - \gamma\alpha S - \alpha G - M = 0. \quad (\text{B.8})$$

Somando (B.8) com α (B.1) obtêm-se,

$$\gamma\chi M - \gamma\alpha S - \alpha G - M + \alpha G + \sigma\alpha M + \alpha\gamma S = \alpha$$

$$\gamma\chi M - M + \sigma\alpha M = \alpha$$

$$M(\sigma\alpha - 1 + \gamma\chi) = \alpha$$

$$M = \frac{\alpha}{(\sigma\alpha - 1) + \gamma\chi}. \quad (\text{B.9})$$

Substituindo (B.7) e (B.9) em (B.3) obtêm-se,

$$\begin{aligned} -\sigma A + \chi G + S &= 0 \\ -\sigma(-\chi M + \alpha S) + \chi G + S &= 0 \\ \sigma\chi M - \sigma\alpha S + \chi G + S &= 0. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Fazendo (B.10) - λ (B.1) obtêm-se,

$$\begin{aligned} \sigma\chi M - \sigma\alpha S + \chi G + S - \chi G - \chi\sigma M - \chi\gamma S &= -\chi \\ -\sigma\alpha S + S - \chi\gamma S &= -\chi \\ S(\sigma\alpha - 1 + \chi\gamma) &= \chi \\ S &= \frac{\chi}{(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma}. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Substituindo (B.9) e (B.11) em (B.7) obtêm-se,

$$\begin{aligned} A &= -\chi M + \alpha S \\ A &= -\chi \left[\frac{\alpha}{(\sigma\alpha - 1) + \chi\gamma} \right] + \alpha \left[\frac{\chi}{(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma} \right] \\ A &= 0. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Finalmente substituindo (B.11) e (B.12) em (B.3) obtêm-se,

$$\begin{aligned} \chi G + S &= 0 \\ \chi G + \frac{\chi}{(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma} &= 0 \\ G &= \frac{-1}{(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma}. \end{aligned} \tag{B.13}$$

Para a segunda coluna obtêm-se,

$$-B - \chi N + \alpha U = 1 \tag{B.14}$$

$$H + \sigma N + \gamma U = 0 \tag{B.15}$$

$$-\sigma B + \chi H + U = 0 \tag{B.16}$$

$$-\gamma B - \alpha H - N = 0 \tag{B.17}$$

$$-\bar{H} = 0 \tag{B.18}$$

$$\bar{B} = 0. \tag{B.19}$$

De (B.15) obtêm-se,

$$\begin{aligned} H + \sigma N + \gamma U &= 0 \\ H &= -\sigma N - \gamma U. \end{aligned} \tag{B.20}$$

Substituindo (B.20) em (B.16) obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 -\sigma B + \chi H + U &= 0 \\
 -\sigma B + \chi(-\sigma N - \gamma U) + U &= 0 \\
 -\sigma B - \chi\sigma N - \chi\gamma U + U &= 0.
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

Fazendo $-\sigma(B.14) + (B.21)$ obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 \sigma B + \sigma\chi N - \sigma\alpha U - \sigma B - \chi\sigma N - \chi\gamma U + U &= -\sigma \\
 -\sigma\alpha U - \chi\gamma U + U &= -\sigma \\
 U(-\alpha\sigma - \chi\gamma + 1) &= -\sigma \\
 U &= \frac{\sigma}{(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma}.
 \end{aligned} \tag{B.22}$$

Substituindo (B.20) e (B.22) em (B.17) obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 -\gamma B - \alpha(-\sigma N - \gamma U) - N &= 0 \\
 -\gamma B + \alpha\sigma N + \alpha\gamma U - N &= 0.
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

Fazendo (B.23) - $\gamma(B.14)$ obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 -\gamma B + \alpha\sigma N + \alpha\gamma U - N + \gamma B + \chi\gamma N - \alpha\gamma U &= -\gamma \\
 \alpha\sigma N - N + \chi\gamma N &= -\gamma \\
 N(\alpha\sigma - 1 + \chi\gamma) &= -\gamma \\
 N &= \frac{-\gamma}{(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma}.
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

Substituindo (B.22) e (B.24) em (B.20) obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 H &= -\sigma N - \gamma U \\
 &= -\sigma \left(-\frac{\gamma}{(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma} \right) - \gamma \left(\frac{\sigma}{(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma} \right) \\
 H &= 0.
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

Finalmente substituindo (B.24) e (B.25) em (B.16) obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 -\sigma B + \chi H + U &= 0 \\
 -\sigma B + U &= 0 \\
 -\sigma B &= -U \\
 B &= \frac{1}{(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma}.
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

Para a terceira coluna obtêm-se,

$$-\sigma C + \chi I + V = 1 \tag{B.27}$$

$$I + \sigma O + \gamma V = 0 \quad (\text{B.28})$$

$$-C - \chi O + \alpha V = 0 \quad (\text{B.29})$$

$$-\gamma C - \alpha I - O = 0 \quad (\text{B.30})$$

$$-\bar{I} = 0 \quad (\text{B.31})$$

$$\bar{C} = 0. \quad (\text{B.32})$$

De (B.28) obtêm-se,

$$\begin{aligned} I + \sigma O + \gamma V &= 0 \\ I &= -\sigma O - \gamma V. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

De (B.29) obtêm-se,

$$\begin{aligned} -C - \chi O + \alpha V &= 0 \\ -C &= \chi O - \alpha V \\ C &= -\chi O + \alpha V. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Substituindo (B.33) e (B.34) em (B.30) obtêm-se,

$$\begin{aligned} -\gamma(-\chi O + \alpha V) - \alpha(-\sigma O - \gamma V) - O &= 0 \\ \chi\gamma O - \gamma\alpha O + \alpha\sigma O + \alpha\gamma O - O &= 0 \\ \chi\gamma O + \alpha\sigma O - O &= 0 \\ O(\chi\gamma + \alpha\sigma - 1) &= 0 \\ O &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Substituindo (B.33) e (B.34) em (B.27) obtêm-se,

$$\begin{aligned} -\sigma C + \chi I + V &= 1 \\ -\sigma(-\chi O + \alpha V) + \chi(-\sigma O - \gamma V) + V &= 1 \\ \sigma\chi O - \sigma\alpha V - \chi\sigma O - \chi\gamma V + V &= 1 \\ -\sigma\alpha V - \chi\gamma V + V &= 1 \\ V(-\sigma\alpha - \chi\gamma + 1) &= 1 \\ V &= \frac{1}{(1 - \alpha\sigma) - \chi\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Substituindo (B.35) e (B.36) em (B.33) obtêm-se,

$$\begin{aligned} I &= -\sigma O - \gamma V \\ I &= \frac{-\gamma}{(1 - \alpha\sigma) - \chi\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Substituindo (B.35) e (B.36) em (B.34) obtêm-se,

$$\begin{aligned} C &= -\chi O + \alpha V \\ C &= \frac{\alpha}{(1 - \alpha\sigma) - \chi\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Para a quarta coluna obtêm-se,

$$-\gamma D - \alpha J - P = 1 \quad (\text{B.39})$$

$$J + \sigma P + \gamma X = 0 \quad (\text{B.40})$$

$$-D - \chi P + \alpha X = 0 \quad (\text{B.41})$$

$$-\sigma D + \chi J + X = 0 \quad (\text{B.42})$$

$$-\bar{J} = 0 \quad (\text{B.43})$$

$$\bar{D} = 0. \quad (\text{B.44})$$

De (B.40) obtêm-se,

$$\begin{aligned} J + \sigma P + \gamma X &= 0 \\ J &= -\sigma P - \gamma X. \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

De (B.41) obtêm-se,

$$\begin{aligned} -D - \chi P + \alpha X &= 0 \\ -D &= \chi P - \alpha X \\ D &= -\chi P + \alpha X. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

Substituindo (B.45) e (B.46) em (B.42) obtêm-se,

$$\begin{aligned} -\sigma D + \chi J + X &= 0 \\ -\sigma(-\chi P + \alpha X) + \chi(-\sigma P - \gamma X) + X &= 0 \\ \sigma\chi P - \sigma\alpha X - \chi\sigma P - \chi\gamma X + X &= 0 \\ -\sigma\alpha X - \chi\gamma X + X &= 0 \\ X(-\sigma\alpha - \chi\gamma + 1) &= 0 \\ X &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Substituindo (B.45) e (B.46) em (B.39) obtêm-se,

$$\begin{aligned} -\gamma D - \alpha J - P &= 1 \\ -\gamma(-\chi P + \alpha X) - \alpha(-\sigma P - \gamma X) - P &= 1 \\ \gamma\chi P + \alpha\sigma P - P &= 1 \\ P(-1 + \gamma\chi + \alpha\sigma) &= 1 \\ P &= \frac{1}{(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Substituindo (B.47) e (B.48) em (B.46) obtêm-se,

$$\begin{aligned} D &= -\chi P + \alpha X \\ D &= \frac{-\chi}{(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Substituindo (B.47) e (B.48) em (B.45) obtêm-se,

$$\begin{aligned} J &= -\sigma P - \gamma X \\ J &= \frac{-\sigma}{(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Para a quinta coluna obtêm-se,

$$-\bar{L} = 1 \quad (\text{B.51})$$

$$K + \sigma Q + \gamma Y = 0 \quad (\text{B.52})$$

$$-E - \chi Q + \alpha Y = 0 \quad (\text{B.53})$$

$$-\sigma E + \chi K + Y = 0 \quad (\text{B.54})$$

$$-\gamma E - \alpha K - Q = 0 \quad (\text{B.55})$$

$$\bar{E} = 0. \quad (\text{B.56})$$

De (B.52) obtêm-se,

$$\begin{aligned} K + \sigma Q + \gamma Y &= 0 \\ K &= -\sigma Q - \gamma Y. \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

De (B.53) obtêm-se,

$$\begin{aligned} -E - \chi Q + \alpha Y &= 0 \\ -E &= \chi Q - \alpha Y \\ E &= -\chi Q + \alpha Y. \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

De (B.54) obtêm-se,

$$\begin{aligned} -\sigma E + \chi K + Y &= 0 \\ Y &= \sigma E - \chi K. \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

De (B.55) obtêm-se,

$$\begin{aligned} -\gamma E - \alpha K - Q &= 0 \\ -Q &= \gamma E + \alpha K \\ Q &= -\gamma E - \alpha K. \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

Substituindo (B.57) e (B.58) em (B.59) obtêm-se,

$$\begin{aligned} Y &= \sigma E - \chi K \\ Y &= \sigma(-\chi Q + \alpha Y) - \chi(-\sigma Q - \gamma Y) \\ Y &= -\sigma\chi Q + \sigma\alpha Y + \chi\sigma Q + \chi\gamma Y \\ Y &= \sigma\alpha Y + \chi\gamma Y \\ Y - \sigma\alpha Y - \chi\gamma Y &= 0 \\ Y(-\sigma\alpha - \chi\gamma + 1) &= 0 \\ Y &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

Substituindo (B.57) e (B.58) em (B.60) obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 Q &= -\gamma E - \alpha K \\
 Q &= -\gamma(-\chi Q + \alpha Y) - \alpha(-\sigma Q - \gamma Y) \\
 Q &= \gamma\chi Q + \alpha\sigma Q \\
 Q - \gamma\chi Q - \alpha\sigma Q &= 0 \\
 Q(-\gamma\chi - \alpha\sigma + 1) &= 0 \\
 Q &= 0.
 \end{aligned} \tag{B.62}$$

Substituindo (B.61) e (B.62) em (B.57) obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 K &= -\sigma Q - \gamma Y \\
 K &= 0.
 \end{aligned} \tag{B.63}$$

Substituindo (B.61) e (B.62) em (B.58) obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 E &= -\chi Q + \alpha Y \\
 E &= 0.
 \end{aligned} \tag{B.64}$$

Finalmente para a sexta coluna obtêm-se,

$$\bar{F} = 1 \tag{B.65}$$

$$L + \sigma R + \gamma W = 0 \tag{B.66}$$

$$-F - \chi R + \alpha W = 0 \tag{B.67}$$

$$-\sigma F + \chi L + W = 0 \tag{B.68}$$

$$-\gamma F - \alpha L - R = 0 \tag{B.69}$$

$$-\bar{M} = 0. \tag{B.70}$$

De (B.66) obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 L + \sigma R + \gamma W &= 0 \\
 L &= -\sigma R - \gamma W.
 \end{aligned} \tag{B.71}$$

De (B.67) obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 -F - \chi R + \alpha W &= 0 \\
 -F &= +\chi R - \alpha W \\
 F &= -\chi R + \alpha W.
 \end{aligned} \tag{B.72}$$

De (B.68) obtêm-se,

$$\begin{aligned}
 -\sigma F + \chi L + W &= 0 \\
 W &= \sigma F - \chi L.
 \end{aligned} \tag{B.73}$$

De (B.69) obtêm-se,

$$\begin{aligned} -\gamma F - \alpha L - R &= 0 \\ -R &= +\gamma F + \alpha L \\ R &= -\gamma F - \alpha L. \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

Substituindo (B.71) e (B.72) em (B.73) obtêm-se,

$$\begin{aligned} W &= \sigma F - \chi L \\ W &= \sigma(-\chi R + \alpha W) - \chi(-\sigma R - \gamma W) \\ W &= -\sigma\chi R + \sigma\alpha W + \chi\sigma R + \chi\gamma W \\ W &= \sigma\alpha W + \chi\gamma W \\ W - \sigma\alpha W - \chi\gamma W &= 0 \\ W(-\sigma\alpha - \chi\gamma + 1) &= 0 \\ W &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

Substituindo (B.71), (B.72) e (B.75) em (B.74) obtêm-se,

$$\begin{aligned} R &= -\gamma F - \alpha L \\ R &= -\gamma(-\chi R + \alpha W) - \alpha(-\sigma R - \gamma W) \\ R &= \gamma\chi R + \sigma\alpha R \\ R - \gamma\chi R - \sigma\alpha R &= 0 \\ R(-\gamma\chi - \sigma\alpha + 1) &= 0 \\ R &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

Substituindo (B.75) e (B.76) em (B.72) obtêm-se,

$$\begin{aligned} F &= -\chi R + \alpha W \\ F &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

Substituindo (B.75) e (B.76) em (B.71) obtêm-se,

$$\begin{aligned} L &= -\sigma R - \gamma W \\ L &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

Calculadas todas essas informações obtêm-se a seguinte matriz simplética,

$$f^{(0)} = \begin{bmatrix} A & B & C & D & E & F \\ G & H & I & J & K & L \\ M & N & O & P & Q & R \\ S & U & V & X & Y & W \\ \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} & \bar{D} & \bar{E} & \bar{F} \\ \bar{G} & \bar{H} & \bar{I} & \bar{J} & \bar{L} & \bar{M} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Gamma} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\alpha & -\chi & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma & -\sigma & 0 & 0 \\ \alpha & -\gamma & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \chi & \sigma & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Gamma & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.79})$$

Na matriz acima $\Gamma = (\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma$ e $(\alpha\sigma - 1) + \chi\gamma \neq 0$.

B.2 OS PARÊNTESES DE POISSON

Considerando os seguintes parênteses de Poisson (4.84)-(4.88) e as transformações de variáveis (4.123)-(4.126), verifica-se, que em primeira ordem nos parâmetros NC's,

$$\{\tilde{a}, \tilde{T}\} = \{a, T\} = \sigma. \quad (\text{B.80})$$

Isso implica obrigatoriamente em $\sigma \equiv 0$, logo $\Gamma = \chi\gamma - 1$.

$$\begin{aligned} \{\tilde{a}, \tilde{P}_a\} &= \left\{ a, \frac{1}{\Gamma} (-P_a + 2\alpha T + \chi P_T) \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma} [\{a, -P_a\} + \{a, 2\alpha T\} + \{a, \chi P_T\}] \\ &= \frac{1}{\Gamma} [-1 + 2\alpha\sigma + \chi\gamma] \\ &= \frac{1}{\Gamma} [\Gamma + \alpha\sigma] \\ &= 1 + \frac{\alpha\sigma}{\Gamma}, \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{a}, \tilde{P}_T\} &= \left\{ a, \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + \gamma P_a - P_T) \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma} [\{a, \alpha a\} + \{a, \gamma P_a\} - \{a, P_T\}] \\ &= \frac{1}{\Gamma} [0 + \gamma - \gamma] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{T}, \tilde{P}_a\} &= \left\{ T, \frac{1}{\Gamma} (-P_a + 2\alpha T + \chi P_T) \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma} [\{T, -P_a\} + \{T, 2\alpha T\} + \{T, \chi P_T\}] \\ &= \frac{1}{\Gamma} [-\chi + 0 + \chi] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{T}, \tilde{P}_T\} &= \left\{ T, \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + \gamma P_a - P_T) \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma} [\{T, \alpha a\} + \{T, \gamma P_a\} - \{T, P_T\}] \\ &= \frac{1}{\Gamma} [-\alpha\sigma + \gamma\chi - 1] \\ &= \frac{1}{\Gamma} [\gamma - 2\alpha\sigma] \\ &= 1 - \frac{2\alpha\sigma}{\Gamma} \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

$$\begin{aligned} \{\tilde{P}_a, \tilde{P}_T\} &= \left\{ \frac{1}{\Gamma} (-P_a + 2\alpha T + \chi P_T), \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + \gamma P_a - P_T) \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma^2} [\{-P_a, \alpha a\} + \{-P_a, \gamma P_a\} + \{-P_a, -P_T\} + \{2\alpha T, \alpha a\} \\ &\quad + \{2\alpha T, \gamma P_a\} + \{2\alpha T, -P_T\} + \{\chi P_T, \alpha a\} + \{\chi P_T, \gamma P_a\} \\ &\quad + \{\chi P_T, -P_T\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma^2} [\alpha - 0 + \alpha - 2\alpha^2\sigma + 2\alpha\gamma\chi - 2\alpha - \chi\alpha\gamma - \chi\gamma\alpha - 0] \\
&= -\frac{2\alpha^2\sigma}{\Gamma^2}, \tag{B.85} \\
\{\tilde{P}_a, \tilde{P}_a\} &= \left\{ \frac{1}{\Gamma} (-P_a + 2\alpha T + \chi P_T), \frac{1}{\Gamma} (-P_a + 2\alpha T + \chi P_T) \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma^2} [\{-P_a, -P_a\} + \{-P_a, 2\alpha T\} + \{-P_a, \chi P_T\} \\
&\quad + \{2\alpha T, -P_a\} + \{2\alpha T, 2\alpha T\} + \{2\alpha T, \chi P_T\} + \{\chi P_T, -P_a\} \\
&\quad + \{\chi P_T, 2\alpha T\} + \{\chi P_T, \chi P_T\}] \\
&= \frac{1}{\Gamma^2} [0 + 2\alpha\chi - \alpha\chi - 2\alpha\chi + 0 + 2\alpha\chi + \alpha\chi - 2\alpha\chi + 0] \\
&= 0, \\
\{\tilde{P}_T, \tilde{P}_T\} &= \left\{ \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + \gamma P_a - P_T), \frac{1}{\Gamma} (\alpha a + \gamma P_a - P_T) \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma^2} [\{\alpha a, \alpha a\} + \{\alpha a, \gamma P_a\} - \{\alpha a, P_T\} + \{\gamma P_a, \alpha a\} \\
&\quad + \{\gamma P_a, \gamma P_a\} - \{\gamma P_a, P_T\} - \{P_T, \alpha a\} - \{P_T, \gamma P_a\} \\
&\quad + \{P_T, P_T\}] \\
&= \frac{1}{\Gamma^2} [0 + \alpha\gamma - \alpha\gamma - \alpha\gamma + 0 - \alpha\gamma + \alpha\gamma + \alpha\gamma + 0] \\
&= 0. \tag{B.86}
\end{aligned}$$

Esse resultados indicam que em primeira ordem a teoria funciona como boa aproximação.

APÊNDICE C – COMPLEMENTOS DO CAPÍTULO 5

C.1 CONSERVAÇÃO DE ENERGIA NOS MODELOS COSMOLÓGICOS COMUTATIVOS DE HL

Inicialmente foram obtidas as seguintes equações de movimento (4.145)-(4.146), reescritas respectivamente nas formas,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + k\frac{g_c}{a^2} - g_\Lambda - k^2\frac{g_r}{a^4} - k^3\frac{g_s}{a^6} - \frac{C}{a^{3\omega+3}} - \left(-\frac{\alpha}{a^{3\omega+2}}\right) = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} \left[kg_c - 3g_\Lambda a^2 + k^2\frac{g_r}{a^2} + 3k^3\frac{g_s}{a^4} + 3\omega\frac{C}{a^{3\omega+1}} + (1-3\omega)\frac{\alpha}{a^{3\omega}} \right] = 0. \quad (\text{C.2})$$

Realizando a derivada temporal de (C.1) obtêm-se,

$$\begin{aligned} - (3\omega + 3) \frac{C}{a^{3\omega+4}} \dot{a} + (3\omega + 2) \frac{\alpha}{a^{3\omega+3}} \dot{a} &= \frac{2\dot{a}\ddot{a}a^2 - 2a\dot{a}\dot{a}^2}{a^4} - 2k\dot{a}\frac{g_c}{a^3} + 4k^2\dot{a}\frac{g_r}{a^5} + 6k^3\dot{a}\frac{g_s}{a^7} \\ &= 2\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\ddot{a}a^2}{a^3} - \frac{a\dot{a}^2}{a^3} - k\frac{g_c}{a^2} + 2k^2\frac{g_r}{a^4} + 3k^3\frac{g_s}{a^6} \right) \\ &= 2\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - k\frac{g_c}{a^2} + 2k^2\frac{g_r}{a^4} + 3k^3\frac{g_s}{a^6} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Após a substituição de (C.2) a equação acima se transforma em,

$$\begin{aligned} - (3\omega + 3) \frac{C}{a^{3\omega+4}} \dot{a} + (3\omega + 2) \frac{\alpha}{a^{3\omega+3}} \dot{a} &= 2\frac{\dot{a}}{a} \left(\left\{ -\frac{\dot{a}^2}{2a^2} - \frac{1}{2a^2} \left[kg_c - 3g_\Lambda a^2 + k^2\frac{g_r}{a^2} + 3k^3\frac{g_s}{a^4} \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. 3\omega\frac{C}{a^{3\omega+1}} + (1-3\omega)\frac{\alpha}{a^{3\omega}} \right] \right\} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - k\frac{g_c}{a^2} + 2k^2\frac{g_r}{a^4} \right. \\ &+ \left. \left. 3k^3\frac{g_s}{a^6} \right) \right) \\ &= 2\frac{\dot{a}}{a} \left[-\frac{3}{2}\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{2}k\frac{g_c}{a^2} - k\frac{g_c}{a^2} + \frac{3}{2}g_\Lambda - \frac{1}{2}k^2\frac{g_r}{a^4} + 2k^2\frac{g_r}{a^4} \right. \\ &- \left. \frac{3}{2}k^3\frac{g_s}{a^6} + 3k^3\frac{g_s}{a^6} - 3\omega\frac{C}{a^{3\omega+3}} - (1-3\omega)\frac{\alpha}{a^{3\omega+2}} \right] \\ &= 2\frac{\dot{a}}{a} \left[-\frac{3}{2}\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3}{2}k\frac{g_c}{a^2} + \frac{3}{2}g_\Lambda + \frac{3}{2}k^2\frac{g_r}{a^4} + \frac{3}{2}k^3\frac{g_s}{a^6} \right. \\ &- \left. \frac{3}{2}\omega\frac{C}{a^{3\omega+3}} - \frac{(1-3\omega)}{2}\frac{\alpha}{a^{3\omega+2}} \right] \\ &= \frac{\dot{a}}{a} \left[-3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + k\frac{g_c}{a^2} - g_\Lambda - k^2\frac{g_r}{a^4} - k^3\frac{g_s}{a^6} \right. \right. \\ &- \left. \left. 3\omega\frac{C}{a^{3\omega+3}} - (1-3\omega)\frac{\alpha}{a^{3\omega+2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Finalmente substituindo (C.1) em (C.4) obtêm-se,

$$- (3\omega + 3) \frac{C}{a^{3\omega+4}} \dot{a} + (3\omega + 2) \frac{\alpha}{a^{3\omega+3}} \dot{a} = \frac{\dot{a}}{a} \left[-3 \left\{ \frac{C}{a^{3\omega+3}} + \left(-\frac{\alpha}{a^{3\omega+2}} \right) \right\} - 3\omega\frac{C}{a^{3\omega+3}} \right]$$

$$- (3\omega + 3) \frac{C}{a^{3\omega+4}} \dot{a} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{C}{a^{3\omega+3}} - \omega \frac{C}{a^{3\omega+3}} \right). \quad (\text{C.5})$$

Como a equação de estado para o fluido perfeito é do tipo $p = \omega\rho$ com,

$$\rho = \frac{C}{a^{3\omega+3}}, \quad (\text{C.6})$$

logo,

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p). \quad (\text{C.7})$$

A equação acima pode ser multiplicada por a^3 e reescrita na forma,

$$\begin{aligned} \dot{\rho} a^3 &= -3 \dot{a} a^2 (\rho + p) \\ \dot{\rho} a^3 + 3 \dot{a} a^2 \rho + 3 \dot{a} a^2 p &= 0 \\ \frac{d}{dt} (\rho a^3) + p \frac{d}{dt} (a^3) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Essa é a lei da conservação de energia. Ou seja, a energia total do modelo cosmológico de HL permanece conservada mesmo após a introdução da NC.

C.2 O FLUIDO PERFEITO COM EQUAÇÃO DE ESTADO $p = \omega\rho$

Na presente seção será obtida a solução de (C.7) considerando um fluido perfeito com equação de estado $p = \omega\rho$.

Com a simples manipulação de (C.7) obtêm-se a seguinte equação diferencial separável,

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\frac{3}{a} (\rho + p) \frac{da}{dt} \\ \frac{d\rho}{3(\rho + p)} &= -\frac{da}{a}. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Ao considerar $p = \omega\rho$ obtêm-se,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{3(\rho + \omega\rho)} &= -\frac{da}{a} \\ \frac{d\rho}{(3\rho[1 + \omega])} &= -\frac{da}{a} \\ \frac{d\rho}{\rho} &= -3[1 + \omega] \frac{da}{a} \\ \ln\rho &= -3[1 + \omega] \ln a + A. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Na solução acima A é uma constante de integração. Através de algumas manipulações a solução (C.10) se transforma em,

$$\begin{aligned} \ln \rho + 3[1 + \omega] \ln a &= A \\ \ln \rho + \ln a^{3(1+\omega)} &= A \\ \ln(\rho a^{3(1+\omega)}) &= A \\ \rho a^{(3+3\omega)} &= e^A. \end{aligned} \tag{C.11}$$

No instante inicial em que $t = 0$ são considerados $\rho(t = 0) = \rho_0$ e $a(t = 0) = a_0$, logo,

$$\rho_0 a_0^{(3+3\omega)} = e^A. \tag{C.12}$$

Substituindo a constante de integração (C.12) em (C.11) obtêm-se,

$$\begin{aligned} \rho a^{(3+3\omega)} &= \rho_0 a_0^{(3+3\omega)} \\ \rho &= \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3+3\omega}. \end{aligned} \tag{C.13}$$

Como pode-se perceber o presente resultado está de acordo com (C.6) sendo ρ_0 e a_0 constantes positivas e $C = \rho_0 a_0^{3+3\omega}$. Isso quer dizer que a constante C apresenta uma relação com a densidade de energia ρ do fluido perfeito. Como já mencionado tal relação é do tipo (C.6).