

Guilherme Henrique Siqueira Camargo

Flutuações Quânticas e Ação Efetiva em Teoria Semiclássica

Juiz de Fora - MG

2023

Guilherme Henrique Siqueira Camargo

Flutuações Quânticas e Ação Efetiva em Teoria Semiclássica

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Departamento de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovitch Shapiro

Coorientador: Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci

Juiz de Fora - MG

2023

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Camargo, Guilherme Henrique Siqueira.
Flutuações Quânticas e Ação Efetiva em Teoria Semiclássica /
Guilherme Henrique Siqueira Camargo. -- 2023.
99 f.

Orientador: Ilya Lvovitch Shapiro
Coorientador: Vitorio Alberto De Lorenci
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2023.

1. torção. 2. anomalia conforme. 3. anomalia multiplicativa. 4.
temperatura finita. 5. fronteira perfeitamente condutora. I. Shapiro,
Ilya Lvovitch, orient. II. De Lorenci, Vitorio Alberto, coorient. III. Título.

Guilherme Henrique Siqueira Camargo

"Flutuações Quânticas e Ação Efetiva em Teoria Semiclássica"

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 10 de Janeiro de 2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilia Chapiro - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Vitorio Alberto De Lorenci - Coorientador

Universidade Federal de Itajubá

Prof. Dr. Gabriel Santos Menezes

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues

Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 14/12/2022.



Documento assinado eletronicamente por **Gabriel Santos Menezes, Usuário Externo**, em 10/01/2023, às 13:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ilia Chapiro, Professor(a)**, em 11/01/2023, às 09:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Vitorio Alberto DE LORENCI, Usuário Externo**, em 12/01/2023, às 08:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Davi Cabral Rodrigues, Usuário Externo**, em 12/01/2023, às 17:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gil de Oliveira Neto, Professor(a)**, em 16/01/2023, às 18:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Albert Carlo Rodrigues Mendes, Professor(a)**, em 17/01/2023, às 09:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **1078893** e o código CRC **B3EE2BB5**.

Agradecimentos

- Ao meu orientador Ilya Shapiro por todos os ensinamentos passados durante esses anos do meu doutorado, pela sugestão de vários problemas, e principalmente por ter sido uma inspiração para mim, um exemplo de cientista a ser seguido;
- Ao meu professor e amigo Vitorio De Lorenci por ter feito parte de mais esse desafio na minha carreira científica, por ter me ajudado sempre que precisei, por ser uma pessoa que tenho enorme admiração;
- Ao colaborador Caio Ribeiro pela excelente participação nesse trabalho, desenvolvendo os cálculos de forma brilhante;
- Ao colaborador Alex Ferreira Junior pelas discussões enriquecedoras e pelo excelente desenvolvimento do trabalho envolvendo o campo escalar;
- Aos amigos que fiz durante o doutorado pela amizade e apoio;
- À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e FAPEMIG (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais) pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese, são incluídos dois trabalhos distintos. Primeiro, estudamos a anomalia conforme em um espaço-tempo curvo com torção antissimétrica. Além disso, analisamos também os efeitos das flutuações quânticas de um campo eletromagnético sobre o movimento de uma partícula de carga nula e momento de dipolo diferente de zero que interage com o campo na presença de uma fronteira perfeitamente condutora em regime de temperatura finita. Primeiramente, revisamos algumas propriedades da gravitação semiclássica num espaço-tempo curvo com torção, onde apresentamos como ocorre a interação da torção com campos de matéria. Fizemos então o estudo da ação efetiva na presença da torção, onde usamos dois diferentes operadores conjugados para o caso de campos fermiônicos, sendo possível recuperar resultados apresentados na literatura e ainda generalizá-los, obtendo um novo tipo de ambiguidade que relacionamos com um novo exemplo de anomalia multiplicativa. Calculamos ainda a ação induzida pela anomalia em sua forma covariante, obtendo termos local e não-local, onde o termo local possui a ambiguidade devido à anomalia multiplicativa, e foi possível reescrever o termo não-local com o uso de dois campos auxiliares para obter também sua forma local. A seguir, realizamos a quantização do campo eletromagnético na presença de uma fronteira plana idealmente refletora num cenário de temperatura finita. Finalmente, sobre o comportamento do dipolo, vimos que sua interação com as flutuações do campo eletromagnético produziu dispersões quânticas dos momentos linear e angular, cujas magnitudes dependem da temperatura, distância até a placa e ainda das características do momento de dipolo. Analisamos ainda a energia cinética adquirida pelo dipolo, estudando suas diferentes contribuições separadamente, onde mostramos que, quando a partícula experimenta apenas o banho térmico ou a fronteira condutora, sua energia residual é positiva.

Palavras-chaves: torção, anomalia conforme, anomalia multiplicativa, dipolo, temperatura finita, fronteira perfeitamente condutora.

Abstract

In this thesis, two different works are included. First, we study the conformal anomaly in a curved space-time with antisymmetric torsion. Furthermore, we also analyzed the effects of quantum fluctuations of an electromagnetic field on the motion of a particle with zero charge but nonzero dipole moment that interacts with the field in the presence of a perfectly conducting boundary in finite temperature regime. First, we review some properties of semiclassical gravitation in a curved space-time with torsion, where we present how torsion interacts with matter fields. We then studied the effective action in the presence of torsion, where we used two different conjugate operators for the fermionic case, making it possible to recover results presented in the literature and still generalize them, obtaining a new type of ambiguity that we relate with a new example of multiplicative anomaly. We also calculated the anomaly-induced action in its covariant form, obtaining local and non-local terms, where the local term has the ambiguity due to the multiplicative anomaly, and it was possible to rewrite the non-local term using two auxiliary fields to obtain also its local form. Next, we perform the quantization of the electromagnetic field in the presence of an ideally reflecting flat boundary in a finite temperature scenario. And finally, on the behavior of the dipole, we saw that its interaction with the fluctuations of the electromagnetic field produced quantum dispersions of the linear and angular momenta, whose magnitudes depend on the temperature, distance to the wall and also on the characteristics of the dipole moment. We also analyze the kinetic energy acquired by the dipole, studying its different contributions separately, where we show that, when the particle experiences only the thermal bath or the conducting boundary, its residual energy is positive.

Key-words: torsion, conformal anomaly, multiplicative anomaly, dipole, finite temperature, perfectly conducting boundary.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração da escolha do sistema de coordenadas, sendo $\mathbf{p} = p_x \hat{\mathbf{x}} + p_z \hat{\mathbf{z}} = p(\hat{\mathbf{x}} \cos \theta + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta)$. O vetor $\hat{\mathbf{y}}$ está entrando no plano da página.	53
Figura 2 – Componente da função de transição $F_{\tau_s, \tau}(t)$ dada pela Eq. (5.13).	55
Figura 3 – Comportamento de $\langle (\Delta v_{z'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s}$ para diferentes valores de τ_s/β	58
Figura 4 – Comportamento de $\langle (\Delta \omega_{x'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s}$ para diferentes valores de τ_s/β	60
Figura 5 – Comportamento de $(\delta v_x)_{v, \tau_s, \parallel}^2$ para diferentes valores de τ_s/z	63
Figura 6 – Comportamento de $(\delta v_x)_{v, \tau_s, \perp}^2$ para diferentes valores de τ_s/z . Esse é o mesmo comportamento para $(\delta v_y)_{v, \tau_s, \perp}^2$	64
Figura 7 – Comportamento de $(\delta v_y)_{v, \tau_s, \parallel}^2$ para diferentes valores de τ_s/z	65
Figura 8 – Comportamento de $(\delta v_z)_{v, \tau_s, \parallel}^2$ para diferentes valores de τ_s/z	65
Figura 9 – Comportamento de $(\delta v_z)_{v, \tau_s, \perp}^2$ para diferentes valores de τ_s/z	66
Figura 10 – Comportamentos das dispersões para o caso da transição súbita.	67
Figura 11 – Comportamento de $(\delta \omega)_{v, \tau_s, \parallel}^2$ para diferentes valores de τ_s/z	68
Figura 12 – Comportamento de $(\delta \omega)_{v, \tau_s, \perp}^2$ para diferentes valores de τ_s/z	68
Figura 13 – Comportamentos das dispersões para o caso da transição súbita.	69
Figura 14 – Comportamento de $(\delta v_x)_{m, \tau_s, \parallel}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$	71
Figura 15 – Comportamento de $(\delta v_x)_{m, \tau_s, \perp}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$. Esse é o mesmo comportamento para $(\delta v_y)_{m, \tau_s, \perp}^2$	72
Figura 16 – Comportamento de $(\delta v_y)_{m, \tau_s, \parallel}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$	73
Figura 17 – Comportamento de $(\delta v_z)_{m, \tau_s, \parallel}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$	73
Figura 18 – Comportamento de $(\delta v_z)_{m, \tau_s, \perp}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$	74
Figura 19 – Comportamentos das dispersões para o caso da transição súbita com $\beta/z = 1$	74
Figura 20 – Comportamento de $(\delta \omega)_{m, \tau_s, \parallel}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$	75
Figura 21 – Comportamento de $(\delta \omega)_{m, \tau_s, \perp}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$	75
Figura 22 – Comportamentos de $(\delta \omega)_{m, \parallel}^2$ e $(\delta \omega)_{m, \perp}^2$ com $\beta/z = 1$	76
Figura 23 – Valor médio da energia cinética do dipolo devido à contribuição térmica com $\gamma = 1$	78
Figura 24 – Valor médio da energia $\langle K \rangle_v$ considerando o dipolo paralelo à placa ($\theta = 0$) e também perpendicular ($\theta = \pi/2$).	79

Figura 25 – Valor médio da energia $\langle K \rangle_m$ considerando o dipolo paralelo à placa ($\theta = 0$) para diferentes valores de β/z	79
Figura 26 – Valor médio da energia $\langle K \rangle_v$ considerando o dipolo perpendicular à placa ($\theta = \pi/2$) para diferentes valores de β/z	80
Figura 27 – Contribuição na energia da partícula devido o movimento linear e rotacional do dipolo.	81
Figura 28 – Energia total do dipolo, considerando sua contribuição térmica, do vácuo modificado e mista.	81
Figura 29 – Ilustração das curvas C^+ e C^-	90

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Teoria quântica de campos na presença de fronteiras	15
2	ANOMALIA E AÇÃO EFETIVA COM TORÇÃO	20
2.1	Torção	20
2.2	Interação da torção com campos de matéria	21
2.3	Método de Schwinger-DeWitt	23
2.4	Integração da anomalia	25
3	AÇÃO EFETIVA NA PRESENÇA DE TORÇÃO	29
3.1	Primeiro operador conjugado	29
3.2	Segundo operador conjugado	35
3.3	Ação Induzida	41
4	CORRELAÇÕES DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO NA PRESENÇA DE UMA FRONTEIRA PERFEITAMENTE REFLETORA	45
4.1	Correlações num banho térmico	48
5	MOVIMENTO DE UM DIPOLO NO VÁCUO MODIFICADO	52
5.1	Cálculo da dispersão da velocidade da partícula	54
5.1.1	Contribuição térmica	55
5.1.1.1	Dispersões da velocidade linear	55
5.1.1.2	Dispersões da velocidade angular	58
5.1.2	Contribuição da fronteira	60
5.1.2.1	Dispersões da velocidade linear	60
5.1.2.2	Dispersões da velocidade angular	65
5.1.3	Contribuição mista	69
5.1.3.1	Dispersões da velocidade linear	69
5.1.3.2	Dispersões da velocidade angular	72
5.2	Energia da partícula e estimativas	76
6	CONCLUSÕES	84
	APÊNDICE A – ÁLGEBRA DAS MATRIZES DE DIRAC	87
	APÊNDICE B – DETALHES NO CÁLCULO DAS DISPERSÕES	89

REFERÊNCIAS 94

Lista de Publicações

- G. H. S. Camargo, V. A. De Lorenci, C. C. H. Ribeiro, F. F. Rodrigues, M. M. Silva. Vacuum fluctuations of a scalar field near a reflecting boundary and their effects on the motion of a test particle. *Journal of High Energy Physics*, **2018**, 173 (2018).
- G. H. S. Camargo, V. A. De Lorenci, C. C. H. Ribeiro, F. F. Rodrigues. Vacuum induced dispersions on the motion of test particles in d+1 dimensions. *Phys. Rev. D*, **100**, 065014 (2019).
- G. H. S. Camargo, V. A. De Lorenci, A. L. Ferreira Junior, C. C. H. Ribeiro. Probing thermal fluctuations through scalar test particles. *The European Physical Journal C*, **81**, 424, (2021).
- G. H. S. Camargo, I. L. Shapiro. Anomaly-induced vacuum effective action with torsion: Covariant solution and ambiguities. *Phys. Rev. D*, **106**, 045004 (2022).

1 Introdução

Teoria de campos com condições externas é uma parte importante da física nas últimas décadas. Estas condições podem incluir campos externos, como eletromagnético, gravitacional, entre outros, fronteiras ou efeitos de ambiente, como quando o sistema quântico está em equilíbrio com um reservatório térmico.

Em 1974 foi usada a regularização dimensional para estudar as correções de *1-loop* no propagador do gráviton devido à contribuição do fóton [1, 2, 3]. Apesar do fato da regularização dimensional ser bastante usada para tratar campos de calibre, por satisfazer as identidades de Ward [4], o seu uso na gravitação semiclássica fez com que certas simetrias, como a conforme e a axial, da Lagrangiana original não fossem satisfeitas na teoria de perturbação. Para contornar tais quebras de simetria foi sugerida a introdução de contratermos n -dimensionais, ao invés de 4-dimensionais. Essa quebra da simetria conforme é também conhecida em outras áreas da física, como em supersimetria [5] ou em teoria das cordas [6, 7].

Um dos resultados mais importantes da teoria quântica em espaço-tempo curvo foi o cálculo dos coeficientes numéricos na anomalia conforme [2]. No trabalho em questão, foram analisados campos quantizados de matéria na presença de um campo gravitacional externo, usando a regularização dimensional para obter a ordem de *1-loop* da teoria de perturbação. Foi mostrado que, sendo¹,

$$C^2 = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2,$$

o quadrado do tensor de Weyl e,

$$E_4 = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2,$$

o termo topológico de Gauss-Bonnet, os coeficientes numéricos de

$$\langle T^\mu{}_\mu \rangle = - \left(wC^2 + bE_4 + c\Box R \right), \quad (1.1)$$

são dados por,

$$\begin{pmatrix} w \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{360(4\pi)^2} \begin{pmatrix} 3N_s + 18N_f + 36N_v \\ -N_s - 11N_f - 62N_v \\ 2N_s + 12N_f - 36N_v \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

onde N_s é o número de escalares da teoria, N_f o número de férmions e N_v o de vetores.

¹ Aqui estamos trabalhando com a assinatura $(+, -, -, -)$ e com o tensor de Riemann $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\nu\beta} - \partial_\beta\Gamma^\mu{}_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\gamma\alpha}\Gamma^\gamma{}_{\nu\beta} - \Gamma^\mu{}_{\gamma\beta}\Gamma^\gamma{}_{\nu\alpha}$.

Outro resultado importante foi o cálculo da ação efetiva do vácuo induzida pela anomalia conforme foi apresentado em 1984 [8, 9]. Para obtenção da ação efetiva Γ é necessário usar a relação,

$$\langle T^\mu{}_\mu \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta\Gamma}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (1.3)$$

e realizando a integração da anomalia foi mostrado que, para produzir a anomalia dada na Eq. (1.1), a ação induzida deve ser,

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{w}{4} \int_x \int_y C^2(x) G(x,y) \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right)_y \\ & + \frac{b}{8} \int_x \int_y \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right)_x G(x,y) \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right)_y - \frac{3c-2b}{36} \int_x R^2(x), \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde usamos a notação compacta $\int_x \equiv \int d^4x \sqrt{-g(x)}$, e a função de Green $G(x,y)$ é o inverso do operador [10, 11, 12] $\Delta_4 = \square^2 + 2R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - (2/3) R \square + (1/3) (\nabla^\mu R) \nabla_\mu$, ou seja, $(\sqrt{-g} \Delta_4)_x G(x,y) = \delta^4(x,y)$.

Já em 1985 foi calculada a anomalia do traço do tensor momento-energia para os campos escalar e espinorial num espaço-tempo com torção [13, 14, 15]. Nesse trabalho foi obtido que a maneira como a ação efetiva depende da métrica e da torção é dada por,

$$\Gamma = V \int d\eta \left[k_1 (\ln a)''^2 + k_2 (\ln a)'^4 + k_3 (\ln a)'' + k_4 T (\ln a)'^2 + k_5 T^4 \ln a \right],$$

onde a métrica é $g_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu}$, $a' = da/d\eta$, V o volume tridimensional, $S_\nu = (T(\eta), 0, 0, 0) = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\alpha\beta\mu}$ é o pseudotraço da torção $T_{\alpha\beta\mu}$, e k_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) são coeficientes relacionados com os coeficientes do tensor momento-energia. Além disso, das equações de movimento para a ação, foi possível determinar a solução para $a(\eta)$ e $T(t)$, cujas expressões corresponderam a um modelo de universo inflacionário.

Ainda sobre o estudo no espaço-tempo com torção, em 2000 foram estudados alguns aspectos da simetria conforme no sistema métrica-escalar-torção [16]. Nesse trabalho, concluiu-se que a torção pode agir como um campo de compensação, de forma que esta teoria se torna conformalmente equivalente à Relatividade Geral no nível clássico. Adicionalmente, como nesse caso o traço T_μ da torção se transforma, a identidade de Noether correspondente à simetria conforme é modificada. A anomalia estará relacionada ao valor médio de uma nova quantidade, $\langle \mathfrak{T} \rangle \neq 0$, onde,

$$-\sqrt{-g} \mathfrak{T} = 2g_{\mu\nu} \frac{\delta S_{\text{vac}}}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\xi_2}{\xi_1} \partial_\mu \frac{\delta S_{\text{vac}}}{\delta T_\mu} = 0,$$

Os termos $\xi_{1,2}$ são parâmetros não-mínimos da interação do campo escalar com a torção.

Um exemplo de aplicação física para a anomalia conforme é o estudo da efeito Hawking [17]. Foi mostrado que, para o caso em duas dimensões, a lei de conservação

para o tensor momento-energia na métrica de Schwarzschild implica que a intensidade da radiação Hawking pode ser determinada pelo traço do tensor momento-energia, de modo que, tanto o efeito Hawking quanto a anomalia conforme podem ser deduzidos um do outro. Ainda nessa linha, com o uso da ação induzida pela anomalia, foi calculado o traço de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ nos estados de Boulware, Unruh and Hartle-Hawking para um campo escalar sem massa propagando no espaço-tempo de Schwarzschild [18, 19]. Outra aplicação interessante da ação induzida é o estudo do modelo inflacionário [20, 21], onde foi obtida a solução inflacionária com base na versão covariante e local da ação induzida.

Sobre a anomalia multiplicativa, em 1998 foi estudada sua associação com o uso da regularização ζ [22]. No trabalho em questão foram estudados operadores de segunda ordem em uma variedade D -dimensional sem fronteira, onde mostraram que a anomalia multiplicativa,

$$a_D(A, B) = \ln \det(AB) - \ln \det A - \ln \det B,$$

é diferente de zero quando tomamos $D > 2$, com D par. Entretanto, já em 1999 foi argumentado que tal anomalia é gerada pelo uso da regularização ζ , não apresentando um resultado físico [23, 24]. Isso foi demonstrado ao usar outros tipos de regularização, como a regularização dimensional ou o *cutoff*, e a anomalia não ocorre.

Mais recentemente, em 2010, foi publicado o primeiro exemplo de anomalia multiplicativa que não se reduz a uma ambiguidade da renormalização [25]. Nesse trabalho foi estudada a QED no espaço-tempo curvo, obtendo os fatores de forma de 1-*loop*. O cálculo foi realizado usando a técnica do *heat kernel* com dois operadores conjugados distintos, encontrando uma nova ambiguidade nos resultados. As partes divergentes obtidas para ambos os operadores foram exatamente as mesmas, entretanto, as partes finitas apresentaram diferenças em suas contribuições não-locais, as quais não podem ser eliminadas modificando as condições de renormalização, uma vez que elas não modificam a parte não-local da ação efetiva.

1.1 Teoria quântica de campos na presença de fronteiras

Agora, relacionado com o segundo trabalho desenvolvido nesta tese, em 1998 foi estudada a densidade de energia de um campo escalar na presença de uma fronteira. É conhecido que o valor médio da densidade de energia de um campo escalar na presença de uma fronteira é uma quantidade divergente quando avaliado na posição da fronteira. Entretanto, foi mostrado que ao introduzir uma distribuição Gaussiana na posição q da partícula, o resultado da densidade de energia se torna finito, mesmo quando avaliado na posição da placa, e é dado por $\langle 0 | \rho | 0 \rangle = -1 / (48\pi^2 \Delta^2)$, onde $\Delta = \sqrt{\langle 0 | q^2 | 0 \rangle}$ [26].

Já o caso de uma carga elétrica próxima a uma fronteira plana perfeitamente refletora foi estudado em 2004 [27]. Neste caso foram encontradas divergências quando foi

considerada a carga na mesma posição da placa ou quando sua distância z até a placa obedece a relação $t = 2z$, onde t é o tempo de interação da carga com a fronteira. A primeira divergência está relacionada com a condição de fronteira sobre o campo eletromagnético, e a segunda foi causada pelo fato de ter considerado o sistema idealizado, onde a interação entre a carga e o campo modificado pela presença da fronteira se dá de forma repentina, ou seja, a carga que antes interagia com o campo no vácuo de Minkowski passa a interagir com o campo no estado de vácuo modificado pela fronteira de forma abrupta. Ainda em 2004, foi estudado o sistema com duas placas paralelas [28], onde foi mostrado que o movimento Browniano na direção transversal às placas foi reforçado em comparação com o resultado de apenas uma placa. Em ambos os casos, com uma e duas placas, foram encontrados valores negativos nas dispersões da velocidade e da posição da partícula. Para justificar tal resultado aparentemente pouco intuitivo, foi argumentado que para determinar as dispersões na velocidade e posição foi usado o propagador renormalizado do campo, ou seja, desconsiderando a contribuição do vácuo de Minkowski, que é divergente. Assim, uma dispersão negativa deve ser entendida como uma redução no valor da incerteza com relação ao que seria obtido sem a presença da fronteira.

Ainda referente ao caso eletromagnético, em 2006 foi estudado o sistema em regime de temperatura finita, constituído de uma partícula de massa m e carga e a uma distância z de uma placa perfeitamente refletora e a uma temperatura T . Foi mostrado que as dispersões da velocidade da partícula, para $\beta = 1/(k_B T) \gg t$ e $\beta \gg z$, são dadas por [29]

$$\langle \Delta v_x^2 \rangle \approx \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \left\{ \frac{t}{64z^3} \ln \left[\left(\frac{2z+t}{2z-t} \right)^2 \right] - \frac{t^2}{8z^2(t^2-4z^2)} \right\} + \frac{32e^2\pi^4 t^2 z^2}{945m^2 \beta^6},$$

e

$$\langle \Delta v_z^2 \rangle \approx \frac{e^2}{\pi^2 m^2} \frac{t}{32z^3} \ln \left[\left(\frac{2z+t}{2z-t} \right)^2 \right] + \frac{64e^2\pi^4 t^2 z^2}{945m^2 \beta^6}.$$

De fato, quando é feito $\beta \rightarrow \infty$, este resultado retoma os resultados para o movimento Browniano no vácuo na presença da placa.

Em 2008 foi estudado o caso eletromagnético, porém considerando que a placa é constituída de um dielétrico, não sendo mais um condutor idealizado [30]. Em comparação com o caso da fronteira perfeitamente condutora, as dispersões da partícula teste próxima ao dielétrico são maiores e tendem ao resultado da fronteira idealizada muito lentamente quando a suscetibilidade aumenta. Outra diferença entre os resultados é que as dispersões da velocidade nas direções paralelas à placa não são negativas e também não se anulam quando $t \gg z$. Portanto, a negatividade das dispersões nessas direções, no caso de condutores perfeitos, pode ser interpretada como um resultado de nossa idealização e que não ocorre para materiais reais.

Ainda em 2008 foi introduzido o processo de transição, considerando que a interação entre a partícula e o campo modificado pela presença da placa ocorre de forma

suave [31]. Foram consideradas as funções de transição dadas pela Lorentziana $f_\tau(t) = (1/\pi) \tau^2 / (t^2 + \tau^2)$, onde τ é o intervalo de interação, e também pelo plato Lorentziano caracterizado pelos parâmetros τ e μ , definido por

$$F_{\tau\mu}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2 \\ \frac{\mu^2}{(|t|/\mu - 1/2)^2 + \mu^2}, & |t| > \tau/2. \end{cases}$$

Neste caso, a interação da partícula com o campo modificado pela presença da placa é iniciada e terminada em intervalos distintos.

Já em 2016, foi considerada uma nova função de transição, um tipo de generalização da função Lorentziana [32]. Dessa forma, foi possível eliminar as divergências encontradas ao considerar a interação iniciando de forma instantânea. Além disso, foi sugerido um experimento para medir os efeitos das flutuações quânticas do vácuo. Se a partícula teste de massa m e carga q for emitida paralelamente à placa, a uma distância z da mesma, a predição para a dispersão da posição dessa partícula em uma tela de condensação disposta a uma distância d do ponto de emissão da partícula é dada por

$$\delta Z = 9.4 \left(\frac{m_e}{m} \right) \left(\frac{q}{q_e} \right) \left(\frac{1\mu\text{m}}{z} \right) \left(\frac{d}{100\text{m}} \right) \mu\text{m},$$

onde m_e é a massa do elétron e q_e a carga do elétron.

Em 2009 foram considerados os efeitos das flutuações quânticas do campo eletromagnético num universo em expansão [33]. Foi mostrado que as partículas adquirem um movimento Browniano e que o valor médio do quadrado de suas velocidades dependem do fator de escala do universo. Foram tratados vários tipos de acoplamentos entre o campo eletromagnético e as partículas, como uma carga carregada, um dipolo magnético, e uma carga polarizada. Finalmente, foram discutidas as possíveis aplicações deste efeito do movimento Browniano para cenários cosmológicos.

O caso da partícula carregada interagindo com o campo eletromagnético na presença de uma fronteira perfeitamente condutora num banho térmico e com o uso da transição suave foi estudado em 2019 [34]. A utilização de uma transição controlável permitiu concluir que os efeitos térmicos, mesmo perto da parede, podem ser tão importantes ou até mais fortes do que os efeitos de vácuo. Além disso, em certos arranjos pode ocorrer uma espécie de efeito de resfriamento sobre o movimento da partícula, ou seja, a energia cinética da partícula é diminuída.

Já o caso de uma partícula interagindo com o campo escalar em 3+1 dimensões com o uso da função de transição foi estudado em 2018 [35]. Os resultados mostraram que o comportamento das dispersões são similares ao caso de uma carga interagindo com o campo eletromagnético. O efeito residual relatado no caso eletromagnético também apareceu no modelo do campo escalar. Entretanto, tal efeito é altamente dependente da transição adotada.

Em 2019 foram considerados os efeitos das flutuações de vácuo de um campo escalar na presença de uma fronteira plana perfeitamente refletora sobre o movimento de uma partícula teste quando o campo de fundo possui massa e o espaço tem $D + 1$ dimensões [36]. Foi ainda usada a transição suave entre os estados do campo, trazendo uma regularização das dispersões da velocidade da partícula teste.

O caso de uma partícula teste interagindo com o campo escalar massivo em $D + 1$ dimensões quando o sistema está a uma temperatura finita e na presença de uma fronteira perfeitamente refletora foi analisado em 2021 [37]. Foi mostrado que quando a partícula está no banho térmico ela ganha uma quantidade de energia por meio de dispersões positivas em sua velocidade, cuja magnitude depende da temperatura e também da massa do campo. Entretanto, quando incluída a fronteira refletora, as dispersões podem ser positivas ou negativas, mostrando que o efeito de subvácuo acontece mesmo em um ambiente de temperatura finita.

Nesta tese realizamos dois estudos distintos, o primeiro foi a cálculo da anomalia conforme e da ação efetiva na presença de torção [38], onde tratamos a interação de campos de matéria com a torção. Obtivemos a parte divergente da ação efetiva no nível de $1-loop$ com o uso do método de Schwinger-DeWitt. Ao tratar a interação do campo fermiônico foram considerados dois operadores conjugados diferentes, de tal forma que foi constatada a presença de uma nova anomalia no termo de superfície da ação efetiva, sendo mais um exemplo de anomalia multiplicativa. Foi ainda estudado o limite UV da ação e calculada a integração da anomalia, obtendo a ação induzida. O segundo foi o estudo da interação de um dipolo de carga nula, ou seja, uma partícula neutra porém com distribuição de carga tal que o momento dipolar é diferente de zero, com um campo eletromagnético na presença de uma fronteira perfeitamente condutora e em regime de temperatura finita [39]. Foram calculadas as dispersões das velocidades linear e angular do dipolo. O efeito residual encontrado no caso de uma carga elétrica foi constatado também no nosso problema. Calculamos ainda a energia cinética adquirida pelo dipolo, comparando os termos segundo sua origem, se são devido à presença da placa ou ao fato de tratarmos o sistema em temperatura finita, e se é originada pelo movimento linear ou rotacional do dipolo.

Os conceitos sobre a anomalia num campo gravitacional com torção estão apresentados no Capítulo 2, onde apresentamos brevemente algumas características da torção na Seção 2.1, introduzimos os modelos de interação entre os campos de matéria com a torção na Seção 2.2. Na Seção 2.3 descrevemos o método de Schwinger-DeWitt, e na Seção 2.4 realizamos um exemplo da integração da anomalia. O cálculo da ação efetiva na presença de torção está apresentado no Capítulo 3, assim como a obtenção da ação induzida na forma covariante. No Capítulo 4 realizamos o cálculo das correlações do campo eletromagnético na presença da fronteira perfeitamente refletora e em regime de temperatura

finita. O movimento do dipolo interagindo com o campo eletromagnético é discutido no Capítulo 5. E por fim, no Capítulo 6 apresentamos as conclusões desse trabalho.

2 Anomalia e Ação Efetiva com Torção

Nesse capítulo, estudaremos alguns conceitos importantes que usaremos no Capítulo 3. Primeiramente vamos apresentar brevemente algumas propriedades da torção, e então vamos estudar como ocorre a interação de campos de matéria com a torção. Após isso, vamos introduzir o método de Schwinger-DeWitt, usado para obtenção da parte divergente da ação efetiva na aproximação de *1-loop*, e então aplicaremos o método para o caso do campo escalar. Por fim, realizaremos a integração da anomalia, obtendo a ação induzida correspondente.

2.1 Torção

Primeiramente, faremos uma revisão de algumas propriedades da torção. Nosso intuito aqui é apenas fazer uma breve apresentação. Para mais detalhes veja o Capítulo 2 da Ref. [40]. Como é bastante conhecido, a derivada parcial de um vetor no âmbito da Relatividade Geral não se transforma como um tensor. Por isso, para definir a derivada covariante de um vetor é necessário introduzir a conexão afim $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$,

$$\nabla_\beta A^\alpha = \partial_\beta A^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} A^\gamma. \quad (2.1)$$

Entretanto, a definição de $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ é ambígua, pois podemos somar a ela qualquer tensor $C^\alpha_{\beta\gamma}$ de tal modo que a Eq. (2.1) continua se transformando como tensor,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \rightarrow \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + C^\alpha_{\beta\gamma}. \quad (2.2)$$

Todavia, podemos restringir a estrutura da conexão afim impondo certas condições, sendo elas:

- Simetria: $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$;
- Metricidade: $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$.

Assumindo tais condições, obtemos uma única solução para $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\gamma \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\beta g_{\lambda\gamma} + \partial_\gamma g_{\lambda\beta} - \partial_\lambda g_{\beta\gamma}). \quad (2.3)$$

A Eq. (2.3) é conhecida por símbolo de Christoffel, é um caso muito importante da conexão afim e depende apenas da métrica. A Eq. (2.3) pode ser usada como um referencial para todas as outras conexões, uma vez que elas podem ser obtidas da Eq. (2.3) adicionando um tensor, como na Eq. (2.2).

Nesta tese, iremos considerar uma escolha particular de $C^\alpha_{\beta\gamma}$ de tal modo que a conexão afim $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ não possua a propriedade de simetria,

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} - \tilde{\Gamma}^\alpha_{\gamma\beta} = T^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0. \quad (2.4)$$

Entretanto, ainda manteremos a condição de metricidade $\tilde{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. O tensor $T^\alpha_{\beta\gamma}$ é chamado de torção.

Usando a condição de metricidade é possível relacionar a conexão afim e a torção de uma forma única,

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + K^\alpha_{\beta\gamma},$$

onde,

$$K^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (T^\alpha_{\beta\gamma} - T^\alpha_{\beta\gamma} - T^\alpha_{\gamma\beta}).$$

Por fim, podemos ainda definir novos campos para escrever a torção como,

$$T_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{3} (T_\beta g_{\alpha\mu} - T_\mu g_{\alpha\beta}) - \frac{1}{6} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} S^\nu + q_{\alpha\beta\mu}, \quad (2.5)$$

onde $T_\beta = T^\alpha_{\beta\alpha}$ é o vetor traço, $S^\nu = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\alpha\beta\mu}$ é um vetor axial, sendo o pseudotraço da torção, e $q^\alpha_{\beta\mu}$ satisfaz às condições $q^\alpha_{\beta\alpha} = 0$ e $\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} q_{\alpha\beta\mu} = 0$.

2.2 Interação da torção com campos de matéria

Para construir as ações de interação de campos de matéria com a torção, vamos impor os princípios de localidade e de covariância. Além disso, vamos requerer que as simetrias da teoria no espaço-tempo plano sejam mantidas quando tratada no espaço-tempo curvo com torção. Por fim, vamos proibir novos parâmetros com dimensão de inverso de massa.

Para o campo escalar temos que a ação no espaço-tempo plano é,

$$S_0 = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \phi \partial_\mu \partial_\nu \phi - V(\phi) \right].$$

Entretanto, se construirmos a ação no espaço-tempo curvo fazendo as substituições das derivadas parciais ∂_μ por derivadas covariantes $\tilde{\nabla}_\mu$, da métrica plana $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$, e do elemento de volume d^4x por $d^4x \sqrt{-g}$, obteremos uma ambiguidade na nova ação, uma vez que,

$$g^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \phi = \square \phi + T^\mu \partial_\mu \phi.$$

Para curar tal ambiguidade, vamos introduzir termos de interação não-mínima na forma,

$$S_0 = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{2} \xi_i P_i \phi^2 \right), \quad (2.6)$$

onde as únicas estruturas não-mínimas possíveis são,

$$P_1 = R, \quad P_2 = \nabla_\alpha T^\alpha, \quad P_3 = T_\alpha T^\alpha, \quad P_4 = S_\alpha S^\alpha, \quad P_5 = q_{\alpha\beta\gamma} q^{\alpha\beta\gamma}, \quad (2.7)$$

e ξ_i ($i = 1,2,3,4,5$) são parâmetros não-mínimos.

Já para o campo de Dirac, o processo mínimo nos fornece,

$$S_{1/2,\min} = \frac{i}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\bar{\psi} \gamma^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha \psi - \tilde{\nabla}_\alpha \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi - 2im \bar{\psi} \psi \right), \quad (2.8)$$

onde $\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a$, com γ^a sendo a matriz γ no espaço plano, e e_a^μ a tetrada definida pelas relações,

$$e_a^\mu \cdot e_{\mu b} = \eta_{ab}, \quad e_a^\mu \cdot e^{\nu a} = g^{\mu\nu}, \quad e_\mu^a \cdot e_{\nu a} = g_{\mu\nu}, \quad e_\mu^a \cdot e^{\mu b} = \eta^{ab}. \quad (2.9)$$

Construindo a derivada covariante do campo de Dirac $\tilde{\nabla}_\mu \psi$ de forma similar à derivada covariante de um tensor, obtemos que,

$$\tilde{\nabla}_\mu \psi = \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \tilde{w}_\mu^{ab} \sigma_{ab} \psi, \quad (2.10)$$

onde,

$$\sigma_{ab} = \frac{i}{2} (\gamma_a \gamma_b - \gamma_b \gamma_a),$$

e a conexão espinorial será,

$$\tilde{w}_{\mu ab} = w_{\mu ab} + \frac{1}{4} K^\alpha_{\lambda\mu} \left(e_a^\lambda e_{b\alpha} - e_b^\lambda e_{a\alpha} \right), \quad (2.11)$$

com a conexão espinorial no espaço-tempo sem torção sendo dada por,

$$w_{\mu ab} = \frac{1}{4} (e_{b\alpha} \partial_\mu e_a^\alpha - e_{a\alpha} \partial_\mu e_b^\alpha) + \frac{1}{4} \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \left(e_{b\alpha} e_a^\lambda - e_{a\alpha} e_b^\lambda \right). \quad (2.12)$$

Substituindo a Eq. (2.10) na Eq. (2.8) e realizando a integração por partes obtemos,

$$\begin{aligned} S_{1/2,\min} &= i \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\psi} \left(\gamma^\alpha \tilde{\nabla}_\alpha - \frac{1}{2} \gamma^\alpha T_\alpha - im \right) \psi \\ &= i \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\psi} \left(\gamma^\alpha \nabla_\alpha - \frac{i}{8} \gamma^5 \gamma^\alpha S_\alpha - im \right) \psi, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde foi usada a representação padrão das matrizes de Dirac, com $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ e $(\gamma^5)^2 = 1$.

Agora, para a interação não-mínima, analisando a covariância, localidade e dimensão das constantes de acoplamento, podemos construir apenas dois termos não-mínimos,

$$S_{1/2,\text{não-min}} = i \int d^4x \sqrt{-g} \bar{\psi} (\gamma^\alpha \nabla_\alpha + \eta_j Q_j - im) \psi, \quad (2.14)$$

com,

$$Q_1 = i\gamma^\mu \gamma^5 S_\mu, \quad Q_2 = i\gamma^\mu T_\mu, \quad (2.15)$$

e dois parâmetros não-mínimos η_1 e η_2 .

2.3 Método de Schwinger-DeWitt

Temos que a ação efetiva pode ser escrita como a soma da ação clássica e a expansão em *loops*, que pode ser associada com \hbar ,

$$\Gamma = S + \bar{\Gamma}, \quad \bar{\Gamma} = \sum_{n_1}^{\infty} \hbar^{n_1} \bar{\Gamma}^{(n_1)}. \quad (2.16)$$

E ainda, a contribuição de 1-*loop* no espaço-tempo curvo é dada por,

$$\bar{\Gamma}^{(1)} = \pm \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H}, \quad (2.17)$$

onde \hat{H} é a forma bilinear da ação clássica, e os sinais + e - correspondem aos campos bosônicos e fermiônicos, respectivamente. O chapéu indica operadores atuando nos campos quânticos do nosso interesse, como escalares, vetores, tensores, espinores.

Nessa seção, faremos uma breve explicação do método de Schwinger-DeWitt, técnica usada para obter a parte divergente da correção de 1-*loop* da ação efetiva (2.17). Para mais detalhes, veja Seção 13.4 da Ref. [41]. Para aplicar tal técnica, suponhamos que o operador \hat{H} possa ser escrito na forma,

$$\hat{H} = \hat{1}\square + 2\hat{h}^\mu \nabla_\mu + \hat{\Pi}, \quad (2.18)$$

onde o operador \hat{H} depende da métrica e outros campos externos através dos operadores \hat{h}^μ e $\hat{\Pi}$.

Então, vamos escrever o operador H na representação de Schwinger,

$$\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \hat{H} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \hat{U}(x, x'; s), \quad (2.19)$$

onde,

$$\hat{U}(x, x'; s) = \hat{U}_0(x, x'; s) \hat{\Omega}(x, x'), \quad (2.20)$$

com,

$$\hat{\Omega}(x, x') = \sum_{n=0}^{\infty} (is)^n \hat{a}_n(x, x'), \quad (2.21)$$

é uma expansão em série de potência com coeficientes $\hat{a}_n(x, x')$, e o fator multiplicativo é definido por,

$$\hat{U}_0(x, x'; s) = -\frac{i}{(4\pi s)^\omega} \mathfrak{D}^{1/2}(x, x') \exp \left[-ism^2 + \frac{i}{2s} \sigma(x, x') \right]. \quad (2.22)$$

Nessa expressão, ω é um parâmetro da regularização dimensional, $\sigma(x, x')$ é a função mundo e $\mathfrak{D}^{1/2}(x, x')$ o determinante de Van Vleck-Morette,

$$\mathfrak{D}^{1/2}(x, x') = \left| \det \left(-\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) \right|. \quad (2.23)$$

Agora, usamos que o operador $\hat{U}(x, x'; s)$ satisfaz a equação de Schrödinger,

$$i \frac{\partial \hat{U}(x, x'; s)}{\partial s} = -\hat{H}_x \hat{U}(x, x'; s). \quad (2.24)$$

Após uma longa sequência de manipulações algébricas, obtendo inúmeras relações envolvendo a função mundo $\sigma(x, x')$, e usando que a Eq. (2.24) deve ser satisfeita para o operador dado na Eq. (2.18), é possível obter que [42],

$$\hat{a}_0 \Big| = \hat{a}_0(x, x) = \hat{1}, \quad (2.25)$$

$$\hat{a}_1 \Big| = \hat{a}_1(x, x) \equiv \hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6} R - \nabla_\mu \hat{h}^\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}^\mu, \quad (2.26)$$

$$\hat{a}_2 \Big| = \hat{a}_2(x, x) = \frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\mu\nu}^2 + \square R) + \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{6} (\square \hat{P}) + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2, \quad (2.27)$$

onde,

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} + (\nabla_\nu \hat{h}_\mu - \nabla_\mu \hat{h}_\nu) + (\hat{h}_\nu \hat{h}_\mu - \hat{h}_\mu \hat{h}_\nu), \quad (2.28)$$

com,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \hat{a}_0 = \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} \hat{a}_0.$$

Para entender a importância desse resultado, retornemos à Eq. (2.19). Primeiro, note que o limite superior na integração sobre o tempo próprio s corresponde ao regime infravermelho. O termo de massa na representação (2.22) torna esse limite convergente. Já o limite inferior corresponde ao regime UV, e usando a regularização via *cut-off* nesse limite é possível mostrar que o coeficiente \hat{a}_0 está relacionado com a divergência quártica, \hat{a}_1 com divergência quadrática e \hat{a}_2 com divergência logarítmica. Entretanto, apenas a divergência logarítmica é universal, ou seja, não depende do método de renormalização. Finalmente, podemos concluir que para obter a parte divergente da contribuição de 1-loop na ação efetiva, precisamos tomar,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\text{div}}^{(1)} &= -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \text{str} \hat{a}_2(x, x) \\ &= -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \text{str} \left[\frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\mu\nu}^2 + \square R) + \frac{1}{2} \hat{P}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} (\square \hat{P}) + \frac{1}{12} \hat{S}_{\mu\nu}^2 \right], \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde $\epsilon = (4\pi)^2 (n-4)$ é o parâmetro da regularização dimensional, e μ um parâmetro dimensional cuja origem vem do uso da regularização dimensional. A operação *str* consiste em tomar o traço do operador em que atua, e multiplicar por -1 no caso de campos fermiônicos.

Para ilustrar o uso da Eq. (2.29), vamos calcular a divergência para a interação do campo escalar com a torção. O operador \hat{H}_{sc} será dado por,

$$\hat{H}_{\text{sc}} = -\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S_0}{\delta \phi^2} = \square - m^2 - \xi_i P_i, \quad (2.30)$$

onde S_0 está dado na Eq. (2.6). Comparando as Eq. (2.18) e (2.30) é fácil ver que,

$$\hat{\Pi} = -m^2 - \xi_i P_i, \quad \hat{h}^\alpha = 0. \quad (2.31)$$

Portanto, os elementos da técnica de Schwinger-DeWitt serão dados por,

$$\hat{P} = \hat{\Pi} + \frac{\hat{1}}{6}R = \frac{\hat{1}}{6}R - m^2 - \xi_i P_i, \quad (2.32)$$

$$\hat{S}_{\mu\nu} = \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.33)$$

Finalmente, a Eq. (2.29) para esse caso será,

$$\bar{\Gamma}_{\text{div,sc}}^{(1)} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\mu\nu}^2 + \square R) + \frac{1}{2} \hat{P}^2 + \frac{1}{6} (\square \hat{P}) \right]. \quad (2.34)$$

2.4 Integração da anomalia

Nessa seção vamos ilustrar o método de obtenção da ação induzida Γ_{ind} pela anomalia. Nosso objetivo é determinar a solução de,

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma_{\text{ind}}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} e^{-4\sigma} \frac{\delta \Gamma_{\text{ind}}}{\delta \sigma} \Big|_{\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \sigma \rightarrow 0}, \quad (2.35)$$

onde $\sigma = \sigma(x)$ é o fator conforme. Por simplicidade, usaremos a notação $\Big|_{\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \sigma \rightarrow 0} \equiv \Big|_{\bar{g}_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \sigma \rightarrow 0}$.

Como exemplo, vamos realizar os cálculos para a anomalia

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = -\left(wC^2 + bE_4 + c\square R \right) = -wC^2 - b \left(E - \frac{2}{3} \square R \right) - \frac{3c + 2b}{3} \square R, \quad (2.36)$$

onde a mudança foi feita para se obter uma forma simples para o termo com E_4 .

Vamos usar as seguintes relações (para mais detalhes veja o capítulo 3 da Ref. [43]),

$$\sqrt{-g}C^2 = \sqrt{-\bar{g}}\bar{C}^2, \quad (2.37)$$

$$\sqrt{-g} \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right) = \sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{E}_4 - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} + 4\bar{\Delta}_4 \sigma \right), \quad (2.38)$$

onde Δ_4 é um operador de quarta ordem conformalmente invariante quando atua num escalar invariante conforme [10],

$$\Delta_4 = \square^2 + 2R^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{2}{3} R \square + \frac{1}{3} (\nabla_\mu R) \nabla^\mu, \quad (2.39)$$

que tem a característica de ser um operador Hermitiano,

$$\int d^4 x \sqrt{-g} \varphi \Delta_4 \chi = \int d^4 x \sqrt{-g} \chi \Delta_4 \varphi.$$

Vamos introduzir também a função de Green para esse operador,

$$\left(\sqrt{-g} \Delta_4 \right)_x G(x, y) = \delta(x, y). \quad (2.40)$$

Desse modo, temos que $G(x,y)$ não depende de σ .

Dessa forma, temos que, usando as Eqs. (2.37) e (2.38),

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \left\{ \int d^4y d^4z (\sqrt{-g}C^2)_y G(y,z) \left[\sqrt{-g} \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right) \right]_z \right\} \\
 &= \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \left\{ \int d^4y d^4z (\sqrt{-\bar{g}}\bar{C}^2)_y \bar{G}(y,z) \left[\sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{E}_4 - \frac{2}{3} \square \bar{R} + 4\bar{\Delta}_4 \sigma \right) \right]_z \right\} \\
 &= 4 \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \left[\int d^4y d^4z (\sqrt{-\bar{g}}\bar{C}^2)_y (\sqrt{-\bar{g}}\bar{\Delta}_4)_z \bar{G}(y,z) \sigma(z) \right] \\
 &= 4 \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \left[\int d^4y d^4z (\sqrt{-\bar{g}}\bar{C}^2)_y \delta(y,z) \sigma(z) \right] \\
 &= 4 \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \left[\int d^4y \sqrt{-\bar{g}}\bar{C}^2 \sigma \right] = 4 \left[\int d^4y \sqrt{-\bar{g}}\bar{C}^2 \delta(x,y) \right] = 4\sqrt{-\bar{g}}\bar{C}^2. \tag{2.41}
 \end{aligned}$$

Então, é fácil ver que o termo na ação induzida que é responsável por gerar $T_w = -wC^2$ é dado por,

$$\Gamma_w = \frac{w}{4} \int d^4x d^4y (\sqrt{-g}C^2)_x G(x,y) \left[\sqrt{-g} \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right) \right]_y. \tag{2.42}$$

Note que o processo feito para obter esse termo da ação induzida pode ser reproduzido para qualquer quantidade $Y(g)$ que seja invariante conforme, como quando formos calcular a ação induzida para a anomalia de campos de matéria interagindo com a torção.

Similarmente, podemos encontrar o termo que produz $T_b = -b \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right)$,

$$\Gamma_b = \frac{b}{8} \int d^4x d^4y \left[\sqrt{-g} \left(E - \frac{2}{3} \square R \right) \right]_x G(x,y) \left[\sqrt{-g} \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right) \right]_y. \tag{2.43}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
-\frac{e^{-4\sigma(x)}}{\sqrt{-\bar{g}(x)}} \frac{\delta \Gamma_b}{\delta \sigma(x)} \Big| &= -\frac{b}{8} \frac{e^{-4\sigma(x)}}{\sqrt{-\bar{g}(x)}} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \left\{ \int d^4y d^4z \left[\sqrt{-g} \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right) \right]_y \right. \\
&\quad \left. \times G(y,z) \left[\sqrt{-g} \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right) \right]_z \right\} \Big| \\
&= -\frac{b}{8} \frac{e^{-4\sigma(x)}}{\sqrt{-\bar{g}(x)}} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \left\{ \int d^4y d^4z \left[\sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{E}_4 - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} + 4\bar{\Delta}_4 \sigma \right) \right]_y \right. \\
&\quad \left. \times \bar{G}(y,z) \left[\sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{E}_4 - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} + 4\bar{\Delta}_4 \sigma \right) \right]_z \right\} \Big| \\
&= -\frac{b}{8} \frac{e^{-4\sigma(x)}}{\sqrt{-\bar{g}(x)}} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \left\{ \int d^4y d^4z \left[\sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{E}_4 - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} \right) \right]_y \right. \\
&\quad \times \bar{G}(y,z) \left[\sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{E}_4 - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} \right) \right]_z \\
&\quad + \int d^4y d^4z \left[\sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{E}_4 - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} \right) \right]_y \bar{G}(y,z) (4\sqrt{-\bar{g}} \bar{\Delta}_4 \sigma)_z \\
&\quad + \int d^4y d^4z (4\sqrt{-\bar{g}} \bar{\Delta}_4 \sigma)_y \bar{G}(y,z) \left[\sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{E}_4 - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} \right) \right]_z \\
&\quad \left. + \int d^4y d^4z (4\sqrt{-\bar{g}} \bar{\Delta}_4 \sigma)_y \bar{G}(y,z) (4\sqrt{-\bar{g}} \bar{\Delta}_4 \sigma)_z \right\} \Big| \\
&= -\frac{b}{8} \frac{e^{-4\sigma(x)}}{\sqrt{-\bar{g}(x)}} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \left\{ 4 \int d^4y \left[\sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{E}_4 - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} \right) \right] \sigma \right. \\
&\quad \left. + 4 \int d^4z \sigma \left[\sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{E}_4 - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} \right) \right] \right\} \Big| \\
&= -b \frac{e^{-4\sigma(x)}}{\sqrt{-\bar{g}(x)}} \int d^4y \left[\sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{E}_4 - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} \right) \right]_y \delta(x,y) \Big| \\
&= -b e^{-4\sigma} \left(\bar{E}_4 - \frac{2}{3} \bar{\square} \bar{R} \right) \Big| = -b \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right).
\end{aligned}$$

Finalmente, mantidos os termos em primeira ordem em σ ,

$$\begin{aligned}
-\frac{e^{-4\sigma(x)}}{\sqrt{-\bar{g}(x)}} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \int d^4y \sqrt{-g} R^2 \Big| &= -\frac{e^{-4\sigma(x)}}{\sqrt{-\bar{g}(x)}} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \int d^4y \sqrt{-\bar{g}} \left[\bar{R}^2 - 12\bar{R}(\bar{\square}\sigma) \right] \Big| \\
&= -\frac{e^{-4\sigma(x)}}{\sqrt{-\bar{g}(x)}} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \int d^4y \sqrt{-\bar{g}} \left[-12(\bar{\square}\bar{R})\sigma \right] \Big| = 12(\square R).
\end{aligned}$$

Logo, para produzir o último termo da Eq. (2.36), precisamos introduzir a ação local,

$$\Gamma_c = -\frac{3c+2b}{36} \int d^4x \sqrt{-g} R^2. \quad (2.44)$$

Finalmente, somando os termos (2.42), (2.43) e (2.44), obtemos,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{ind}} = & S_c(g) + \frac{w}{4} \int_x \int_y C^2(x) G(x,y) \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right)_y \\ & + \frac{b}{8} \int_x \int_y \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right)_x G(x,y) \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right)_y - \frac{3c + 2b}{36} \int_x R^2(x), \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde o termo $S_c(g)$ é um funcional arbitrário que é invariante conforme que tem o papel de uma constante de integração na Eq. (2.35).

3 Ação Efetiva na Presença de Torção

Nesse trabalho [38], estamos interessados em estudar a interação de campos de matéria interagindo com a torção. Primeiramente, na seção 3.1 usamos o método de Schwinger-DeWitt para obter as divergências de 1-*loop* para um determinado operador conjugado, recuperando os resultados já conhecidos na literatura [40]. Já na seção 3.2 refizemos o cálculo da divergência porém usando um novo operador conjugado, sendo independente da torção, e ao comparar os resultados podemos notar que os coeficientes dos termos dados por derivadas totais não coincidiram, obtendo assim um novo exemplo de anomalia multiplicativa. E por fim, na seção 3.3 usamos a anomalia para obter a solução para a ação induzida.

Antes de prosseguir, estaremos estudando apenas a contribuição de S_μ na ação efetiva, por isso, reescreveremos a contribuição do campo escalar, dada na Eq. (2.34), como,

$$\bar{\Gamma}_{\text{div,sc}}^{(1)} = -\frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{120} C^2 - \frac{1}{360} E_4 + \frac{1}{180} (\square R) + \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{6} (\square P) \right], \quad (3.1)$$

onde,

$$P = \left(\frac{1}{6} - \xi_1 \right) R - \xi_5 S^2 - m^2.$$

3.1 Primeiro operador conjugado

Nosso objetivo aqui é calcular as divergências de 1-*loop* para a teoria de interação de um campo de Dirac com a torção. Desse modo precisamos avaliar $i \text{Tr} \ln \hat{H}$ onde, da Eq. (2.14),

$$\hat{H} = \gamma^\mu \nabla_\mu - i\gamma^\mu \gamma^5 S_\mu + im. \quad (3.2)$$

Aqui, por simplicidade estamos tomando $\eta_1 = 1$ e $\eta_2 = 0$. A interação do campo de Dirac com o traço T_μ da torção é similar à interação com o campo vetorial, por isso não trataremos esse caso neste trabalho.

Para efetuar este cálculo, temos que multiplicar a Eq. (3.2) por um operador conjugado, de tal modo que o produto esteja na forma de um operador mínimo dado na Eq. (2.18), para que assim possamos aplicar o método de Schwinger-DeWitt. Para escolher tal operador conjugado exigiremos que a simetria quirial,

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha\gamma^5}, \quad \psi \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5} \psi, \quad S_\mu \rightarrow S_\mu + \partial_\mu \alpha, \quad (3.3)$$

onde $\alpha = \alpha(x)$ é um parâmetro escalar da transformação, seja respeitada no caso de massa nula. Portanto, o operador conjugado deve conter a estrutura $\gamma^\mu (\nabla_\mu - i\gamma^5 S_\mu)$ ou

então deverá ser independente da torção. Aqui trataremos ambos os casos e então iremos comparar os resultados.

Com base na argumentação acima, vamos tomar primeiramente o operador conjugado da forma,

$$\hat{H}_1 = \gamma^\nu \nabla_\nu - i\gamma^\nu \gamma^5 S_\nu - im. \quad (3.4)$$

Como a mudança de sinal da massa não altera o resultado, temos que $\text{Tr} \ln \hat{H} = \text{Tr} \ln \hat{H}_1$, logo, temos a relação,

$$-i \text{Tr} \ln \hat{H} = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln (\hat{H} \hat{H}_1). \quad (3.5)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \hat{H} \hat{H}_1 &= (\gamma^\mu \nabla_\mu - i\gamma^\mu \gamma^5 S_\mu + im) (\gamma^\nu \nabla_\nu - i\gamma^\nu \gamma^5 S_\nu - im) \\ &= \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu - i\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \nabla_\mu S_\nu - im\gamma^\mu \nabla_\mu - i\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu S_\mu \nabla_\nu - \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^5 S_\mu S_\nu \\ &\quad - m\gamma^\mu \gamma^5 S_\mu - im\gamma^\mu \nabla_\mu - m\gamma^\mu \gamma^5 S_\mu + m^2 \\ &= \square - \frac{1}{4}R - i\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\mu (\nabla_\nu S_\mu) - i\gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\mu S_\mu \nabla_\nu + i\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu S_\mu \nabla_\nu \\ &\quad + \gamma^\mu \gamma^\nu S_\mu S_\nu + m^2 \\ &= \square + m^2 - \frac{1}{4}R - i\gamma^5 (\nabla_\mu S^\mu) - \frac{i}{2} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu S_{\mu\nu} \\ &\quad + i\gamma^5 (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) S_\mu \nabla_\nu + S^2 \\ &= \square + 2\hat{h}_1^\alpha \nabla_\alpha + \hat{\Pi}_1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde usamos que, da Eq. (12.68) da Ref. [41],

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu &= \square - \frac{1}{4}R, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu S_\mu S_\nu &= \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) S_\mu S_\nu = g^{\mu\nu} S_\mu S_\nu = S^2, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu (\nabla_\mu S_\nu) &= \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) (\nabla_\mu S_\nu) + \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) (\nabla_\mu S_\nu) \\ &= (\nabla_\mu S^\mu) + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu (\nabla_\mu S_\nu - \nabla_\nu S_\mu) = (\nabla_\mu S^\mu) + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu S_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

onde definimos,

$$S_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu S_\nu - \nabla_\nu S_\mu.$$

Os operadores \hat{h}^α e $\hat{\Pi}$ da Eq. (3.6) são dados por,

$$\hat{h}_1^\alpha = \frac{i}{2} \gamma^5 S_\lambda (\gamma^\lambda \gamma^\alpha - \gamma^\alpha \gamma^\lambda), \quad (3.7)$$

$$\hat{\Pi}_1 = m^2 - \frac{1}{4}R + S^2 - i\gamma^5 (\nabla_\mu S^\mu) - \frac{i}{2} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu S_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Agora, vamos precisar das derivadas do operador \hat{h}^α ,

$$\nabla_\nu \hat{h}_{1\mu} = \frac{i}{2} \gamma^5 (\nabla_\nu S^\lambda) (\gamma_\lambda \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\lambda), \quad (3.9)$$

$$\nabla_\mu \hat{h}_1^\mu = \frac{i}{2} \gamma^5 (\nabla_\mu S_\lambda) (\gamma^\lambda \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\lambda) = -\frac{i}{2} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu S_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

$$\nabla_\nu \hat{h}_{1\mu} - \nabla_\mu \hat{h}_{1\nu} = \frac{i}{2} \gamma^5 (\nabla_\nu S^\lambda) (\gamma_\lambda \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\lambda) - \frac{i}{2} \gamma^5 (\nabla_\mu S^\lambda) (\gamma_\lambda \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\lambda), \quad (3.11)$$

e do produto,

$$\begin{aligned} \hat{h}_{1\nu} \hat{h}_{1\mu} &= -\frac{1}{4} \gamma^5 S^\lambda (\gamma_\lambda \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\lambda) \gamma^5 S^\tau (\gamma_\tau \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\tau) \\ &= -\frac{1}{4} S^\lambda S^\tau (\gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\mu - \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\tau - \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\tau \gamma_\mu + \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\tau) \\ &= -\frac{1}{4} S^\lambda S^\tau (2g_{\lambda\nu} \gamma_\tau \gamma_\mu - \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\tau \gamma_\mu - 2g_{\mu\tau} \gamma_\lambda \gamma_\nu + \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\mu - \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\tau \gamma_\mu \\ &\quad + 2g_{\mu\tau} \gamma_\nu \gamma_\lambda - \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\tau \gamma_\mu) \\ &= -\frac{1}{4} S^\lambda S^\tau (-3\gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\tau \gamma_\mu + 2g_{\lambda\nu} \gamma_\tau \gamma_\mu - 2g_{\mu\tau} \gamma_\lambda \gamma_\nu + 2g_{\lambda\nu} \gamma_\tau \gamma_\mu \\ &\quad - \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\tau \gamma_\mu + 2g_{\mu\tau} \gamma_\nu \gamma_\lambda) \\ &= -\frac{1}{4} S^\lambda S^\tau (4g_{\lambda\nu} \gamma_\tau \gamma_\mu - 2g_{\mu\tau} \gamma_\lambda \gamma_\nu + 2g_{\mu\tau} \gamma_\nu \gamma_\lambda - 4\gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\tau \gamma_\mu) \\ &= -S_\nu S^\lambda \gamma_\lambda \gamma_\mu + \frac{1}{2} S_\mu S^\lambda \gamma_\lambda \gamma_\nu - \frac{1}{2} S_\mu S^\lambda \gamma_\nu \gamma_\lambda + S^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \\ &= -2S_\nu S^\lambda g_{\lambda\mu} + S_\nu S^\lambda \gamma_\mu \gamma_\lambda + S_\mu S^\lambda g_{\lambda\nu} - S_\mu S^\lambda \gamma_\nu \gamma_\lambda + S^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \\ &= -S_\mu S^\lambda \gamma_\nu \gamma_\lambda + S_\nu S^\lambda \gamma_\mu \gamma_\lambda + S^2 \gamma_\nu \gamma_\mu - S_\mu S_\nu, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\hat{h}_{1\mu} \hat{h}_1^\mu = 3S^2, \quad (3.13)$$

$$\hat{h}_{1\nu} \hat{h}_{1\mu} - \hat{h}_{1\mu} \hat{h}_{1\nu} = -S^2 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) - 2S^\lambda (S_\mu \gamma_\nu - S_\nu \gamma_\mu) \gamma_\lambda. \quad (3.14)$$

Portanto, o operador \hat{P}_1 obtido considerando \hat{H}_1 dado pela Eq. (3.4), é dado por,

$$\begin{aligned} \hat{P}_1 &= \hat{\Pi}_1 + \frac{1}{6} R - \nabla_\mu \hat{h}_1^\mu - \hat{h}_{1\mu} \hat{h}_1^\mu \\ &= m^2 - \frac{1}{4} R + S^2 - i\gamma^5 (\nabla_\mu S^\mu) - \frac{i}{2} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu S_{\mu\nu} + \frac{1}{6} R + \frac{i}{2} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu S_{\mu\nu} - 3S^2 \\ &= m^2 - \frac{1}{12} R - 2S^2 - i\gamma^5 (\nabla_\mu S^\mu). \end{aligned} \quad (3.15)$$

E para o operador $\hat{S}_{1,\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} \hat{S}_{1,\mu\nu} &= [\nabla_\nu, \nabla_\mu] + (\nabla_\nu \hat{h}_{1\mu} - \nabla_\mu \hat{h}_{1\nu}) + (\hat{h}_{1\nu} \hat{h}_{1\mu} - \hat{h}_{1\mu} \hat{h}_{1\nu}) \\ &= -\frac{1}{4} R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau - S^2 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) - 2S^\lambda (S_\mu \gamma_\nu - S_\nu \gamma_\mu) \gamma_\lambda \\ &\quad + \frac{i}{2} \gamma^5 [(\nabla_\nu S^\lambda) (\gamma_\lambda \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\lambda) - (\nabla_\mu S^\lambda) (\gamma_\lambda \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\lambda)] \\ &= A_{1,\mu\nu} + B_{1,\mu\nu} + C_{1,\mu\nu} + D_{1,\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde usamos que $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \frac{1}{4} R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau$ (veja Eq. (12.65) da Ref. [41]). E também fizemos as identificações,

$$\begin{aligned} A_{1,\mu\nu} &= -\frac{1}{4} R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau, \\ B_{1,\mu\nu} &= -S^2 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \\ C_{1,\mu\nu} &= -2S^\lambda (S_\mu \gamma_\nu - S_\nu \gamma_\mu) \gamma_\lambda, \\ D_{1,\mu\nu} &= \frac{i}{2} \gamma^5 [(\nabla_\nu S^\lambda) (\gamma_\lambda \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\lambda) - (\nabla_\mu S^\lambda) (\gamma_\lambda \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\lambda)]. \end{aligned}$$

Como mostrado na Eq. (2.29), precisaremos tomar os traços das nossas expressões. Primeiramente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \text{tr} (\square \hat{P}_1) &= \frac{1}{6} \text{tr} \left[-\frac{1}{12} \square R - 2 (\square S^2) - i \gamma^5 (\square \nabla_\mu S^\mu) \right] \\ &= -\frac{1}{72} (\square R) \text{tr} \hat{1} - \frac{1}{3} (\square S^2) \text{tr} \hat{1} - i (\square \nabla_\mu S^\mu) \text{tr} \gamma^5 \\ &= -\frac{1}{18} \square R - \frac{4}{3} (\square S^2), \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde usamos que $\text{tr} \gamma^5 = 0$ e $\text{tr} \hat{1} = 4$. E para o termo \hat{P}_1^2 ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr} \hat{P}_1^2 &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[m^4 + \frac{1}{144} R^2 + 4S^4 - (\nabla_\mu S^\mu)^2 - \frac{1}{6} m^2 R - 4m^2 S^2 + \frac{1}{3} R S^2 \right] \\ &= 2m^4 + \frac{1}{72} R^2 + 8S^4 - 2 (\nabla_\mu S^\mu)^2 - \frac{1}{3} m^2 R - 8m^2 S^2 + \frac{2}{3} R S^2. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Vamos obter os resultados para calcular $\frac{1}{12} \text{tr} \hat{S}_{1,\mu\nu}^2$, para isso,

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \text{tr} (A_{1,\mu\nu}^2) &= \frac{1}{12} \text{tr} \left(\frac{1}{16} R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau R^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta \right) \\ &= \frac{1}{192} R_{\mu\nu\lambda\tau} R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} 4 (g^{\lambda\tau} g^{\alpha\beta} - g^{\lambda\alpha} g^{\tau\beta} + g^{\lambda\beta} g^{\tau\alpha}) = \frac{1}{48} (-2R_{\mu\nu\alpha\beta}^2) \\ &= -\frac{1}{24} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \text{tr} (B_{1,\mu\nu}^2) &= \frac{1}{12} \text{tr} [S^4 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) 2\gamma^\mu \gamma^\nu] \\ &= \frac{1}{6} S^4 \text{tr} (2g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu - 16) = \frac{1}{6} S^4 \text{tr} (-24) \\ &= -16S^4, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \text{tr} (C_{1,\mu\nu}^2) &= \frac{1}{12} \text{tr} [8S^\lambda S^\tau (S_\mu \gamma_\nu - S_\nu \gamma_\mu) \gamma_\lambda S^\mu \gamma^\nu \gamma_\tau] \\ &= \frac{2}{3} S^\lambda S^\tau \text{tr} (S^2 \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma^\nu \gamma_\tau - S^\mu S^\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\tau) \\ &= -\frac{4}{3} S^2 S^\lambda S^\tau \text{tr} (\gamma_\lambda \gamma_\tau) - \frac{8}{3} S^\lambda S^\tau S^\mu S^\nu (g_{\mu\lambda} g_{\nu\tau} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\tau} + g_{\mu\tau} g_{\lambda\nu}) \\ &= -8S^4, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12} \operatorname{tr} (D_{1,\mu\nu}^2) &= \frac{1}{12} \operatorname{tr} \left\{ -\frac{\gamma^5}{4} \left[(\nabla_\nu S^\lambda) (\gamma_\lambda \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\lambda) - (\nabla_\mu S^\lambda) (\gamma_\lambda \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\lambda) \right] \right. \\
&\quad \left. \times 2\gamma^5 (\nabla^\nu S^\tau) (\gamma_\tau \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_\tau) \right\} \\
&= -\frac{1}{24} \operatorname{tr} \left[(\nabla_\nu S^\lambda) (\nabla^\nu S^\tau) (-2\gamma_\lambda \gamma_\tau - 4\gamma_\lambda \gamma_\tau - 4g_{\tau\lambda} - 2\gamma_\lambda \gamma_\tau) \right] \\
&\quad + \frac{1}{24} \operatorname{tr} \left[(\nabla^\mu S^\lambda) (\nabla^\nu S^\tau) (\gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\mu - \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\tau \right. \\
&\quad \left. - \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\tau \gamma_\mu + \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\tau) \right] \\
&= -\frac{1}{24} (\nabla_\nu S^\lambda) (\nabla^\nu S^\tau) (-32g_{\lambda\tau} - 16g_{\lambda\tau}) \\
&\quad + \frac{1}{24} (\nabla^\mu S^\lambda) (\nabla^\nu S^\tau) [8(g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\tau}) - 8(g_{\lambda\tau}g_{\mu\nu} - g_{\tau\nu}g_{\lambda\mu})] \\
&= \frac{4}{3} (\nabla_\mu S_\nu)^2 + \frac{2}{3} (\nabla_\mu S^\mu)^2, \tag{3.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \operatorname{tr} (A_{1,\mu\nu} B_1^{\mu\nu}) &= \frac{1}{6} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{4} R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau 2S^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \right) \\
&= \frac{1}{12} S^2 R_{\mu\nu\lambda\tau} 4 (g^{\lambda\tau} g^{\mu\nu} - g^{\lambda\mu} g^{\tau\nu} + g^{\lambda\nu} g^{\tau\mu}) = -\frac{2}{3} S^2 R, \tag{3.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \operatorname{tr} (A_{1,\mu\nu} C_1^{\mu\nu}) &= \frac{1}{6} \operatorname{tr} \left(\frac{1}{4} R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau 4S_\rho S^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \right) \\
&= \frac{1}{6} R_{\mu\nu\lambda\tau} S_\rho S^\mu 4 (g^{\lambda\tau} g^{\nu\rho} - g^{\lambda\nu} g^{\tau\rho} + g^{\lambda\rho} g^{\tau\nu}) = \frac{4}{3} R_{\mu\nu} S^\mu S^\nu, \tag{3.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \operatorname{tr} (A_{1,\mu\nu} D_1^{\mu\nu}) &= \frac{1}{6} \operatorname{tr} \left[-\frac{1}{4} R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau i\gamma^5 (\nabla^\nu S_\rho) (\gamma^\rho \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\rho) \right] \\
&= -\frac{i}{24} R_{\mu\nu\lambda\tau} (\nabla^\nu S_\rho) \operatorname{tr} (\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\tau \gamma^\rho \gamma^\mu - \gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\tau \gamma^\mu \gamma^\rho) \\
&= -\frac{i}{24} R_{\mu\nu\lambda\tau} (\nabla^\nu S_\rho) (4i\epsilon^{\lambda\tau\rho\mu} - 4i\epsilon^{\lambda\tau\mu\rho}) \\
&= \frac{1}{3} R_{\mu\nu\lambda\tau} (\nabla^\nu S_\rho) \epsilon^{\lambda\tau\rho\mu} \\
&= -\frac{1}{3} \nabla_\nu (R^\nu{}_{\mu\lambda\tau} S_\rho \epsilon^{\lambda\tau\rho\mu}) + \frac{1}{3} S_\rho \epsilon^{\lambda\tau\rho\mu} (\nabla_\nu R^\nu{}_{\mu\lambda\tau}) \\
&= -\frac{1}{3} \nabla_\nu (R^\nu{}_{\mu\lambda\tau} S_\rho \epsilon^{\lambda\tau\rho\mu}) + \frac{1}{3} S_\rho \epsilon^{\lambda\tau\rho\mu} (\nabla_\lambda R_{\mu\tau} - \nabla_\tau R_{\mu\lambda}) \\
&= -\frac{1}{3} \nabla_\nu (C^\nu{}_{\mu\lambda\tau} S_\rho \epsilon^{\lambda\tau\rho\mu}) = -\frac{1}{3} \nabla_\nu B^\nu, \tag{3.25}
\end{aligned}$$

onde,

$$B^\nu = R^\nu{}_{\mu\lambda\tau} S_\rho \epsilon^{\lambda\tau\rho\mu} = C^\nu{}_{\mu\lambda\tau} S_\rho \epsilon^{\lambda\tau\rho\mu}. \tag{3.26}$$

Entretanto, é fácil ver que $B^\nu = 0$. Para verificar, tomemos por exemplo $\nu = 0$ e $\rho = 1$ na Eq. (3.26),

$$\begin{aligned}
R^0{}_{\mu\lambda\tau} \epsilon^{\lambda\tau 1\mu} &= 2R^0{}_{023} \epsilon^{2310} + 2R^0{}_{203} \epsilon^{0312} + 2R^0{}_{302} \epsilon^{0213} \\
&= 2(-R^0{}_{023} + R^0{}_{203} - R^0{}_{302}) = -2(R^0{}_{023} + R^0{}_{230} + R^0{}_{302}) = 0,
\end{aligned}$$

onde usamos a fórmula de permutação (veja Eq. (14.55) da Ref. [44]),

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0.$$

Agora continuando com os cálculos dos termos de $\frac{1}{12} \text{tr} \hat{S}_{1,\mu\nu}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \text{tr} (B_{1,\mu\nu} C_1^{\mu\nu}) &= \frac{1}{6} \text{tr} [S^2 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) 4S^\lambda S^\mu \gamma^\nu \gamma_\lambda] \\ &= \frac{2}{3} S^2 S^\lambda S^\mu \text{tr} (4\gamma_\mu \gamma_\lambda - 2g_{\mu\nu} \gamma^\nu \gamma_\lambda + \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\nu \gamma_\lambda) \\ &= 16S^4, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \text{tr} (B_{1,\mu\nu} D_1^{\mu\nu}) &= \frac{1}{6} \text{tr} [-S^2 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) i\gamma^5 (\nabla^\nu S_\lambda) (\gamma^\lambda \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\lambda)] \\ &= -\frac{i}{6} S^2 (\nabla^\nu S^\lambda) \text{tr} (\gamma^5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma^\mu - \gamma^5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma_\lambda - \gamma^5 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma^\mu \\ &\quad + \gamma^5 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma_\lambda) = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde usamos que $\text{tr} (\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0$. E,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \text{tr} (C_{1,\mu\nu} D_1^{\mu\nu}) &= \frac{1}{6} \text{tr} [-2S^\lambda (S_\mu \gamma_\nu - S_\nu \gamma_\mu) \gamma_\lambda i\gamma^5 (\nabla^\nu S^\rho) (\gamma_\rho \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_\rho)] \\ &= -\frac{i}{3} S^\lambda (\nabla^\nu S^\rho) \text{tr} (S^\mu \gamma^5 \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho \gamma_\mu - S^\mu \gamma^5 \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\rho \\ &\quad - S_\nu \gamma^5 \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\rho \gamma^\mu + S_\nu \gamma^5 \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma^\mu \gamma_\rho) \\ &= -\frac{i}{3} (\nabla^\nu S^\rho) S^\lambda S^\mu 4i\epsilon_{\nu\lambda\rho\mu} + \frac{i}{3} (\nabla^\nu S^\rho) S^\lambda S^\mu 4i\epsilon_{\nu\lambda\mu\rho} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde usamos que, da Eq. (A.14), $\text{tr} (\gamma^5 \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu) = 4i\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ e $S^\lambda S^\mu \epsilon_{\nu\lambda\rho\mu} = 0$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \text{tr} (\hat{S}_{1,\mu\nu}^2) &= \frac{1}{12} \text{tr} (A_{1,\mu\nu}^2) + \frac{1}{12} \text{tr} (B_{1,\mu\nu}^2) + \frac{1}{12} \text{tr} (C_{1,\mu\nu}^2) + \frac{1}{12} \text{tr} (D_{1,\mu\nu}^2) \\ &\quad + \frac{1}{6} \text{tr} (A_{1,\mu\nu} B_1^{\mu\nu}) + \frac{1}{6} \text{tr} (A_{1,\mu\nu} C_1^{\mu\nu}) + \frac{1}{6} \text{tr} (A_{1,\mu\nu} D_1^{\mu\nu}) \\ &\quad + \frac{1}{6} \text{tr} (B_{1,\mu\nu} C_1^{\mu\nu}) + \frac{1}{6} \text{tr} (B_{1,\mu\nu} D_1^{\mu\nu}) + \frac{1}{6} \text{tr} (C_{1,\mu\nu} D_1^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{24} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - 8S^4 + \frac{4}{3} (\nabla_\mu S_\nu)^2 + \frac{2}{3} (\nabla_\mu S^\mu)^2 \\ &\quad - \frac{2}{3} S^2 R + \frac{4}{3} R_{\mu\nu} S^\mu S^\nu. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\text{tr} \left[\frac{1}{6} (\square \hat{P}_1) + \frac{1}{2} \hat{P}_1^2 + \frac{1}{12} \hat{S}_{1,\mu\nu}^2 \right] &= 2m^4 - \frac{1}{3} m^2 R - 8m^2 S^2 - \frac{1}{24} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + \frac{1}{72} R^2 \\
&\quad - \frac{1}{18} \square R + \frac{4}{3} (\nabla_\mu S_\nu)^2 - \frac{4}{3} (\nabla_\mu S^\mu)^2 \\
&\quad + \frac{4}{3} R_{\mu\nu} S^\mu S^\nu - \frac{4}{3} (\square S^2) \\
&= 2m^4 - \frac{1}{3} m^2 R - 8m^2 S^2 - \frac{1}{24} R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 + \frac{1}{72} R^2 \\
&\quad - \frac{1}{18} \square R + \frac{2}{3} S_{\mu\nu}^2 - \frac{4}{3} \nabla_\nu (S^\nu \nabla_\mu S^\mu - S^\mu \nabla_\mu S^\nu) \\
&\quad - \frac{4}{3} (\square S^2), \tag{3.31}
\end{aligned}$$

onde usamos que

$$\begin{aligned}
S_{\mu\nu}^2 &= 2 (\nabla_\mu S_\nu - \nabla_\nu S_\mu) \nabla^\mu S^\nu = 2 (\nabla_\mu S_\nu)^2 - 2 \nabla_\nu (S_\mu \nabla^\mu S^\nu) + 2 S^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu S^\nu \\
&= 2 (\nabla_\mu S^\nu)^2 + 2 S^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu S^\nu + 2 S^\mu [\nabla_\nu, \nabla_\mu] S^\nu - 2 \nabla_\nu (S_\mu \nabla^\mu S^\nu) \\
&= 2 (\nabla_\mu S_\nu)^2 - 2 (\nabla_\mu S^\mu)^2 + 2 \nabla_\nu (S^\nu \nabla_\mu S^\mu) - 2 \nabla_\nu (S^\mu \nabla_\mu S^\nu) - 2 S^\mu S^\lambda R^\nu{}_{\lambda\mu\nu} \\
&= 2 [(\nabla_\mu S_\nu)^2 - (\nabla_\mu S^\mu)^2 + R_{\mu\nu} S^\mu S^\nu] + 2 \nabla_\nu (S^\nu \nabla_\mu S^\mu - S^\mu \nabla_\mu S^\nu).
\end{aligned}$$

Como estamos lidando com férmions, o traço funcional tem sinal oposto, portanto,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{div},1}^{(1)} &= \frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \text{tr} \left[\frac{\hat{1}}{180} (R_{\mu\nu\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\beta}^2 + \square R) + \frac{1}{2} \hat{P}_1^2 + \frac{1}{6} \square \hat{P}_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{12} \hat{S}_{1,\mu\nu}^2 \right] \\
&= \frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left[2m^4 - \frac{1}{3} m^2 R - 8m^2 S^2 - \frac{7}{360} R_{\mu\nu\lambda\beta}^2 - \frac{1}{45} R_{\mu\nu}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{72} R^2 - \frac{1}{30} \square R + \frac{2}{3} S_{\mu\nu}^2 - \frac{4}{3} \nabla_\nu (S^\nu \nabla_\mu S^\mu - S^\mu \nabla_\mu S^\nu) - \frac{4}{3} (\square S^2) \right] \\
&= \frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left[2m^4 - \frac{1}{3} m^2 R - 8m^2 S^2 - \frac{1}{20} C^2 + \frac{11}{360} E_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{30} \square R + \frac{2}{3} S_{\mu\nu}^2 - \frac{4}{3} \nabla_\nu (S^\nu \nabla_\mu S^\mu - S^\mu \nabla_\mu S^\nu) - \frac{4}{3} (\square S^2) \right]. \tag{3.32}
\end{aligned}$$

O resultado anterior corresponde à divergência da ação efetiva considerando o operador conjugado dado na Eq. (3.4). Esse resultado está de acordo com o encontrado na literatura [40].

3.2 Segundo operador conjugado

Agora, tomaremos a outra forma possível para o operador conjugado, sendo independente da torção,

$$\hat{H}_2 = \gamma^\nu \nabla_\nu - im. \tag{3.33}$$

Neste caso, se usarmos a Eq. (3.5) para os termos independentes da torção, obteríamos uma expressão idêntica à Eq. (3.32). Porém, aqui vamos analisar apenas os termos que dependem de S_μ , e como \hat{H}_2 não contribui para esses termos, precisamos modificar a relação,

$$-i \operatorname{Tr} \ln \hat{H} = -i \operatorname{Tr} \ln (\hat{H} \hat{H}_2). \quad (3.34)$$

Portanto, com o objetivo de obter apenas os termos que dependem da torção, temos,

$$\begin{aligned} \hat{H} \hat{H}_2 &= (\gamma^\mu \nabla_\mu - i\gamma^\mu \gamma^5 S_\mu + im) (\gamma^\nu \nabla_\nu - im) \\ &= \square - \frac{1}{4}R - im\gamma^\mu \nabla_\mu - i\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu S_\mu \nabla_\nu - m\gamma^\mu \gamma^5 S_\mu + im\gamma^\nu \nabla_\nu + m^2 \\ &= \square + m^2 - \frac{1}{4}R - i\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu S_\mu \nabla_\nu - m\gamma^\mu \gamma^5 S_\mu \\ &= \square + 2\hat{h}_2^\alpha \nabla_\alpha + \hat{\Pi}_2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde,

$$\hat{h}_2^\alpha = -\frac{i}{2}\gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\alpha S_\mu = \frac{i}{2}\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\alpha S_\lambda, \quad (3.36)$$

$$\hat{\Pi}_2 = m^2 - \frac{1}{4}R + m\gamma^5 \gamma^\lambda S_\lambda. \quad (3.37)$$

Dessa forma, tomando o produto $\hat{h}_\nu \hat{h}_\mu$,

$$\hat{h}_{2\nu} \hat{h}_{2\mu} = -\frac{1}{4}\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma_\nu S_\lambda \gamma^5 \gamma^\tau \gamma_\mu S_\tau = -\frac{1}{2}S_\nu S^\lambda \gamma_\lambda \gamma_\mu + \frac{1}{4}S^2 \gamma_\nu \gamma_\mu. \quad (3.38)$$

Fazendo $\nu = \mu = \alpha$ e usando que $\gamma^\alpha \gamma_\alpha = 4$,

$$\hat{h}_2^\alpha \hat{h}_{2\alpha} = -\frac{1}{2}S_\alpha S^\lambda \gamma^\lambda \gamma^\alpha + \frac{1}{4}S^2 \gamma_\alpha \gamma^\alpha = \frac{1}{2}S^2. \quad (3.39)$$

E por último,

$$\hat{h}_{2\nu} \hat{h}_{2\mu} - \hat{h}_{2\mu} \hat{h}_{2\nu} = -\frac{1}{2}S^\lambda \gamma_\lambda (S_\nu \gamma_\mu - S_\mu \gamma_\nu) - \frac{1}{4}S^2 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu). \quad (3.40)$$

E agora tomando a derivada,

$$\nabla_\nu \hat{h}_{2\mu} = \frac{i}{2}\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma_\mu (\nabla_\nu S_\lambda), \quad (3.41)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \hat{h}_2^\alpha &= \frac{i}{2}\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\alpha (\nabla_\alpha S_\lambda) \\ &= \frac{i}{4}\gamma^5 (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) (\nabla_\nu S_\mu) + \frac{i}{4}\gamma^5 (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) (\nabla_\nu S_\mu) \\ &= \frac{i}{2}\gamma^5 (\nabla_\lambda S^\lambda) - \frac{i}{4}\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu S_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\hat{P}_2 &= \hat{\Pi}_2 + \frac{1}{6}R - \nabla_\mu \hat{h}_2^\mu - \hat{h}_{2\mu} \hat{h}_2^\mu \\ &= m^2 - \frac{1}{12}R + m\gamma^5 \gamma^\lambda S_\lambda - \frac{i}{2}\gamma^5 (\nabla_\lambda S^\lambda) + \frac{i}{4}\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu S_{\mu\nu} - \frac{1}{2}S^2.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Para o operador $\hat{S}_{2,\mu\nu}$,

$$\begin{aligned}\hat{S}_{2,\mu\nu} &= [\nabla_\nu, \nabla_\mu] + (\nabla_\nu \hat{h}_{2\mu} - \nabla_\mu \hat{h}_{2\nu}) + (\hat{h}_{2\nu} \hat{h}_{2\mu} - \hat{h}_{2\mu} \hat{h}_{2\nu}) \\ &= -\frac{1}{4}R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau + \frac{i}{2}\gamma^5 \gamma^\lambda [\gamma_\mu (\nabla_\nu S_\lambda) - \gamma_\nu (\nabla_\mu S_\lambda)] - \frac{1}{2}S^\lambda \gamma_\lambda (S_\nu \gamma_\mu - S_\mu \gamma_\nu) \\ &\quad - \frac{1}{4}S^2 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \\ &= A_{2,\mu\nu} + B_{2,\mu\nu} + C_{2,\mu\nu} + D_{2,\mu\nu},\end{aligned}\quad (3.44)$$

onde fizemos as seguintes identificações,

$$\begin{aligned}A_{2,\mu\nu} &= A_{1,\mu\nu} = -\frac{1}{4}R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau, \\ B_{2,\mu\nu} &= \frac{i}{2}\gamma^5 \gamma^\lambda [\gamma_\mu (\nabla_\nu S_\lambda) - \gamma_\nu (\nabla_\mu S_\lambda)], \\ C_{2,\mu\nu} &= -\frac{1}{2}S^\lambda \gamma_\lambda (S_\nu \gamma_\mu - S_\mu \gamma_\nu), \\ D_{2,\mu\nu} &= -\frac{1}{4}S^2 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu).\end{aligned}$$

Agora, tomando os traços necessários,

$$\frac{1}{6} \text{tr} (\square \hat{P}_2) = \frac{1}{6} \text{tr} \left[-\frac{1}{12} \square R - \frac{1}{2} (\square S^2) \right] = -\frac{1}{18} \square R - \frac{1}{3} (\square S^2), \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \text{tr} \hat{P}_2^2 &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[m^4 + \frac{1}{144} R^2 + m^2 \gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^5 \gamma^\tau S_\lambda S_\tau - \frac{1}{4} (\nabla_\mu S^\mu)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{16} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\tau S_{\mu\nu} S_{\lambda\tau} + \frac{1}{4} S^4 - \frac{1}{6} m^2 R - m^2 S^2 + \frac{1}{12} R S^2 \right] \\ &= 2m^4 + \frac{1}{72} R^2 - \frac{1}{3} m^2 R - 4m^2 S^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\mu S^\mu)^2 + \frac{1}{4} S_{\mu\nu}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} S^4 + \frac{1}{6} R S^2,\end{aligned}\quad (3.46)$$

onde já usamos que $\text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu S_{\mu\nu}) = 4g^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 0$ e $\text{tr} (\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0$.

E para os traços dos termos de $S_{2,\mu\nu}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12} \text{tr} (B_{2,\mu\nu}^2) &= \frac{1}{12} \text{tr} \left\{ -\frac{1}{4} \gamma^5 \gamma^\lambda [\gamma_\mu (\nabla_\nu S_\lambda) - \gamma_\nu (\nabla_\mu S_\lambda)] 2\gamma^5 \gamma^\tau \gamma^\mu (\nabla^\nu S_\tau) \right\} \\
&= -\frac{1}{24} (\nabla_\nu S_\lambda) (\nabla^\nu S_\tau) \text{tr} (\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\tau \gamma_\mu) \\
&\quad + \frac{1}{24} (\nabla_\mu S_\lambda) (\nabla_\nu S_\tau) \text{tr} (\gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\tau \gamma^\mu) \\
&= \frac{1}{3} (\nabla_\mu S_\nu)^2 + \frac{1}{6} (\nabla_\mu S_\nu) (\nabla^\nu S^\mu) - \frac{1}{6} (\nabla_\mu S_\nu)^2 + \frac{1}{6} (\nabla_\mu S^\mu)^2 \\
&= \frac{1}{6} (\nabla_\mu S_\nu)^2 + \frac{1}{6} \nabla_\nu (S^\mu \nabla_\mu S^\nu) - \frac{1}{6} S^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu S^\nu + \frac{1}{6} (\nabla_\mu S^\mu)^2 \\
&= \frac{1}{6} (\nabla_\mu S_\nu)^2 + \frac{1}{6} (\nabla_\mu S^\mu)^2 - \frac{1}{6} S^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu S^\nu - \frac{1}{6} S^\mu [\nabla_\nu, \nabla_\mu] S^\nu \\
&\quad + \frac{1}{6} \nabla_\nu (S^\mu \nabla_\mu S^\nu) \\
&= \frac{1}{6} (\nabla_\mu S_\nu)^2 + \frac{1}{6} (\nabla_\mu S^\mu)^2 - \frac{1}{6} S^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu S^\nu + \frac{1}{6} S^\mu R^\nu{}_{\lambda\mu\nu} S^\lambda \\
&\quad + \frac{1}{6} \nabla_\nu (S^\mu \nabla_\mu S^\nu) - \frac{1}{6} \nabla_\nu (S^\nu \nabla_\mu S^\mu) + \frac{1}{6} (\nabla_\mu S^\mu)^2 + \frac{1}{6} S^\nu \nabla_\nu \nabla_\mu S^\mu \\
&= \frac{1}{6} (\nabla_\mu S_\nu)^2 + \frac{1}{3} (\nabla_\mu S^\mu)^2 - \frac{1}{6} R_{\mu\nu} S^\mu S^\nu \\
&\quad - \frac{1}{6} \nabla_\nu (S^\nu \nabla_\mu S^\mu - S^\mu \nabla_\mu S^\nu), \tag{3.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12} \text{tr} (C_{2,\mu\nu}^2) &= \frac{1}{12} \text{tr} \left[\frac{1}{4} S^\lambda S^\tau \gamma_\lambda (S_\nu \gamma_\mu - S_\mu \gamma_\nu) 2\gamma_\tau S^\nu \gamma^\mu \right] \\
&= \frac{1}{24} S^\lambda S^\tau \text{tr} (S^2 \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\tau \gamma^\mu - S^\mu S^\nu \gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\mu) \\
&= -\frac{1}{2} S^4, \tag{3.48}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{12} \text{tr} (D_{2,\mu\nu}^2) = \frac{1}{12} \text{tr} \left[\frac{1}{16} S^4 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) 2\gamma^\mu \gamma^\nu \right] = -S^4, \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \text{tr} (A_{2,\mu\nu} B_2^{\mu\nu}) &= \frac{1}{6} \text{tr} \left[-\frac{1}{4} R^\mu{}_{\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau i \gamma^5 \gamma^\rho \gamma_\mu (\nabla^\nu S_\rho) \right] \\
&= -\frac{i}{24} R_{\mu\nu\lambda\tau} (\nabla^\nu S_\rho) \text{tr} (\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\tau \gamma^\rho \gamma^\mu) = \frac{1}{6} R_{\mu\nu\lambda\tau} (\nabla^\nu S_\rho) \epsilon^{\lambda\tau\rho\mu} \\
&= \frac{1}{6} \nabla^\nu B_\nu = 0, \tag{3.50}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} \text{tr} (A_{2,\mu\nu} C_2^{\mu\nu}) = \frac{1}{6} \text{tr} \left(\frac{1}{4} R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau S_\rho \gamma^\rho S^\nu \gamma^\mu \right) = \frac{1}{3} R_{\mu\nu} S^\mu S^\nu, \tag{3.51}$$

$$\frac{1}{6} \text{tr} (A_{2,\mu\nu} D_2^{\mu\nu}) = \frac{1}{6} \text{tr} \left(\frac{1}{4} R_{\mu\nu\lambda\tau} \gamma^\lambda \gamma^\tau \frac{1}{2} S^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \right) = -\frac{1}{6} R S^2, \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \text{tr} (B_{2,\mu\nu} C_2^{\mu\nu}) &= \frac{1}{6} \text{tr} \left\{ -\frac{i}{2} \gamma^5 \gamma^\lambda [\gamma_\mu (\nabla_\nu S_\lambda) - \gamma_\nu (\nabla_\mu S_\lambda)] S^\rho \gamma_\rho S^\nu \gamma^\mu \right\} \\
&= -\frac{i}{12} (\nabla_\nu S_\lambda) S_\rho S^\nu \text{tr} (\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma_\mu \gamma^\rho \gamma^\mu) \\
&\quad - \frac{i}{12} (\nabla^\mu S_\lambda) S_\rho S_\nu \text{tr} (\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu) \\
&= 0, \tag{3.53}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{6} \text{tr} (B_{2,\mu\nu} D_2^{\mu\nu}) = \frac{1}{6} \text{tr} \left\{ -\frac{i}{2} \gamma^5 \gamma^\lambda [\gamma_\mu (\nabla_\nu S_\lambda) - \gamma_\nu (\nabla_\mu S_\lambda)] \frac{1}{2} S^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \right\} = 0, \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \text{tr} (C_{2,\mu\nu} D_2^{\mu\nu}) &= \frac{1}{6} \text{tr} \left[\frac{1}{2} S^\lambda \gamma_\lambda (S_\nu \gamma_\mu - S_\mu \gamma_\nu) \frac{1}{2} S^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \right] \\ &= \frac{1}{24} S^2 S^\lambda S^\nu \text{tr} (\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma_\nu) - \frac{1}{24} S^2 S^\lambda S^\mu \text{tr} (\gamma_\lambda \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma^\nu) \\ &= S^4. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Finalmente, fazendo um processo parecido ao realizado na Eq. (3.30),

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \text{tr} (\hat{S}_{2,\mu\nu}^2) &= \frac{1}{6} (\nabla_\mu S_\nu)^2 + \frac{1}{3} (\nabla_\mu S^\mu)^2 - \frac{1}{6} R_{\mu\nu} S^\mu S^\nu - \frac{1}{2} S^4 \\ &\quad - \frac{1}{6} \nabla_\nu (S^\nu \nabla_\mu S^\mu - S^\mu \nabla_\mu S^\nu) - S^4 + \frac{1}{3} R_{\mu\nu} S^\mu S^\nu \\ &\quad - \frac{1}{6} R S^2 + S^4 \\ &= \frac{1}{6} (\nabla_\mu S^\nu)^2 + \frac{1}{3} (\nabla_\mu S^\mu)^2 + \frac{1}{6} R_{\mu\nu} S^\mu S^\nu - \frac{1}{2} S^4 - \frac{1}{6} R S^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \nabla_\nu (S^\mu \nabla_\mu S^\nu - S^\nu \nabla_\mu S^\mu). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Como nosso objetivo é estudar a anomalia multiplicativa ao utilizar \hat{H}_2 independente da torção, na Eq. (3.56) coletamos apenas os termos com dependência em S_μ para podermos comparar com a Eq. (3.32), já que os termos que não dependem da torção naturalmente serão iguais.

Prosseguindo com os cálculos obtemos, considerando apenas os termos com dependência da torção,

$$\begin{aligned} \text{tr} \left[\frac{1}{6} (\square \hat{P}_2) + \frac{1}{2} \hat{P}_2^2 + \frac{1}{12} \hat{S}_{2,\mu\nu}^2 \right] &= -\frac{1}{3} (\square S^2) - 4m^2 S^2 - \frac{1}{2} (\nabla_\mu S^\mu)^2 + \frac{1}{4} S_{\mu\nu}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} S^4 + \frac{1}{6} R S^2 + \frac{1}{6} (\nabla_\mu S_\nu)^2 + \frac{1}{3} (\nabla_\mu S^\mu)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} R_{\mu\nu} S^\mu S^\nu - \frac{1}{2} S^4 - \frac{1}{6} R S^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \nabla_\nu (S^\mu \nabla_\mu S^\nu - S^\nu \nabla_\mu S^\mu) \\ &= -\frac{1}{3} (\square S^2) - 4m^2 S^2 + \frac{1}{3} S_{\mu\nu}^2 \\ &\quad - \frac{1}{3} \nabla_\nu (S^\nu \nabla_\mu S^\mu - S^\mu \nabla_\mu S^\nu), \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde usamos que $(\nabla_\mu S_\nu)^2 - (\nabla_\mu S^\mu)^2 + R_{\mu\nu} S^\mu S^\nu = \frac{1}{2} S_{\mu\nu}^2 - \nabla_\nu (S^\nu \nabla_\mu S^\mu - S^\mu \nabla_\mu S^\nu)$.

Finalmente, obtendo apenas os termos que dependem da torção, e multiplicando por 2 para compensar a diferença entre as Eqs. (3.5) e (3.34), e ainda tomando o sinal

oposto, uma vez que estamos lidando com férmions,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{\text{div},2}^{(1)} &= \frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} 2 \text{tr} \left(\frac{1}{2} \hat{P}_2^2 + \frac{1}{6} \square \hat{P}_2 + \frac{1}{12} \hat{S}_{2,\mu\nu}^2 \right) \\ &= \frac{\mu^{n-4}}{\epsilon} \int d^n x \sqrt{-g} \left[-8m^2 S^2 + \frac{2}{3} S_{\mu\nu}^2 - \frac{2}{3} \nabla_\nu (S^\nu \nabla_\mu S^\mu - S^\mu \nabla_\mu S^\nu) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} (\square S^2) \right].\end{aligned}\quad (3.58)$$

É fácil ver que, ao comparar o resultado com a Eq. (3.32), os termos que não são de superfície coincidem. Entretanto, os termos que são derivadas totais possuem coeficientes diferentes. Este resultado apresenta um novo tipo de anomalia multiplicativa, sendo diferente dos exemplos já conhecidos [25, 45], que são referentes à parte não-local da ação efetiva. No nosso caso, a diferença entre os coeficientes não pode ser compensada mudando a condição de renormalização para as integrais de superfície, pois esta mudança gera apenas diferenças finitas.

A ação de uma teoria renormalizável deve incluir todos os termos que podem surgir dos contratermos. Desse modo, após termos obtido as partes divergentes da ação efetiva para o campo escalar, dado na Eq. (3.1), e para o campo de Dirac, dado nas Eqs. (3.32) e (3.58), temos que a estrutura da ação clássica deve ser [40],

$$S_{\text{tors}} = - \int d^4 x \sqrt{-g} \left[-a_1 S^4 - \frac{a_2}{4} S_{\mu\nu}^2 + b_1 \nabla_\beta (S^\alpha \nabla_\alpha S^\beta - S^\beta \nabla_\alpha S^\alpha) + b_2 \square S^2 \right], \quad (3.59)$$

onde $a_{1,2} > 0$ e $b_{1,2}$ são parâmetros arbitrários. Usando a simetria conforme, as estruturas dos coeficientes $a_{1,2}$ representam C -termos, ou seja,

$$\begin{aligned}S^4 &= g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} S_\mu S_\nu S_\alpha S_\beta = e^{-4\sigma} \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{S}_\mu \bar{S}_\nu \bar{S}_\alpha \bar{S}_\beta = e^{-4\sigma} \bar{S}^4, \\ S_{\mu\nu}^2 &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} S_{\mu\nu} S_{\alpha\beta} = e^{-4\sigma} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\nu\beta} \bar{S}_{\mu\nu} \bar{S}_{\alpha\beta} = e^{-4\sigma} \bar{S}_{\mu\nu}^2,\end{aligned}$$

onde usamos que,

$$S_{\mu\nu} = \nabla_\mu S_\nu - \nabla_\nu S_\mu = \bar{\nabla}_\mu \bar{S}_\nu - \bar{\nabla}_\nu \bar{S}_\mu - \delta\Gamma^\gamma_{\mu\nu} S_\gamma + \delta\Gamma^\gamma_{\nu\mu} S_\gamma = \bar{S}_{\mu\nu}.$$

E os termos superficiais de $b_{1,2}$ não afetam as equações de movimento e são parâmetros artificiais que não podem ser medidos.

Para avaliar as correções de laços da ação de vácuo (3.59), vamos analisar as divergências logarítmicas de 1-loop dos C -termos. Temos que a divergência logarítmica será dada por (veja Eq. (13.208) da Ref. [41]),

$$\frac{1}{2(4\pi^2)} \text{Tr} \left[-\ln \left(\frac{\square}{\mu^2} \right) \hat{a}_2 \right].$$

Desse modo, da Eq. (3.1) temos que cada campo escalar contribui com o coeficiente $\frac{\xi_5^2}{2}$ no termo de S^4 . Ou seja, sendo N_s o número de partículas escalares do sistema, o coeficiente

da correção de 1-loop na ação efetiva para o termo S^4 será,

$$-\frac{1}{2(4\pi^2)} \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\xi_{5,i}^2}{2} = \frac{\beta_1}{2},$$

onde,

$$\beta_1 = -\frac{1}{2(4\pi)^2} \sum_{i=1}^{N_s} \xi_{5,i}^2. \quad (3.60)$$

Analogamente para o campo de Dirac, retornando o coeficiente η por meio de $S_\mu \rightarrow \eta S_\mu$, temos que nas Eqs. (3.32) e (3.58) os termos $S_{\mu\nu}^2$ aparecem com o coeficiente $-\frac{2}{3}\eta^2$. Desse modo, repetindo o processo anterior, sendo N_f o número de campos fermiônicos,

$$-\frac{1}{2(4\pi)^2} \sum_{k=1}^{N_f} \left(-\frac{2}{3}\eta_k^2\right) = \frac{\beta_2}{8},$$

onde,

$$\beta_2 = \frac{8}{3(4\pi)^2} \sum_{k=1}^{N_f} \eta_k^2. \quad (3.61)$$

Finalmente, os termos dependentes da torção na correção de 1-loop da teoria é,

$$\Gamma_{\text{tors}}^{(1)} = - \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ S^2 \left[a_1 + \frac{\beta_1}{2} \ln \left(\frac{\square}{\mu^2} \right) \right] S^2 + \frac{1}{4} S_{\mu\nu} \left[a_2 + \frac{\beta_2}{2} \ln \left(\frac{\square}{\mu^2} \right) \right] S^{\mu\nu} \right\}. \quad (3.62)$$

Os coeficientes $\xi_{5,i}$ e η_k são parâmetros não-mínimos para diferentes espécies de campos escalares e fermiônicos. O sinal da função beta β_1 indica a liberdade assintótica no parâmetro a_1 . Já o sinal de β_2 é positivo, que é típico para campos vetoriais Abelianos. Vale ressaltar que esses sinais correspondem apenas às contribuições férmion e escalar, enquanto a contribuição do próprio campo S_μ não foi levada em consideração.

3.3 Ação Induzida

Nessa seção estamos interessados em estudar a ação induzida pela anomalia. Como a nossa teoria é baseada no S_μ , que é invariante conforme, o cálculo da anomalia não terá novidades com relação ao caso apresentado na Seção 2.4, caso contrário precisaríamos alterar a nossa anomalia, como foi feito na Ref. [16] com o uso do traço T_μ . Desse modo, nosso objetivo é determinar Γ_{ind} que é solução de,

$$\langle T^\mu{}_\mu \rangle = -\frac{2}{\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \Gamma_{\text{ind}}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} e^{-4\sigma} \frac{\delta \Gamma_{\text{ind}}}{\delta \sigma}, \quad (3.63)$$

onde, com base nas estruturas obtidas para a ação efetiva, temos que a anomalia será dada por,

$$\begin{aligned} \langle T^\mu{}_\mu \rangle = & - \left[wC^2 + bE_4 + c\square R - \beta_1 S^4 - \frac{1}{4} \beta_2 S_{\mu\nu}^2 \right. \\ & \left. + \gamma_1 \nabla_\beta (S^\alpha \nabla_\alpha S^\beta - S^\beta \nabla_\alpha S^\alpha) + \gamma_2 \square S^2 \right], \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde as funções beta w , b e c não dependem da torção e são dadas por,

$$\begin{pmatrix} w \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{360(4\pi)^2} \begin{pmatrix} 3N_s + 18N_f + 36N_v \\ -N_s - 11N_f - 62N_v \\ 2N_s + 12N_f - 36N_v \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

onde N_s , N_f e N_v são os números de campos escalares, fermiônico e vetoriais, respectivamente.

Já as funções $\beta_{1,2}$ estão dadas nas Eq. (3.60) e (3.61). Finalmente, as funções $\gamma_{1,2}$ são ambíguas, como vimos nas divergências (3.32) e (3.58). Para esses dois cenários as funções valem,

$$\gamma_1^{(1)} = -\frac{4}{3(4\pi)^2} \sum_{k=1}^{N_f} \eta_k^2, \quad \gamma_1^{(2)} = -\frac{2}{3(4\pi)^2} \sum_{k=1}^{N_f} \eta_k^2, \quad (3.66)$$

$$\gamma_2^{(1)} = \frac{4}{3(4\pi)^2} \sum_{k=1}^{N_f} \eta_k^2 - \frac{1}{6(4\pi)^2} \sum_{k=1}^{N_s} \xi_{5,k}, \quad (3.67)$$

$$\gamma_2^{(2)} = \frac{2}{3(4\pi)^2} \sum_{k=1}^{N_f} \eta_k^2 - \frac{1}{6(4\pi)^2} \sum_{k=1}^{N_s} \xi_{5,k}. \quad (3.68)$$

O processo que realizaremos é exatamente igual ao descrito na Seção 2.4. Para iniciar, vamos agrupar todos os C -termos,

$$Y = Y(g, S) = wC^2 - \beta_1 S^4 - \frac{1}{4} \beta_2 S_{\mu\nu}^2. \quad (3.69)$$

Desse modo, podemos repetir o processo realizado na obtenção da Eq. (2.42). Além disso, o resultado (2.43) também se mantém inalterado, portanto já estamos aptos a obter a parte não-local da ação induzida pela anomalia,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{ind, não-local}} &= \frac{b}{8} \int_x \int_y \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right)_x G(x, y) \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right)_y \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_x \int_y Y(x) G(x, y) \left(E_4 - \frac{2}{3} \square R \right)_y, \end{aligned} \quad (3.70)$$

onde novamente usamos a notação $\int_x \equiv \int d^4x \sqrt{-g}$.

Para o termo com $\square R$ também temos exatamente a mesma solução apresentada na Seção 2.4, ou seja,

$$\Gamma_c = -\frac{3c + 2b}{36} \int d^4x \sqrt{-g} R^2. \quad (3.71)$$

Para produzir $\square S^2$ é fácil ver que, tomando apenas os termos lineares em σ ,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{-g}} e^{-4\sigma} \frac{\delta}{\delta\sigma} \int d^4y \sqrt{-g} R S^2 \Big| &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} e^{-4\sigma} \frac{\delta}{\delta\sigma} \int d^4y \sqrt{-g} (\bar{R} - 6\bar{\square}\sigma) \bar{S}^2 \Big| \\ &= 6\bar{\square} S^2. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Para obter os últimos termos vamos usar que, aplicando a transformação conforme,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu},$$

onde, usando a notação $\sigma_\mu = \bar{\nabla}_\mu\sigma = \partial_\mu\sigma$ e $\sigma^{;\mu} = \bar{g}^{\mu\lambda}\bar{\nabla}_\lambda\sigma$,

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \delta^\lambda_\mu\sigma_\nu + \delta^\lambda_\beta\sigma_\mu - \bar{g}_{\mu\nu}\sigma^{;\lambda}.$$

Logo,

$$\nabla_\mu S_\nu = \bar{\nabla}_\mu\bar{S}_\nu - \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\bar{S}_\lambda = \bar{\nabla}_\mu\bar{S}_\nu - \sigma_\mu\bar{S}_\nu - \sigma_\nu\bar{S}_\mu + \bar{g}_{\mu\nu}\sigma^{;\lambda}\bar{S}_\lambda,$$

$$\nabla_\mu S^\mu = g^{\mu\nu}(\nabla_\mu S_\nu) = e^{-2\sigma}(\bar{\nabla}_\mu\bar{S}^\mu + 2\sigma^{;\mu}\bar{S}_\mu).$$

Assim, tomando apenas os termos até primeira ordem em σ ,

$$\sqrt{-g}(\nabla_\mu S^\mu)^2 = \sqrt{-\bar{g}}\left[(\bar{\nabla}_\mu\bar{S}^\mu)^2 + 4(\bar{\nabla}_\mu\bar{S}^\mu)\sigma^{;\nu}\bar{S}_\nu\right].$$

Portanto,

$$-\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}e^{-4\sigma}\frac{\delta}{\delta\sigma}\int d^4x\sqrt{-g}(\nabla_\mu S^\mu)^2 \Big| = 4\nabla_\nu(S^\nu\nabla_\mu S^\mu). \quad (3.73)$$

E ainda,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}(\nabla_\mu S^\nu)^2 &= \sqrt{-g}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}(\nabla_\mu S_\nu)(\nabla_\alpha S_\beta) \\ &= \sqrt{-\bar{g}}\left[(\bar{\nabla}_\mu\bar{S}_\nu)^2 - 2(\bar{\nabla}^\mu\bar{S}^\nu)\sigma_\mu\bar{S}_\nu - 2(\bar{\nabla}^\mu\bar{S}^\nu)\sigma_\nu\bar{S}_\mu + 2(\bar{\nabla}_\mu\bar{S}^\mu)\sigma_\lambda\bar{S}^\lambda\right]. \end{aligned}$$

Desse modo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{-g}}e^{-4\sigma}\frac{\delta}{\delta\sigma}\int d^4x\sqrt{-g}(\nabla_\mu S_\nu)^2 \Big| &= 2\nabla_\nu(S^\nu\nabla_\mu S^\mu - S_\mu\nabla^\nu S^\mu - S^\mu\nabla_\mu S^\nu) \\ &= 2\nabla_\nu(S^\nu\nabla_\mu S^\mu - S^\mu\nabla_\mu S^\nu) - \square S^2, \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde usamos que $\nabla_\nu(S_\mu\nabla^\nu S^\mu) = \frac{1}{2}\square S^2$.

Nesse momento, podemos obter a ação induzida pelo restante da anomalia. Para isso, vamos escrever,

$$\mathcal{L} = \alpha_1(\nabla_\mu S^\mu)^2 + \alpha_2(\nabla_\mu S_\nu)^2 + \alpha_3 RS^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{-g}}e^{-4\sigma}\frac{\delta}{\delta\sigma}\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L} \Big| &= (4\alpha_1 + 2\alpha_2)\nabla_\nu(S^\nu\nabla_\mu S^\mu) - 2\alpha_2\nabla_\nu(S^\mu\nabla_\mu S^\mu) \\ &\quad + (-\alpha_2 + 6\alpha_3)\square S^2. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Finalmente, comparando os coeficientes das Eqs. (3.64) e (3.75) obtemos que,

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\gamma_1, \quad \alpha_3 = \frac{\gamma_1 - 2\gamma_2}{12}, \quad (3.76)$$

ou seja, usando ainda a Eq. (3.71), a parte local da ação induzida é,

$$\Gamma_{\text{ind,local}} = -\frac{3c+2b}{36} \int_x R^2 + \int_x \left[\frac{\gamma_1}{2} (\nabla_\mu S_\nu)^2 + \frac{\gamma_1 - 2\gamma_2}{12} RS^2 \right]. \quad (3.77)$$

Os termos locais dependentes da torção (3.77) violam tanto a simetria conforme quanto a simetria quiral (3.3). Essas quebras de simetria não ocorrem na parte não-local (3.70).

A solução covariante geral para a ação induzida pela anomalia é dada pela soma da parte não-local (3.70) com a local (3.77),

$$\Gamma_{\text{ind}} = S_c(g, S) + \Gamma_{\text{ind,não-local}} + \Gamma_{\text{ind,local}}, \quad (3.78)$$

onde o termo $S_c(g, S)$ é um funcional arbitrário que é invariante conforme que tem o papel de uma constante de integração na Eq. (3.63). Juntamente com as funções $\gamma_{1,2}$ que são ambíguas devido à anomalia multiplicativa, esse termo também é desconhecido na expressão (3.78). Além disso, vale ressaltar que ainda temos mais um tipo de ambiguidade. Na Eq. (3.77) podemos fazer a mudança $R^2 \rightarrow \frac{1}{3}R_{\mu\nu}^2$ ou $R^2 \rightarrow \frac{1}{3}R_{\mu\nu\alpha\beta}^2$, uma vez que,

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}} e^{-4\sigma} \frac{\delta}{\delta\sigma} \int_x R_{\mu\nu}^2 = 4\Box R, \quad (3.79)$$

produzindo o mesmo termo na anomalia que R^2 .

Finalmente, podemos reescrever a parte não-local da ação induzida na forma simétrica e obter a ação induzida na sua local e covariante com o uso de dois campos auxiliares φ e χ (veja Eq. (79) da Ref. [46]),

$$\Gamma_{\text{ind}} = S_c(g, S) + \Gamma_{\text{ind,local}} + \int_x \left[\frac{1}{2}\varphi\Delta_4\varphi - \frac{1}{2}\chi\Delta_4\chi + \frac{\sqrt{-b}}{2}\varphi \left(E_4 - \frac{2}{3}\Box R + \frac{Y}{b} \right) + \frac{1}{2\sqrt{-b}}\chi Y \right], \quad (3.80)$$

onde $Y(g, S)$ é dado na Eq. (3.69).

Por fim, as equações para os campos auxiliares serão,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\Gamma_{\text{ind}}}{\delta\varphi} = \Delta_4\varphi + \frac{\sqrt{-b}}{2} \left(E_4 - \frac{2}{3}\Box R + \frac{Y}{b} \right) = 0, \quad (3.81)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\Gamma_{\text{ind}}}{\delta\chi} = -\Delta_4\chi + \frac{Y}{2\sqrt{-b}} = 0. \quad (3.82)$$

Ou seja, a versão covariante local é dinamicamente equivalente à versão covariante não-local.

A Eq. (3.82) nos fornece um resultado bastante importante, pois possibilita o uso da ação induzida para estudar problemas físicos, como por exemplo, um campo propagando interagindo com a torção.

4 Correlações do Campo Eletromagnético na Presença de uma Fronteira Perfeitamente Refletora

No Capítulo 5, estudaremos o movimento de uma partícula de carga neutra, porém com momento de dipolo diferente de zero, interagindo com o campo eletromagnético na presença de uma fronteira num banho térmico. Para realizar tal estudo, precisamos primeiramente obter as correlações do campo eletromagnético nestas condições.

Aqui reproduziremos os resultados apresentados na Ref. [47], onde foi calculado o propagador do campo eletromagnético na presença de uma fronteira perfeitamente refletora no regime de temperatura finita. Inicialmente, calcularemos o propagador no vácuo de Minkowski, para então obter o resultado no vácuo modificado pela presença da fronteira perfeitamente refletora usando o método das imagens. E então, introduziremos o banho térmico para obter o propagador do campo eletromagnético num regime de temperatura finita. Para estar em conformidade com a referência usada, apenas nesse capítulo usaremos a métrica com assinatura $(-1,1,1,1)$.

Inicialmente, vamos partir das equações para o campo eletromagnético no vácuo,

$$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0, \quad (4.1)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (4.2)$$

Agora, o comutador dos campos elétrico e magnético é dado por (veja Eq. (1.1.42) da Ref. [48]),

$$[E_j(\mathbf{x},t), B_k(\mathbf{x}',t)] = -i\partial_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

onde j, k e l formam uma permutação cíclica de 1, 2 e 3. Dessa forma, escrevendo em termos do tensor $F^{\mu\nu}$, teremos,

$$i[F^{0k}(\mathbf{x},t), F^{lm}(\mathbf{x}',t)] = (\delta^{km}\partial^l - \delta^{kl}\partial^m)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.3)$$

com k, l e m sendo iguais a 1, 2 ou 3. Como o comutador a tempos iguais do campo depende da derivada da função δ , o produto com ordenamento temporal não é covariante sob transformações de Lorentz [49]. Iremos obter o produto com ordenamento temporal T^* de forma covariante como,

$$\begin{aligned} iT^*(F^{\mu\nu}(x^\alpha)F^{\lambda\kappa}(x'^\alpha)) = & iT(F^{\mu\nu}(x^\alpha)F^{\lambda\kappa}(x'^\alpha)) + (\eta^{\mu\kappa}n^\nu n^\lambda - \eta^{\mu\lambda}n^\nu n^\kappa \\ & + \eta^{\nu\lambda}n^\mu n^\kappa - \eta^{\nu\kappa}n^\mu n^\lambda)\delta(x^\alpha - x'^\alpha), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $n^\alpha = (1,0,0,0)$. Aqui, T consiste no produto com ordenamento temporal usual, já T^* é a operação em sua forma covariante.

Desse modo, as equações do campo se tornam,

$$\begin{aligned} & \partial^\sigma i T^* \left(F^{\mu\nu}(x^\alpha) F^{\lambda\kappa}(x'^\alpha) \right) + \partial^\mu i T^* \left(F^{\nu\sigma}(x^\alpha) F^{\lambda\kappa}(x'^\alpha) \right) \\ & + \partial^\nu i T^* \left(F^{\sigma\mu}(x^\alpha) F^{\lambda\kappa}(x'^\alpha) \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\partial_\mu i T^* \left(F^{\mu\nu}(x^\alpha) F^{\lambda\kappa}(x'^\alpha) \right) = \left(\eta^{\nu\kappa} \partial^\lambda - \eta^{\nu\lambda} \partial^\kappa \right) \delta(x^\alpha - x'^\alpha). \quad (4.6)$$

Vamos escrever o valor esperado no estado de vácuo do produto com ordenamento temporal como,

$$D_+^{\mu\nu;\lambda\kappa}(x^\alpha - x'^\alpha) = \langle i T^* \left(F^{\mu\nu}(x^\alpha) F^{\lambda\kappa}(x'^\alpha) \right) \rangle. \quad (4.7)$$

Temos que a Eq. (4.5) é satisfeita se escrevermos $D_+^{\mu\nu;\lambda\kappa}(x - x')$ como,

$$D_+^{\mu\nu;\lambda\kappa}(x^\alpha - x'^\alpha) = d^{\mu\nu;\lambda\kappa} D_+(x^\alpha - x'^\alpha), \quad (4.8)$$

onde,

$$d^{\mu\nu;\lambda\kappa} = \partial^\mu \partial'^\lambda \eta^{\nu\kappa} - \partial^\nu \partial'^\lambda \eta^{\mu\kappa} + \partial^\nu \partial'^\kappa \eta^{\mu\lambda} - \partial^\mu \partial'^\kappa \eta^{\nu\lambda}. \quad (4.9)$$

De fato, se substituirmos na Eq. (4.5), obtemos,

$$\begin{aligned} & \partial^\sigma D_+^{\mu\nu;\lambda\kappa}(x^\alpha - x'^\alpha) + \partial^\mu D_+^{\nu\sigma;\lambda\kappa}(x^\alpha - x'^\alpha) + \partial^\nu D_+^{\sigma\mu;\lambda\kappa}(x^\alpha - x'^\alpha) \\ & = \left[(\partial^\sigma \partial^\mu \eta^{\nu\kappa} - \partial^\sigma \partial^\nu \eta^{\mu\kappa} + \partial^\mu \partial^\nu \eta^{\sigma\kappa} - \partial^\mu \partial^\sigma \eta^{\nu\kappa} + \partial^\nu \partial^\sigma \eta^{\mu\kappa} - \partial^\nu \partial^\mu \eta^{\sigma\kappa}) \partial'^\lambda \right. \\ & \left. - (\partial^\sigma \partial^\mu \eta^{\nu\lambda} - \partial^\sigma \partial^\nu \eta^{\mu\lambda} + \partial^\mu \partial^\nu \eta^{\sigma\lambda} - \partial^\mu \partial^\sigma \eta^{\nu\lambda} + \partial^\nu \partial^\sigma \eta^{\mu\lambda} - \partial^\nu \partial^\mu \eta^{\sigma\lambda}) \partial'^\kappa \right] D_+(x^\alpha - x'^\alpha) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Da Eq. (4.6), usando que $\partial'^\alpha D_+(x^\alpha - x'^\alpha) = -\partial^\alpha D_+(x^\alpha - x'^\alpha)$,

$$\begin{aligned} \partial_\mu D_+^{\mu\nu;\lambda\kappa}(x^\alpha - x'^\alpha) & = \left(-\eta^{\nu\kappa} \partial_\mu \partial^\mu \partial^\lambda + \eta^{\nu\lambda} \partial_\mu \partial^\mu \partial^\kappa \right) D_+(x^\alpha - x'^\alpha) \\ & = \left(\eta^{\nu\kappa} \partial^\lambda - \eta^{\nu\lambda} \partial^\kappa \right) \delta(x^\alpha - x'^\alpha). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Portanto,

$$-\partial_\mu \partial^\mu D_+(x^\alpha - x'^\alpha) = \delta(x^\alpha - x'^\alpha). \quad (4.11)$$

Finalmente, a solução da Eq. (4.11), para frequência positiva, é,

$$\begin{aligned} D_+(x^\alpha) & = i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ik|t|} = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{2k} e^{ik|\mathbf{x}| \cos\theta} e^{-ik|t|} k^2 \sin\theta dk d\theta d\varphi \\ & = \frac{i}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k \frac{2 \sin(k|\mathbf{x}|)}{k|\mathbf{x}|} e^{-ik(|t|-i\epsilon)} dk = \frac{i}{4\pi^2 \left[x^2 + y^2 + z^2 - (t - i\epsilon)^2 \right]}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $\epsilon \rightarrow 0^+$ para garantir a convergência da integração e lembrando que nesse capítulo estamos usando a métrica $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$.

Assim, já podemos obter o propagador para o vácuo de Minkowski usando as Eqs. (4.7) e (4.8),

$$\begin{aligned}
 \langle iT^*(E_x(\mathbf{x},t)E_x(\mathbf{x}',t')) \rangle_0 &= d^{01;01}D_+(x^\alpha - x'^\alpha) = (\partial^0\partial^0 - \partial^1\partial^1)D_+(x^\alpha - x'^\alpha) \\
 &= (\partial^1\partial^1 - \partial^0\partial^0)D_+(x^\alpha - x'^\alpha) \\
 &= \frac{i}{\pi^2} \frac{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]^3}, \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

onde $\Delta a = a - a'$ e obtemos soluções análogas para E_y e E_z .

Agora podemos considerar o caso de uma placa infinita perfeitamente condutora colocada em $z = 0$. Temos que as componentes tangenciais do campo elétrico e a componente normal do campo magnético devem se anular no condutor, ou seja,

$$F^{01} = F^{02} = F^{12} = 0, \quad (4.14)$$

na placa.

A função de Green $W_+^{\mu\nu;\lambda\kappa}(x^\alpha, x'^\alpha)$ para esse caso é obtida adicionando uma função imagem à solução do espaço de Minkowski. Essa função imagem é a função de Green do espaço livre para uma imagem colocada na coordenada refletida

$$\tilde{x}'^\alpha = (x'^0, x'^1, x'^2, -x'^3). \quad (4.15)$$

Assim, definimos,

$$\tilde{\eta}^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, -1), \quad (4.16)$$

e então,

$$W_+^{\mu\nu;\lambda\kappa}(x^\alpha, x'^\alpha) = d^{\mu\nu;\lambda\kappa}D_+(x^\alpha - x'^\alpha) - \tilde{d}^{\mu\nu;\lambda\kappa}D_+(x^\alpha - \tilde{x}'^\alpha), \quad (4.17)$$

onde,

$$\tilde{d}^{\mu\nu;\lambda\kappa} = \partial^\mu\partial'^\lambda\tilde{\eta}^{\nu\kappa} - \partial^\nu\partial'^\lambda\tilde{\eta}^{\mu\kappa} + \partial^\nu\partial'^\kappa\tilde{\eta}^{\mu\lambda} - \partial^\mu\partial'^\kappa\tilde{\eta}^{\nu\lambda}. \quad (4.18)$$

O primeiro termo da Eq. (4.17) é devido ao vácuo de Minkowski, que calculamos na Eq. (4.13), já o segundo, introduzimos devido à função imagem. Os propagadores devido a esse segundo termo são dados por,

$$\begin{aligned}
 \langle iT^*(E_x(\mathbf{x},t)E_x(\mathbf{x}',t')) \rangle_v &= -(\partial^0\partial^0\tilde{\eta}^{11} + \partial^1\partial^1\tilde{\eta}^{00})D_+(x^\alpha - \tilde{x}'^\alpha) \\
 &= (\partial^0\partial^0 - \partial^1\partial^1)D_+(x^\alpha - \tilde{x}'^\alpha) \\
 &= -\frac{i}{\pi^2} \frac{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (z + z')^2]}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z + z')^2]^3}, \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle iT^*(E_z(\mathbf{x},t)E_z(\mathbf{x}',t')) \rangle_v &= -(\partial^0\partial^0\tilde{\eta}^{33} + \partial^3\partial^3\tilde{\eta}^{00})D_+(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}', t - t') \\
 &= (\partial^3\partial^3 - \partial^0\partial^0)D_+(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}', t - t') \\
 &= \frac{i}{\pi^2} \frac{(\Delta t - i\epsilon)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (z + z')^2}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z + z')^2]^3}. \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Portanto, como já visto, na Eq. (4.13) apresentamos o propagador devido ao vácuo de Minkowski. Sua contribuição na dispersão não será apresentada, uma vez usado o processo de renormalização. Já nas Eqs. (4.19) e (4.20), temos os propagadores devido ao vácuo modificado pela presença da fronteira. O índice v será usado para indicar a contribuição da fronteira.

4.1 Correlações num banho térmico

Agora, vamos calcular o propagador do campo eletromagnético sujeito ao banho térmico. Para introduzir a temperatura vamos reproduzir os passos realizados também na Seção 2.7 da Ref. [50]. As funções de Green introduzidas anteriormente foram calculadas tomando o valor médio dos operadores em um determinado estado puro, sendo este o estado de vácuo. Essas funções de Green descreveram o sistema na temperatura zero. Entretanto um sistema que está numa temperatura finita não é descrito por um estado puro, mas por uma distribuição estatística de tais estados.

Trataremos um sistema em equilíbrio térmico a uma temperatura T cuja descrição será dada pelo ensemble canônico dos estados. Assim, temos que a média de uma quantidade arbitrária X tomada nesse ensemble canônico será,

$$\langle X \rangle_{\text{T}} = \left(\text{Tr} e^{-\beta H} \right)^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\beta H} X \right), \quad (4.21)$$

onde β é o inverso da temperatura, $\beta = T^{-1}$, com $k_B = 1$, e H é a Hamiltoniana do sistema, que descreve a equação de movimento do operador $X(t)$,

$$X(t) = e^{iHt} X(0) e^{-iHt}. \quad (4.22)$$

E ainda,

$$\begin{aligned} \langle A(t) B(t') \rangle_{\text{T}} &= \left(\text{Tr} e^{-\beta H} \right)^{-1} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} A(t) B(t') \right] \\ &= \left(\text{Tr} e^{-\beta H} \right)^{-1} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} e^{iHt} A(0) e^{-iHt} e^{iHt'} B(0) e^{-iHt'} \right] \\ &= \left(\text{Tr} e^{-\beta H} \right)^{-1} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} e^{iH(t-t')} A(0) e^{-iH(t-t')} B(0) \right] \\ &= \left(\text{Tr} e^{-\beta H} \right) \text{Tr} \left[e^{-\beta H} A(t-t') B(0) \right] \\ &= \langle A(t-t') B(0) \rangle_{\text{T}}, \end{aligned}$$

logo, $\langle A(t) B(t') \rangle_{\text{T}}$ depende apenas da diferença $t - t'$. E temos ainda a simetria,

$$\begin{aligned} \langle A(t) B(t') \rangle_{\text{T}} &= \left(\text{Tr} e^{-\beta H} \right)^{-1} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} A(t) B(t') \right] \\ &= \left(\text{Tr} e^{-\beta H} \right)^{-1} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} e^{iHt} A(0) e^{-iHt} e^{\beta H} e^{-\beta H} B(t') \right] \\ &= \left(\text{Tr} e^{-\beta H} \right)^{-1} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} B(t') e^{iH(t+i\beta)} A(0) e^{-iH(t+i\beta)} \right] \\ &= \left(\text{Tr} e^{-\beta H} \right)^{-1} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} B(t') A(t+i\beta) \right] \\ &= \langle B(t') A(t+i\beta) \rangle. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Vamos escrever as transformadas de Fourier para as correlações como,

$$\langle A(t) B(t') \rangle_{\text{T}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} g^{(+)}(\omega) e^{-i\omega(t-t')}, \quad (4.24)$$

$$\langle B(t') A(t) \rangle_{\text{T}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} g^{(-)}(\omega) e^{-i\omega(t-t')}, \quad (4.25)$$

$$\langle [A(t), B(t')] \rangle_{\text{T}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} c(\omega) e^{-i\omega(t-t')}. \quad (4.26)$$

Porém, da Eq. (4.23) temos que,

$$g^{(+)}(\omega) = g^{(-)}(\omega) e^{\omega\beta},$$

o que implica que

$$c(\omega) = g^{(+)}(\omega) - g^{(-)}(\omega) = -g^{(-)}(\omega) (1 - e^{\omega\beta}) \Rightarrow g^{\pm}(\omega) = \pm \frac{c(\omega)}{1 - e^{\mp\omega\beta}}. \quad (4.27)$$

E agora, aplicando esses resultados para o campo eletromagnético, e sendo o comutador uma quantidade numérica, ou seja, seu valor médio não depende do estado tomado, temos,

$$D^{\mu\nu;\lambda\kappa}(x^\alpha - x'^\alpha) = \langle i [F^{\mu\nu}(x^\alpha), F^{\lambda\kappa}(x'^\alpha)] \rangle_{\text{T}} = d^{\mu\nu;\lambda\kappa} D(x^\alpha - x'^\alpha), \quad (4.28)$$

onde,

$$\begin{aligned} D(x^\alpha) &= i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (e^{-ikt} - e^{ikt}) \\ &= i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int d\omega [\delta(k - \omega) e^{-i\omega t} - \delta(k + \omega) e^{-i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \left\{ i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [\delta(k - \omega) - \delta(k + \omega)] \right\} e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

portanto,

$$c(\omega) = i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [\delta(k - \omega) - \delta(k + \omega)]. \quad (4.29)$$

E finalmente, para $t > t'$,

$$D_{\text{T}}^{\mu\nu;\lambda\kappa} = \langle iT^* (F^{\mu\nu}(x^\alpha) F^{\lambda\kappa}(x'^\alpha)) \rangle_{\text{T}} = d^{\mu\nu;\lambda\kappa} D_{\text{T}}(x^\alpha - x'^\alpha), \quad (4.30)$$

com,

$$\begin{aligned} D_{\text{T}}(x^\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega g^{(+)}(\omega) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \left\{ i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{1}{2k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{1 - e^{-\beta\omega}} [\delta(k - \omega) - \delta(k + \omega)] \right\} e^{-i\omega t} \\ &= i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\frac{e^{-ikt}}{1 - e^{-k\beta}} - \frac{e^{ikt}}{1 - e^{k\beta}} \right). \end{aligned}$$

Reproduzindo o mesmo processo para $t < t'$ obtemos

$$D_T(x^\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega g^{(-)}(\omega) e^{-i\omega t} = -i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(\frac{e^{-ikt}}{1 - e^{k\beta}} - \frac{e^{ikt}}{1 - e^{-k\beta}} \right).$$

Portanto, podemos escrever ambos os resultados como,

$$D_T(x^\alpha) = i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[\theta(t) \left(\frac{e^{-ikt}}{1 - e^{-k\beta}} - \frac{e^{ikt}}{1 - e^{k\beta}} \right) - \theta(-t) \left(\frac{e^{-ikt}}{1 - e^{k\beta}} - \frac{e^{ikt}}{1 - e^{-k\beta}} \right) \right]. \quad (4.31)$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{-k\beta}} &= 1 + \frac{e^{-k\beta}}{1 - e^{-k\beta}}, \\ \frac{1}{1 - e^{k\beta}} &= \frac{e^{-k\beta}}{e^{-k\beta} - 1} = -\frac{e^{-k\beta}}{1 - e^{-k\beta}}. \end{aligned}$$

Portanto, reescrevendo a Eq. (4.31),

$$\begin{aligned} D_T(x^\alpha) &= i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[\theta(t) \left(e^{-ik|t|} + e^{-ikt} \frac{e^{-k\beta}}{1 - e^{-k\beta}} + e^{ikt} \frac{e^{-k\beta}}{1 - e^{-k\beta}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \theta(-t) \left(-e^{-ikt} \frac{e^{-k\beta}}{1 - e^{-k\beta}} - e^{-ik|t|} - e^{ikt} \frac{e^{-k\beta}}{1 - e^{-k\beta}} \right) \right] \\ &= i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - ik|t|} + i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \frac{e^{-k\beta}}{1 - e^{-k\beta}} (e^{-ikt} + e^{ikt}) \\ &= D_+(x^\alpha) + D_\beta(x^\alpha), \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde o termo $D_+(x^\alpha)$ está definido na Eq. (4.12) e sua contribuição no propagador está dada nas Eqs. (4.13), (4.19) e (4.20). Já o termo $D_\beta(x^\alpha)$ aparece pelo fato de estarmos trabalhando com o sistema em equilíbrio térmico, tratando o problema no regime de temperatura finita, podendo ser reescrito como,

$$\begin{aligned} D_\beta(x^\alpha) &= i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2k} \frac{e^{-\beta k}}{1 - e^{-\beta k}} (e^{-ikt} + e^{ikt}) \\ &= i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2k} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta k} e^{-ikt} + i \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2k} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\beta k} e^{ikt} \\ &= i \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2k} e^{-n\beta k} e^{-ikt} + i \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2k} e^{-n\beta k} e^{ikt} \\ &= i \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-n\beta k}}{2k} \left[e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + kt)} + e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + kt)} \right] \\ &= 2i \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{2k} e^{ik(t+n\beta)} = 2i \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\mathbf{x}^2 - (t + in\beta)^2}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Portanto, para obter o propagador total do sistema, considerando a presença da placa perfeitamente refletora e o banho térmico, temos,

$$\begin{aligned} W_{\text{T}}^{\mu\nu;\lambda\kappa}(x^\alpha, x'^\alpha) &= d^{\mu\nu;\lambda\kappa} D_{\text{T}}(x^\alpha - x'^\alpha) - \tilde{d}^{\mu\nu;\lambda\kappa} D_{\text{T}}(x^\alpha - \tilde{x}'^\alpha) \\ &= d^{\mu\nu;\lambda\kappa} D_+(x^\alpha - x'^\alpha) - \tilde{d}^{\mu\nu;\lambda\kappa} D_+(x^\alpha - \tilde{x}'^\alpha) \\ &\quad + d^{\mu\nu;\lambda\kappa} D_\beta(x^\alpha - x'^\alpha) - \tilde{d}^{\mu\nu;\lambda\kappa} D_\beta(x^\alpha - \tilde{x}'^\alpha). \end{aligned} \quad (4.34)$$

O primeiro termo da Eq. (4.34) é devido ao vácuo de Minkowski, cujo resultado está apresentado na Eq. (4.13), e o segundo é devido à presença da placa perfeitamente condutora, cujas contribuições são dadas pelas Eqs. (4.19) e (4.20). Agora, o terceiro termo tem sua origem puramente térmica, ele aparece ao considerarmos o sistema no regime de temperatura finita. E o último é uma contribuição mista, surgindo ao considerar ambos, o banho térmico e a presença da fronteira.

Agora, note que podemos obter $D_\beta(x^\alpha)$ partindo do $D_+(x^\alpha)$, bastando tomar o dobro de sua parte real, introduzindo a mudança $t \rightarrow t + in\beta$ e realizando a soma em n . Desse modo é fácil ver que, reproduzindo o processo realizado para obter o propagador dado na Eq. (4.13), vamos obter, para a contribuição puramente térmica,

$$\langle E_x(\mathbf{x}, t) E_x(\mathbf{x}', t') \rangle_\beta = \frac{2}{\pi^2} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\Delta t + in\beta)^2 - (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]}{[(\Delta t + in\beta)^2 - (\Delta \mathbf{x})^2]^3}. \quad (4.35)$$

E analogamente para $\langle E_y(\mathbf{x}, t) E_y(\mathbf{x}', t') \rangle_\beta$ e $\langle E_z(\mathbf{x}, t) E_z(\mathbf{x}', t') \rangle_\beta$.

Finalmente, calculando o último termo da Eq. (4.34), obtemos,

$$\langle E_x(\mathbf{x}, t) E_x(\mathbf{x}', t') \rangle_{\text{m}} = -\frac{2}{\pi^2} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\Delta t + in\beta)^2 - (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (z + z')^2]}{[(\Delta t + in\beta)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z + z')^2]^3}, \quad (4.36)$$

$$\langle E_z(\mathbf{x}, t) E_z(\mathbf{x}', t') \rangle_{\text{m}} = \frac{2}{\pi^2} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta t + in\beta)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (z + z')^2}{[(\Delta t + in\beta)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z + z')^2]^3}, \quad (4.37)$$

onde usamos o índice m para indicar que estamos tratando da contribuição mista, que aparece apenas quando consideramos o sistema na presença da fronteira e também em temperatura finita. Ou seja, o propagador total para o campo elétrico no nosso sistema é dado por,

$$\begin{aligned} \langle E_i(\mathbf{x}, t) E_i(\mathbf{x}', t') \rangle &= \langle E_i(\mathbf{x}, t) E_i(\mathbf{x}', t') \rangle_0 + \langle E_i(\mathbf{x}, t) E_i(\mathbf{x}', t') \rangle_{\text{v}} \\ &\quad + \langle E_i(\mathbf{x}, t) E_i(\mathbf{x}', t') \rangle_\beta + \langle E_i(\mathbf{x}, t) E_i(\mathbf{x}', t') \rangle_{\text{m}}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Aqui calculamos apenas os termos tomando componentes iguais do campo elétrico, ou seja, $\langle E_x(\mathbf{x}, t) E_x(\mathbf{x}', t') \rangle$, $\langle E_y(\mathbf{x}, t) E_y(\mathbf{x}', t') \rangle$ e $\langle E_z(\mathbf{x}, t) E_z(\mathbf{x}', t') \rangle$, porém, apesar de serem diferentes de zero, os termos mistos, como $\langle E_x(\mathbf{x}, t) E_y(\mathbf{x}', t') \rangle$, não irão contribuir nos resultados do próximo capítulo, uma vez que, para $i \neq j$, $\langle E_i(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}', t') \rangle = 0$.

5 Movimento de um Dipolo no Vácuo Modificado

Nesse capítulo vamos estudar o movimento de uma partícula com momento de dipolo diferente de zero interagindo com um campo elétrico na presença de uma fronteira perfeitamente refletora no regime de temperatura finita. Desse modo, seja uma partícula neutra de massa m e momento de dipolo \mathbf{p} , situada a uma distância z de uma placa condutora, sujeita à interação com um campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, num sistema à temperatura T . Por simplicidade, vamos desconsiderar a estrutura do dipolo que iremos estudar. Assim, a força que atua sobre o dipolo é dada por $\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t))$ e o torque sofrido por ele é $\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$. Portanto, o movimento da partícula é descrito por

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}), \quad (5.1)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \quad (5.2)$$

onde \mathbf{L} é o momento angular da partícula definido com respeito ao seu centro de massa.

Antes de continuar, vamos assumir que as variações na posição da partícula e também na orientação do dipolo causadas pela interação com o campo eletromagnético podem ser negligenciadas. Essa afirmação delimita a aplicabilidade do nosso modelo, que será analisada quando formos estudar as estimativas do nosso modelo na Sec. 5.2. Assim, da Eq. (5.1) temos que a velocidade da partícula será dada por

$$v_i(\tau) = \sum_{j=1}^3 \frac{p_j}{m} \int_0^\tau dt \partial_i E_j(\mathbf{x}, t), \quad (5.3)$$

onde o momento de dipolo p_j foi retirado da integração temporal ao assumir que \mathbf{p} não depende do tempo. E além disso, a Eq. (5.3) descreve um modelo onde a partícula começa a interagir com o sistema subitamente no instante $t = 0$ s e então o seu efeito é calculado no instante τ .

Já sobre a equação do momento angular, temos que, em geral, o momento angular se relaciona com a velocidade angular por meio de $L_i = I_{ij}\omega_j$, onde I_{ij} são as componentes do tensor de inércia [51]. Tomemos a fronteira no plano $z = 0$ e o dipolo a uma distância z do plano, como ilustrado na Fig. 1. Para a escolha de coordenadas mostrada na figura temos que $\hat{\mathbf{x}}' = \hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{y}}' = \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\hat{\mathbf{z}}$, $\hat{\mathbf{z}}' = \hat{\mathbf{p}} = \cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\hat{\mathbf{z}}$ e $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$.

Vamos assumir que o dipolo possui simetria cilíndrica, com eixo de simetria paralelo ao \mathbf{p} . Dessa forma, I_{ij} , escrito na base $\{\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}', \hat{\mathbf{z}}'\}$, terá uma forma diagonal $I_{ij} = \text{diag}(I_\perp, I_\perp, I_\parallel)$, e a Eq. (5.2) se reduz às equações de Euler (veja Eq. (36.4) da Ref.[51])

$$I_\perp \frac{d\omega_{x'}}{dt} + (I_\parallel - I_\perp) \omega_{y'} \omega_{z'} = -pE_{y'} = p(E_x \sin\theta - E_z \cos\theta), \quad (5.4)$$

$$I_{\perp} \frac{d\omega_{y'}}{dt} + (I_{\perp} - I_{\parallel}) \omega_{x'} \omega_{z'} = pE_{x'} = pE_y, \quad (5.5)$$

$$I_{\parallel} \frac{d\omega_{z'}}{dt} = 0, \quad (5.6)$$

onde foi usado que $E_{x'} = E_y$, $E_{y'} = E_z \cos \theta - E_x \sin \theta$ e $E_{z'} = E_x \cos \theta + E_z \sin \theta$.

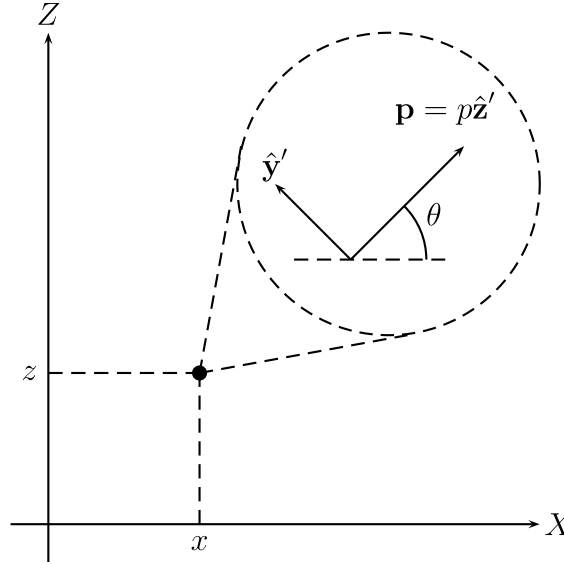


Figura 1 – Ilustração da escolha do sistema de coordenadas, sendo $\mathbf{p} = p_x \hat{\mathbf{x}} + p_z \hat{\mathbf{z}} = p(\hat{\mathbf{x}} \cos \theta + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta)$. O vetor $\hat{\mathbf{y}}$ está entrando no plano da página.

A simetria do dipolo ao longo do eixo \mathbf{p} resulta que $\omega_{z'}$ é constante, ou seja, não causa rotação ao longo de seu eixo de simetria, e tomaremos $\omega_{z'} = 0$, portanto. Dessa forma, as Eqs (5.4) e (5.5) produzem, fazendo $I = I_{\perp}$,

$$\omega_{x'}(\tau) = \frac{p}{I} \int_0^{\tau} dt (E_x \sin \theta - E_z \cos \theta), \quad (5.7)$$

$$\omega_{y'}(\tau) = \frac{p}{I} \int_0^{\tau} dt E_y. \quad (5.8)$$

As Eqs. (5.3), (5.7) e (5.8) nos fornecem as velocidades lineares e angulares da partícula. Nessas expressões, assumimos que o efeito do campo \mathbf{E} é iniciado e finalizado subitamente em $t = 0$ s e $t = \tau$, respectivamente. Tal hipótese causou divergências na dispersão da velocidade para o caso de um monopolo elétrico [27, 29]. Entretanto essas divergências foram curadas ao introduzir o processo de transição [32, 34], que consistiu em assumir que a interação da partícula com o campo modificado foi iniciada e finalizada de forma suave, trazendo mais realismo ao sistema, uma vez que considera que o processo de medição não se dá de forma instantânea.

Na próxima seção, estudaremos as dispersões das velocidades linear e angular da partícula. Para isso, tomaremos o campo \mathbf{E} quantizado num estado que descreve as flutuações eletromagnéticas em equilíbrio térmico próximo a uma fronteira perfeitamente refletora em $z = 0$. Dessa maneira as velocidades v_i e ω_i se tornam operadores por meio das Eqs. (5.3), (5.7) e (5.8), que determinam suas dependências com o campo \mathbf{E} .

5.1 Cálculo da dispersão da velocidade da partícula

Nessa seção, calcularemos as dispersões das componentes da velocidade da partícula. Primeiramente temos que a força e torque médios sofridos pela partícula são nulos, uma vez que $\langle E_i \rangle = 0$, ou seja, temos que $\langle v_i \rangle = 0$ e $\langle \omega_i \rangle = 0$. Portanto, as dispersões serão dadas por $\langle (\Delta v_i)^2 \rangle = \langle v_i^2 \rangle - \langle v_i \rangle^2 = \langle v_i^2 \rangle$ e $\langle (\Delta \omega_i)^2 \rangle = \langle \omega_i^2 \rangle - \langle \omega_i \rangle^2 = \langle \omega_i^2 \rangle$. Logo, tomando o valor médio do quadrado das Eqs. (5.4), (5.7) e (5.8), obtemos

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle = \sum_j \frac{p_j^2}{m^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \int_0^\tau \int_0^\tau \partial'_i \partial_i \langle E_j(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}', t') \rangle dt dt', \quad (5.9)$$

$$\langle (\Delta \omega_x)^2 \rangle = \frac{p^2}{I^2} \int_0^\tau \int_0^\tau [\langle E_x(\mathbf{x}, t) E_x(\mathbf{x}, t') \rangle \sin^2 \theta + \langle E_z(\mathbf{x}, t) E_z(\mathbf{x}, t') \rangle \cos^2 \theta] dt dt', \quad (5.10)$$

$$\langle (\Delta \omega_y)^2 \rangle = \frac{p^2}{I^2} \int_0^\tau \int_0^\tau \langle E_y(\mathbf{x}, t) E_y(\mathbf{x}, t') \rangle dt dt', \quad (5.11)$$

onde os termos cruzados do tipo $\langle E_x(\mathbf{x}, t) E_y(\mathbf{x}', t') \rangle$ não contribuem uma vez que se anulam quando tomamos $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}$.

Note que nas Eqs. (5.9), (5.10) e (5.11) o efeito do campo elétrico \mathbf{E} sobre a partícula é iniciado subitamente no instante $t = 0$ s e finalizado também subitamente no instante $t = \tau$. Então, para trazer mais realismo ao sistema, vamos introduzir a função de transição $F_\tau(t)$ de tal forma que faça com que esse efeito aconteça de maneira suave [52]. Com a inclusão da função de transição na equação de movimento (5.3), a Eq. (5.9) se torna

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{\tau_s} = \sum_j \frac{p_j^2}{m^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \partial'_i \partial_i \langle E_j(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}', t') \rangle dt dt', \quad (5.12)$$

e analogamente para ω_i .

A função de transição $F_{\tau_s, \tau}$ que usaremos será dada por

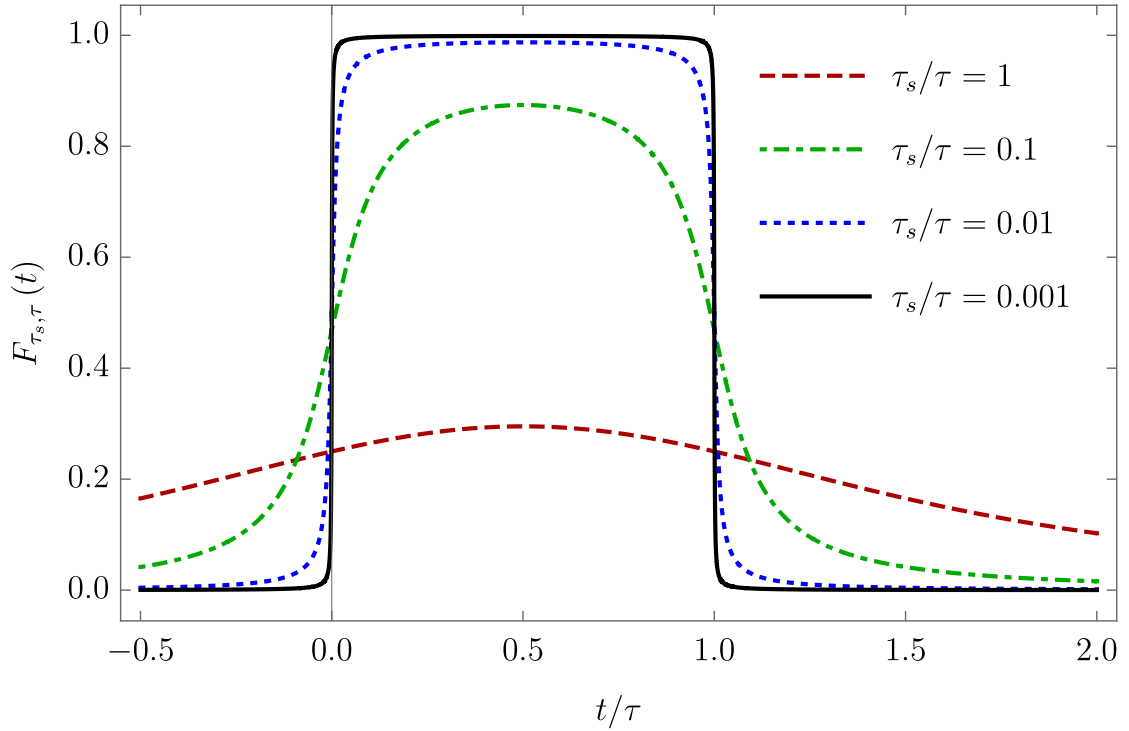
$$F_{\tau_s, \tau}(t) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{t}{\tau_s}\right) + \arctan\left(\frac{\tau - t}{\tau_s}\right) \right], \quad (5.13)$$

onde o parâmetro τ_s controla como o efeito do campo \mathbf{E} é iniciado e finalizado. Na Fig. 2, apresentamos o perfil do comportamento de $F_{\tau_s, \tau}(t)$ para diferentes valores de τ_s/τ .

Por fim, analisaremos separadamente cada termo da dispersão, a contribuição térmica, contribuição devido ao vácuo modificado, e a contribuição mista,

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{\tau_s} = \langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{\beta, \tau_s} + \langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{\mathbf{v}, \tau_s} + \langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{\mathbf{m}, \tau_s}, \quad (5.14)$$

onde no termo $\langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{\beta, \tau_s}$ calcularemos a contribuição térmica, no $\langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{\mathbf{v}, \tau_s}$ a contribuição do vácuo modificado pela fronteira, e no $\langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{\mathbf{m}, \tau_s}$ a contribuição mista.


 Figura 2 – Componente da função de transição $F_{\tau_s, \tau}(t)$ dada pela Eq. (5.13).

5.1.1 Contribuição térmica

5.1.1.1 Dispersões da velocidade linear

Para calcular a contribuição térmica na dispersão da velocidade linear da partícula, vamos introduzir o propagador térmico (4.13) na Eq. (5.12)

$$\lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \langle E_x(\mathbf{x}, t) E_x(\mathbf{x}', t') \rangle_\beta = -\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (t - t' + in\beta)^6}, \quad (5.15)$$

$$\lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} \langle E_x(\mathbf{x}, t) E_x(\mathbf{x}', t') \rangle_\beta = -\operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (t - t' + in\beta)^6}, \quad (5.16)$$

Dessa forma, vamos precisar resolver apenas a integral a seguir. Para $\alpha > 0$, $a > 0$,

$\eta > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan(at+b) \arctan(\alpha t' + \beta)}{(t-t'+i\eta)^6} dt dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \arctan(\alpha t' + \beta) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^a \frac{t du}{1+(ut+b)^2} + \arctan(b) \right] \frac{dt}{(t-t'+i\eta)^6} dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \arctan(\alpha t' + \beta) \int_0^a \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{[1+(ut+b)^2] (t-t'+i\eta)^6} dt \right\} du dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \arctan(\alpha t' + \beta) \int_0^a \left\{ -\frac{(-i+b)\pi u^4}{[b+ut'-i(1+u\eta)]^6} \right\} du dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \arctan(\alpha t' + \beta) \left\{ -\frac{a^5 \pi}{5[-i+b+a(t'-i\eta)]^5} \right\} dt' \\
 &= -\frac{a^5 \pi}{5} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\alpha} \frac{t' du}{1+(ut'+\beta)^2} + \arctan(\beta) \right] \frac{1}{[-i+b+a(t'-i\eta)]^5} dt' \\
 &= -\frac{a^5 \pi}{5} \int_0^{\alpha} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t'}{[1+(ut'+\beta)^2] [-i+b+a(t'-i\eta)]^5} dt' \right\} du \\
 &= -\frac{a^5 \pi}{5} \int_0^{\alpha} \left[\frac{\pi u^3 (1-i\beta)}{(a+u+ibu-ia\beta+au\eta)^5} \right] du \\
 &= -\frac{a^5 \pi}{5} \frac{\pi \alpha^4}{4a(a+\alpha+ib\alpha-ia\beta+a\alpha\eta)} = -\frac{\pi^2 a^4 \alpha^4}{20(a+\alpha+ib\alpha-ia\beta+a\alpha\eta)}. \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

Assim, atribuindo os devidos valores para a , b , α e β na Eq. (5.17),

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t')}{(t-t'-in\beta)^6} dt dt' \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\arctan\left(\frac{t}{\tau_s}\right) - \arctan\left(\frac{t-\tau}{\tau_s}\right) \right] \\
 & \times \left[\arctan\left(\frac{t'}{\tau_s}\right) - \arctan\left(\frac{t'-\tau}{\tau_s}\right) \right] \frac{1}{(t-t'-in\beta)^6} dt dt' \\
 &= \frac{1}{10} \left\{ -\frac{8\tau^2 (n\beta + 2\tau_s)^2}{[(n\beta + 2\tau_s)^2 + \tau^2]^4} + \frac{1}{[(n\beta + 2\tau_s)^2 + \tau^2]^2} - \frac{1}{(n\beta + 2\tau_s)^4} \right\}. \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

Finalmente, temos que

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta v_x)^2 \rangle_{\beta, \tau_s} &= \sum_j \frac{p_j^2}{m^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \\
&\quad \times \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \partial'_x \partial_x \langle E_j(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}', t') \rangle_{\beta} dt dt' \\
&= - \frac{8(p_x^2 + 2p_y^2 + 2p_z^2)}{\pi^2 m^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t')}{(t - t' - in\beta)^6} dt dt' \\
&= - \frac{4(p_x^2 + 2p_y^2 + 2p_z^2)}{5\pi^2 m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ - \frac{8\tau^2 (n\beta + 2\tau_s)^2}{[(n\beta + 2\tau_s)^2 + \tau^2]^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{[(n\beta + 2\tau_s)^2 + \tau^2]^2} - \frac{1}{(n\beta + 2\tau_s)^4} \right\} \\
&= - \frac{4(p_x^2 + 2p_y^2 + 2p_z^2)}{5\pi^2 m^2} \frac{1}{12\beta^4} \left[\psi^{(3)} \left(1 + \frac{2\tau_s + i\tau}{\beta} \right) \right. \\
&\quad \left. + \psi^{(3)} \left(1 + \frac{2\tau_s - i\tau}{\beta} \right) - 2\psi^{(3)} \left(1 + \frac{2\tau_s}{\beta} \right) \right] \\
&= \frac{(p_x^2 + 2p_y^2 + 2p_z^2)}{15\pi^2 m^2 \beta^4} \left[2\psi^{(3)} \left(1 + \frac{2\tau_s}{\beta} \right) - \psi^{(3)} \left(1 + \frac{2\tau_s + i\tau}{\beta} \right) \right. \\
&\quad \left. - \psi^{(3)} \left(1 + \frac{2\tau_s - i\tau}{\beta} \right) \right], \tag{5.19}
\end{aligned}$$

onde a função poligama é dada por,

$$\psi^{(n)}(x) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \ln \Gamma(x) = (-1)^{n+1} n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^{n+1}}. \tag{5.20}$$

A Eq. (5.19) nos fornece as dispersões das componentes da velocidade linear da partícula. Note que as componentes perpendiculares ao eixo do dipolo possuem dispersões dadas pelo dobro da componente paralela. Usaremos a notação $\langle (\Delta v_{z'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s}$ para indicar a componente paralela ao eixo do dipolo, e $\langle (\Delta v_{x'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s}$ para indicar as componentes perpendiculares, como ilustrado na Fig. 1, ou seja,

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta v_{z'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s} &= \frac{p^2}{15\pi^2 m^2 \beta^4} \left[2\psi^{(3)} \left(1 + \frac{2\tau_s}{\beta} \right) - \psi^{(3)} \left(1 + \frac{2\tau_s + i\tau}{\beta} \right) \right. \\
&\quad \left. - \psi^{(3)} \left(1 + \frac{2\tau_s - i\tau}{\beta} \right) \right]. \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Na Fig. 3, temos o comportamento da dispersão $\langle (\Delta v_{z'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s}$ para diferentes valores de τ_s/β . Observamos que não existem divergências na dispersão mesmo quando consideramos a transição súbita, diferentemente do que ocorre quando estudamos a contribuição da fronteira. E note ainda que quando $T \rightarrow 0$, ou seja, $\beta \rightarrow \infty$, a dispersão se anula, como deveria ser.

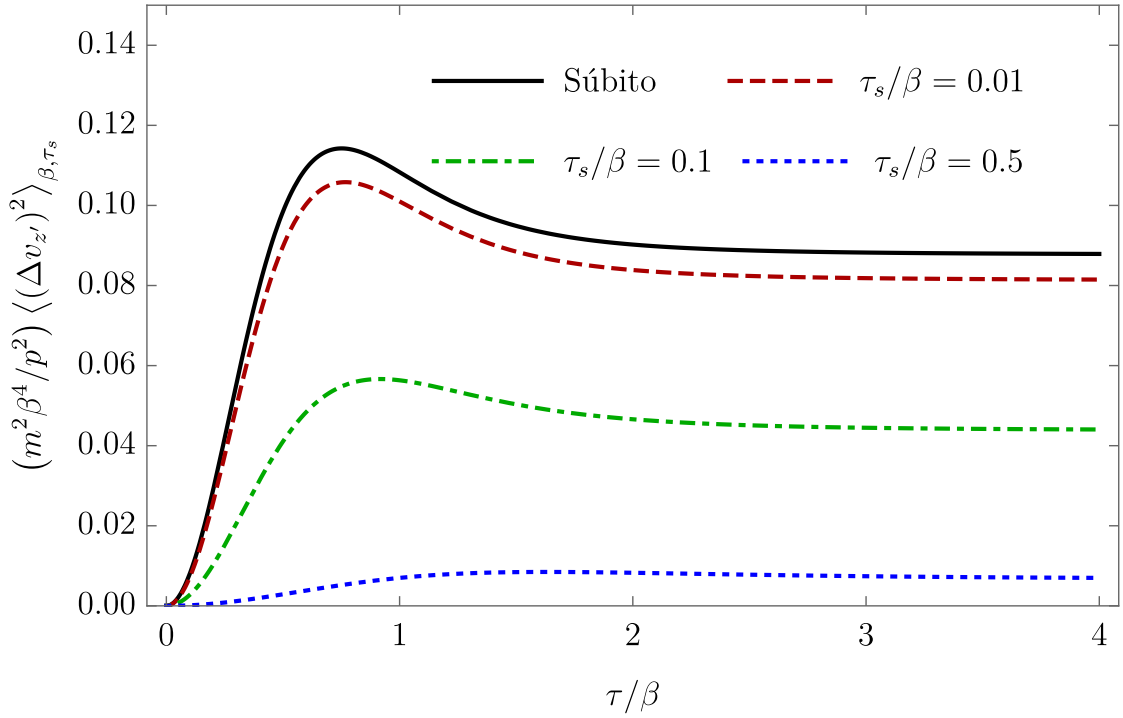


Figura 3 – Comportamento de $\langle (\Delta v_{z'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s}$ para diferentes valores de τ_s/β .

O limite para a transição súbita é dada por,

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta v_{z'})^2 \rangle_{\beta} &\equiv \lim_{\tau_s \rightarrow 0} \langle (\Delta v_{z'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s} \\
 &= \frac{p^2}{225\pi^2 m^2 \beta^4} \left[2\pi^4 - 15\psi^{(3)} \left(1 - \frac{i\tau}{\beta} \right) - 15\psi^{(3)} \left(1 + \frac{i\tau}{\beta} \right) \right] \\
 &= \frac{2p^2}{225\pi^2 m^2 \beta^4} \left\{ \pi^4 + \frac{45\beta^4}{\tau^4} - 15\pi^4 \left[2 + \cosh \left(\frac{2\pi\tau}{\beta} \right) \right] \operatorname{csch}^4 \left(\frac{\pi\tau}{\beta} \right) \right\}. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

E ainda a dispersão da velocidade da partícula possui um valor assintótico dado por,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle (\Delta v_{z'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s} = \frac{2p^2}{15\pi^2 m^2 \beta^4} \psi^{(3)} \left(1 + \frac{2\tau_s}{\beta} \right). \quad (5.23)$$

5.1.1.2 Dispersões da velocidade angular

Agora vamos calcular a contribuição térmica nas dispersões da velocidade angular da partícula. Para isso, vamos introduzir a função de transição nas Eqs. (5.10) e (5.11). Dessa forma, obtemos,

$$\langle (\Delta \omega_{x'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s} = \langle (\Delta \omega_{y'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s} = \frac{2p^2}{\pi^2 I^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t')}{(t - t' + in\beta)^4} dt dt', \quad (5.24)$$

onde usamos que, da Eq. (4.35),

$$\langle E_i(\mathbf{x}, t) E_i(\mathbf{x}, t') \rangle_{\beta} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 (t - t' + in\beta)^4}. \quad (5.25)$$

Agora, para $\alpha > 0$, $a > 0$, $\eta > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctan(at+b) \arctan(\alpha t' + \beta)}{(t-t'+i\eta)^4} dt dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \arctan(\alpha t' + \beta) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^a \frac{t du}{1+(ut+b)^2} + \arctan(b) \right] \frac{dt}{(t-t'+i\eta)^4} dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \arctan(\alpha t' + \beta) \int_0^a \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{[1+(ut+b)^2] (t-t'+i\eta)^4} dt \right\} du dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \arctan(\alpha t' + \beta) \int_0^a \left\{ -\frac{(-i+b)\pi u^2}{[b+ut'-i(1+u\eta)]^4} \right\} du dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \arctan(\alpha t' + \beta) \left\{ -\frac{a^3\pi}{3[-i+b+a(t'-i\eta)]^3} \right\} dt' \\
 &= -\frac{a^3\pi}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\alpha} \frac{t' du}{1+(ut'+\beta)^2} + \arctan(\beta) \right] \frac{1}{[-i+b+a(t'-i\eta)]^3} dt' \\
 &= -\frac{a^3\pi}{3} \int_0^{\alpha} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t'}{[1+(ut'+\beta)^2] [-i+b+a(t'-i\eta)]^3} dt' \right\} du \\
 &= -\frac{a^3\pi}{3} \int_0^{\alpha} \left[-\frac{\pi u(1-i\beta)}{(a+u+ibu-ia\beta+a\eta)^3} \right] du \\
 &= \frac{a^3\pi}{3} \frac{\pi\alpha^2}{2a(a+\alpha+ib\alpha-ia\beta+a\eta)^2} = \frac{\pi^2 a^2 \alpha^2}{6(a+\alpha+ib\alpha-ia\beta+a\eta)^2}. \tag{5.26}
 \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t')}{(t-t'+in\beta)^4} dt dt' &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\arctan\left(\frac{t}{\tau_s}\right) - \arctan\left(\frac{t-\tau}{\tau_s}\right) \right] \\
 &\quad \times \left[\arctan\left(\frac{t'}{\tau_s}\right) - \arctan\left(\frac{t'-\tau}{\tau_s}\right) \right] \frac{1}{(t-t'+in\beta)^4} dt dt' \\
 &= \frac{\tau^2 [\tau^2 + 3(n\beta + 2\tau_s)^2]}{3(n\beta + 2\tau_s)^2 [\tau^2 + (n\beta + 2\tau_s)^2]^2} \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

Portanto, a Eq. (5.24) se torna,

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta\omega_{x'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s} &= \frac{2p^2}{\pi^2 I^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^2 [\tau^2 + 3(n\beta + 2\tau_s)^2]}{3(n\beta + 2\tau_s)^2 [\tau^2 + (n\beta + 2\tau_s)^2]^2} \\
 &= \frac{p^2}{3\pi^2 I^2 \beta^2} \left[2\psi^{(1)}\left(1 + \frac{2\tau_s}{\beta}\right) - \psi^{(1)}\left(1 + \frac{2\tau_s + i\tau}{\beta}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \psi^{(1)}\left(1 + \frac{2\tau_s - i\tau}{\beta}\right) \right]. \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

Assim como no caso da velocidade linear, a contribuição térmica não apresenta divergências, como podemos ver na Fig. 4. E como o esperado, quando $\beta \rightarrow \infty$, as dispersões se anulam.

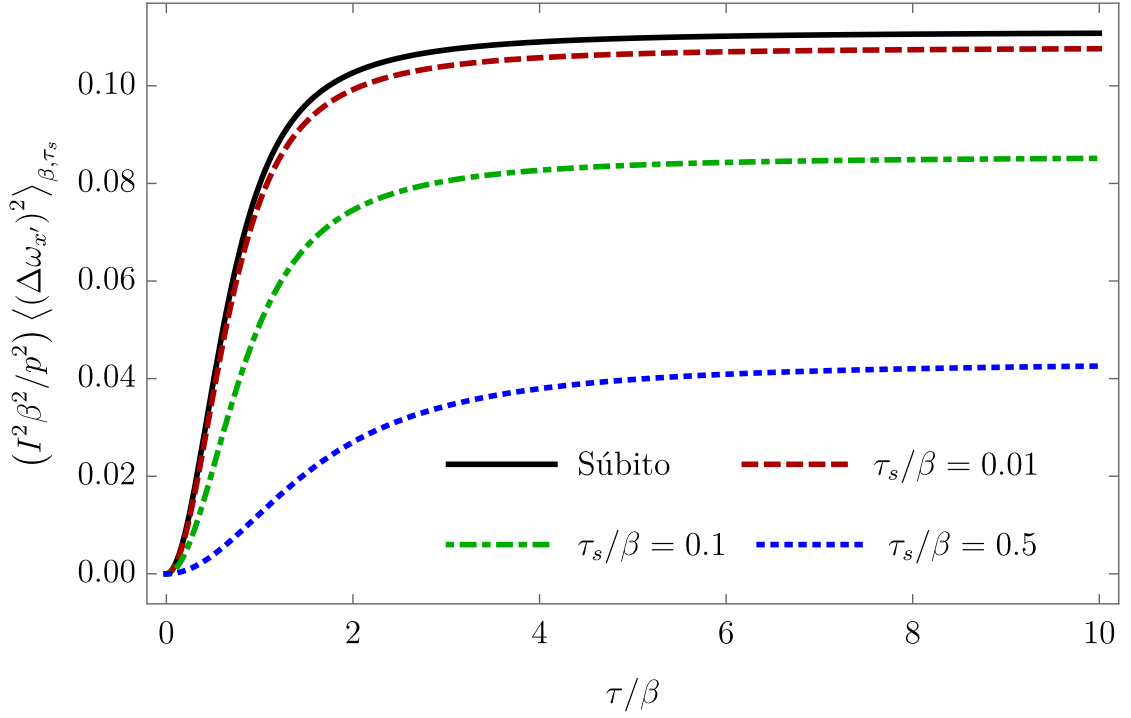


Figura 4 – Comportamento de $\langle (\Delta\omega_{x'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s}$ para diferentes valores de τ_s/β .

E agora, o limite para a transição súbita é dada por,

$$\langle (\Delta\omega_{x'})^2 \rangle_{\beta} \equiv \lim_{\tau_s \rightarrow 0} \langle (\Delta\omega_{x'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s} = \frac{p^2}{9I^2\beta^2} \left[1 - \frac{3\beta^2}{\pi^2\tau^2} + 3 \operatorname{csch}^2 \left(\frac{\pi\tau}{\beta} \right) \right]. \quad (5.29)$$

Por fim, temos o comportamento assintótico,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle (\Delta\omega_{x'})^2 \rangle_{\beta, \tau_s} = \frac{2p^2}{3\pi^2 I^2 \beta^2} \psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s}{\beta} \right), \quad (5.30)$$

e para a transição súbita,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle (\Delta\omega_{x'})^2 \rangle_{\beta} = \frac{p^2}{9I^2\beta^2}. \quad (5.31)$$

5.1.2 Contribuição da fronteira

5.1.2.1 Dispersões da velocidade linear

Agora iremos calcular as contribuições nas dispersões devido à presença da fronteira. Para isso temos, da Eq. (5.12),

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{v, \tau_s} = \sum_j \frac{p_j^2}{m^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \partial'_i \partial_i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \langle E_j(\mathbf{x}, t) E_j(\mathbf{x}', t') \rangle_v dt dt', \quad (5.32)$$

onde reescrevemos os propagadores (4.19) e (4.20) na forma,

$$\begin{aligned} \langle E_x(\mathbf{x},t) E_x(\mathbf{x}',t') \rangle_v &= -\frac{1}{\pi^2} \frac{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (z+z')^2]}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z+z')^2]^3} \\ &= -\frac{1}{\pi^2} \frac{[(\Delta t - i\epsilon)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (z+z')^2]}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z+z')^2]^3} \\ &\quad + \frac{2}{\pi^2} \frac{\Delta x^2}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z+z')^2]^3}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \langle E_z(\mathbf{x},t) E_z(\mathbf{x}',t') \rangle_v &= \frac{1}{\pi^2} \frac{[(\Delta t - i\epsilon)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (z+z')^2]}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z+z')^2]^3} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \frac{[(\Delta t - i\epsilon)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (z+z')^2]}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z+z')^2]^3} \\ &\quad - \frac{2}{\pi^2} \frac{(z+z')^2}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z+z')^2]^3}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Assim, sendo $\eta = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + (z+z')^2}$,

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \langle E_x(\mathbf{x},t) E_x(\mathbf{x}',t') \rangle_v dt dt' \\ &= -\frac{1}{\pi^2} I_2(\tau, \tau_s, \eta) + \frac{2\Delta x^2}{\pi^2} I_3(\tau, \tau_s, \eta), \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \langle E_z(\mathbf{x},t) E_z(\mathbf{x}',t') \rangle_v dt dt' \\ &= \frac{1}{\pi^2} I_2(\tau, \tau_s, \eta) - \frac{2(z+z')^2}{\pi^2} I_3(\tau, \tau_s, \eta), \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde $I_2(\tau, \tau_s, \eta)$ e $I_3(\tau, \tau_s, \eta)$ estão definidos nas Eqs. (B.4) e (B.5), respectivamente.

Por simplicidade e para facilitar a análise dos resultados, vamos escrever as dispersões em termos dos $(\delta v_i)_{v, \tau_s, \parallel}^2$ e $(\delta v_i)_{v, \tau_s, \perp}^2$ como

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{v, \tau_s} = \frac{p^2}{m^2} \left[(\delta v_i)_{v, \tau_s, \parallel}^2 \cos^2 \theta + (\delta v_i)_{v, \tau_s, \perp}^2 \sin^2 \theta \right], \quad (5.37)$$

ou seja, o termo $(\delta v_i)_{v, \tau_s, \parallel}^2$ estão relacionados com o p_x , que é paralelo à placa, e o termo $(\delta v_i)_{v, \tau_s, \perp}^2$ está relacionado ao p_z , que é perpendicular à placa. Dessa maneira, tomando

as derivadas e limites, temos que,

$$\begin{aligned}
(\delta v_x)_{v,\tau_s,\parallel}^2 &= \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s,\tau}(t) F_{\tau_s,\tau}(t') \langle E_x(\mathbf{x},t) E_x(\mathbf{x}',t') \rangle_v dt dt' \\
&= \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{I_2(\tau,\tau_s,\eta)}{\pi^2} + \frac{2\Delta x^2 I_3(\tau,\tau_s,\eta)}{\pi^2} \right] \\
&= -\frac{1}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x' \partial x} \frac{\partial I_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial x'} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 I_2}{\partial \eta^2} \right) - \frac{4I_3(\tau,\tau_s,2z)}{\pi^2} \\
&= \frac{1}{2\pi^2 z} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial I_2}{\partial \eta} \right) - \frac{4I_3(\tau,\tau_s,2z)}{\pi^2}, \tag{5.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\delta v_x)_{v,\tau_s,\perp}^2 &= (\delta v_y)_{v,\tau_s,\perp}^2 = \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{I_2(\tau,\tau_s,\eta)}{\pi^2} - \frac{2(z+z')^2 I_3(\tau,\tau_s,\eta)}{\pi^2} \right] \\
&= -\frac{1}{2\pi^2 z} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial I_2}{\partial \eta} \right) + \frac{4z}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial I_3}{\partial \eta} \right), \tag{5.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\delta v_y)_{v,\tau_s,\parallel}^2 &= \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{I_2(\tau,\tau_s,\eta)}{\pi^2} + \frac{2\Delta x^2 I_3(\tau,\tau_s,\eta)}{\pi^2} \right] \\
&= -\frac{1}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y' \partial y} \frac{\partial I_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^2 I_2}{\partial \eta^2} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi^2 z} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial I_2}{\partial \eta} \right), \tag{5.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\delta v_z)_{v,\tau_s,\parallel}^2 &= \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{I_2(\tau,\tau_s,\eta)}{\pi^2} + \frac{2\Delta x^2 I_3(\tau,\tau_s,\eta)}{\pi^2} \right] \\
&= -\frac{1}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z' \partial z} \frac{\partial I_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial z'} \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial^2 I_2}{\partial \eta^2} \right) \\
&= -\frac{1}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 I_2}{\partial \eta^2} \right), \tag{5.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\delta v_z)_{v,\tau_s,\perp}^2 &= \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{I_2(\tau,\tau_s,\eta)}{\pi^2} - \frac{2(z+z')^2 I_3(\tau,\tau_s,\eta)}{\pi^2} \right] \\
&= \frac{1}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 I_2}{\partial \eta^2} \right) - \frac{4}{\pi^2} I_3(\tau,\tau_s,2z) - \frac{16z}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial I_3}{\partial \eta} \right) \\
&\quad - \frac{8z^2}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 I_3}{\partial \eta^2} \right). \tag{5.42}
\end{aligned}$$

Os comportamentos de $(\delta v_i)_{v,\tau_s,\parallel}^2$ e $(\delta v_i)_{v,\tau_s,\perp}^2$ estão ilustrados nas Figs. 5, 6, 7, 8 e 9. Note que, diferentemente do caso térmico, quando consideramos a interação súbita, as dispersões apresentam divergências em $\tau = 2z$. Tais divergências são bem conhecidas do caso do monopolo [27], que foram regularizadas com o uso do método de transição suave [32], relacionando as divergências com a simplificação do problema. Já no caso do dipolo, vemos que a função de transição foi suficiente para regularizar as divergências encontradas. Entretanto, ela trouxe um novo comportamento não esperado nas dispersões em torno de $\tau = 2z$. Como podemos notar na Fig. 5, por exemplo, apesar do resultado ser finito, temos um comportamento oscilatório na dispersão, o que não reproduz um efeito

esperado na natureza. Um comportamento esperado seria parecido com o obtido para o termo $(\delta v_{z'})^2_{\beta, \tau_s, \perp}$, ilustrado na Fig. 3, onde a curva com a função de transição se ajusta melhor ao caso da transição súbita, como foi obtido inclusive no caso de uma partícula interagindo com o campo escalar [35, 53]. Por esse motivo, nas próximas seções iremos realizar as análises apenas com a transição súbita.

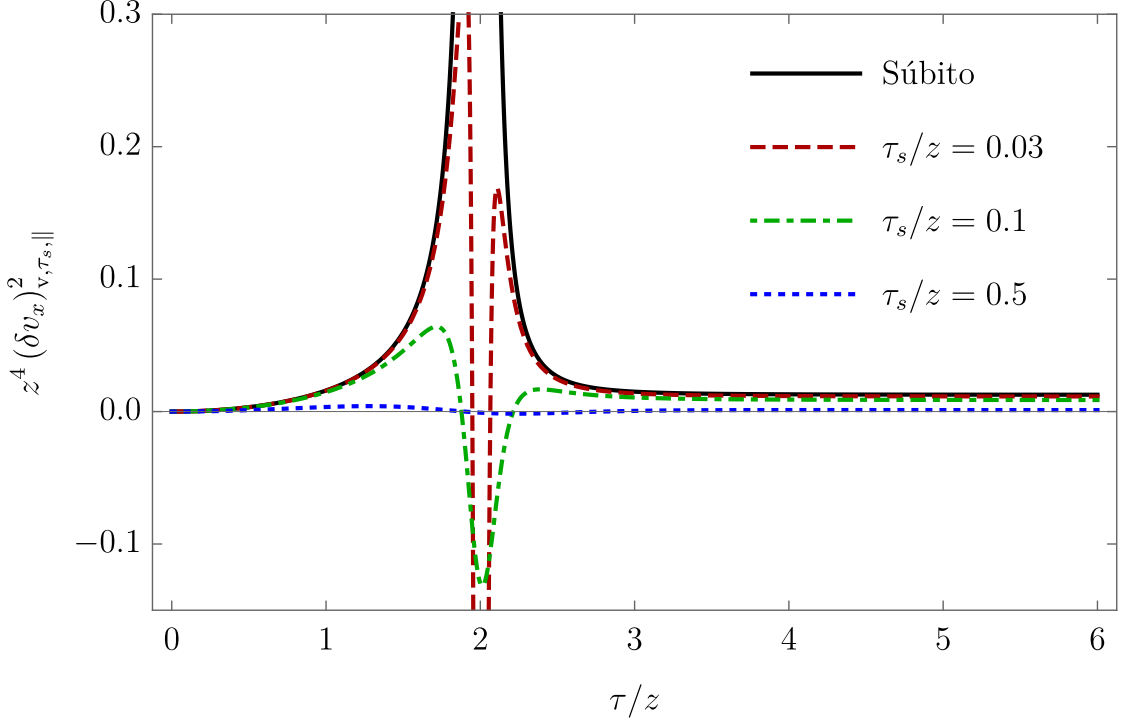


Figura 5 – Comportamento de $(\delta v_x)_{v, \tau_s, \parallel}^2$ para diferentes valores de τ_s/z .

As dispersões para a transição súbita são dadas por,

$$(\delta v_x)_{v, \parallel}^2 \equiv \lim_{\tau_s \rightarrow 0} (\delta v_x)_{v, \tau_s, \parallel}^2 = \frac{1}{32\pi^2 z^4} \left[\frac{28\tau^2/z^2 - 5\tau^4/z^4}{(\tau^2/z^2 - 4)^2} - \frac{9}{4} \frac{\tau}{z} \ln \left| \frac{\tau/z + 2}{\tau/z - 2} \right| \right], \quad (5.43)$$

$$(\delta v_x)_{v, \perp}^2 = \frac{1}{8\pi^2 z^4} \left(-\frac{\tau^2/z^2}{\tau^2/z^2 - 4} + \frac{3}{4} \frac{\tau}{z} \ln \left| \frac{\tau/z + 2}{\tau/z - 2} \right| \right), \quad (5.44)$$

$$(\delta v_y)_{v, \parallel}^2 = \frac{1}{32\pi^2 z^4} \left[\frac{20\tau^2/z^2 - 3\tau^4/z^4}{(\tau^2/z^2 - 4)^2} + \frac{3}{4} \frac{\tau}{z} \ln \left| \frac{\tau/z + 2}{\tau/z - 2} \right| \right], \quad (5.45)$$

$$(\delta v_z)_{v, \parallel}^2 = \frac{1}{8\pi^2 z^4} \left[\frac{112\tau^2/z^2 - 32\tau^4/z^4 + 3\tau^6/z^6}{(4 - \tau^2/z^2)^3} + \frac{3}{4} \frac{\tau}{z} \ln \left| \frac{\tau/z + 2}{\tau/z - 2} \right| \right], \quad (5.46)$$

$$(\delta v_z)_{v, \perp}^2 = \frac{1}{8\pi^2 z^4} \left[\frac{16\tau^2/z^2 - 3\tau^4/z^4}{(\tau^2/z^2 - 4)^2} + \frac{3}{2} \frac{\tau}{z} \ln \left| \frac{\tau/z + 2}{\tau/z - 2} \right| \right], \quad (5.47)$$

e seus comportamentos estão ilustrados na Fig. 10.

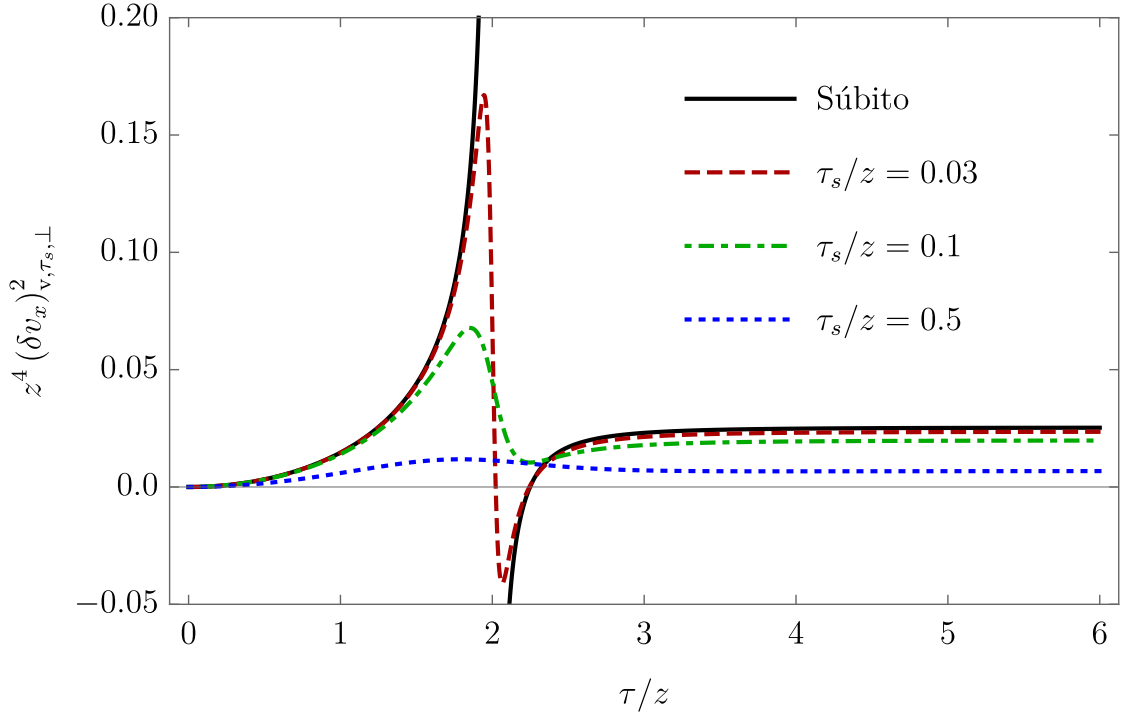


Figura 6 – Comportamento de $(\delta v_x)_{v, \tau_s, \perp}^2$ para diferentes valores de τ_s/z . Esse é o mesmo comportamento para $(\delta v_y)_{v, \tau_s, \perp}^2$

E agora, para o comportamento quando $\tau \rightarrow \infty$ temos,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\delta v_x)_{v, \tau_s, \parallel}^2 = \frac{1}{64\pi^2 z^4} \left[\frac{8 + 30\tau_s^2/z^2 + 18\tau_s^4/z^4}{(\tau_s^2/z^2 + 1)^2} - 9\frac{\tau_s}{z} \arccos \left(\frac{\tau_s^2/z^2 - 1}{\tau_s^2/z^2 + 1} \right) \right], \quad (5.48)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\delta v_x)_{v, \tau_s, \perp}^2 = \frac{1}{16\pi^2 z^4} \left[\frac{4 + 6\tau_s^2/z^2}{(\tau_s^2/z^2 + 1)} - 3\frac{\tau_s}{z} \arccos \left(\frac{\tau_s^2/z^2 - 1}{\tau_s^2/z^2 + 1} \right) \right], \quad (5.49)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\delta v_y)_{v, \tau_s, \parallel}^2 = \frac{1}{64\pi^2 z^4} \left[\frac{10\tau_s^2/z^2 + 6\tau_s^4/z^4}{(\tau_s^2/z^2 + 1)^2} - 3\frac{\tau_s}{z} \arccos \left(\frac{\tau_s^2 - z^2}{\tau_s^2 + z^2} \right) \right], \quad (5.50)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\delta v_z)_{v, \tau_s, \parallel}^2 = \frac{1}{16\pi^2 z^4} \left[\frac{2(7\tau_s^2/z^2 + 8\tau_s^4/z^4 + 3\tau_s^6/z^6)}{(\tau_s^2/z^2 + 1)^3} - 3\frac{\tau_s}{z} \arccos \left(\frac{\tau_s^2 - z^2}{\tau_s^2 + z^2} \right) \right], \quad (5.51)$$

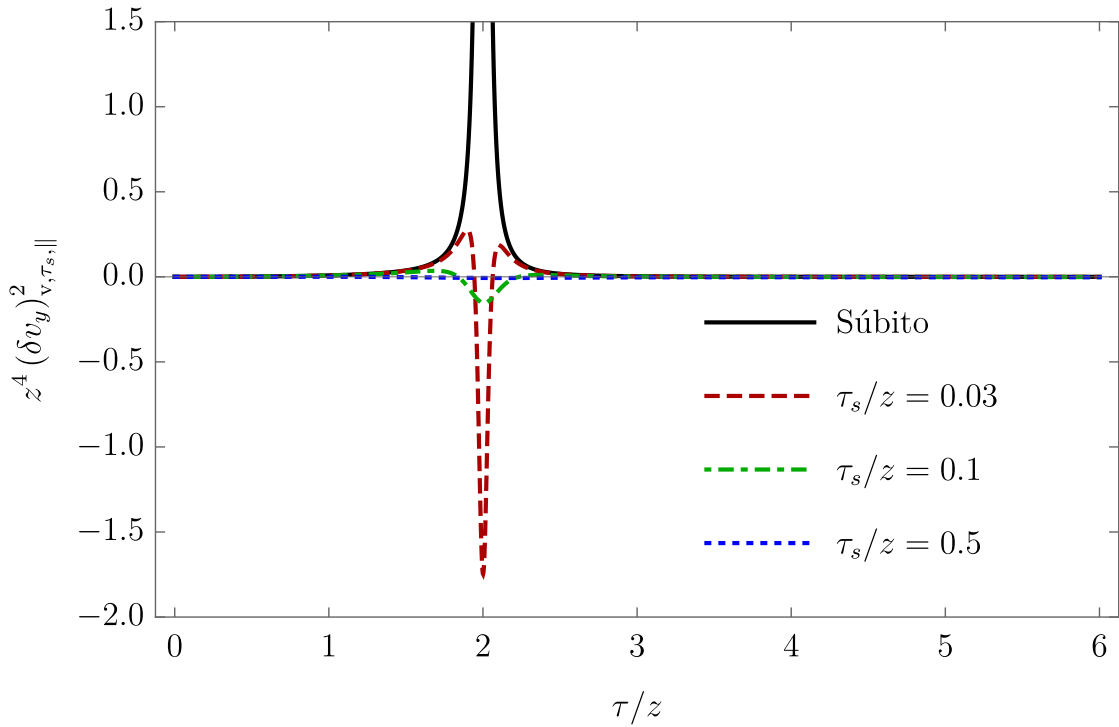
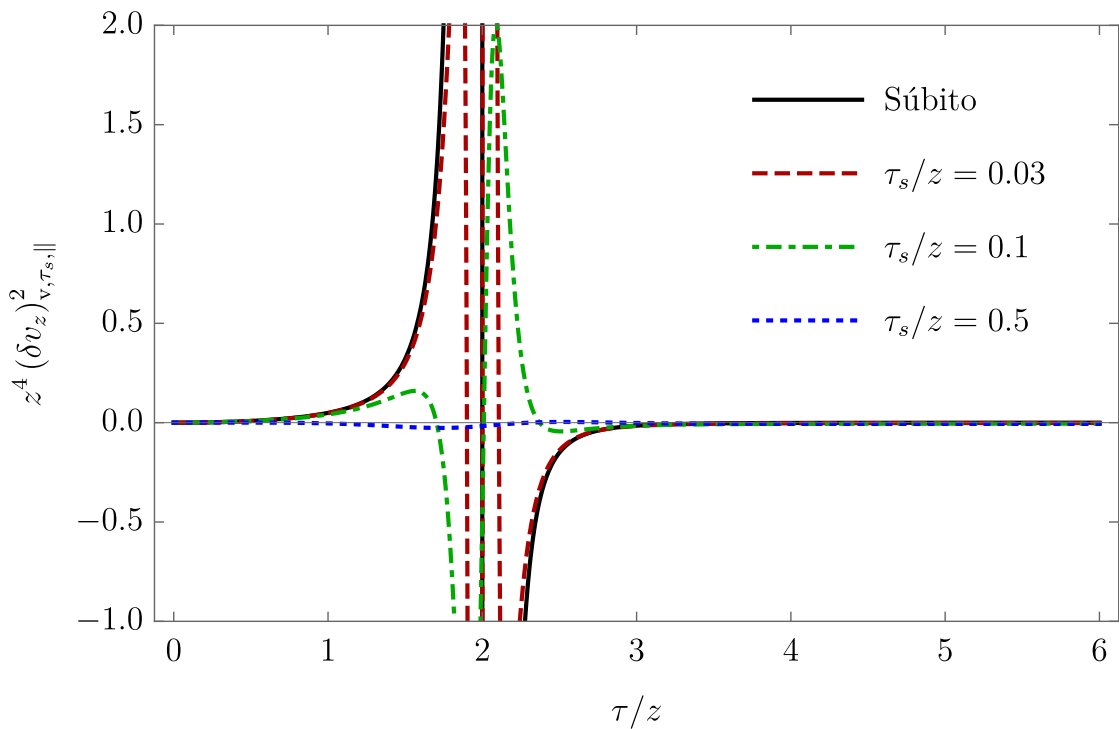
$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\delta v_z)_{v, \tau_s, \perp}^2 = \frac{1}{8\pi^2 z^4} \left[\frac{3 + 10\tau_s^2/z^2 + 6\tau_s^4/z^4}{(\tau_s^2/z^2 + 1)^2} - 3\frac{\tau_s}{z} \arccos \left(\frac{\tau_s^2 - z^2}{\tau_s^2 + z^2} \right) \right]. \quad (5.52)$$

Note que, quando estamos no limite $\tau_s \rightarrow 0$, todos os termos são nulos, exceto,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\delta v_x)_{v, \parallel}^2 = \frac{1}{8\pi^2 z^4}, \quad (5.53)$$

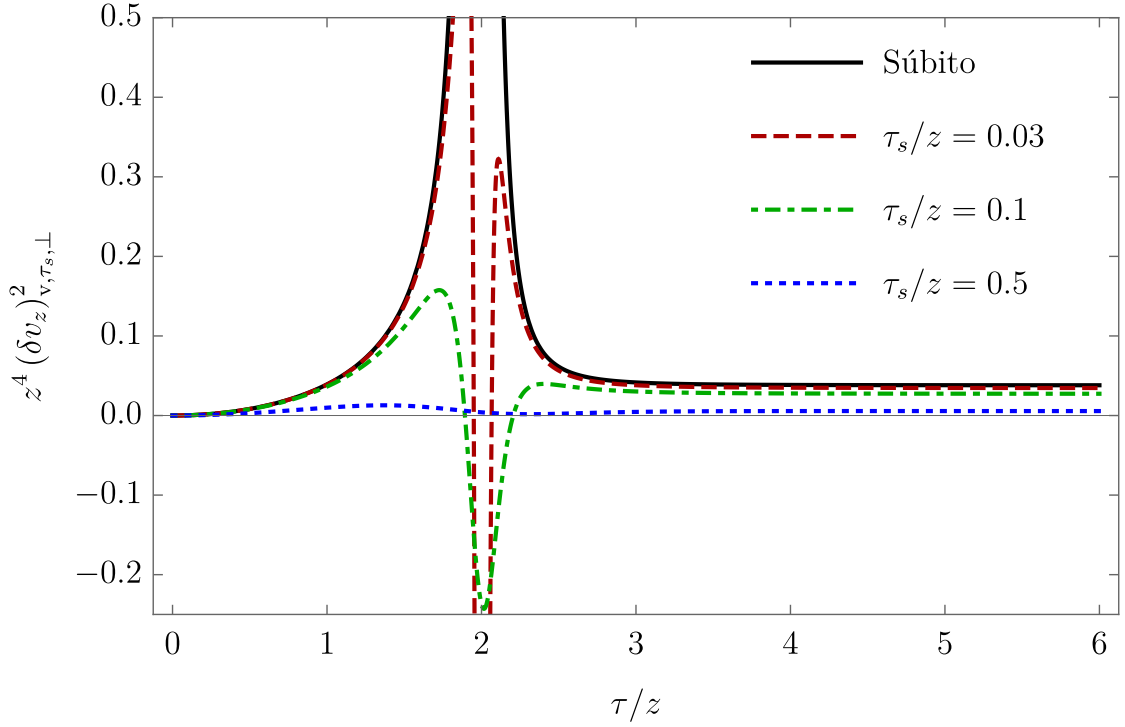
$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\delta v_x)_{v, \perp}^2 = \frac{1}{4\pi^2 z^4}, \quad (5.54)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\delta v_z)_{v, \perp}^2 = \frac{3}{8\pi^2 z^4}. \quad (5.55)$$


 Figura 7 – Comportamento de $(\delta v_y)_{v, \tau_s, ||}^2$ para diferentes valores de τ_s/z .

 Figura 8 – Comportamento de $(\delta v_z)_{v, \tau_s, ||}^2$ para diferentes valores de τ_s/z .

5.1.2.2 Dispersões da velocidade angular

Agora iremos calcular o efeito da presença da fronteira na dispersão da velocidade angular da partícula. Para isso, tomando as Eqs. (5.10) e (5.11) com o devido propagador


 Figura 9 – Comportamento de $(\delta v_z)_{v, \tau_s, \perp}^2$ para diferentes valores de τ_s/z .

e incluindo a função de transição $F_{\tau_s, \tau}(t)$,

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \omega_{x'})^2 \rangle_{v, \tau_s} &= \frac{p^2}{I^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \left[\langle E_x(\mathbf{x}, t) E_x(\mathbf{x}, t') \rangle_v \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \langle E_z(\mathbf{x}, t) E_z(\mathbf{x}, t') \rangle_v \cos^2 \theta \right] dt dt', \end{aligned} \quad (5.56)$$

$$\langle (\Delta \omega_{y'})^2 \rangle_{v, \tau_s} = \frac{p^2}{I^2} \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \langle E_y(\mathbf{x}, t) E_y(\mathbf{x}, t') \rangle_v dt dt'. \quad (5.57)$$

Mas temos que, das Eqs. (4.19) e (4.20),

$$\begin{aligned} \langle E_x(\mathbf{x}, t) E_x(\mathbf{x}, t') \rangle_v &= \langle E_y(\mathbf{x}, t) E_y(\mathbf{x}, t') \rangle_v = -\frac{1}{\pi^2} \frac{(\Delta t - i\epsilon)^2 + 4z^2}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - 4z^2]^3}, \\ \langle E_z(\mathbf{x}, t) E_z(\mathbf{x}, t') \rangle_v &= \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - 4z^2]^2}. \end{aligned}$$

Portanto, escrevendo as Eqs. (5.56) e (5.57) como,

$$\langle (\Delta \omega_{x'})^2 \rangle_{v, \tau_s} = \frac{p^2}{I^2} \left[(\delta \omega)_{v, \tau_s, \parallel}^2 \cos^2 \theta + (\delta \omega)_{v, \tau_s, \perp}^2 \sin^2 \theta \right], \quad (5.58)$$

$$\langle (\Delta \omega_{y'})^2 \rangle_{v, \tau_s} = \frac{p^2}{I^2} (\delta \omega)_{v, \tau_s, \perp}^2, \quad (5.59)$$

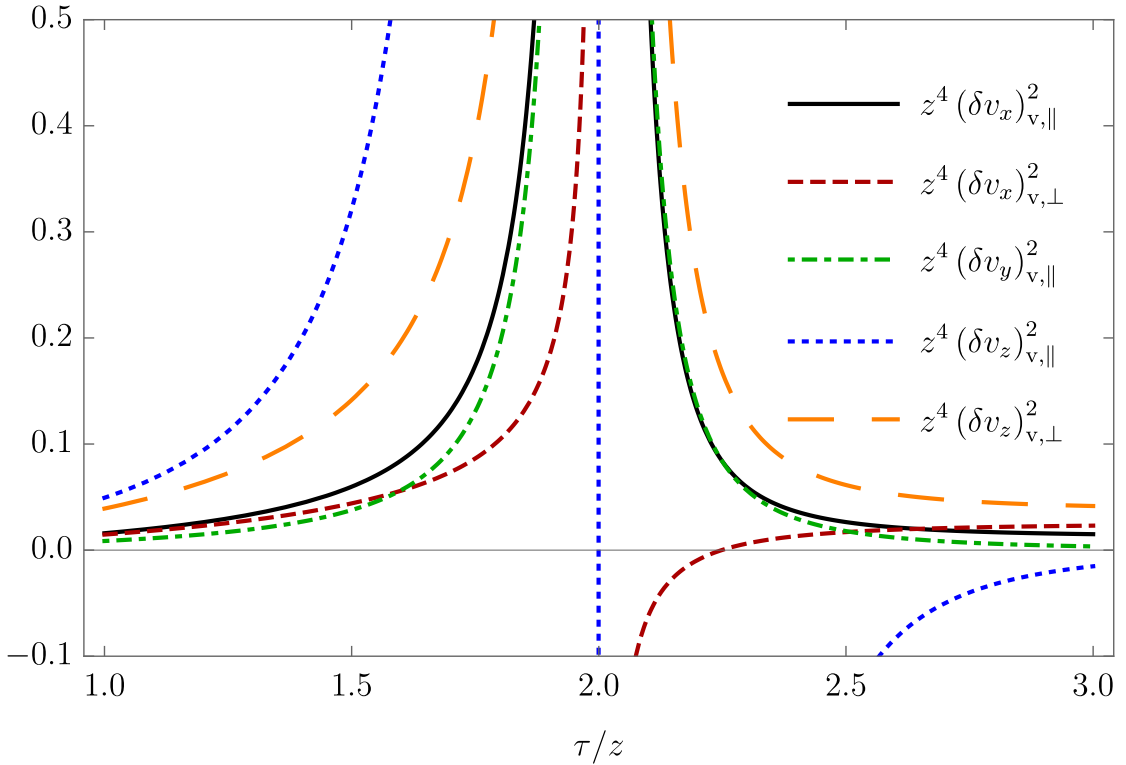


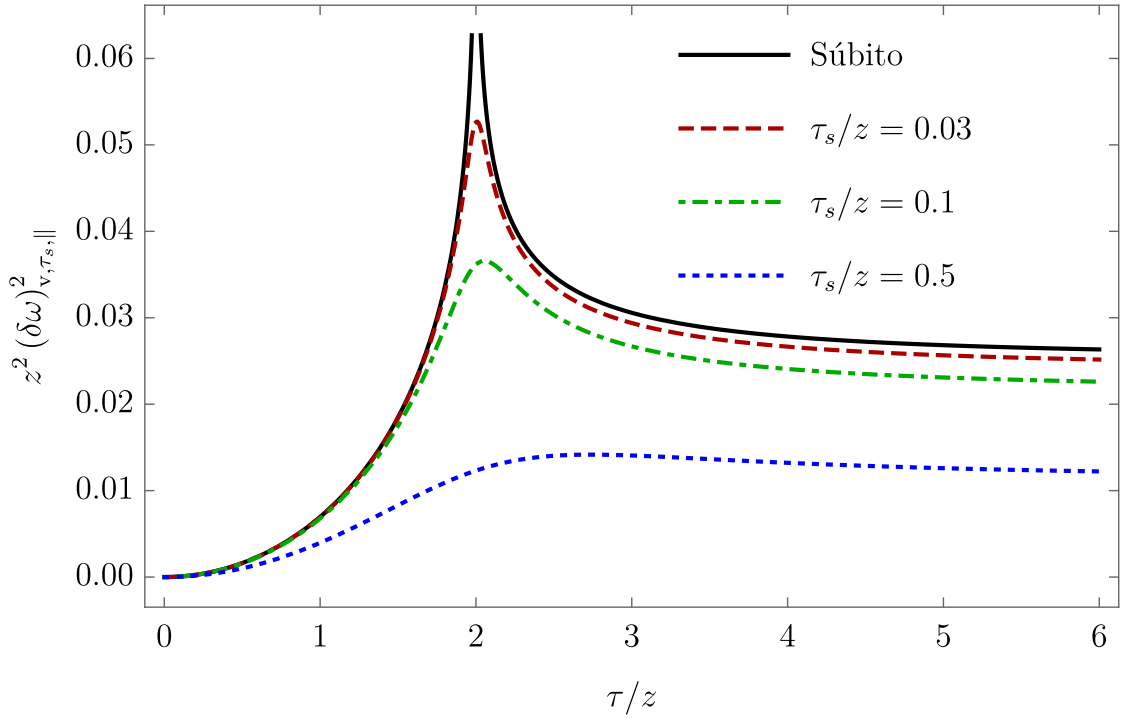
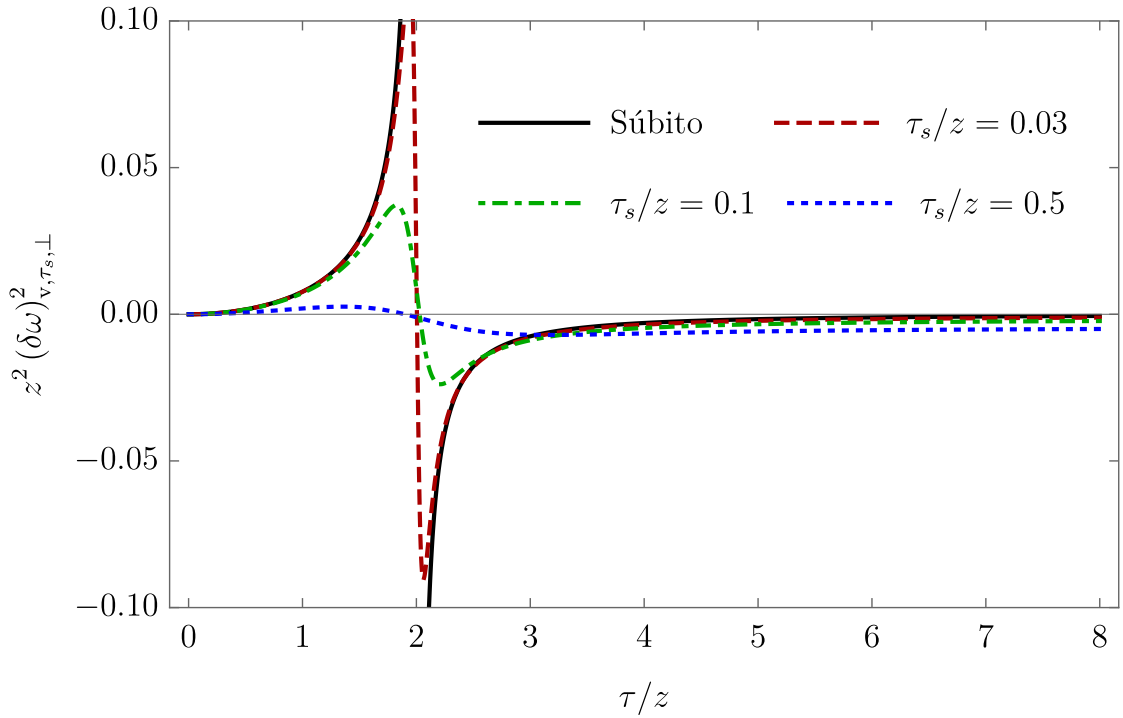
Figura 10 – Comportamentos das dispersões para o caso da transição súbita.

onde, usando as Eqs. (B.3) e (B.4),

$$\begin{aligned}
 (\delta\omega)_{v,\tau_s,\parallel}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s,\tau}(t) F_{\tau_s,\tau}(t') \langle E_z(\mathbf{x},t) E_z(\mathbf{x},t') \rangle_v dt dt' \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s,\tau}(t) F_{\tau_s,\tau}(t')}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - 4z^2]^2} dt dt' \\
 &= \frac{1}{\pi^2} I_1(\tau, \tau_s, 2z), \tag{5.60}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta\omega)_{v,\tau_s,\perp}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s,\tau}(t) F_{\tau_s,\tau}(t') \langle E_x(\mathbf{x},t) E_x(\mathbf{x},t') \rangle_v dt dt' \\
 &= -\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s,\tau}(t) F_{\tau_s,\tau}(t') \frac{(\Delta t - i\epsilon)^2 + 4z^2}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - 4z^2]^3} dt dt' \\
 &= -\frac{1}{\pi^2} I_2(\tau, \tau_s, 2z). \tag{5.61}
 \end{aligned}$$

Os comportamentos de $(\delta\omega)_{v,\tau_s,\parallel}^2$ e $(\delta\omega)_{v,\tau_s,\perp}^2$ estão ilustrados nas Figs. 11 e 12, respectivamente. Note que, assim como no caso da velocidade linear, as dispersões da velocidade angular também apresentaram divergências em $\tau = 2z$, e tais divergências foram completamente curadas com o uso da função de transição. Entretanto, diferentemente do caso anterior, o comportamento das dispersões com o uso da transição suave reproduz algo esperado, as dispersões não apresentaram um comportamento oscilatório em torno de $\tau = 2z$.


 Figura 11 – Comportamento de $(\delta\omega)_{v,\tau_s,||}^2$ para diferentes valores de τ_s/z .

 Figura 12 – Comportamento de $(\delta\omega)_{v,\tau_s,\perp}^2$ para diferentes valores de τ_s/z .

As dispersões para a transição súbita são dadas por

$$(\delta\omega)_{v,||}^2 \equiv \lim_{\tau_s \rightarrow 0} (\delta\omega)_{v,\tau_s,||}^2 = \frac{\tau}{16\pi^2 z^3} \ln \left| \frac{\tau/z + 2}{\tau/z - 2} \right|, \quad (5.62)$$

$$(\delta\omega)_{v,\perp}^2 = \frac{1}{8\pi^2 z^2} \left(-\frac{\tau^2/z^2}{\tau^2/z^2 - 4} + \frac{\tau}{4z} \ln \left| \frac{\tau/z + 2}{\tau/z - 2} \right| \right). \quad (5.63)$$

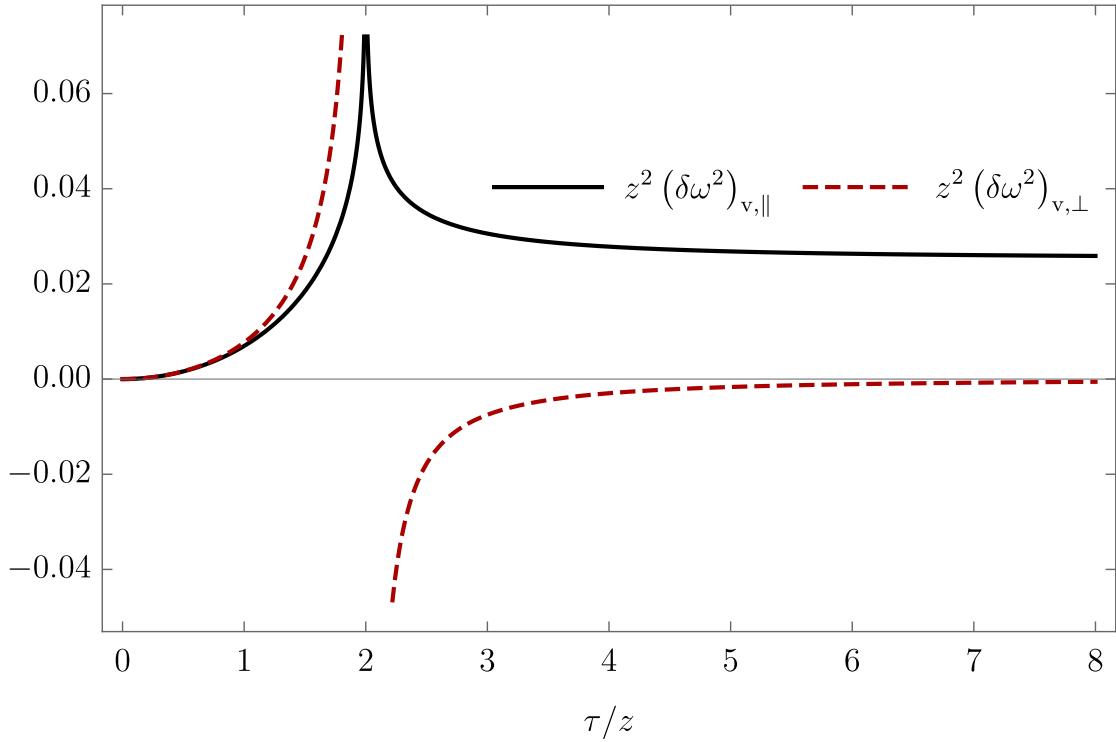


Figura 13 – Comportamentos das dispersões para o caso da transição súbita.

E para o comportamento quando $\tau \rightarrow \infty$,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\delta\omega)_{v,\tau_s,\parallel}^2 = \frac{1}{8\pi^2 z^2} \left[2 - \frac{\tau_s}{z} \arccos \left(\frac{\tau_s^2/z^2 - 1}{\tau_s^2/z^2 + 1} \right) \right], \quad (5.64)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\delta\omega)_{v,\tau_s,\perp}^2 = \frac{1}{16\pi^2 z^2} \left[\frac{2\tau_s^2/z^2}{\tau_s^2/z^2 + 1} - \frac{\tau_s}{z} \arccos \left(\frac{\tau_s^2/z^2 - 1}{\tau_s^2/z^2 + 1} \right) \right], \quad (5.65)$$

onde é fácil ver que,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\delta\omega)_{v,\parallel}^2 = \frac{1}{4\pi^2 z^2}, \quad (5.66)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\delta\omega)_{v,\perp}^2 = 0. \quad (5.67)$$

5.1.3 Contribuição mista

5.1.3.1 Dispersões da velocidade linear

Finalmente, vamos estudar a contribuição mista nas dispersões, obtendo o último termo da Eq. (5.14). Vamos reproduzir o processo efetuado anteriormente, ou seja, da Eq. (5.12),

$$\begin{aligned} \langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{m,\tau_s} &= \sum_j \frac{p_j^2}{m^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \partial'_i \partial_i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s,\tau}(t) F_{\tau_s,\tau}(t') \\ &\quad \times \langle E_j(\mathbf{x},t) E_j(\mathbf{x}',t') \rangle_m dt dt', \end{aligned} \quad (5.68)$$

onde reescrevemos os propagadores (4.36) e (4.37) na forma,

$$\begin{aligned} \langle E_x(\mathbf{x},t) E_x(\mathbf{x}',t') \rangle_m &= -\frac{2}{\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\Delta t + in\beta)^2 - (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (z+z')^2]}{[(\Delta t + in\beta)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z+z')^2]^3} \\ &= -\frac{2}{\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\Delta t + in\beta)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (z+z')^2]}{[(\Delta t + in\beta)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z+z')^2]^3} \\ &\quad + \frac{4}{\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x^2}{[(\Delta t + in\beta)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z+z')^2]^3}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

$$\begin{aligned} \langle E_z(\mathbf{x},t) E_z(\mathbf{x}',t') \rangle_m &= \frac{2}{\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta t + in\beta)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (z+z')^2}{[(\Delta t + in\beta)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z+z')^2]^3} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta t + in\beta)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (z+z')^2}{[(\Delta t + in\beta)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z+z')^2]^3} \\ &\quad - \frac{4}{\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+z')^2}{[(\Delta t + in\beta)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (z+z')^2]^3}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Portanto, sendo $\eta = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + (z+z')^2}$, temos

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \langle E_x(\mathbf{x},t) E_x(\mathbf{x}',t') \rangle_m dt dt' \\ &= -\frac{2}{\pi^2} I_5(\tau, \tau_s, \eta, \beta) + \frac{4\Delta x^2}{\pi^2} I_6(\tau, \tau_s, \eta, \beta), \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \langle E_z(\mathbf{x},t) E_z(\mathbf{x}',t') \rangle_m dt dt' \\ &= \frac{2}{\pi^2} I_5(\tau, \tau_s, \eta, \beta) - \frac{4(z+z')^2}{\pi^2} I_6(\tau, \tau_s, \eta, \beta), \end{aligned} \quad (5.72)$$

onde $I_5(\tau, \tau_s, \eta, \beta)$ e $I_6(\tau, \tau_s, \eta, \beta)$ estão definidos nas Eqs. (B.8) e (B.9), respectivamente.

E novamente escrevendo as dispersões em termos dos $(\delta v_i)_{m, \tau_s, \parallel}^2$ e $(\delta v_i)_{m, \tau_s, \perp}^2$,

$$\langle (\Delta v_i)^2 \rangle_{m, \tau_s} = \frac{p^2}{m^2} \left[(\delta v_i)_{m, \tau_s, \parallel}^2 \cos^2 \theta + (\delta v_i)_{m, \tau_s, \perp}^2 \sin^2 \theta \right]. \quad (5.73)$$

Dessa maneira, tomando as derivadas e limites,

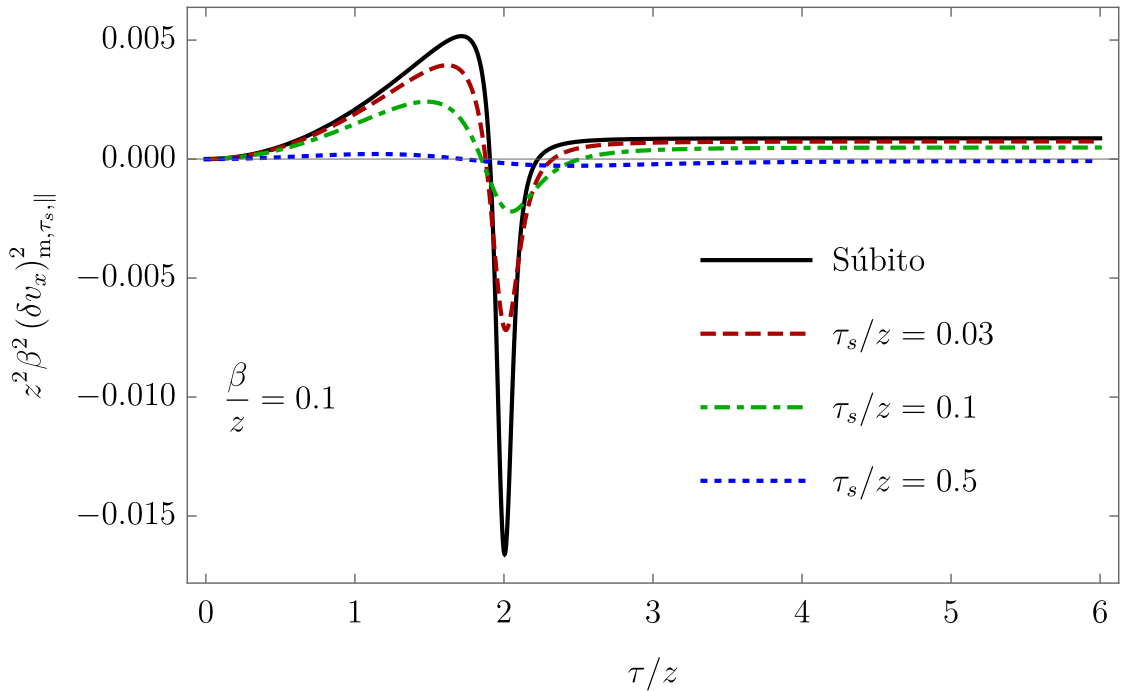
$$\begin{aligned} (\delta v_x)_{m, \tau_s, \parallel}^2 &= \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \langle E_x(\mathbf{x},t) E_x(\mathbf{x}',t') \rangle_m dt dt' \\ &= \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \left[-\frac{2I_5(\tau, \tau_s, \eta, \beta)}{\pi^2} + \frac{4\Delta x^2 I_6(\tau, \tau_s, \eta, \beta)}{\pi^2} \right] \\ &= -\frac{2}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x' \partial x} \frac{\partial I_5}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial x'} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 I_5}{\partial \eta^2} \right) - \frac{8I_6(\tau, \tau_s, 2z, \beta)}{\pi^2} \\ &= \frac{1}{\pi^2 z} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial I_5}{\partial \eta} \right) - \frac{8I_6(\tau, \tau_s, 2z, \beta)}{\pi^2}, \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned}
 (\delta v_x)_{m,\tau_s,\perp}^2 &= (\delta v_y)_{m,\tau_s,\perp}^2 = \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2I_5(\tau, \tau_s, \eta, \beta)}{\pi^2} - \frac{4(z+z')^2 I_6(\tau, \tau_s, \eta, \beta)}{\pi^2} \right] \\
 &= -\frac{1}{\pi^2 z} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial I_5}{\partial \eta} \right) + \frac{8z}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial I_6}{\partial \eta} \right), \tag{5.75}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta v_y)_{m,\tau_s,\parallel} &= \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{2I_5(\tau, \tau_s, \eta, \beta)}{\pi^2} + \frac{4\Delta x^2 I_6(\tau, \tau_s, \eta, \beta)}{\pi^2} \right] \\
 &= -\frac{2}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y' \partial y} \frac{\partial I_5}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y'} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial^2 I_5}{\partial \eta^2} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi^2 z} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial I_5}{\partial \eta} \right), \tag{5.76}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta v_z)_{m,\tau_s,\parallel}^2 &= \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{2I_5(\tau, \tau_s, \eta, \beta)}{\pi^2} + \frac{4\Delta x^2 I_6(\tau, \tau_s, \eta, \beta)}{\pi^2} \right] \\
 &= -\frac{2}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z' \partial z} \frac{\partial I_5}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial z'} \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial^2 I_5}{\partial \eta^2} \right) \\
 &= -\frac{2}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 I_5}{\partial \eta^2} \right), \tag{5.77}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\delta v_z)_{m,\tau_s,\perp}^2 &= \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{2I_5(\tau, \tau_s, \eta, \beta)}{\pi^2} - \frac{4(z+z')^2 I_6(\tau, \tau_s, \eta, \beta)}{\pi^2} \right] \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 I_5}{\partial \eta^2} \right) - \frac{8}{\pi^2} I_6(\tau, \tau_s, 2z, \beta) - \frac{32z}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial I_6}{\partial \eta} \right) \\
 &\quad - \frac{16z^2}{\pi^2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \left(\frac{\partial^2 I_6}{\partial \eta^2} \right). \tag{5.78}
 \end{aligned}$$


 Figura 14 – Comportamento de $(\delta v_x)_{m,\tau_s,\parallel}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$.

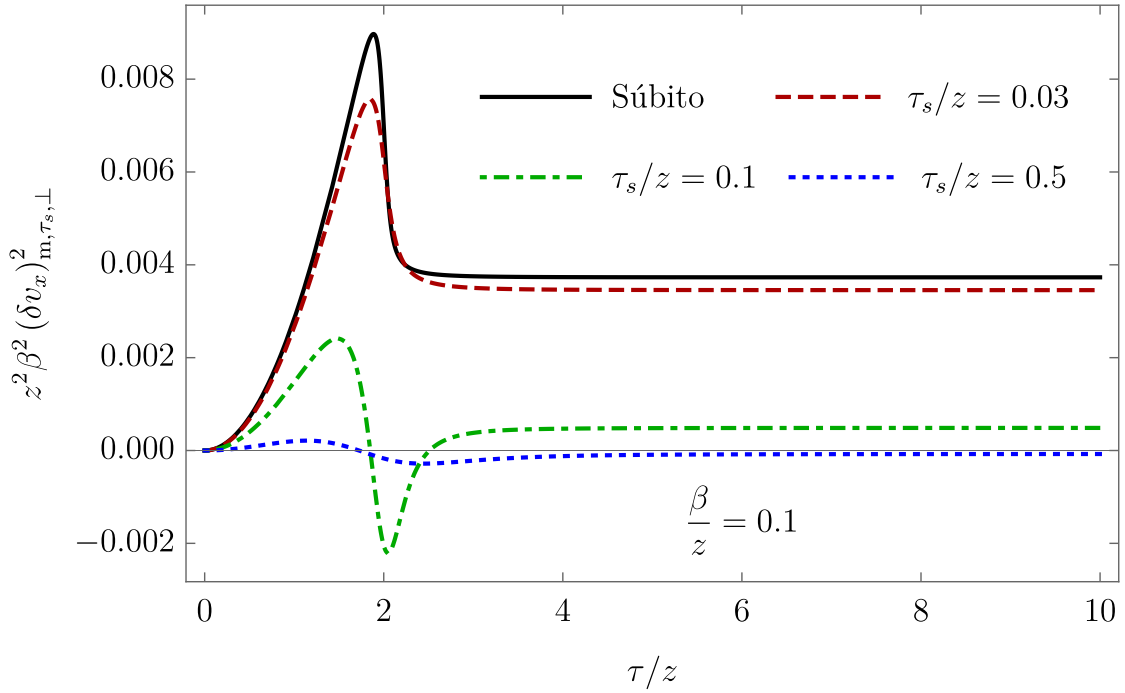


Figura 15 – Comportamento de $(\delta v_x)_{m,\tau_s,\perp}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$. Esse é o mesmo comportamento para $(\delta v_y)_{m,\tau_s,\perp}^2$.

Os comportamentos das dispersões estão ilustrados nas Figs. 14, 15, 16, 17 e 18 com $\beta/z = 1$. Note que as curvas não apresentam divergências, mesmo quando considerada a transição súbita, assim como no caso do monopolo [34]. Na Fig. 19 estão ilustradas as curvas da transição súbita para $\beta/z = 1$. Ainda, assim como na contribuição térmica, quando tomamos $\beta \rightarrow \infty$, as dispersões se anulam, como deveria ser.

5.1.3.2 Dispersões da velocidade angular

Finalmente, vamos calcular a contribuição mista na dispersão da velocidade angular da partícula. Desse modo, as Eqs. (5.10) e (5.11) se tornam,

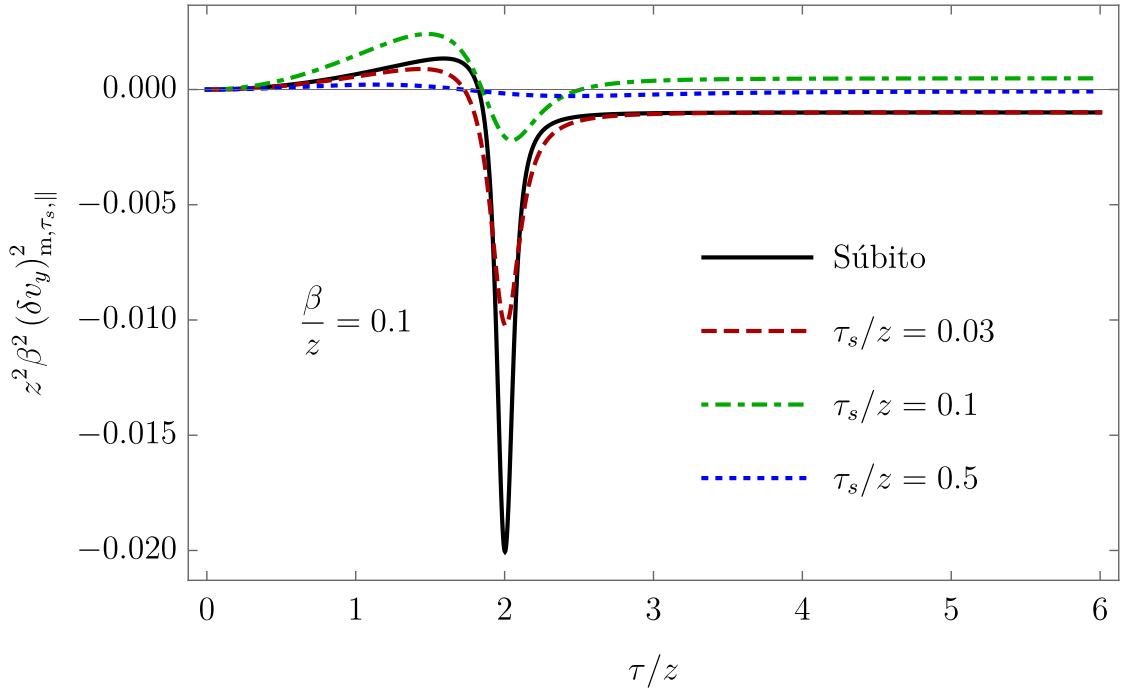
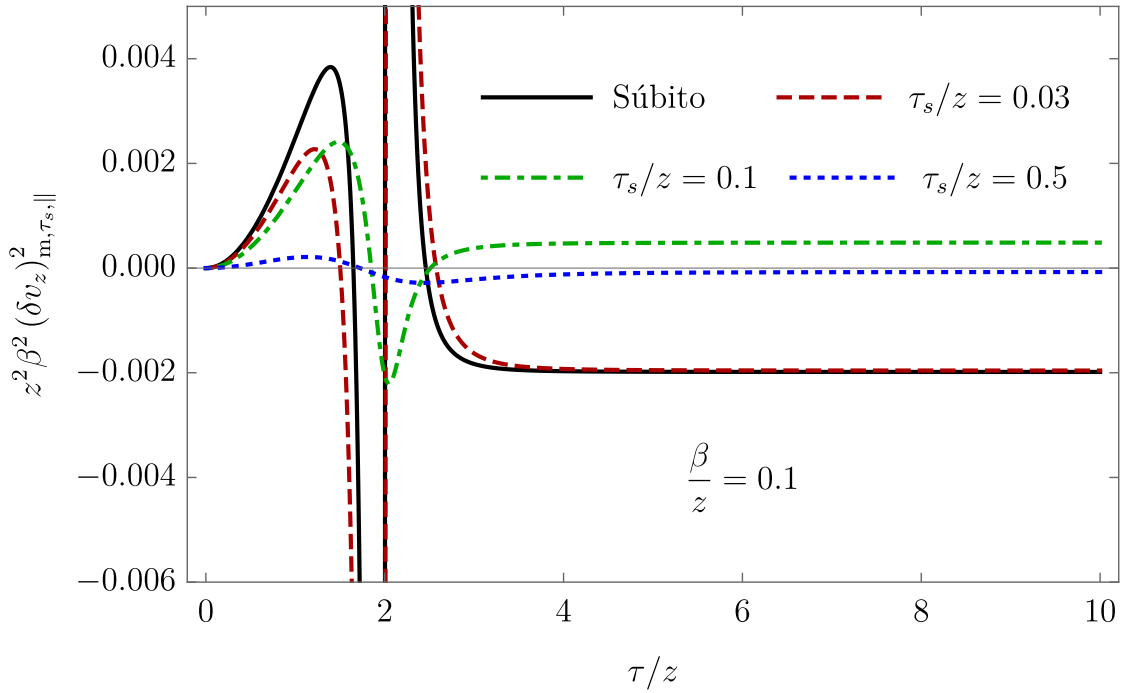
$$\begin{aligned} \langle (\Delta \omega_{x'})^2 \rangle_{m,\tau_s} &= \frac{p^2}{I^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s,\tau}(t) F_{\tau_s,\tau}(t') \left[\langle E_x(\mathbf{x},t) E_x(\mathbf{x},t') \rangle_m \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \langle E_z(\mathbf{x},t) E_z(\mathbf{x},t') \rangle_m \cos^2 \theta \right] dt dt', \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$\langle (\Delta \omega_{y'})^2 \rangle_{m,\tau_s} = \frac{p^2}{I^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s,\tau}(t) F_{\tau_s,\tau}(t') \langle E_y(\mathbf{x},t) E_y(\mathbf{x},t') \rangle_m dt dt'. \quad (5.80)$$

Mas temos que, das Eqs. (4.36) e (4.37),

$$\langle E_x(\mathbf{x},t) E_x(\mathbf{x},t') \rangle_m = \langle E_y(\mathbf{x},t) E_y(\mathbf{x},t') \rangle_m = -\frac{2}{\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta t + in\beta)^2 + 4z^2}{[(\Delta t + in\beta)^2 - 4z^2]^3},$$

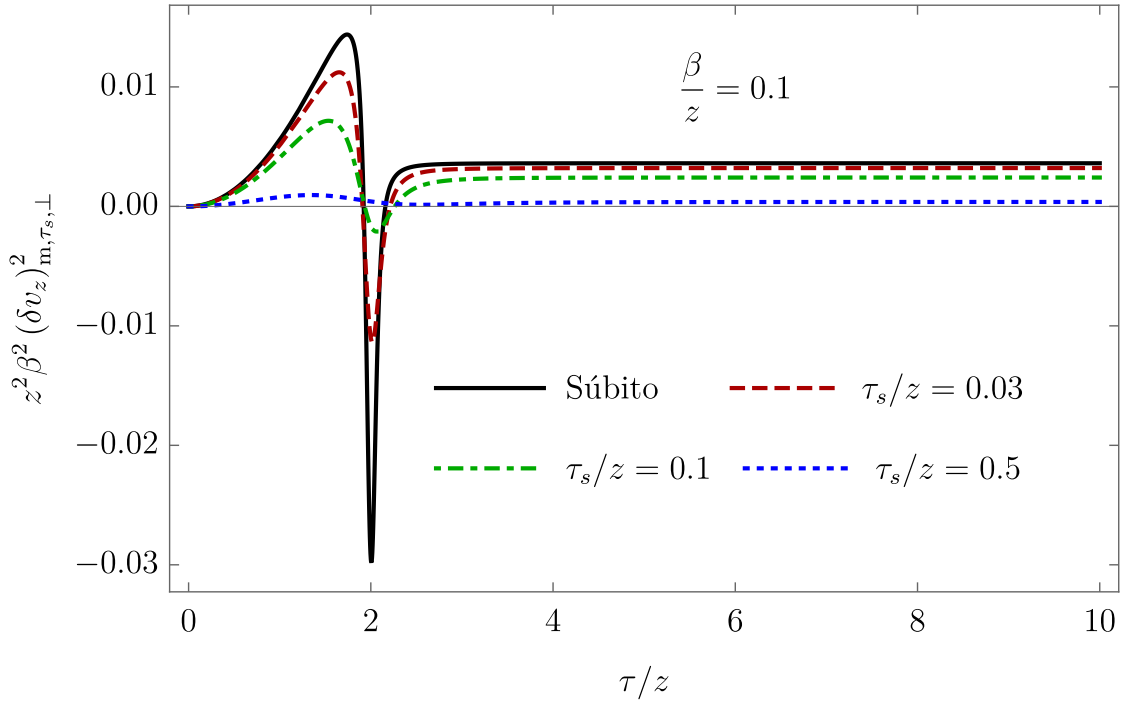
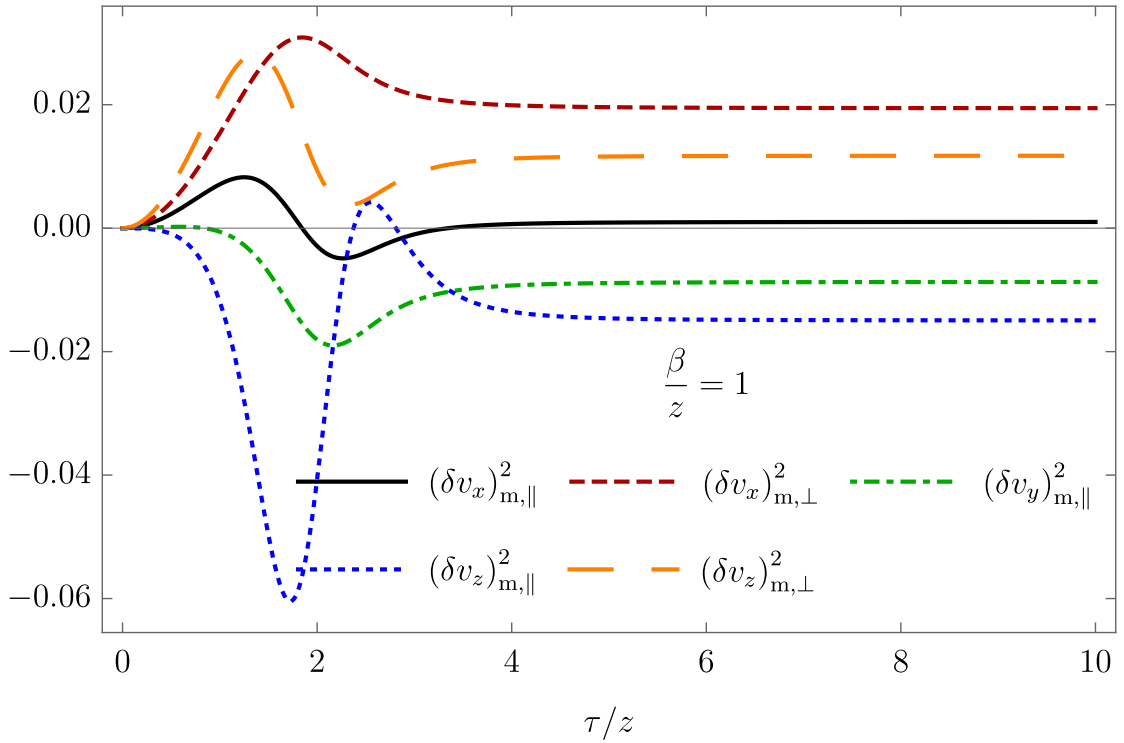
$$\langle E_z(\mathbf{x},t) E_z(\mathbf{x},t') \rangle_m = \frac{2}{\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[(\Delta t + in\beta)^2 - 4z^2]^2}.$$


 Figura 16 – Comportamento de $(\delta v_y)_{m,\tau_s,||}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$.

 Figura 17 – Comportamento de $(\delta v_z)_{m,\tau_s,||}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$.

Escrevendo as dispersões como nos casos anteriores, ou seja, as Eqs. (5.79) e (5.80) como,

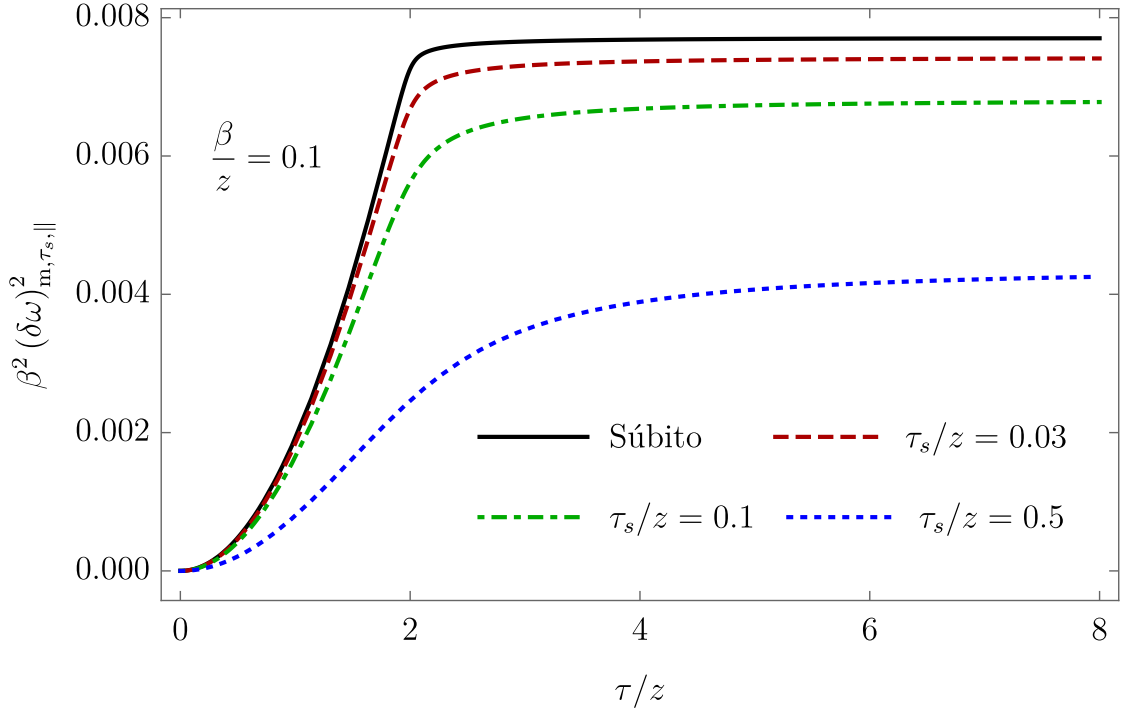
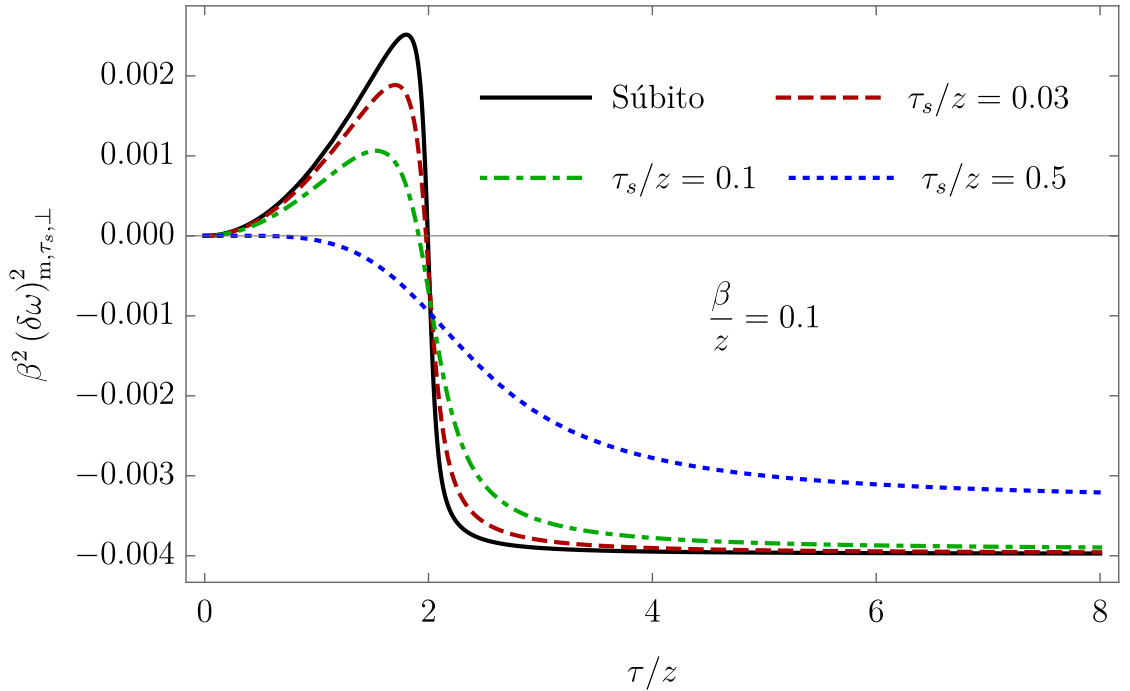
$$\langle (\Delta\omega_{x'})^2 \rangle_{m,\tau_s} = \frac{p^2}{I^2} \left[(\delta\omega)_{m,\tau_s,||}^2 \cos^2 \theta + (\delta\omega)_{m,\tau_s,\perp}^2 \sin^2 \theta \right], \quad (5.81)$$

$$\langle (\Delta\omega_{y'})^2 \rangle_{m,\tau_s} = \frac{p^2}{I^2} (\delta\omega)_{m,\tau_s,\perp}^2. \quad (5.82)$$


 Figura 18 – Comportamento de $(\delta v_z)_{m,\tau_s,\perp}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$.

 Figura 19 – Comportamentos das dispersões para o caso da transição súbita com $\beta/z = 1$.

Portanto, das Eqs. (B.7) e (B.8),

$$\begin{aligned}
 (\delta\omega)_{m,\tau_s,\parallel}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s,\tau}(t) F_{\tau_s,\tau}(t') \langle E_z(\mathbf{x},t) E_z(\mathbf{x},t') \rangle_m dt dt' \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s,\tau}(t) F_{\tau_s,\tau}(t')}{[(\Delta t + in\beta)^2 - 4z^2]^2} dt dt' \\
 &= \frac{2}{\pi^2} I_4(\tau, \tau_s, 2z, \beta), \tag{5.83}
 \end{aligned}$$


 Figura 20 – Comportamento de $(\delta\omega)_{m,\tau_s,\parallel}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$.

 Figura 21 – Comportamento de $(\delta\omega)_{m,\tau_s,\perp}^2$ para diferentes valores de τ_s/z com $\beta/z = 0.1$.

$$\begin{aligned}
 (\delta\omega)_{m,\tau_s,\perp}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s,\tau}(t) F_{\tau_s,\tau}(t') \langle E_x(\mathbf{x},t) E_x(\mathbf{x},t') \rangle_m dt dt' \\
 &= -\frac{2}{\pi^2} \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s,\tau}(t) F_{\tau_s,\tau}(t') \frac{(\Delta t + in\beta)^2 + 4z^2}{[(\Delta t + in\beta)^2 - 4z^2]^3} dt dt' \\
 &= -\frac{2}{\pi^2} I_5(\tau, \tau_s, 2z, \beta). \tag{5.84}
 \end{aligned}$$

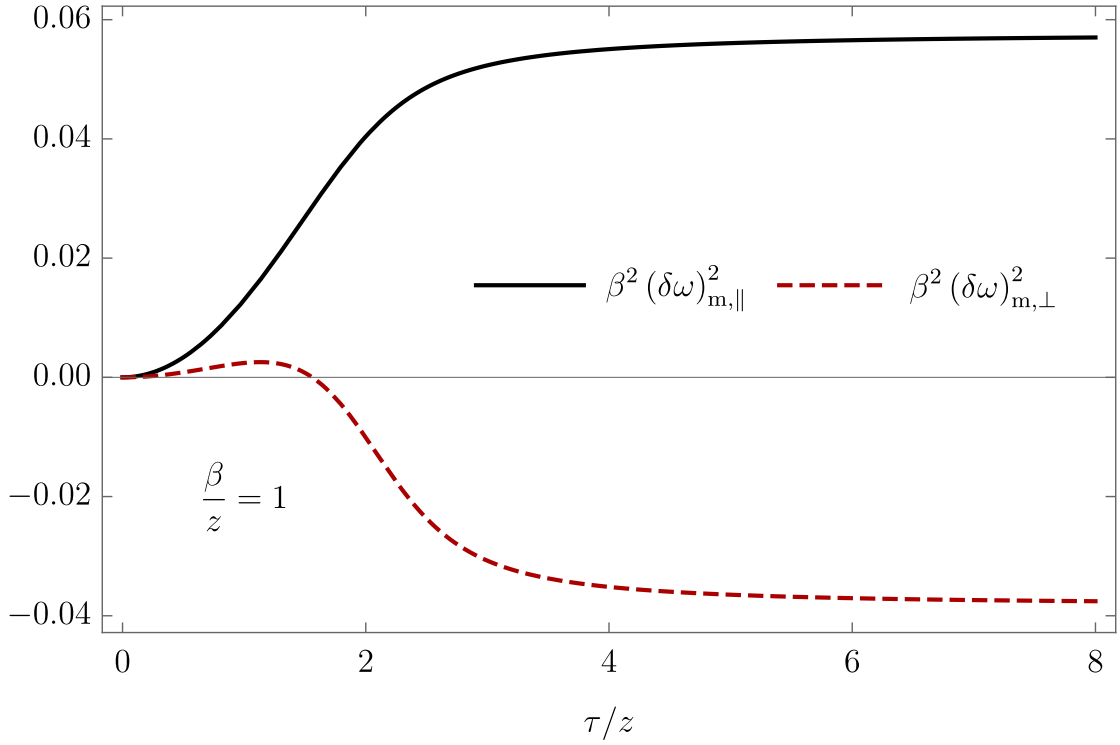


Figura 22 – Comportamentos de $(\delta\omega)_{m,\parallel}^2$ e $(\delta\omega)_{m,\perp}^2$ com $\beta/z = 1$.

Os comportamentos de $(\delta\omega)_{m,\tau_s,\parallel}^2$ e $(\delta\omega)_{m,\tau_s,\perp}^2$ estão ilustrados nas Figs. 20 e 21, respectivamente. Assim como no caso da velocidade linear, as dispersões da velocidade angular são regulares em $\tau = 2z$. Na Fig. 22 estão ilustrados os comportamentos para a transição súbita.

5.2 Energia da partícula e estimativas

Nessa seção, vamos aplicar as dispersões calculadas anteriormente para estudar a energia cinética média adquirida pela partícula,

$$\langle K \rangle = \frac{m}{2} \langle \mathbf{v}^2 \rangle + \frac{I}{2} \langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle, \quad (5.85)$$

que é a soma da energia linear mais a energia rotacional obtida com respeito ao centro de massa da partícula. Assim como no cálculo das dispersões, vamos separar a energia na sua contribuição térmica, contribuição do vácuo modificado, e contribuição mista,

$$\langle K \rangle = \langle K \rangle_{\beta} + \langle K \rangle_{\text{v}} + \langle K \rangle_{\text{m}}. \quad (5.86)$$

E além disso, como discutido na dispersão devido ao vácuo modificado, o uso da função de transição apresentou um comportamento não esperado. Por esse motivo, aqui analisaremos apenas a energia da partícula considerando a transição súbita, ou seja, sempre estaremos tratando o regime com $\tau_s \rightarrow 0$.

Portanto, primeiramente para a contribuição térmica na energia teremos, das Eqs. (5.22) e (5.29),

$$\begin{aligned}
\langle K \rangle_\beta &= \frac{m}{2} \left(\langle v_x^2 \rangle_\beta + \langle v_y^2 \rangle_\beta + \langle v_z^2 \rangle_\beta \right) + \frac{I}{2} \left(\langle \omega_{x'}^2 \rangle_\beta + \langle \omega_{y'}^2 \rangle_\beta + \langle \omega_{z'}^2 \rangle_\beta \right) \\
&= \frac{5}{2} m \langle v_{z'}^2 \rangle_\beta + I \langle \omega_{x'}^2 \rangle_\beta \\
&= \frac{\pi^2 p^2}{45 m \beta^4} \left\{ 1 + \frac{45 \beta^4}{\pi^4 \tau^4} - 15 \left[2 + \cosh \left(\frac{2\pi\tau}{\beta} \right) \right] \operatorname{csch}^4 \left(\frac{\pi\tau}{\beta} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{p^2}{9 I \beta^2} \left[1 - \frac{3\beta^2}{\pi^2 \tau^2} + 3 \operatorname{csch}^2 \left(\frac{\pi\tau}{\beta} \right) \right] \\
&= \frac{p^2}{m \beta^4} \left[\frac{\pi^2}{45} f_\beta(\tau) + \frac{m \beta^2}{9 I} g_\beta(\tau) \right] = \frac{p^2}{m \beta^4} \left[\frac{\pi^2}{45} f_\beta(\tau) + \frac{4\gamma^2}{9} g_\beta(\tau) \right], \tag{5.87}
\end{aligned}$$

onde definimos $\gamma^2 \equiv \frac{m \beta^2}{4I}$, e

$$f_\beta(\tau) = 1 + \frac{45 \beta^4}{\pi^4 \tau^4} - 15 \left[2 + \cosh \left(\frac{2\pi\tau}{\beta} \right) \right] \operatorname{csch}^4 \left(\frac{\pi\tau}{\beta} \right), \tag{5.88}$$

$$g_\beta(\tau) = 1 - \frac{3\beta^2}{\pi^2 \tau^2} + 3 \operatorname{csch}^2 \left(\frac{\pi\tau}{\beta} \right). \tag{5.89}$$

No caso de um dipolo de comprimento a , o seu momento de inércia é dado por $I = ma^2/4$, logo $\gamma = \beta/a$.

Como $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f_\beta(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} g_\beta(\tau) = 1$, o parâmetro γ na Eq. (5.87) indica o quanto da energia total da partícula é proveniente da energia rotacional. Assim, se $\gamma \gg 1$, a energia linear será desprezível com relação à energia rotacional. Na Fig. 23 está ilustrado o comportamento da energia do dipolo, onde $\gamma = 1$ foi tomado apenas para analisar as diferentes contribuições. E ainda é fácil ver que,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle K \rangle_\beta = \frac{p^2}{m \beta^4} \left(\frac{\pi^2}{45} + \frac{4\gamma^2}{9} \right). \tag{5.90}$$

Além disso, observamos que a contribuição linear atinge um valor transiente maior que o seu valor assintótico. Isso significa que ao colocar o dipolo no banho térmico, ele adquire mais energia que manterá em seu regime estacionário. Parte da energia inicialmente transferida para o movimento linear do dipolo eventualmente retornará para o campo de radiação ou será convertida em energia rotacional.

Para termos algumas estimativas sobre as magnitudes das contribuições na energia total do dipolo, vamos expressar γ como,

$$\gamma = \frac{1}{aT} = 2.29 \times 10^6 \left(\frac{1\text{nm}}{a} \right) \left(\frac{1\text{K}}{T} \right). \tag{5.91}$$

Portanto, a configuração com $\gamma \gg 1$ é bastante realista, se consideramos um banho térmico com temperatura em torno de 300K teremos $\gamma \approx 10^3$ para dipolos típicos, o que

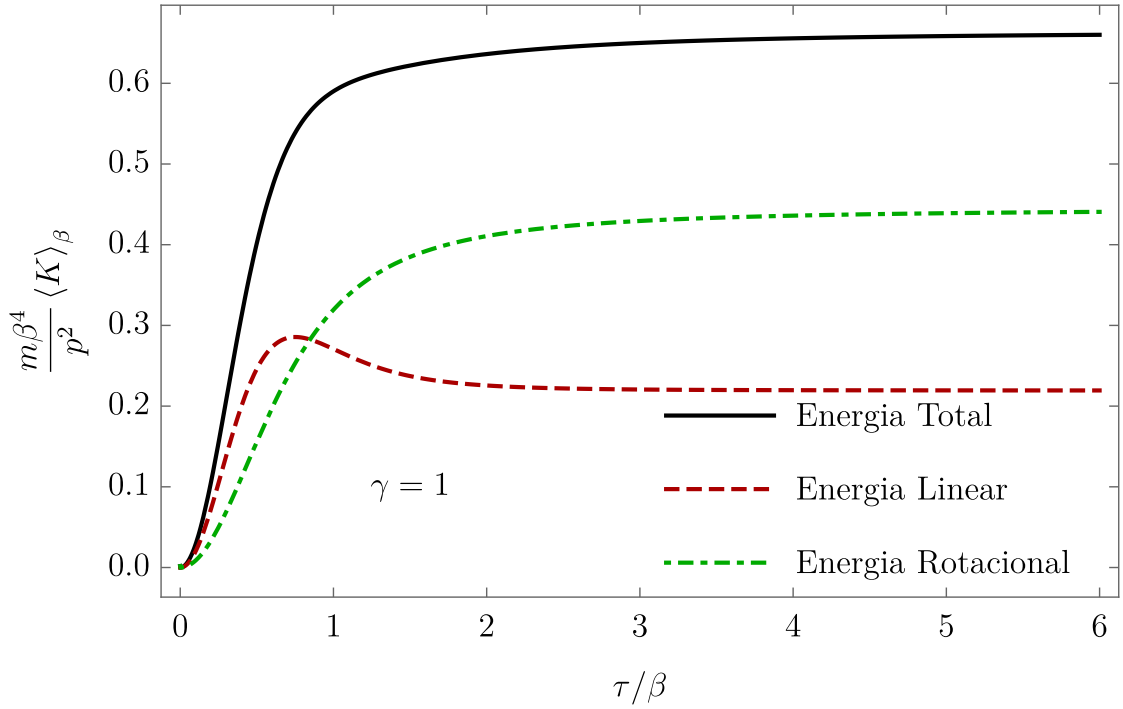


Figura 23 – Valor médio da energia cinética do dipolo devido à contribuição térmica com $\gamma = 1$.

confirma que a energia rotacional absorvida pela partícula é muito maior que a energia linear.

E agora, para a contribuição devido ao vácuo modificado,

$$\begin{aligned}
 \langle K \rangle_v &= \frac{m}{2} \left(\langle v_x^2 \rangle_v + \langle v_y^2 \rangle_v + \langle v_z^2 \rangle_v \right) + \frac{I}{2} \left(\langle \omega_{x'}^2 \rangle_v + \langle \omega_{y'}^2 \rangle_v \right) \\
 &= \frac{p^2}{2mz^4} \left[z^4 (\delta \mathbf{v})_{v,\parallel}^2 \cos^2 \theta + z^4 (\delta \mathbf{v})_{v,\perp}^2 \sin^2 \theta \right] \\
 &\quad + \frac{p^2}{2mz^4} \frac{4z^2}{a^2} \left[z^2 (\delta \omega)_{v,\parallel}^2 \cos^2 \theta + z^2 (\delta \omega)_{v,\perp}^2 (1 + \sin^2 \theta) \right] \quad (5.92)
 \end{aligned}$$

onde $(\delta \mathbf{v})_{v,\parallel}^2 = (\delta v_x)_{v,\parallel}^2 + (\delta v_y)_{v,\parallel}^2 + (\delta v_z)_{v,\parallel}^2$ e $(\delta \mathbf{v})_{v,\perp}^2 = 2(\delta v_x)_{v,\perp}^2 + (\delta v_z)_{v,\perp}^2$. Na Fig. 24 ilustramos o comportamento da energia da partícula considerando o dipolo paralelo à placa ($\theta = 0$) e também perpendicular ($\theta = \pi/2$), e as curvas com $z/a = 0$ ilustram o comportamento apenas da parte linear da energia.

E ainda, a energia possui um valor residual dado por,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle K \rangle_v = \frac{p^2}{16\pi^2 m z^4} \left[4 - 3 \cos(2\theta) + \frac{8z^2}{\pi^2 a^2} \cos^2 \theta \right]. \quad (5.93)$$

Podemos notar que, assim como no caso do monopolo elétrico e da partícula escalar, aqui também ocorre o efeito de subvácuo, onde quantidades classicamente positivas adquirem valores negativos quando tratado o sistema quântico após a renormalização. Assim como nos casos já conhecidos na literatura, podemos justificar esse resultado como

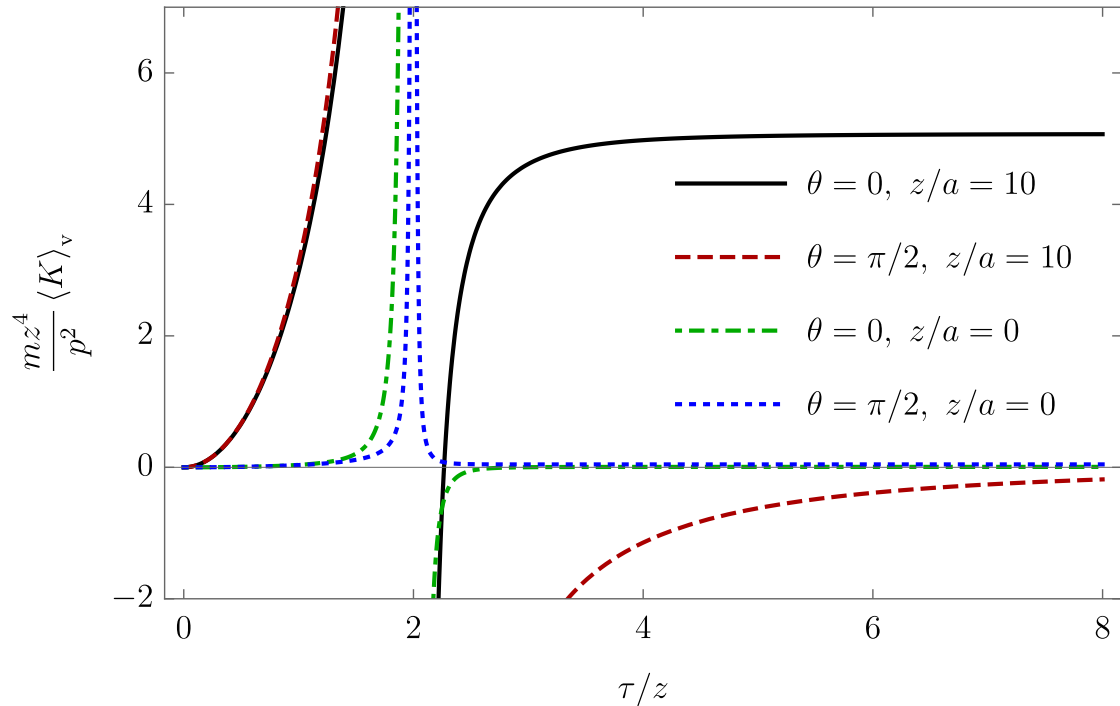


Figura 24 – Valor médio da energia $\langle K \rangle_v$ considerando o dipolo paralelo à placa ($\theta = 0$) e também perpendicular ($\theta = \pi/2$).

sendo uma supressão do valor clássico, ou seja, ao se introduzir as flutuações quânticas e considerando a interação clássica do dipolo com a fronteira, teremos um valor menor para a energia do dipolo.

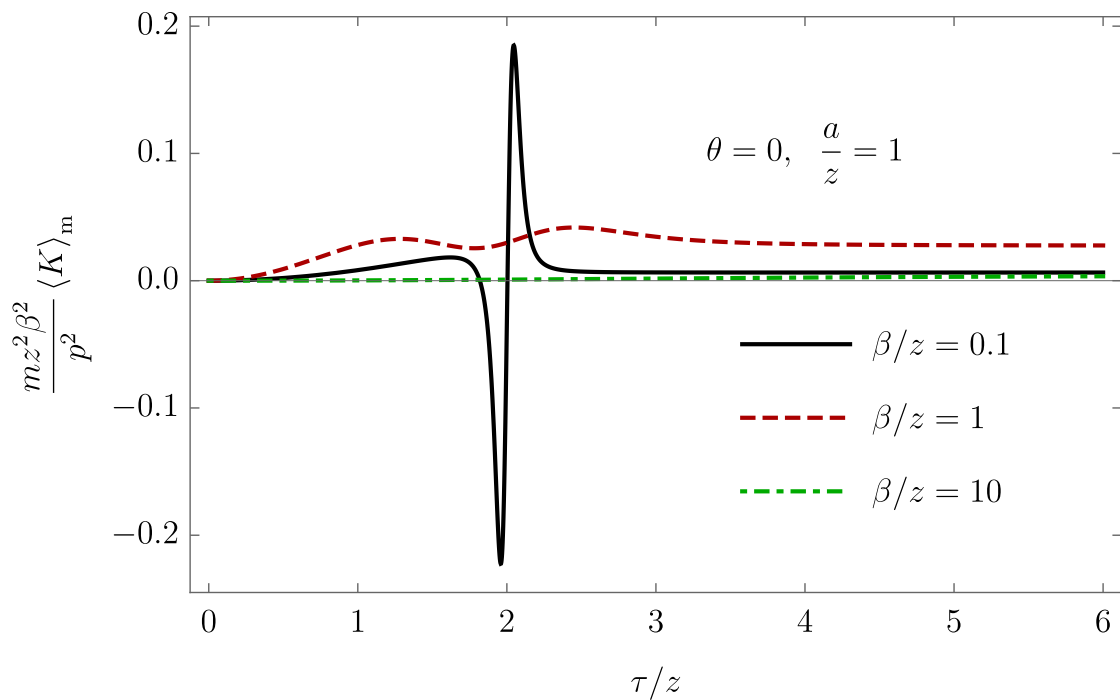


Figura 25 – Valor médio da energia $\langle K \rangle_m$ considerando o dipolo paralelo à placa ($\theta = 0$) para diferentes valores de β/z .

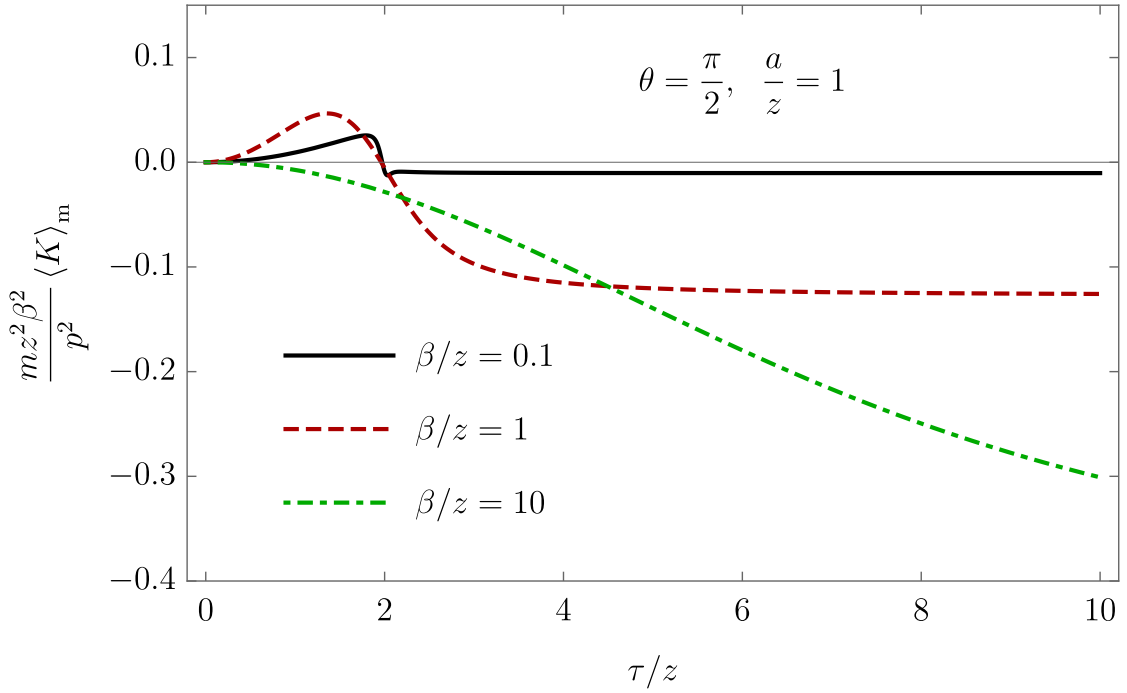


Figura 26 – Valor médio da energia $\langle K \rangle_v$ considerando o dipolo perpendicular à placa ($\theta = \pi/2$) para diferentes valores de β/z .

E por fim, vamos calcular a contribuição mista na energia da partícula,

$$\begin{aligned}
 \langle K \rangle_m &= \frac{m}{2} \left(\langle v_x^2 \rangle_v + \langle v_y^2 \rangle_v + \langle v_z^2 \rangle_v \right) + \frac{I}{2} \left(\langle \omega_{x'}^2 \rangle_v + \langle \omega_{y'}^2 \rangle_v \right) \\
 &= \frac{p^2}{2mz^2\beta^2} \left[z^2\beta^2 (\delta\mathbf{v}_{v,\parallel})^2 \cos^2\theta + z^2\beta^2 (\delta\mathbf{v}_{v,\perp})^2 \sin^2\theta \right] \\
 &\quad + \frac{p^2}{2mz^2\beta^2} \frac{4z^2}{a^2} \left[\beta^2 (\delta\omega)_{v,\parallel}^2 \cos^2\theta + \beta^2 (\delta\omega)_{v,\perp}^2 (1 + \sin^2\theta) \right]. \quad (5.94)
 \end{aligned}$$

Nas Figs. 25 e 26 ilustrados a contribuição mista na energia do dipolo quando este está paralelo e perpendicular à placa, respectivamente. Já na Fig. 27 decompos a energia do dipolo em sua parte linear e rotacional, com o dipolo paralelo à placa.

E finalmente, somando as Eqs. (5.87), (5.92) e (5.94) obtemos a energia total adquirida pelo dipolo, considerando sua contribuição térmica, do vácuo modificado e também a mista,

$$\langle K \rangle = \langle K \rangle_\beta + \langle K \rangle_v + \langle K \rangle_m. \quad (5.95)$$

Valores típicos de z/β podem ser especificados retornando as unidades dimensionais,

$$zT = 4.37 \times 10^2 \left(\frac{z}{1\text{m}} \right) \left(\frac{T}{1\text{K}} \right), \quad (5.96)$$

logo z/β é da ordem de 1 para $z \approx 1\text{mm}$ e $T \approx 10\text{K}$. Na Fig. 28 apresentamos os comportamentos dessa energia total considerando o dipolo paralelo e também perpendicular à placa, para $\beta/z = 1$ e $\gamma = 1$.

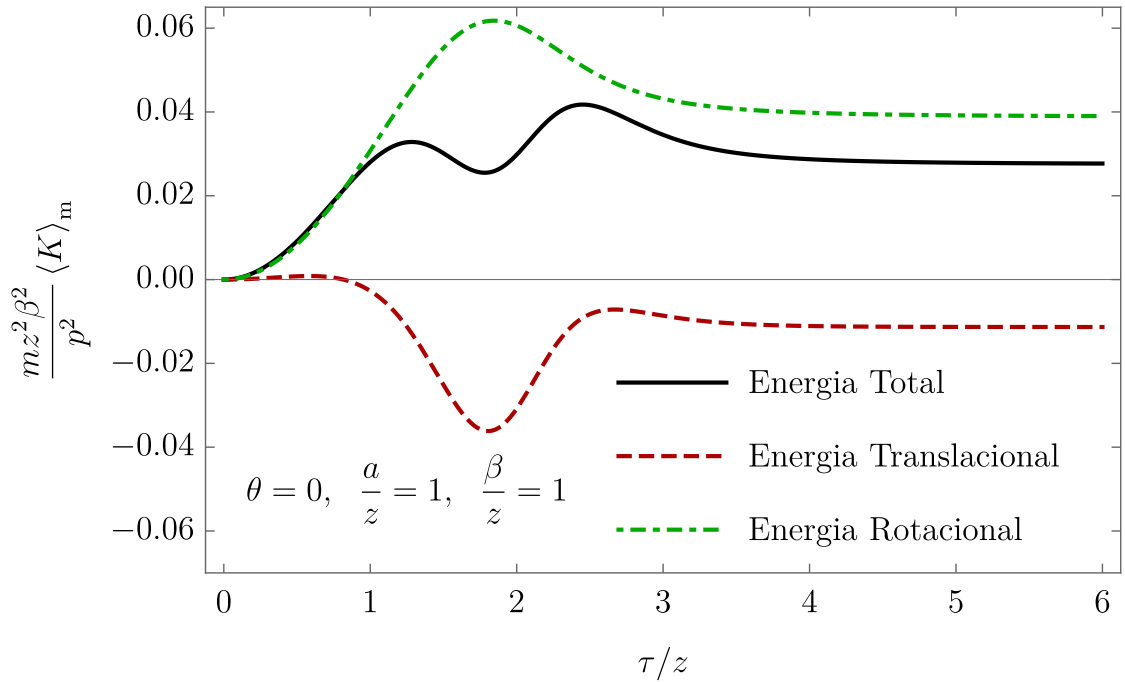


Figura 27 – Contribuição na energia da partícula devido o movimento linear e rotacional do dipolo.

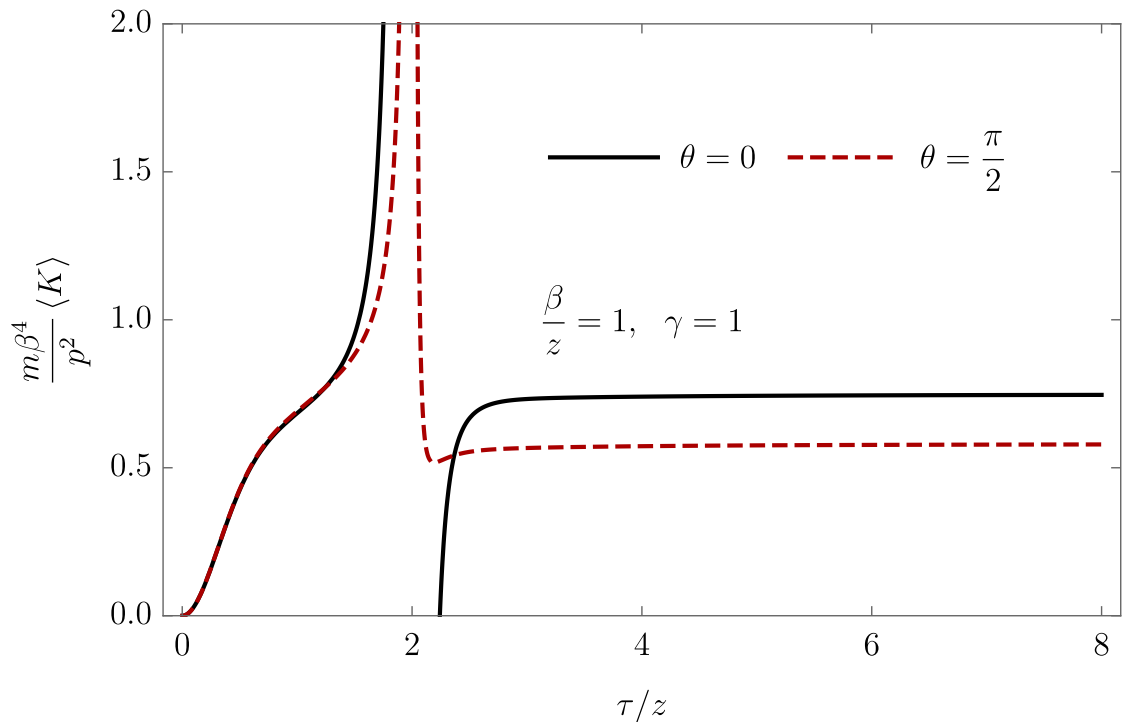


Figura 28 – Energia total do dipolo, considerando sua contribuição térmica, do vácuo modificado e mista.

Assim como obtido para a contribuição da presença da fronteira, as Figs. 25 e 26 mostram que valores negativos na energia cinética do dipolo podem ser obtidos considerando apenas a contribuição mista, e na Fig. 28 podemos ver que quando o dipolo está paralelo à placa, mesmo considerando a energia cinética total do dipolo, ainda obtemos

valores negativos. Tal efeito também ocorre no caso de uma carga elétrica [34], e é interpretado como um efeito de subvácuo, onde as flutuações quânticas do campo elétrico sobre a partícula causam a diminuição de uma quantidade positiva, que seria a contribuição clássica para a sua energia cinética.

Por fim, para obter algumas estimativas e possíveis consequências dos nossos resultados, consideremos o caso do banho térmico puro, na ausência da placa. Vamos assumir que a partícula tem massa $m_0 = 1.2 \times 10^{-22}$ g e momento de dipolo $p_0 = 10.27$ D, onde D denota a unidade debye ($1\text{D} \approx 3.36 \times 10^{-30}$ Cm). Esses são aproximadamente os dados para uma molécula típica, como o KCl. Temos que o sistema atinge o seu regime assintótico após um intervalo que depende da temperatura, dado por,

$$\tau_e = 10^{-11} \left(\frac{1\text{K}}{T} \right) \text{s}. \quad (5.97)$$

Após esse intervalo a partícula adquire incertezas Δv e $\Delta \omega$ em suas velocidades linear e angular, respectivamente, podendo ser obtidas das Eqs. (5.22) e (5.29) somando a contribuição de todas as componentes e depois tomando a raiz quadrada,

$$\Delta v = 7.2 \times 10^{-15} \left(\frac{p}{p_0} \right) \left(\frac{m_0}{m} \right) \left(\frac{T}{1\text{K}} \right) \text{ms}^{-1}, \quad (5.98)$$

$$\Delta \omega = 4.7 \times 10^3 \left(\frac{p}{p_0} \right) \left(\frac{m_0}{m} \right) \left(\frac{T}{1\text{K}} \right) \left(\frac{1\text{\AA}}{a} \right)^2 \text{rad s}^{-1}, \quad (5.99)$$

o que atinge o valor da ordem de 10^5rad s^{-1} na temperatura ambiente.

Uma forma de se medir a influência das flutuações quânticas do vácuo sobre o comportamento da partícula poderia ser através de um arranjo tal que uma molécula com um dado momento de dipolo é enviada através de uma região contendo o banho térmico/fronteira. Como as dispersões quânticas da velocidade não são iguais em todas as direções, o dipolo apresentará uma dispersão anisotrópica. Neste experimento, o desvio em relação à direção clássica do movimento pode ser detectado e comparado com a incerteza na velocidade adquirida durante sua interação com as flutuações quânticas. Apesar do fato de que este procedimento requer uma partícula em movimento, as expressões aqui derivadas para as dispersões permanecem válidas enquanto o movimento clássico for não relativístico. Este raciocínio foi usado como uma possível forma de detectar flutuações de vácuo modificadas em um sistema similar [32].

Concluimos esta seção com uma discussão sobre o limite de validade de nossos resultados. Lembramos que ao derivar as Eqs. (5.3), (5.7) e (5.8), assumimos que tanto a posição da partícula quanto seu momento de dipolo permanecem independentes do tempo ao longo da evolução do sistema. No entanto, na Eq. (5.99), por exemplo, mostramos que para parâmetros dentro da faixa experimental em 1 segundo esperamos que o momento dipolar sofra muitas rotações, violando assim a suposição do modelo de \mathbf{p} estacionário.

Em particular, nossos resultados não podem ser extrapolados para estudar condições de equilíbrio (termodinâmico) em contraste com a análise clássica de movimento browniano. Portanto, nossos resultados são confiáveis para um determinado tempo de medição τ dependendo dos parâmetros do sistema. De nossas estimativas para um banho térmico puro, obtivemos, por exemplo, que o tempo transitório do sistema é dado pela Eq. (5.97), a partir do qual podemos estimar o ângulo de rotação usando a velocidade angular como $\Delta\omega\tau_e \approx 10^{-8}\text{rad}$, sendo um deslocamento angular pequeno, que justifica tratar \mathbf{p} como constante nas Eqs. (5.3), (5.7) e (5.8). Finalmente, também assumimos que o centro de massa da partícula permanece aproximadamente em repouso durante a evolução do sistema. Em [32] foi mostrado que enquanto a partícula sofre um movimento não relativístico, que em nosso modelo corresponde a pequenas dispersões de velocidade, assumir um centro de massa estacionário equivale a determinar a contribuição principal para as dispersões.

6 Conclusões

Nesta tese foram obtidos os seguintes resultados originais:

- Calculamos as divergências e formulamos a versão covariante da ação induzida pela anomalia em um espaço-tempo curvo com torção. A principal novidade foi a obtenção de um novo exemplo de anomalia multiplicativa na divergência de 1-loop da nossa teoria, dada pela diferença dos termos nos coeficientes de derivadas totais das Eqs. (3.32) e (3.58). Essa ambiguidade não pode ser removida pela mudança da condição de renormalização.
- Obtivemos pela primeira vez a forma covariante da ação induzida, separando em sua parte local (3.77) e não-local (3.70), que ainda foi possível representar na sua forma local com o uso de campos escalares auxiliares (3.80). Todos os termos da parte local (3.77) são ambíguos, já que, como implicação da anomalia multiplicativa, os coeficientes $\gamma_{1,2}$ também são ambíguos, como apontado nas Eqs. (3.66), (3.67) e (3.68). Além disso, podemos ainda fazer a mudança $R^2 \rightarrow \frac{1}{3}R_{\mu\nu}^2$ ou $R^2 \rightarrow \frac{1}{3}R_{\mu\nu\alpha\beta}^2$, como apontado na Eq. (3.79).
- Estudamos o movimento de um dipolo próximo a uma fronteira condutora em regime de temperatura finita, e calculamos as dispersões em suas velocidades linear e angular. Na contribuição do vácuo modificado, devido unicamente à presença da fronteira, divergências foram encontradas nas dispersões, como ilustrado nas Figs. 10 e 13. Porém o uso da função de transição, estabelecendo uma transição suave entre o vácuo de Minkowski e o vácuo modificado, foi suficiente para regularizar tais resultados divergentes em torno de $\tau = 2z$. Entretanto, como foi possível notar, apesar do resultado finito, o uso da função de transição trouxe um comportamento oscilatório nas dispersões, o que não reproduz um efeito esperado, é esperado um ajuste suave entre as curvas com a função de transição e o caso súbito, como foi obtido para o caso de uma carga carregada [34] e também para uma partícula escalar [36, 37]. Ao usar uma generalização da Lorentziana [32] como função de transição, o comportamento oscilatório de repetiu, logo, para eliminar tais divergências deve ser necessário o uso de outro método de regularização, como por exemplo, considerar que a fronteira é constituída por um dielétrico.
- Verificamos que sobre a energia cinética do dipolo, tanto para a contribuição da fronteira quanto para a contribuição mista foram obtidos valores negativos, como mostram as Figs. 24, 25 e 26. E ainda, mesmo quando consideramos a energia total do dipolo, quando o dipolo está paralelo à placa ainda obtivemos valores negativos,

como mostra a Fig. 28. Tal efeito é conhecido na literatura, inclusive para o caso de uma partícula carregada [34], e é interpretado como um efeito de subvácio, onde as flutuações quânticas do campo elétrico sobre a partícula causam a diminuição de uma quantidade positiva, ou seja, ao incluir o movimento clássico da partícula interagindo com a placa, o dipolo irá descrever um determinado movimento, adquirindo, assim, uma quantidade de energia cinética, que teria uma parte suprimida pelas flutuações quânticas do campo. Para o caso onde o dipolo interage apenas com o banho de fótons ou com a fronteira separadamente, calculamos ainda sua energia residual, dadas nas Eq. (5.90) e (5.93), sendo quantidades sempre positivas.

- Um possível observável para este sistema consiste no movimento de uma partícula teste atravessando uma região contendo a fronteira num regime de temperatura finita. Dada a anisotropia das dispersões da velocidade dessa partícula, o desvio em relação ao movimento clássico pode ser detectado e comparado com a incerteza na velocidade adquirida durante a interação com as flutuações quânticas. Outro observável que pode ser medido é uma eventual radiação emitida pelo dipolo por sua rotação. Considerando o dipolo colocado em repouso numa cavidade com temperatura T , é esperado que, quando o sistema atingir o seu regime estacionário, a incerteza em sua frequência de rotação será $\Delta\omega$. Portanto, é esperado que uma radiação possa ser emitida com um intervalo de frequência $0 < \omega < \Delta\omega$.
- Analisamos ainda o regime de validade do nosso sistema, onde mostramos que, apesar do dipolo adquirir uma incerteza muito grande na dispersão de sua velocidade angular, como apontado na Eq. (5.99), o ângulo de rotação do dipolo até atingir o efeito residual é muito baixo, da ordem de $\Delta\omega\tau_e \approx 10^{-7}$ rad, o que justifica tratar \mathbf{p} como constante nas Eqs. (5.3), (5.7) e (5.8). E ainda assumimos que o centro de massa da partícula permanece aproximadamente em repouso durante a evolução do sistema, o que é justificável enquanto a partícula sofre um movimento não relativístico.

Podemos apontar alguns estudos que podem ser realizados posteriormente. Sobre o estudo da ação efetiva e anomalia, é possível incluir a interação dos campos de matéria com o traço T_μ da torção, o que iria modificar a expressão da anomalia, uma vez que esse traço não é um invariante conforme. Outro trabalho posterior é o uso da solução covariante e local da ação induzida para analisar a propagação de campos de matéria interagindo com a torção.

E com relação ao movimento do dipolo próximo à fronteira, podemos introduzir a interação clássica entre a partícula e a placa, ocasionando uma contribuição clássica na aceleração da partícula. Assim, para tratar um modelo mais realista, deveremos considerar também possíveis efeitos de radiação. Uma possibilidade é estudar o sistema onde a placa

não é perfeitamente refletora, e sim um dielétrico, fazendo com que os modos do campo sejam alterados [30, 54]. Para tornar o problema mais geral, podemos estudar ainda o caso relativístico, alterando as equações de movimento da partícula. Como foi verificado, o uso da função de transição (5.13) curou as divergências encontradas, porém não reproduziu um comportamento esperado, para curar as divergências podemos ainda adicionar uma flutuação da fronteira/dipolo, tratando a partícula como uma entidade quântica, ou ainda considerar que a placa é constituída de um dielétrico. E por fim, podemos também tratar o problema no espaço-tempo curvo [33].

APÊNDICE A – Álgebra das Matrizes de Dirac

Aqui iremos explorar algumas propriedades algébricas das matrizes de Dirac γ^μ . Para mais detalhes veja §22 da Ref. [55]. As propriedades algébricas dessas matrizes são determinadas pela relação de comutação

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.1})$$

A primeira propriedade que obtemos é

$$\gamma_\mu \gamma^\mu \equiv g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + g_{\nu\mu} \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 4. \quad (\text{A.2})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu &= \gamma_\mu (2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) = 2\gamma^\nu - 4\gamma^\nu = -2\gamma^\nu, \\ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu &= \gamma_\mu \gamma^\lambda (2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) = 2\gamma^\nu \gamma^\lambda - \gamma_\mu (2g^{\lambda\mu} - \gamma^\mu \gamma^\lambda) \gamma^\nu \\ &= 2\gamma^\nu \gamma^\lambda - 2\gamma^\lambda \gamma^\nu + 4\gamma^\lambda \gamma^\nu = 2(\gamma^\nu \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\nu) = 4g^{\lambda\nu}, \\ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu &= \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu (2g^{\rho\mu} - \gamma^\mu \gamma^\rho) = 2\gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma^\nu - \gamma_\mu \gamma^\lambda (2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) \gamma^\rho \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho + \gamma_\mu (2g^{\lambda\mu} - \gamma^\mu \gamma^\lambda) \gamma^\nu \gamma^\rho \\ &= 2\gamma^\rho \gamma^\lambda \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho + 2\gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho - 4\gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \\ &= 2\gamma^\rho (2g^{\lambda\nu} - \gamma^\nu \gamma^\lambda) - 4g^{\nu\lambda} \gamma^\rho = -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda, \\ \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu &= 2(\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

No nosso estudo foi também necessário calcular o traço do produto de matrizes de Dirac,

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}). \quad (\text{A.4})$$

Para escrever a Eq. (A.4), podemos usar apenas a métrica $g^{\mu\nu}$, uma vez que sua estrutura deve ser independente do referencial. Entretanto é possível construir somente tensores de rank par com o uso da métrica. Desse modo, o traço do produto de qualquer número ímpar de fatores γ é nulo,

$$\text{tr}(\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0, \quad (\text{A.5})$$

em especial,

$$\text{tr} \gamma^\mu = 0. \quad (\text{A.6})$$

Agora, usando que o traço da identidade é 4, ou seja, $\text{tr } \hat{1} = 4$, da Eq. (A.1) obtemos,

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

Para o produto de 4 matrizes de Dirac temos que,

$$\begin{aligned} \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho &= 2g^{\lambda\mu} \gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho = 2g^{\lambda\mu} \gamma^\nu \gamma^\rho - 2\gamma^\mu g^{\lambda\nu} \gamma^\rho + \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\rho \\ &= 2g^{\lambda\mu} \gamma^\nu \gamma^\rho - 2\gamma^\mu g^{\lambda\nu} \gamma^\rho + 2\gamma^\mu \gamma^\nu g^{\lambda\rho} - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda, \end{aligned}$$

portanto, somando $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\lambda$ de ambos os lados, tomando o traço, e usando a Eq. (A.7),

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}). \quad (\text{A.8})$$

Para obter mais alguns resultados importantes, vamos definir a matriz γ^5 como sendo,

$$\gamma^5 = -i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (\text{A.9})$$

Desse modo temos,

$$\gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad (\text{A.11})$$

E ainda,

$$\text{tr } \gamma^5 = \text{tr}(\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5) = \text{tr}(-\gamma^0 \gamma^5 \gamma^0) = \text{tr}(-\gamma^0 \gamma^0 \gamma^5) = \text{tr}(-\gamma^5) \Rightarrow \text{tr } \gamma^5 = 0, \quad (\text{A.12})$$

onde primeiramente comutamos γ^5 com o segundo γ^0 e depois usamos a propriedade cíclica do traço.

Além disso, tomando $\mu \neq \alpha \neq \nu$,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) &= \text{tr}(\gamma_\alpha \gamma^\alpha \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = \text{tr}(-\gamma_\alpha \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha) = \text{tr}(-\gamma^\alpha \gamma_\alpha \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= \text{tr}(-\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu), \end{aligned}$$

logo $\text{tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0$.

E o produto de γ^5 por um número ímpar de fatores γ^μ também tem traço nulo,

$$\text{tr}(\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = \text{tr}(-\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}} \gamma^5) = \text{tr}(-\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}),$$

onde no primeiro passo comutamos γ^5 com todas as $2n+1$ matrizes, e no segundo usamos a propriedade cíclica do traço. Desse modo,

$$\text{tr}(\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Finalmente, para obter $\text{tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta)$ temos que, pela regra de anti-comutação, a troca de qualquer um dos índices deve implicar na troca do sinal. Logo, o resultado deve ser proporcional a $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$. Para obter a constante de proporcionalidade, basta escolher uma combinação de índices, como por exemplo, $(\mu\nu\alpha\beta) = (3210)$, então,

$$\text{tr}(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (\text{A.14})$$

APÊNDICE B – Detalhes no Cálculo das Dispersões

Aqui, vamos detalhar alguns resultados que foram usados na obtenção das dispersões. Primeiramente temos que

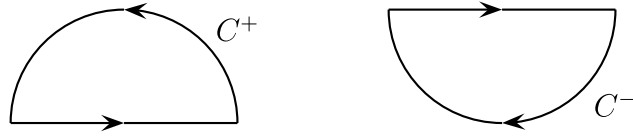
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_{\tau_s, \tau}(t) &= \frac{1}{\pi \tau_s} \left[\frac{1}{1 + t^2/\tau_s^2} - \frac{1}{1 + (t - \tau)^2/\tau_s^2} \right] = \frac{\tau_s}{\pi} \left[\frac{1}{t^2 + \tau_s^2} - \frac{1}{(t - \tau)^2 + \tau_s^2} \right] \\ &= \frac{\tau_s}{\pi} \left[\frac{1}{(t + i\tau_s)(t - i\tau_s)} - \frac{1}{(t - \tau + i\tau_s)(t - \tau - i\tau_s)} \right]. \end{aligned}$$

Dessa forma vamos calcular a seguinte expressão, com $\epsilon > 0$ e $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t')}{(t - t' - i\epsilon + a)^4} dt dt' &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' F_{\tau_s, \tau}(t') \int_{-\infty}^{\infty} dt F_{\tau_s, \tau}(t) \left(-\frac{1}{3} \right) \frac{d}{dt} \frac{1}{(t - t' - i\epsilon + a)^3} \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dt' F_{\tau_s, \tau}(t') \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{(t - t' - i\epsilon + a)^3} \frac{d}{dt} F_{\tau_s, \tau}(t) \\ &= \frac{\tau_s}{3\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' F_{\tau_s, \tau}(t') \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{(t - t' - i\epsilon + a)^3} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{(t + i\tau_s)(t - i\tau_s)} - \frac{1}{(t - \tau + i\tau_s)(t - \tau - i\tau_s)} \right]. \end{aligned}$$

A integração em t pode ser efetuada usando resíduos. Escolhendo a curva C^- , de modo que o único polo será em $t = -i\tau_s$ na primeira integração e em $t = \tau - i\tau_s$ na segunda,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t')}{(t - t' - i\epsilon + a)^4} dt dt' &= \frac{\tau_s}{3\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' F_{\tau_s, \tau}(t') (-2\pi i) \left[\frac{1}{(-i\tau_s - t' - i\epsilon + a)^3 (-2i\tau_s)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(\tau - 2i\tau_s - t' - i\epsilon + a)^3 (-2i\tau_s)} \right] \\ &= -\frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} dt' F_{\tau_s, \tau}(t') \left[\frac{1}{(t' + i\tau_s + i\epsilon - a)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(t' - \tau + i\tau_s + i\epsilon - a)^3} \right] \\ &= \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{\infty} dt' F_{\tau_s, \tau}(t') \frac{d}{dt'} \left[\frac{1}{(t' + i\tau_s + i\epsilon - a)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(t' - \tau + i\tau_s + i\epsilon - a)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{6} \frac{\tau_s}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left[\frac{1}{(t' + i\tau_s + i\epsilon - a)^2} - \frac{1}{(t' - \tau + i\tau_s + i\epsilon - a)^2} \right] \\ &\quad \times \left[\frac{1}{(t' + i\tau_s)(t' - i\tau_s)} - \frac{1}{(t' - \tau + i\tau_s)(t' - \tau - i\tau_s)} \right]. \end{aligned}$$


 Figura 29 – Ilustração das curvas C^+ e C^- .

Agora, realizando a integração em t' tomando a curva C^+ e já fazendo as devidas simplificações, obtemos [34],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t')}{(t - t' - i\epsilon + a)^4} dt dt' = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{(\tau - 2i\tau_s - i\epsilon + a)^2} + \frac{1}{(\tau + 2i\tau_s + i\epsilon - a)^2} - \frac{2}{(a - 2i\tau_s - i\epsilon)^2} \right]. \quad (\text{B.1})$$

Agora vamos usar que, para $\text{Im}(a) \neq 0$,

$$\int_1^{\infty} \frac{u^2 \pm 1}{u^2 (u + a)^2} du = \frac{1}{1 + a} \pm \left[\frac{a + 2}{a^2 (1 + a)} - \frac{2}{a^3} \ln(1 + a) \right], \quad (\text{B.2})$$

e escrevendo,

$$\frac{1}{[(t - t' - i\epsilon)^2 - \eta^2]^2} = \frac{3}{4} \int_1^{\infty} (u^2 - 1) \left\{ \frac{1}{[u(t - t' - i\epsilon) + \eta]^4} + \frac{1}{[u(t - t' - i\epsilon) - \eta]^4} \right\},$$

$$\frac{(t - t' - i\epsilon)^2 + \eta^2}{[(t - t' - i\epsilon)^2 - \eta^2]^3} = \frac{3}{8} \int_1^{\infty} (u^2 + 1) \left\{ \frac{1}{[u(t - t' - i\epsilon) + \eta]^4} + \frac{1}{[u(t - t' - i\epsilon) - \eta]^4} \right\},$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t')}{[(t-t'-i\epsilon)^2 - \eta^2]^2} dt dt' \\
 &= \frac{3}{4} \int_1^{\infty} du (u^2 - 1) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \\
 & \times \left\{ \frac{1}{[u(t-t'-i\epsilon) + \eta]^4} + \frac{1}{[u(t-t'-i\epsilon) - \eta]^4} \right\} \\
 &= \frac{3}{4} \int_1^{\infty} du \left(\frac{u^2 - 1}{u^4} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') \\
 & \times \left[\frac{1}{(t-t'-i\epsilon + \eta/u)^4} + \frac{1}{(t-t'-i\epsilon - \eta/u)^4} \right] \\
 &= \frac{1}{8} \int_1^{\infty} du \left(\frac{u^2 - 1}{u^4} \right) \left[\frac{1}{(\tau - 2i\tau_s - i\epsilon + \eta/u)^2} + \frac{1}{(\tau + 2i\tau_s + i\epsilon - \eta/u)^2} - \frac{2}{(2i\tau_s + i\epsilon - \eta/u)^2} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(\tau - 2i\tau_s - i\epsilon - \eta/u)^2} + \frac{1}{(\tau + 2i\tau_s + i\epsilon + \eta/u)^2} - \frac{2}{(2i\tau_s + i\epsilon + \eta/u)^2} \right] \\
 &= \frac{1}{8} \int_1^{\infty} du \left(\frac{u^2 - 1}{u^2} \right) \left\{ \frac{1}{(\tau - 2i\tau_s - i\epsilon)^2 [u + \eta/(\tau - 2i\tau_s - i\epsilon)]^2} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(\tau + 2i\tau_s + i\epsilon)^2 [u - \eta/(\tau + 2i\tau_s + i\epsilon)]^2} - \frac{2}{(2i\tau_s + i\epsilon)^2 [u - \eta/(2i\tau_s + i\epsilon)]^2} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(\tau - 2i\tau_s - i\epsilon)^2 [u - \eta/(\tau - 2i\tau_s - i\epsilon)]^2} + \frac{1}{(\tau + 2i\tau_s + i\epsilon)^2 [u + \eta/(\tau + 2i\tau_s + i\epsilon)]^2} \right. \\
 & \left. - \frac{2}{(2i\tau_s + i\epsilon)^2 [u + \eta/(2i\tau_s + i\epsilon)]^2} \right\},
 \end{aligned}$$

e analogamente para $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-t'-i\epsilon)^2 + \eta^2}{[(t-t'-i\epsilon)^2 - \eta^2]^3} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') dt dt'$.

Finalmente, atribuindo os devidos valores de a na Eq. (B.2) e tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0^+$, temos

$$\begin{aligned}
 I_1(\tau, \tau_s, \eta) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - \eta^2]^2} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') dt dt' \\
 &= -\frac{\tau}{4\eta^3} \left\{ \ln \left[\frac{(\tau - \eta)^2 + 4\tau_s^2}{(\tau + \eta)^2 + 4\tau_s^2} \right] + \frac{4\tau_s}{\tau} \arg \left[1 + \frac{\tau^2}{(2\tau_s - i\eta)^2} \right] \right\}, \quad (\text{B.3})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(\tau, \tau_s, \eta) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Delta t - i\epsilon)^2 + \eta^2}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - \eta^2]^3} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') dt dt' \\
 &= -\frac{1}{2} I_1(\tau, \tau_s, \eta) + \frac{\tau^2 (\tau^2 - \eta^2 + 12\tau_s^2)}{2(4\tau_s^2 + \eta^2) [(\tau - \eta)^2 + 4\tau_s^2] [(\tau + \eta)^2 + 4\tau_s^2]}, \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(\tau, \tau_s, \eta) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - \eta^2]^3} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') dt dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\eta^2} \left\{ \frac{(\Delta t - i\epsilon)^2 + \eta^2}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - \eta^2]^3} - \frac{1}{[(\Delta t - i\epsilon)^2 - \eta^2]^2} \right\} \\
 &\quad \times F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') dt dt' \\
 &= \frac{1}{2\eta^2} [I_2(\tau, \tau_s, \eta) - I_1(\tau, \tau_s, \eta)] \\
 &= \frac{1}{2\eta^2} \left\{ -\frac{3}{2} I_1(\tau, \tau_s, \eta) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tau^2 (\tau^2 - \eta^2 + 12\tau_s^2)}{2(4\tau_s^2 + \eta^2) [(\tau - \eta)^2 + 4\tau_s^2] [(\tau + \eta)^2 + 4\tau_s^2]} \right\}. \tag{B.5}
 \end{aligned}$$

As Eqs. (B.3), (B.4) e (B.5) serão usadas para obter as dispersões para o caso da contribuição da fronteira, mas para a contribuição mista teremos que fazer algumas alterações. Primeiramente, a Eq. (B.1) foi obtida considerando $\epsilon > 0$. Já para o caso misto temos $(t - t' + in\beta + a)^4$ no denominador, e essa mudança faz com que tomemos o contorno C^+ na integração em t e o contorno C^- em t' , o que fará com que o resultado seja o complexo conjugado do resultado anterior, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t')}{(\Delta t + in\beta + a)^4} dt dt' &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{(\tau + 2i\tau_s + in\beta + a)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(\tau - 2i\tau_s - in\beta - a)^2} - \frac{2}{(a + 2i\tau_s + in\beta)^2} \right]. \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

Agora, usando que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha \pm in\beta)^2} = -\frac{1}{\beta^2} \psi^{(1)} \left(1 \mp \frac{i\alpha}{\beta} \right),$$

com $\psi^{(n)}(x)$ sendo a função poligama já apresentada na Eq. (5.20), temos,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t')}{[(\Delta t + in\beta)^2 - \eta^2]^2} dt dt' \\
 &= \frac{1}{8} \int_1^{\infty} du \left(\frac{u^2 - 1}{u^4} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\tau + 2i\tau_s + in\beta + \eta/u)^2} + \frac{1}{(\tau - 2i\tau_s - in\beta - \eta/u)^2} \right. \\
 &\quad - \frac{2}{(2i\tau_s + in\beta + \eta/u)^2} + \frac{1}{(\tau + 2i\tau_s + in\beta - \eta/u)^2} + \frac{1}{(\tau - 2i\tau_s - in\beta + \eta/u)^2} \\
 &\quad \left. - \frac{2}{(2i\tau_s + in\beta - \eta/u)^2} \right] \\
 &= -\frac{1}{8\beta^2} \int_1^{\infty} du \left(\frac{u^2 - 1}{u^4} \right) \left[\psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s - i\tau}{\beta} - \frac{i\eta}{u\beta} \right) + \psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s + i\tau}{\beta} - \frac{i\eta}{u\beta} \right) \right. \\
 &\quad - 2\psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s}{\beta} - \frac{i\eta}{u\beta} \right) + \psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s - i\tau}{\beta} + \frac{i\eta}{u\beta} \right) + \psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s + i\tau}{\beta} + \frac{i\eta}{u\beta} \right) \\
 &\quad \left. - 2\psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s}{\beta} + \frac{i\eta}{u\beta} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Agora para simplificar vamos usar que,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \psi^{(1)}(\alpha + i\beta) &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + \alpha + i\beta)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{1}{(k + \alpha + i\beta)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{1}{(k + \alpha - i\beta)^2} \\ &= \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k + \alpha - i\beta)^2} = \operatorname{Re} \psi^{(1)}(\alpha - i\beta). \end{aligned}$$

Desse modo, tomando a parte real e fazendo a mudança de variável $x = 1/u$,

$$\begin{aligned} I_4(\tau, \tau_s, \eta, \beta) &= \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t')}{[(\Delta t + in\beta)^2 - \eta^2]^2} dt dt' \\ &= -\frac{1}{4\beta^2} \operatorname{Re} \int_1^{\infty} du \left(\frac{u^2 - 1}{u^4} \right) \left[\psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s - i\tau}{\beta} - \frac{i\eta}{u\beta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s + i\tau}{\beta} - \frac{i\eta}{u\beta} \right) - 2\psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s}{\beta} - \frac{i\eta}{u\beta} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{4\beta^2} \operatorname{Re} \int_0^1 dx (1 - x^2) \left[\psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s - i\tau}{\beta} - \frac{i\eta}{\beta} x \right) \right. \\ &\quad \left. + \psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s + i\tau}{\beta} - \frac{i\eta}{\beta} x \right) - 2\psi^{(1)} \left(1 + \frac{2\tau_s}{\beta} - \frac{i\eta}{\beta} x \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\beta^2} \operatorname{Re} \left[2\mathcal{F}^- \left(1 + \frac{2\tau_s}{\beta}, -\frac{i\eta}{\beta} \right) - \mathcal{F}^- \left(1 + \frac{2\tau_s + i\tau}{\beta}, -\frac{i\eta}{\beta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{F}^- \left(1 + \frac{2\tau_s - i\tau}{\beta}, -\frac{i\eta}{\beta} \right) \right], \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned} I_5(\tau, \tau_s, \eta, \beta) &= \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\Delta t + in\beta)^2 + \eta^2}{[(\Delta t + in\beta)^2 - \eta^2]^3} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') dt dt' \\ &= \frac{1}{8\beta^2} \operatorname{Re} \left[2\mathcal{F}^+ \left(1 + \frac{2\tau_s}{\beta}, -\frac{i\eta}{\beta} \right) - \mathcal{F}^+ \left(1 + \frac{2\tau_s + i\tau}{\beta}, -\frac{i\eta}{\beta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{F}^+ \left(1 + \frac{2\tau_s - i\tau}{\beta}, -\frac{i\eta}{\beta} \right) \right], \end{aligned} \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned} I_6(\tau, \tau_s, \eta, \beta) &= \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(\Delta t + in\beta)^2 - \eta^2]^3} F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') dt dt' \\ &= \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\eta^2} \left\{ \frac{(\Delta t + in\beta)^2 + \eta^2}{[(\Delta t + in\beta)^2 - \eta^2]^3} - \frac{1}{[(\Delta t + in\beta)^2 - \eta^2]^2} \right\} \\ &\quad \times F_{\tau_s, \tau}(t) F_{\tau_s, \tau}(t') dt dt' \\ &= \frac{1}{2\eta^2} [I_5(\tau, \tau_s, \eta, \beta) - I_4(\tau, \tau_s, \eta, \beta)], \end{aligned} \tag{B.9}$$

onde as funções $\mathcal{F}^{\pm}(a, b)$ são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\pm}(a, b) &\equiv \int_0^1 dx (1 \pm x^2) \psi^{(1)}(a + bx) = \frac{1 \pm 1}{b} \psi^{(0)}(a + b) - \frac{1}{b} \psi^{(0)}(a) \\ &\quad \mp \frac{2}{b^2} \psi^{(-1)}(a + b) \pm \frac{2}{b^3} [\psi^{(-2)}(a + b) - \psi^{(-2)}(a)]. \end{aligned} \tag{B.10}$$

Referências

- 1 CAPPER, D. M.; DUFF, M. J. Trace anomalies in dimensional regularization. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)*, v. 23, n. 1, p. 173–183, 1974. ISSN 1826-9869. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF02748300>>. Citado na página 13.
- 2 DUFF, M. J. Observations on conformal anomalies. *Nuclear Physics B*, v. 125, n. 2, p. 334–348, 1977. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321377904102>>. Citado na página 13.
- 3 DUFF, M. J. Twenty years of the weyl anomaly. *Classical and Quantum Gravity*, v. 11, n. 6, p. 1387, 1994. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/11/6/004>>. Citado na página 13.
- 4 'T HOOFT, G.; VELTMAN, M. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, v. 44, n. 1, p. 189–213, 1972. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321372902799>>. Citado na página 13.
- 5 FERRARA, S.; ZUMINO, B. Transformation properties of the supercurrent. *Nuclear Physics B*, v. 87, n. 2, p. 207–220, 1975. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321375900632>>. Citado na página 13.
- 6 POLYAKOV, A. M. Quantum geometry of bosonic strings. *Physics Letters B*, v. 103, n. 3, p. 207–210, 1981. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269381907437>>. Citado na página 13.
- 7 POLYAKOV, A. M. Quantum geometry of fermionic strings. *Physics Letters B*, v. 103, n. 3, p. 211–213, 1981. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269381907449>>. Citado na página 13.
- 8 RIEGERT, R. J. A non-local action for the trace anomaly. *Physics Letters B*, v. 134, n. 1, p. 56–60, 1984. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269384909833>>. Citado na página 14.
- 9 FRADKIN, E. S.; TSEYTLIN, A. A. Conformal anomaly in weyl theory and anomaly free superconformal theories. *Physics Letters B*, v. 134, n. 3, p. 187–193, 1984. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269384906683>>. Citado na página 14.
- 10 PANEITZ, S. M. A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-riemannian manifolds. *SIGMA*, v. 4, p. 036, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.3842/SIGMA.2008.036>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 25.
- 11 FRADKIN, E. S.; TSEYTLIN, A. A. Asymptotic freedom in extended conformal supergravities. *Physics Letters B*, v. 110, n. 2, p. 117–122, 1982. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382910188>>. Citado na página 14.

- 12 FRADKIN, E. S.; TSEYTLIN, A. A. One-loop β -function in conformal supergravities. *Nuclear Physics B*, v. 203, n. 1, p. 157–178, 1982. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321382904813>>. Citado na página 14.
- 13 BUCHBINDER, I. L.; ODINTSOV, S. D.; SHAPIRO, I. L. Nonsingular cosmological model with torsion induced by vacuum quantum effects. *Physics Letters B*, v. 162, n. 1, p. 92–96, 1985. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269385910676>>. Citado na página 14.
- 14 OBUKHOV, Y. N. Spectral geometry of the riemann-cartan space-time. *Nuclear Physics B*, v. 212, n. 2, p. 237–254, 1983. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321383903036>>. Citado na página 14.
- 15 GOLDTHORPE, W. H. Spectral geometry and $so(4)$ gravity in a riemann-cartan spacetime. *Nuclear Physics B*, v. 170, n. 2, p. 307–328, 1980. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321380901522>>. Citado na página 14.
- 16 HELAYEL-NETO, J. A.; PENNA-FIRME, A.; SHAPIRO, I. L. Conformal symmetry, anomaly and effective action for metric-scalar gravity with torsion. *Physics Letters B*, v. 479, n. 4, p. 411–420, 2000. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269300003427>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 41.
- 17 CHRISTENSEN, S. M.; FULLING, S. A. Trace anomalies and the hawking effect. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 15, p. 2088–2104, 1977. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2088>>. Citado na página 14.
- 18 BALBINOT, R.; FABBRI, A.; SHAPIRO, I. Anomaly induced effective actions and hawking radiation. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 83, p. 1494–1497, 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.1494>>. Citado na página 15.
- 19 BALBINOT, R.; FABBRI, A.; SHAPIRO, I. Vacuum polarization in schwarzschild space-time by anomaly induced effective actions. *Nuclear Physics B*, v. 559, n. 1, p. 301–319, 1999. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321399004241>>. Citado na página 15.
- 20 FABRIS, J. C.; PELINSON, A. M.; SHAPIRO, I. L. On the gravitational waves on the background of anomaly-induced inflation. *Nuclear Physics B*, v. 597, n. 1, p. 539–560, 2001. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321300007392>>. Citado na página 15.
- 21 PELINSON, A. M.; SHAPIRO, I. L.; TAKAKURA, F. I. On the stability of the anomaly-induced inflation. *Nuclear Physics B*, v. 648, n. 1, p. 417–445, 2003. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321302009999>>. Citado na página 15.
- 22 ELIZALDE, E.; VANZO, L.; ZERBINI, S. Zeta-function regularization, the multiplicative anomaly and the wodzicki residue. *Communications in Mathematical*

- Physics*, v. 194, n. 3, p. 613–630, 1998. ISSN 1432-0916. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s002200050371>>. Citado na página 15.
- 23 EVANS, T. Regularization schemes and the multiplicative anomaly. *Physics Letters B*, v. 457, n. 1, p. 127–132, 1999. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269399005031>>. Citado na página 15.
- 24 DOWKER, J. S. On the relevance of the multiplicative anomaly. arXiv, 1998. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-th/9803200>>. Citado na página 15.
- 25 GONÇALVES, B.; BERREDO-PEIXOTO, G. D.; SHAPIRO, I. L. Exact formfactors in the one-loop curved-space qed and the nonlocal multiplicative anomaly. *International Journal of Modern Physics A*, v. 25, n. 11, p. 2382–2390, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217751X10049669>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 40.
- 26 FORD, L. H.; SVAITER, N. F. Vacuum energy density near fluctuating boundaries. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 58, p. 065007, 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.065007>>. Citado na página 15.
- 27 YU, H.; FORD, L. H. Vacuum fluctuations and brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 70, p. 065009, 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.065009>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 53 e 62.
- 28 YU, H.; CHEN, J. Brownian motion of a charged test particle in vacuum between two conducting plates. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 70, p. 125006, 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.125006>>. Citado na página 16.
- 29 YU, H.; CHEN, J.; WU, P. Brownian motion of a charged test particle near a reflecting boundary at finite temperature. *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2006, n. 02, p. 058–058, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1126-6708/2006/02/058>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 53.
- 30 YU, H.; FU, X.; WU, P. Brownian motion of a charged test particle driven by vacuum fluctuations near a dielectric half-space. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 41, n. 33, p. 335402, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1751-8113/41/33/335402>>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 86.
- 31 SERIU, M.; WU, C.-H. Switching effect on the quantum brownian motion near a reflecting boundary. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 77, p. 022107, 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.77.022107>>. Citado na página 17.
- 32 DE LORENCI, V. A.; RIBEIRO, C. C. H.; SILVA, M. M. Probing quantum vacuum fluctuations over a charged particle near a reflecting wall. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 94, p. 105017, 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.105017>>. Citado 6 vezes nas páginas 17, 53, 62, 82, 83 e 84.

- 33 BESSA, C. H. G.; BEZERRA, V. B.; FORD, L. H. Brownian motion in robertsonwalker spacetimes from electromagnetic vacuum fluctuations. *Journal of Mathematical Physics*, v. 50, n. 6, p. 062501, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3133946>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 86.
- 34 DE LORENCI, V. A.; RIBEIRO, C. C. H. Remarks on the influence of quantum vacuum fluctuations over a charged test particle near a conducting wall. *Journal of High Energy Physics*, n. 4, p. 72, 2019. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP04\(2019\)072](https://doi.org/10.1007/JHEP04(2019)072)>. Citado 7 vezes nas páginas 17, 53, 72, 82, 84, 85 e 90.
- 35 CAMARGO, G. H. S. et al. Vacuum fluctuations of a scalar field near a reflecting boundary and their effects on the motion of a test particle. *Journal of High Energy Physics*, v. 2018, n. 7, p. 173, 2018. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2018\)173](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2018)173)>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 63.
- 36 CAMARGO, G. H. S. et al. Vacuum induced dispersions on the motion of test particles in $d + 1$ dimensions. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 100, p. 065014, 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.100.065014>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 84.
- 37 CAMARGO, G. H. S. et al. Probing thermal fluctuations through scalar test particles. *The European Physical Journal C*, v. 81, n. 5, p. 424, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-09213-6>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 84.
- 38 CAMARGO, G. H. S.; SHAPIRO, I. L. Anomaly-induced vacuum effective action with torsion: Covariant solution and ambiguities. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 106, p. 045004, 2022. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.045004>>. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.
- 39 CAMARGO, G. H. S. et al. *Anisotropic motion of a dipole in a photon gas*. arXiv, 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2110.12955>>. Citado na página 18.
- 40 SHAPIRO, I. L. Physical aspects of the spacetime torsion. *Physics Reports*, v. 357, n. 2, p. 113–213, 2002. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157301000308>>. Citado 4 vezes nas páginas 20, 29, 35 e 40.
- 41 BUCHBINDER, I. L.; SHAPIRO, I. L. *Introduction to quantum field theory with applications to quantum gravity*. [S.l.]: Oxford University Press, 2021. Citado 4 vezes nas páginas 23, 30, 32 e 40.
- 42 BARVINSKY, A. O.; VILKOVISKY, G. A. The generalized schwinger-dewitt technique in gauge theories and quantum gravity. *Physics Reports*, v. 119, n. 1, p. 1–74, 1985. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157385901486>>. Citado na página 24.
- 43 CARNEIRO, D. F. et al. On useful conformal transformations in general relativity. v. 40, p. 305, 2004. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/0412113>>. Citado na página 25.

- 44 SHAPIRO, I. L. *A Primer in Tensor Analysis and Relativity*. [S.l.]: Springer, 2019. Citado na página 33.
- 45 GONÇALVES, B.; BERREDO-PEIXOTO, G. de; SHAPIRO, I. L. One-loop corrections to the photon propagator in curved-space qed. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 80, p. 104013, Nov 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.104013>>. Citado na página 40.
- 46 SHAPIRO, I. L. Effective action of vacuum: the semiclassical approach. *Classical and Quantum Gravity*, v. 25, n. 10, p. 103001, 2008. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/25/10/103001>>. Citado na página 44.
- 47 BROWN, L. S.; MACLAY, G. J. Vacuum stress between conducting plates: An image solution. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 184, p. 1272–1279, 1969. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.184.1272>>. Citado na página 45.
- 48 SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum optics*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999. Citado na página 45.
- 49 BROWN, L. S. Gauge invariance, lorentz covariance, and current correlation functions. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 150, p. 1338–1348, 1966. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.150.1338>>. Citado na página 45.
- 50 BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. *Quantum fields in curved space*. Cambridge university press, 1984. Citado na página 48.
- 51 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Mechanics, Course of Theoretical Physics*. 2. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1976. v. 1. Citado na página 52.
- 52 BESSA, C. H. G. et al. Model for lightcone fluctuations due to stress tensor fluctuations. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 93, p. 064067, 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.064067>>. Citado na página 54.
- 53 CAMARGO, G. H. S. *Influências das flutuações quânticas do vácuo de um campo escalar sobre o movimento de uma partícula teste em 3+ 1 dimensões*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.unifei.edu.br/xmlui/handle/123456789/1186>>. Citado na página 63.
- 54 BARTOLO, N.; PASSANTE, R. Electromagnetic-field fluctuations near a dielectric-vacuum boundary and surface divergences in the ideal conductor limit. *Phys. Rev. A*, American Physical Society, v. 86, p. 012122, 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.86.012122>>. Citado na página 86.
- 55 BERESTETSKII, V. B.; LIFSHITZ, E. M.; PITAEVSKII, L. P. *Quantum Electrodynamics, Course of Theoretical Physics*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1982. v. 4. Citado na página 87.
- 56 CHRISTENSEN, S. M.; DUFF, M. J. Axial and conformal anomalies for arbitrary spin in gravity and supergravity. *Physics Letters B*, v. 76, n. 5, p. 571–574, 1978. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269378908572>>.

57 CAPPER, D. M.; DUFF, M. J. Conformal anomalies and the renormalizability problem in quantum gravity. *Physics Letters A*, v. 53, n. 5, p. 361–362, 1975. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960175900304>>.

58 DESER, S.; DUFF, M. J.; ISHAM, C. J. Non-local conformal anomalies. *Nuclear Physics B*, v. 111, n. 1, p. 45–55, 1976. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321376904806>>.

59 FULLING, S. A.; RUIJSENAARS, S. N. M. Temperature, periodicity and horizons. *Physics Reports*, v. 152, n. 3, p. 135–176, 1987. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157387901360>>.