Universidade Federal de Juiz de Fora
Departamento de Física

Simetria de Calibre do Modelo de Schwinger Quiral via o formalismo Gauge Unfixing Aprimorado

Gabriella Vieira Ambrósio

Juiz de Fora - MG

2022

Universidade Federal de Juiz de Fora
Departamento de Física

Simetria de Calibre do Modelo de Schwinger Quiral via o formalismo Gauge Unfixing Aprimorado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Gabriella Vieira Ambrósio
Orientador: Prof. Dr Jorge Ananias Neto
Coorientador: Prof. Dr Everton M.C. de Abreu

Juiz de Fora - MG
2022

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração
automática da Biblioteca Universitária da UFJF,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Vieira Ambrósio, Gabriella.
Simetria de Calibre do Modelo de Schwinger Quiral via o formalismo Gauge Unfixing Aprimorado / Gabriella Vieira Ambrósio. -- 2022.
55 f.

Orientador: Jorge Ananias Neto
Coorientador: Everton M.C. de Abreu
Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2022.

1. Invariância de Calibre. 2. Modelo de Schwinger Quiral. 3. Gauge Unfixing Aprimorado. I. Ananias Neto, Jorge , orient. II. M.C. de Abreu, Everton, coorient. III. Título.

Gabriella Vieira Ambrósio

"**Simetria de Calibre do Modelo de Schwinger Quiral via o Formalismo Gauge Unfixing Aprimorado**"

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 23 de agosto de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Prof Dr. Jorge Ananias Neto - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu - Coorientador

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Mario Junior de Oliveira Neves

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 04/08/2022.

---

de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Albert Carlo Rodrigues Mendes**, **Professor(a)**, em 23/08/2022, às 18:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Everton Murilo Carvalho de Abreu**, **Usuário Externo**, em 23/08/2022, às 18:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Mario Junior de Oliveira Neves**, **Usuário Externo**, em 24/08/2022, às 13:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0894161** e o código CRC **4AD7C27F**.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, senhor eterno e abrigo seguro. Agradeço ao professor Dr. Jorge Ananias Neto pela excelente atenção e orientação e ao professor Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu pela coorientação.

Agradeço também aos meus colegas de pesquisa, Cleber Nascimento, pelas valiosas discussões e colaboração na concretização deste trabalho e Widervan Morais por toda motivação.

Agradeço em especial, aos meus pais Maria das Graças e Francisco das Chagas por toda força, carinho e educação. Ao meu namorado Renato Luz pelo apoio, por está sempre presente nos momentos mais difíceis, dando motivação para continuar nessa caminhada acadêmica. Aqui dedico toda admiração e amor.

Aos meus irmãos Juliana Ambrósio, Daniel Ambrósio e a minha madrinha Cláudia que estão presentes em minha vida.

Aos estimados colegas da pós graduação do Departamento de Física da Universidade Federal de Juiz de Fora. Sou grata também a todos os professores que colaboraram na minha formação durante o mestrado.

Agradeço ao grupo de pesquisa Produto Estrela da Universidade de Brasília que tive o prazer de conhecer e em especial o Prof. Dr Ademir Eugênio de Santana e Gustavo Petronilo.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo apoio financeiro.

“A ciência não pode prever o que vai acontecer. Só pode prever a probabilidade de algo acontecer. ”

César Lattes

Resumo

Neste trabalho, é explorada a estrutura hamiltoniana do modelo de Schwinger Quiral na sua forma bosonizada. Pela condição de consistência dos vínculos, aplicada no método de Dirac, sabe-se que este modelo naturalmente apresenta, para certos valores de um parâmetro α, dois vínculos de segunda classe, o que significa que a invariância de calibre da teoria é perdida. Contudo, sabe-se que é possível revelar simetrias de calibre em um sistema desse tipo, convertendo o sistema de segunda classe original em um de primeira classe (apresentando invariância de calibre). Este procedimento pode ser feito por meio do método *Gauge Unfixing*, atuando com um operador de projeção diretamente na hamiltoniana de segunda classe original, sem adicionar graus de liberdade extras no espaço de fase. Um dos vínculos é descartado e o outro se torna o gerador de simetria de calibre da teoria. No final, o resultado é uma hamiltoniana de primeira classe que satisfaz uma álgebra de primeira classe. O objetivo deste trabalho é aplicar o formalismo *Gauge Unfixing* aprimorado ao modelo de Schwinger Quiral para revelar as simetrias de calibre escondidas do sistema. Duas teorias invariantes de calibre são obtidas, nas quais os parênteses de Poisson entre as novas funções são consistentes com os parênteses de Dirac envolvendo as funções originais.

Palavras Chaves: Invariância de calibre, Modelo de Schwinger Quiral, *Gauge unfixing* aprimorado

Abstract

In this work, it is explored the Hamiltonian structure of the Chiral Schwinger model in its bozonized form. From the consistency condition of the constraints, applied in the Dirac method, one knows that this model naturally presents, for certain values of a parameter α, two second class constraints, which means that this system does not possess gauge invariance. However, one knows that is possible to disclose gauge symmetries in such a system, by converting the original second class system into a first class one (possessing gauge invariance). This procedure can be done through the Gauge Unfixing method, by acting with a projection operator directly on the original second class Hamiltonian, without adding extra degrees of freedom in the phase space. One of the constraints is disregarded, and the other one becomes the gauge symmetry generator of the theory. At the end, the result is a first class Hamiltonian satisfying a first class algebra. But, there is an improved version of this method, in which the phase space variables are redefined in order to construct first class functions of these variables. The goal of this work is to apply the improved gauge unfixing formalism to the Chiral Schwinger model to disclose the hidden gauge symmetries of the system. Two gauge invariant theories are obtained, in which the Poisson Brackets between the new functions are consistent with the Dirac brackets involving the original ones.

Key words: Gauge invariance, Chiral Schwinger Model, Improved gauge unfixing

Lista de Abreviaturas

PD - Parêntese de Dirac
PP - Parêntese de Poisson
SC - Schwinger Quiral
GU - *Gauge Unfixing*
CSM - Modelo de Schwinger Quiral

Lista de Símbolos

$[,]$ Comutador

$\{,\}$ Parêntese de Poisson

$\{,\}_D$ Parêntese de Dirac

$\approx$ Fracamente igual

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O modelo de Schwinger Quiral é uma Teoria de Calibre Anômala que envolvem férmions quirais acoplados a um campo de calibre $U(1)$ em $1+1$ dimensão [1] definida pela lagrangiana [2]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + e\sqrt{\pi}\gamma^{\mu}A_{\mu}(1+\gamma_5)\right]\psi. \tag{1.1}$$

Após o processo de bosonização obtém-se a seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\varphi)^2 + e(g^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu})(\partial_{\mu}\varphi)A_{\nu} + \frac{1}{2}e^2\alpha A_{\mu}^2, \tag{1.2}$$

onde o parâmetro α é uma constante não determinada pelo procedimento usado para obter (1.2) de (1.1) [3]. O comportamento da teoria varia de acordo com esse parâmetro.

Para $\alpha > 1$, o sistema é visto para ter dois vínculos de segunda classe. Para $\alpha < 1$, nenhuma teoria quântica unitária existe. Para $\alpha = 1$, tem-se quatro vínculos, onde dois são de primeira classe [4].

Neste trabalho, será analisada esta versão bosonizada (para $\alpha > 1$) que é não-invariante perante transformações de calibre até mesmo classicamente. Na linguagem de sistemas vinculados, significa dizer que a estrutura hamiltoniana do modelo apresenta vínculos de segunda classe. O estudo dessa versão tem atraído uma grande atenção no contexto das teorias das cordas [5], e também na compreensão do significado físico das anomalias na teoria quântica de campo [6].

Na literatura, existem alguns estudos acerca desse modelo, com intuito de obter uma teoria invariante de calibre. Como exemplo, tem-se o trabalho de Faddeev e Shatashvili [7] os quais introduziram na ação efetiva da teoria um termo de Wess-Zumino, que é o responsável pela transformação de vínculos de segunda classe em vínculos de primeira classe.

Esse método hoje é conhecido como Batalin-Fradkin-Tyntin (BFT) [8, 9]. Baseado na ideia de Mitra-Rajaraman [10] que não faz uso de variáveis extras, Vytheeswaran [4] aplicou o método do operador projeção de Lie para um determinado sistema de regularização, utilizando o formalismo da integral de caminho, obtendo-se uma estrutura hamiltoniana invariante de calibre.

A motivação deste trabalho é aplicar o método *Gauge Unfixing* Aprimorado [11] na estrutura hamiltoniana do modelo de Schwinger Quiral bosonizado. Com o objetivo de transformar os vínculos de segunda classe em vínculos de primeira classe, a fim de se obter uma teoria invariante de calibre. O método *Gauge Unfixing* (GU) Aprimorado, consiste em redefinir as variáveis do espaço de fase, tornando-as variáveis do sistema de primeira classe. Essa característica de fazer a modificação diretamente nas variáveis do espaço de fase é que torna esse método vantajoso em relação a outros. Como por exemplo, o *Gauge Unfixing* (GU) Usual [10, 12, 13], onde a invariância de calibre é corrigida diretamente na hamiltoniana de segunda classe. E do formalismo Batalin-Fradkin-Tyntin (BFT) [8, 9], que se baseia em estender o espaço de fase original com variáveis extras. Para demonstrar a consistência do GU Aprimorado é também analisada a estrutura canônica e calculados os parênteses de Dirac (PD), para serem comparados com os parênteses de Poisson (PP) das variáveis novas geradas pelo método GU aprimorado.

A dissertação é organizada da seguinte maneira. No capítulo 2, é apresentado a quantização de sistemas vinculados, focando no método de quantização via parêntese de Dirac. No capítulo 3, é abordado o método *Gauge Unfixing* Usual e o *Gauge Unfixing* Aprimorado. No capítulo 4, é feita a análise do modelo de Schwinger Quiral (CSM) bosonizado através do método de Dirac e do *Gauge Unfixing* Aprimorado. Por fim, o capítulo 5, é destinado à conclusão.

Capítulo 2

Quantização de sistemas vinculados

Para realizar a quantização de uma teoria, tem-se a disposição vários métodos. Como exemplo, a chamada quantização canônica [14], onde implica que a teoria clássica pode ser quantizada no formalismo hamiltoniano. Para tanto, pode-se seguir um esquema rumo à quantização a saber: construir inicialmente uma formulação lagrangiana clássica e, posteriormente, fazer a passagem para o formalismo hamiltoniano e como último passo, realizar a quantização canônica.

Na passagem para o formalismo hamiltoniano existe um ponto fundamental que é a definição dos momentos canônicos, que consiste em definir o determinante da matriz Hessiana como sendo não nulo. Esta condição de se tonar nula surge a partir da definição dos momentos relações entre as variáveis do espaço de fase conhecidas como vínculos. Sendo que na presença destas expressões o processo de passagem para o formalismo hamiltoniano fica truncado [15]. Por esta razão, Dirac [16] conseguiu construir um método capaz de realizar a passagem consistente para o formalismo hamiltoniano no caso de teorias vinculadas, ou em outras palavras teorias que apresentam simetrias locais. Este formalismo ficou conhecido como o método de Dirac.

Para este propósito, o método tem como objetivo realizar a quantização canônica com vínculos, estes que vão surgindo na medida que são impostas condições de consistência à teoria. O método mostra que esses vínculos podem ser classificados em vínculos de primeira classe onde estão associados às simetrias de calibre. Por outro lado, os de segunda classe estão relacionados aos graus de liberdade, os quais são eliminados substituindo os parênteses de Poisson usuais por novos, conhecidos como parênteses de Dirac [16]. Estes também substituirão os parênteses de Poisson na hora da quantização:

$$\{A, B\}_D \rightarrow \frac{\hbar}{i}\left[A, B\right].$$

O presente capítulo inicia-se com uma breve revisão da mecânica clássica para sistemas com vínculos. Por fim, apresenta-se o método de Dirac para tratar da quantização de tais sistemas.

2.1 O formalismo lagrangiano e hamiltoniano

Para apresentar a passagem para a quantização com vínculos, será apresentado nessa seção alguns aspectos das formulações lagrangiana e hamiltoniana da Mecânica Clássica.

Para tanto, seja um sistema clássico possuindo N graus de liberdade, sendo representado por $q_i(i = 1, 2, ..., N)$ coordenadas generalizadas, velocidades generalizadas e, em caso geral, do tempo [14], isto é,

$$L = L(q_1, ..., q_N, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_N, t), \tag{2.1}$$

ou, numa forma mais sucinta

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t), \tag{2.2}$$

onde $i = 1, ..., N$.

As equações de movimento podem ser obtidas através do princípio de Hamilton [17], o qual, estabelece que a evolução dos conjuntos de coordenadas e velocidades generalizadas $(q(t_1), \dot{q}(t_1)$ e $(q(t_2), \dot{q}(t_2))$ entre esses dois instantes t_1 e t_2 é tal que a integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt. \tag{2.3}$$

A Eq. (2.3) é chamada de *ação*. [14].

Estabelecendo que

$$\delta S = 0, \tag{2.4}$$

obtém-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0, \tag{2.5}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i \right) dt = 0, \tag{2.6}$$

sendo que $\delta\dot{q}_i = \delta\left(\frac{dq_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\delta q_i$. Integrando por parte o segundo termo de (2.6), tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \bigg|_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{2.7}$$

considerando que as trajetórias inicia-se em $q(t_1)$ e termina em $q(t_2)$, isto é, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, encontra-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0. \tag{2.8}$$

Como as variações δq_i são arbitrárias, a Eq. (2.8) só pode ser nula se o integrante for [14]

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0. \tag{2.9}$$

Logo, tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \tag{2.10}$$

que é conhecida como a equação de Euler-Lagrange, a qual nos dá a evolução temporal do sistema clássico.

Dessa maneira, tem-se que na formulação lagrangiana um sistema é caracterizado por um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem [18] construídas no espaço de configurações.

Já o formalismo hamiltoniano é construído sobre o espaço de fase, entre as coordenadas generalizadas e os momentos conjugados [18]. Assim, é necessário introduzir o momento canônico conjugado p_i [17] definido por

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{2.11}$$

Logo, para realizar essa passagem do formalismo lagrangiano ao hamiltoniano, busca-se uma transformação do tipo $(q_i, \dot{q}_i) \to (q_i, p_i)$, que é definida da seguinte maneira

$$W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_l} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \tag{2.12}$$

as quais, são componentes de uma matriz Hessiana. Essa matriz pode ser distinguida em duas maneiras:

a) **Não singular**: Quando o determinante da matriz Hessiana é diferente de zero

$$\det(W) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \neq 0, \tag{2.13}$$

podendo expressar assim as velocidades $\dot{q}_i$ em função de $q's$ e $p's$ [19]. Logo, pode-se passar ao formalismo hamiltoniano de forma univoca.

b) **Singular**: Quando o determinante da matriz Hessiana é igual a zero

$$\det(W) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = 0, \tag{2.14}$$

neste caso, não pode-se expressar as velocidades $\dot{q}_i$ em função dos $q's$ e $p's$ [19]. Dessa maneira a passagem para o formalismo hamiltoniano não é possível. Assim, surgirão relações entre as variáveis do espaço de fase, denotadas de *vínculos*.

Como abordado no início do capítulo nosso foco está em representar sistemas com vínculos. Assim, continuaremos tratando o caso b).

2.2 O método de Dirac

Para que seja possível passar ao formalismo hamiltoniano, usando a condição (2.14), é necessário usar o método desenvolvido por Dirac [16]. Neste sentido, o ponto de partida são as relações de dependência entre as variáveis canônicas chamadas de vínculos.

Esses vínculos, decorrentes diretamente da definição de momento, são chamados de vínculos primários [15], denotados por

$$Q_m(q_i, p_i) \approx 0, \qquad m = 1, 2, ..., M \leq R, \tag{2.15}$$

ou seja, um vínculo é uma relação entre $p_i's$ e $q_i's$, sendo M o número de vínculos.

Para representar as equações de vínculos, costuma-se utilizar o sinal " $\approx$ ", que significa "fracamente igual", com o objetivo de destacar que os vínculos podem não ser nulos dentro dos parênteses de Poisson [20]. Assim, todas as equações de vínculos que forem surgindo, daqui para frente, serão representada na forma da Eq. (2.15).

Agora, passa-se a tratar do formalismo hamiltoniano seguindo o método de quantização de Dirac, reproduzido em seu livro "Lectures on quantum Mechanics"[16]. Contudo, considera-se a seguinte expressão

$$H_c(q,p) = p_i\dot{q}_i - L(q,\dot{q}), \tag{2.16}$$

denotada de hamiltoniana canônica. Aplicando o princípio de Hamilton à lagrangiana L, obtém-se

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(p_i\dot{q}_i - H_c)\,dt = 0 \tag{2.17}$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta p_i\dot{q}_i + p_i\delta\dot{q}_i - \left(\frac{\partial H_c}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\delta p_i\right)\right]dt = 0, \tag{2.18}$$

onde $\delta H_c = \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\delta p_i$. Como a ordem das derivadas δ e $\frac{d}{dt}$ podem ser trocadas [20], o segundo termo de (2.18) pode ser integrado por parte, ficando da seguinte maneira

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\dot{q}_i\delta p_i - \dot{p}_i\delta q_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\delta p_i\right]dt = 0, \tag{2.19}$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\left(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\delta q_i + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\delta p_i\right]dt = 0. \tag{2.20}$$

Como δq_i e δp_i são funções arbitrárias do tempo. Então, a integração só é nula se o integrando for

$$\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\right)\delta p_i = 0. \tag{2.21}$$

Observa-se que essa expressão, não possui uma relação com vínculos primários. Como se trata em escrever um sistema com vínculos, suponha que a variação do vínculo Q_m seja

$$\delta Q_m = \sum_i \left(\frac{\partial Q_m}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial Q_m}{\partial p_i}\delta p_i\right) \approx 0. \tag{2.22}$$

Multiplicando a Eq. (2.22) por λ_m, chamado de multiplicador de Lagrange, e somando-a com a Eq. (2.21), encontra-se

$$\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \lambda_m \frac{\partial Q_m}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} - \lambda_m \frac{\partial Q_m}{\partial p_i}\right)\delta p_i \approx 0. \tag{2.23}$$

Agora, tem-se, M funções arbitrárias $\lambda_m(q,p)$ [14] que podem depender das coordenadas e dos momentos. Dessa forma, a partir da Eq. (2.23), pode-se escrever

$$\dot{p}_i \approx -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial Q_m}{\partial q_i}, \tag{2.24}$$

$$\dot{q}_i \approx \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial Q_m}{\partial p_i}, \tag{2.25}$$

que são as novas equações de Hamilton para sistemas com vínculos, e a hamiltoniana passa a ser determinada como

$$H_p = H_c + \lambda_m Q_m \approx H_c. \tag{2.26}$$

H_p é chamada de hamiltoniana primária, que contém apenas a combinação linear dos m vínculos primários.

Como a hamiltoniana primária não está completamente determinada, em função dos multiplicadores de Lagrange, não pode-se concluir que os vínculos primários são suficientes para manter a dinâmica do sistema restrita à superfície primária [21]. Diante disso, Dirac [16] introduz as chamadas condições de consistência, que correspondem à conservação dos vínculos ao longo do tempo, definida da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
\dot{Q}_m &= \{Q_m, H_p\} \approx 0 \\
&= \{Q_m, H_c + \lambda_n Q_n\} \\
&= \{Q_m, H_c\} + \lambda_n \{Q_m, Q_n\} \approx 0.
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

A Eq. (2.27) pode produzir um dos vínculos primários já conhecidos. Ou, pode acontecer de ser um novo vínculo, chamado de secundário, pois não vem diretamente da definição de momento [14], isto é

$$Q_k(q_i, p_i) \approx 0, \qquad k = 1, 2, ...K, \tag{2.28}$$

sendo K o número de vínculos secundários. Essa classificação é uma simples questão de organização, não sendo significativo no resultado final. Logo, os K vínculos secundários são acrescentados à teoria da mesma forma que os vínculos primários [20]

$$H_T = H_p + \lambda_a Q_a, \qquad a = 1, 2, ..., M + K, \tag{2.29}$$

onde H_T é a hamiltoniana total. Se o processo for repetido, podem aparecer vínculos terciários, quaternários e assim por diante.

Se, por outro lado $\{Q_m, Q_n\} \neq 0$, não será possível obter novos vínculos. Contudo, surgem relações envolvendo multiplicadores de Lagrange. Dessa forma, a condição de consistência deve ser aplicada a todos os vínculos da teoria até que todos os multiplicadores de Lagrange sejam determinados.

2.3 Vínculos de primeira e segunda classe

Até o presente momento, por questão de organização, foi feita a classificação dos vínculos em primários e secundários, os quais estão relacionados a maneira como foram obtidos. Para a quantização canônica, não importa tal ordem. Assim, uma outra classificação pode ser mais adequada, a qual consiste na relação do parênteses de Poisson entre os vínculos. Se um vínculo possuir parêntese de Poisson nulo com todos os outros vínculos da teoria, ele é denominado vínculo de primeira classe [22].

Um ponto importante a ser destacado, é que, a existência de vínculos de primeira classe significa que a teoria possui simetrias, correspondendo a uma teoria de calibre [14]. Outro detalhe a ser abordado, é a fixação de calibre. Decorrente dessa fixação, novos vínculos são incorporados, sendo agora de segunda classe. Com isso, haverá parênteses de Poisson daqueles vínculos com os da fixação de calibre, os quais não serão mais nulos. Com o exemplo que será discutido no Apêndice *A*, essa situação ficará mais clara.

Nessa perspectiva, os vínculos que possuem pelo menos um parêntese de Poisson não-nulo, são apresentados como vínculos de segunda classe. Estes é que, regularmente, são associados com a fixação de calibre, para a redução dos graus de liberdade do espaço de fase [20]. Entretanto, existem sistemas como o modelo de Schwinger Quiral que naturalmente já apresentam vínculos de segunda classe.

2.4 Parêntese de Dirac

Nesse estágio do método de Dirac, leva-se em consideração o problema da quantização da teoria hamiltoniana com vínculos. Para isso, utiliza-se os parênteses de Dirac.

Será observado que esses parênteses de Dirac, satisfazem as mesmas propriedades básicas dos parênteses de Poisson utilizado na quantização canônica.

Considere, a seguinte evolução temporal de uma certa quantidade clássica $B(q, p, t)$,

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial B}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial B}{\partial t}. \tag{2.30}$$

Aplicando as equações de Hamilton modificadas definidas em (2.24) e (2.25), encontra-se

$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dt} &\approx \left[\frac{\partial B}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_j \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial B}{\partial p_i}\left(\frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \lambda_j \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\right)\right] + \frac{\partial B}{\partial t} \\
&\approx \left[\left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial H_c}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial H_c}{\partial q_i}\right) + \lambda_j\left(\frac{\partial B}{\partial q_i}\frac{\partial Q_j}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i}\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\right)\right] + \frac{\partial B}{\partial t} \\
&\approx \{B, H_c\} + \lambda_j \{B, Q_j\} + \frac{\partial B}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Onde todos os vínculos estão incluídos, até mesmo os decorrentes da fixação de calibre, caso existam [14].

Pode-se continuar de forma análoga utilizando um vínculo. Então, substituindo B por qualquer um dos vínculos, obtém-se

$$\frac{dQ_k}{dt} \approx \{Q_k, H_c\} + \lambda_j \{Q_k, Q_j\}. \tag{2.32}$$

Considerando a condição que os vínculos não evoluam no tempo, tem-se

$$\{Q_k, H_c\} + \lambda_j \{Q_k, Q_j\} \approx 0. \tag{2.33}$$

Procedendo introduz-se a matriz $\mathbf{C}$, de elementos $C_{jk} = \{Q_j, Q_k\}$, os quais são os parênteses de Poisson dos vínculos. Assim

$$\begin{aligned}
&\{Q_k, H_c\} + \lambda_j C_{kj} \approx 0 \\
&\lambda_j C^{-1}_{lk} C_{kj} + C^{-1}_{lk} \{Q_k, H_c\} \approx 0 \\
&\lambda_j \delta_{lj} + C^{-1}_{lk} \{Q_k, H_c\} \approx 0 \\
&\lambda_l \approx -C^{-1}_{lk} \{Q_k, H_c\},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

determina-se o multiplicador de Lagrange. Substituindo essa expressão na Eq. (2.31), encontra-se

$$\begin{aligned}
\frac{dB}{dt} &\approx \{B, H_c\} - \{B, Q_k\} C^{-1}_{kl} \{Q_l, H_c\} + \frac{\partial B}{\partial t} \\
&\approx \{B, H_c\}_D + \frac{\partial B}{\partial t},
\end{aligned} \tag{2.35}$$

tal que $\{B, H_c\}_D = \{B, H_c\} - \{B, Q_k\} C^{-1}_{kl} \{Q_l, H_c\}$ é o parêntese de Dirac (PD) entre B e H_c.

Agora, tem-se uma expressão clássica semelhante a do parêntese de Poisson, utilizada na quantização canônica. Sendo assim, pode-se proceder com a quantização canônica para sistemas vinculados

$$\{B, C\}_D \to \frac{\left[\hat{B}, \hat{C}\right]}{i\hbar}. \tag{2.36}$$

O que sustenta essa passagem é que os vínculos dentro do parêntese de Dirac vale fortemente zero, isto é

$$\begin{aligned}
\{B, Q_a\}_D &= \{B, Q_c\} - \{B, Q_a\} C^{-1}_{ab} \{Q_b, Q_c\} \\
&= \{B, Q_c\} - \{B, Q_a\} C^{-1}_{ab} C_{bc} \\
&= \{B, Q_c\} - \{B, Q_a\} \delta_{ac} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Outra evidência que sustenta a hipótese (2.36), é que os parênteses de Dirac apresentam as mesmas propriedades dos parênteses de Poisson e dos comutadores:

a) Anti-simetria: $\{A, B\}_D = -\{B, A\}_D$, onde $\{A, A\}_D = \{B, B\}_D = 0$.

b) Linearidade: $\{A + \alpha B, C\}_D = \{A, C\}_D + \alpha \{B, C\}_D$, α independente de (q,p).

c) "Regra de Leibniz" $\{AB, C\}_D = A \{B, C\}_D + \{A, C\}_D B$.

d) Identidade de Jacobi: $\{\{A, B\}, C\}_D + \{\{C, A\}, B\}_D + \{\{B, C\}, A\}_D = 0$.

Além do Método de Dirac, existem outros métodos que aparecem como alternativas para a realização da quantização canônica em sistemas de segunda classe. No capítulo a seguir será apresentado outro método, os quais permitem converter sistemas de segunda classe em sistemas de primeira classe. Veremos que nesse método é possível continuar a quantização utilizando os parênteses de Poisson, e que o seu resultado coincide com os resultados obtidos pelo método de Dirac.

Capítulo 3

Método de conversão de vínculos

A motivação para o estudo de métodos de conversão de vínculos em teorias de calibre, veio originalmente de teorias de calibre anômalas [1], as quais tem a invariância de calibre clássica perdida sobre quantização. Na linguagem de sistemas vinculados, significa dizer que os vínculos clássicos de primeira classe tornam-se de segunda classe após a quantização, isto é, em uma teoria não invariante de calibre. Nesta condição, a conversão para teorias de primeira classe significaria recuperar a invariância de calibre perdida. Existem alguns métodos propostos para converter um sistema vinculado de segunda classe em um sistema vinculado de primeira classe. Como exemplo, tem-se os métodos Batalin-Fradkin-Tyntin (BFT) [23], imersão simplética [24] e Stuckelberg [25] que consistem no alargamento do espaço de fase incluindo novas variáveis. Nas próximas subseções será abordado outros dois métodos em que não há a extensão do espaço de fase. O *Gauge Unfixing* Usual [10, 12, 13] e o *Gauge Unfixing* Aprimorado [11] o qual será aplicado ao modelo de Schwinger Quiral.

3.1 O método *gauge unfixing* usual

O método *gauge unfixing* (GU), foi apresentado inicialmente por Mitra e Rajaraman [10] e continuado por Anishetty e Vytheeswaran [12, 13], com o papel de fazer a conversão dos vínculos sem a necessidade de estender o espaço de fase com variáveis extras.

A ideia deste método é, uma vez que tenha-se um número par de vínculos de segunda classe, a de tentar tratar metade destes vínculos para ser de primeira classe e a outra metade para a obtenção dos termos de fixação de calibre, onde serão descartados. Logo, será mantidos apenas os vínculos de primeira classe resultando assim em uma teoria de calibre.

Considere por exemplo um sistema de segunda classe descrito por uma hamiltoniana H e que possua dois vínculos de segunda classe Q_1 e Q_2. Seguindo o método GU, deve-se escolher um dos vínculos para ser o gerador de simetria. No caso de selecionar o vínculo

Q_1 como o gerador de simetria deste sistema, é necessário redefini-lo da seguinte maneira

$$\chi(x) = \frac{Q_1(x)}{\Delta_{12}}, \qquad \Delta_{12} = \{Q_1(x), Q_2(y)\}\,. \tag{3.1}$$

O segundo vínculo será descartado. De tal modo, que o parêntese de Poisson entre $\chi(x)$ e $Q_2(y)$, sejam $\{\chi(x), Q_2(y)\} = \delta^{(3)}(x-y)$ canonicamente conjugado. Assim, a nova hamiltoniana de primeira classe será construída sobre a superfície $\chi = 0$ e $Q_2 \approx 0$ é considerado como uma variável de fixação de calibre, de modo que, sobre a superfície $Q_2 = 0$. A partir dessas observações define-se um operador de projeção $\mathbb{P}$ que ao atuar sobre H, produz um hamiltoniano $\tilde{H}$ que vale em todo o espaço de fase [20].

$$\tilde{H} \equiv \mathbb{P}H, \tag{3.2}$$
$$\tilde{H} \equiv : e^{Q_2\hat{\chi}} : H, \tag{3.3}$$

onde para qualquer funcional H no espaço de fase, tem-se

$$\tilde{\chi}H \equiv \{H, \chi\}\,. \tag{3.4}$$

Logo,

$$\tilde{H} \equiv H + Q_2\{H,\chi\} + \frac{1}{2!}Q_2^2\{\{H,\chi\},\chi\} + \frac{1}{3!}Q_2^3\{\{\{H,\chi\},\chi\},\chi\} + ... \tag{3.5}$$

em que $\left\{\tilde{H}, \chi\right\} = 0$, ou seja, o sistema descrito acima será de primeira classe. Com isso, é invariante de calibre. Por questão de conveniência é considerado que Q_2 sempre venha a esquerda dos parênteses de Poisson, para não ocorrer problemas de ordenamento.

Na próxima seção será abordada uma versão aprimorada do método *gauge unfixing* que foi desenvolvida por Neto [11].

3.2 O método *gauge unfixing* aprimorado

A diferença desse método para o que foi visto na seção anterior, é que, no método GU usual a invariância de calibre é corrigida diretamente na hamiltoniana de segunda classe. Já o GU aprimorado [11, 26], consiste em redefinir as variáveis do espaço de fase com o intuito de torná-las variáveis do sistema de primeira classe. De modo que se possa obter funções dessas variáveis redefinidas que sejam invariantes de calibre [20].

Suponha inicialmente uma variável original do espaço de fase

$$G(A_\mu, \pi), \tag{3.6}$$

onde A_μ é um campo e π seu momento canonicamente conjugado. Seguindo o método GU aprimorado, redefini-se essa variável do espaço de fase para ser de um sistema de primeira classe, da seguinte forma

$$\tilde{G}(\tilde{A}_\mu, \tilde{\pi}). \tag{3.7}$$

Onde $\tilde{G}$ passa a ser uma função de primeira classe. Como já mencionado, os vínculos que são classificados como vínculos de primeira classe geram transformações de calibre, isto é, transformações canônicas infinitesimais que mudam as variáveis do espaço de fase sem alterar o estado físico do sistema [17]. Com isso, a variável do sistema de primeira classe $\tilde{G}$ deve respeitar a seguinte condição variacional

$$\delta\tilde{G} = \varepsilon \left\{ \tilde{G}, \chi \right\} = 0, \tag{3.8}$$

sendo ε um parâmetro infinitesimal e χ **o vínculo de segunda classe** Eq. (3.1) escolhido para ser o gerador de simetria de calibre. Dessa maneira, qualquer função de $\tilde{G}$ será invariante de calibre, uma vez que

$$\left\{ \tilde{G}, \chi \right\} = \left\{ \tilde{A}, \chi \right\} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{A}} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{\pi}} \left\{ \tilde{\pi}, \chi \right\} = 0. \tag{3.9}$$

Logo, as funções invariantes de calibre podem ser obtidas através da substituição

$$G(A_i, \pi_i) \rightarrow G(\tilde{A}_i, \tilde{\pi}_i) = \tilde{G}(\tilde{A}_i, \tilde{\pi}_i). \tag{3.10}$$

Agora pode-se construir as variáveis invariante de calibre através de uma série de potências do vínculo descartado Q_2, assim como é feito no método GU usual. Como segue

$$\tilde{G}(x) = G(x) + \int dy b_1(x,y) Q_2(y) + \iint dydz b_2(x,y,z) Q_2(y) Q_2(z) + ..., \tag{3.11}$$

onde possui a seguinte condição de contorno sobre a superfície do vínculo Q_2

$$\tilde{G}(Q_2 = 0) = G, \tag{3.12}$$

permitindo recuperar o sistema de segunda classe original. Os coeficientes presentes na Eq. (3.11) são determinados a partir da condição variacional (3.8). Com isso, tem-se

$$\delta\tilde{G}(x) = \delta G(x) + \delta \int dy b_1(x,y) Q_2(y) + \delta \iint dydz b_2(x,y,z) Q_2(y) Q_2(z) + ... = 0. \tag{3.13}$$

Calculando a derivada do produto, obtém-se

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{G}(x) = \delta G(x) &+ \int dy \delta b_1(x,y) Q_2(y) + \int dy b_1(x,y) \delta Q_2(y) + \\
&+ \iint dydz \delta b_2(x,y,z) Q_2(y) Q_2(z) + \iint dydz b_2(x,y,z) \delta Q_2(y) Q_2(z) + \\
&+ \iint dydz b_2(x,y,z) Q_2(y) \delta Q_2(z) + ... = 0,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

sendo que

$$\delta G(x) = \int dy \varepsilon(y) \left\{ G(x), \chi(y) \right\}, \tag{3.15}$$

$$\delta b_1(x) = \int dy \varepsilon(y) \left\{ b_1(x), \chi(y) \right\}, \tag{3.16}$$

$$\delta Q_2(x) = \int dy \varepsilon(y) \left\{ Q_2(x), \chi(y) \right\} = -\varepsilon(x). \tag{3.17}$$

Na Eq. (3.17) foi adotado que $\{Q_2(x), \chi(y)\} = 1$. Continuando, pode-se calcular os termos de ordem zero em Q_2

$$\delta G(x) + \int dy b_1(x,y)\delta Q_2(y) = 0, \tag{3.18}$$

onde

$$b_1(x,y) = \frac{\delta G(x)}{\varepsilon(x)}\delta(x-y). \tag{3.19}$$

Pode-se checar que $b_1(x,y) = \frac{\delta G(x)}{\varepsilon(x)}\delta(x-y)$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&-\int dy b_1(x,y)\varepsilon(y) = -\delta G(x)\\
&-\int dy \left[\frac{\delta G(y)}{\varepsilon(y)}\delta(x-y)\right]\varepsilon(y) = -\delta G(x)\\
&\int dy \delta G(y)\delta(x-y)\varepsilon(y) = \delta G(x)\\
&\delta G(x) = \delta G(x)
\end{aligned}$$

Para os termos em primeira ordem em Q_2, vem

$$\int dy \delta b_1(x,y) Q_2(y) + 2\iint dy dz b_2(x,y,z)\delta Q_2(y) Q_2(z) = 0. \tag{3.20}$$

Substituindo as Eq's. (3.17) e (3.19) na expressão (3.20), obtém-se

$$\begin{aligned}
\int dy \delta\left[\frac{\delta G(y)}{\varepsilon(y)}\delta(x-y)\right] Q_2(y) - 2\iint dy dz b_2(x,y,z)\varepsilon(y) Q_2(z) &= 0\\
\frac{\delta\delta G(x)}{\varepsilon(x)} Q_2(x) &= 2\iint dy dz b_2(x,y,z)\varepsilon(y) Q_2(z)\\
b_2(x,y,z) &= \frac{\delta\delta G(x)}{2\varepsilon^2(x)}\delta(x-y)\delta(y-z).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Seguindo para $n \geqslant 2$ pode-se utilizar a fórmula geral para o coeficiente b_n, dado da seguinte forma

$$b_n(x) = \frac{\delta^n G(x)}{n!\varepsilon^n}[\delta(x-y)]^n. \tag{3.22}$$

Com os coeficientes determinados, pode-se agora substitui-los na Eq. (3.11) resultando em

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}(x) = G(x) + \int dy \frac{\delta G(x)}{\varepsilon(x)} \delta(x-y) Q_2(y) + \qquad (3.23)\\
+ \iint dydz \frac{\delta\delta G(x)}{2\varepsilon^2(x)} \delta(x-y)\delta(x-z) Q_2(y) Q_2(z) + ... + \\
+ \int ... \int dy...dy_n \frac{\delta^{(n)} G(x)}{n!\varepsilon^n} [\delta(x-y)]^n Q_2(y)...Q_2(y_n) \\
= G(x) + Q_2(x) \frac{\delta G(x)}{\varepsilon(x)} + Q_2^2(x) \frac{\delta\delta G(x)}{2\varepsilon^2(x)} + ... \qquad (3.24)\\
= \left(1 + Q_2(x)\frac{\delta}{\varepsilon(x)} + \frac{1}{2!} Q_2^2(x) \frac{\delta\delta}{\varepsilon^2(x)} + ...\right) G(x) \\
= e^{Q_2(x)\frac{\delta}{\varepsilon}} : G(x). \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Com isso, a partir da expressão (3.23) escreve-se a variável modificada de primeira classe. Assim como no método GU usual, foi feita a conversão de que Q_2 venha antes de $\frac{\delta}{\varepsilon}$.

Pode-se agora facilmente mostrar a consistência desse método. Considere por exemplo, o parêntese de Poisson (PP) entre duas quantidades invariantes de calibre definidas pela Eq. (3.24) [27]

$$
\begin{aligned}
\left\{\tilde{G}, \tilde{B}\right\} = & \Bigg\{ G(x) + Q_2(x) \frac{\delta G(x)}{\varepsilon(x)} + Q_2^2(x) \frac{\delta\delta G(x)}{2\varepsilon^2(x)} + ..., \\
& B(y) + Q_2(y) \frac{\delta B(y)}{\varepsilon(y)} + Q_2^2(y) \frac{\delta\delta B(y)}{2\varepsilon^2(y)} + ... \Bigg\}. \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

Tomando as propriedades do PP e fazendo o limite $Q_2 \to 0$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\left\{\tilde{G}, \tilde{B}\right\}_{Q_2=0} &= \{G, B\} + \{G, Q_2\} \frac{\delta B}{\varepsilon} + \{Q_2, B\} \frac{\delta G}{\varepsilon} \\
&= \{G, B\} + \{G, Q_2\}\{B, \chi\} + \{Q_2, B\}\{G, \chi\} \\
&= \{G, B\} + \{G, \chi\}\{Q_2, B\} - \{G, Q_2\}\{\chi, G\}. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Considerando $\chi \equiv Q_1$, a Eq. (3.27) fica

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{G},\tilde{B}\right\}_{Q_2=0} &= \{G,B\} + \{G,Q_1\}\{Q_2,B\} - \{G,Q_2\}\{Q_1,G\} \\ &= \{G,B\} + \{G,Q_1\}\varepsilon^{12}\{Q_2,B\} + \{G,Q_2\}\varepsilon^{21}\{Q_1,G\} \\ &= \{G,B\} + \{G,Q_i\}\varepsilon^{ij}\{Q_j,G\}\,. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Onde $\varepsilon_{ij} \equiv C_{ij} = \{Q_i, Q_j\}$ é um elemento de matriz dos parênteses de Poisson dos vínculos. Assim, resulta-se em

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{G},\tilde{B}\right\}_{Q_2=0} &= \{G,B\} + \{G,Q_i\}C^{ij}\{Q_j,B\} \\ &= \{G,B\}_D\,, \end{aligned} \tag{3.29}$$

sendo $\{G,B\}_D$ o parêntese de Dirac. Então, a álgebra do parêntese de Dirac pode ser reproduzido pelo parêntese de Poisson entre duas variáveis invariante de calibre que possuem uma igualdade fraca [16]. Logo, conclui-se que após as variáveis de segunda classe serem redefinidas, pode-se tomar as equações de vínculos como igualdade fortes utilizando os parêntese de Poisson sem a necessidade de aplicar os parênteses de Dirac [20].

Essa é uma das vantagem em utilizar o método GU aprimorado. No próximo capítulo daremos início a aplicação deste método no modelo de Schwinger Quiral na sua versão bosonizada. Primeiro será aplicado o método de Dirac para revelar a consistência que existe entre ambos os métodos.

Capítulo 4

Análise do Modelo de Schwinger Quiral Bosonizado

Neste capítulo, será analisada a Teoria de Schwinger Quiral na sua versão bosonizada. Essa conhecida teoria de calibre U(1) em 1+1 dimensão [28] apresenta vínculos de segunda classe. Que na linguagem dos sistemas vinculados significa dizer que não possui invariância de calibre.

Diante disso, nosso objetivo é transformar esses vínculos de segunda classe em vínculos de primeira classe, ou seja, em uma teoria invariante de calibre. Nosso desenvolvimento em primeiro momento consiste em analisar a estrutura canônica do modelo por meio do método de Dirac.

Na sequência, a fim de converter os vínculos de segunda classe em vínculos de primeira classe, é aplicado o método *gauge unfixing* aprimorado [11].

4.1 A Estrutura Canônica do Modelo

O modelo de Schwinger Quiral (CSM) bosonizado é descrito pela seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + e(g^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu})(\partial_\mu\varphi)A_\nu + \frac{1}{2}e^2\alpha A_\mu^2, \tag{4.1}$$

onde é utilizada a assinatura $g_{\mu\nu} = (+1, -1)$ e $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$, e α é um parâmetro de regularização. Aqui será considerado o caso onde $\alpha > 1$.

A partir daí é possível calcular os momentos canônicos π_0, π_1 e π_φ associados aos campos A_0, A_1 e φ, da seguinte maneira:

- De forma similar a eletrodinâmica de maxwell que foi calculada no Apêndice *A*, tem-se

$$\pi_\lambda = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\lambda)} = F^{0\lambda}. \tag{4.2}$$

Separando em componentes temporais e espaciais, obtém-se

$$\pi_0 = -F_{00} = 0. \tag{4.3}$$

$$\pi_1 = -F_{01} = -(\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0) = -\dot{A} + \partial_1 A_0. \tag{4.4}$$

Tem-se da Eq. (4.3) o primeiro vínculo da teoria

$$\Omega_1 = \pi_0 \approx 0, \tag{4.5}$$

que é chamado de **vínculo primário**.

- Para o campo escalar, encontra-se

$$\pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} = \partial_0 \varphi + e(A_0 - A_1). \tag{4.6}$$

As velocidades $\dot{A}_1$ e $\dot{\varphi}$ dadas em termos dos momentos, são escritas como

$$\dot{A} = -\pi_1 + \partial_1 A_0, \tag{4.7}$$

$$\dot{\varphi} = \pi_\varphi - e(A_0 - A_1). \tag{4.8}$$

Prosseguindo com o método, agora é necessário escrever a hamiltoniana canônica H_c. Para isso, considere a seguinte transformação de Legendre

$$H = \int dx \left(\pi^\mu \dot{A}_\mu + \pi_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L}\right). \tag{4.9}$$

Substituindo as velocidades encontradas nas Eq's (4.7), (4.8) respectivamente na expressão (4.9), a hamiltoniana canônica torna-se

$$\begin{aligned} H_c = \int dx \Big\{ & \frac{1}{2}\pi_1^2 + \frac{1}{2}\pi_\varphi^2 + \frac{1}{2}(\partial_1\varphi)^2 + e\big(\partial_1\varphi + \pi_\varphi\big)A_1 + \frac{1}{2}e^2\big(\alpha+1\big)A_1^2 \\ & - A_0\big[-\partial_1\pi_1 + \frac{e^2(\alpha-1)}{2}A_0 + e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi) + e^2 A_1\big]\Big\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Continuando com o método de Dirac [16], pode-se agora escrever a hamiltoniana primária, formada pela adição da hamiltoniana canônica H_c com o vínculo primário (4.5)

$$H_p = H_c + \int dx \Lambda_1 \Omega_1,$$

$$\begin{aligned} H_p = \int dx \Big\{ & \frac{1}{2}\pi_1^2 + \frac{1}{2}\pi_\varphi^2 + \frac{1}{2}(\partial_1\varphi)^2 + e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi)A_1 + \frac{1}{2}e^2(\alpha+1)A_1^2 \\ & - A_0\big[-\partial_1\pi_1 + \frac{e^2(\alpha-1)}{2}A_0 + e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi) + e^2 A_1\big] + \Lambda_1\Omega_1 \Big\}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

onde Λ_1 é o multiplicador de Lagrange associado ao vínculo primário.

Diante disso, pode-se agora calcular a evolução temporal do vínculo primário, respeitando a condição de consistência $\dot{\Omega}_1 = \{\Omega_1(x), H_p(y)\} \approx 0$. Com isso, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \{\Omega_1(x), H_p(y)\} = \{\pi_0(x), H_p(y)\} \approx 0 \\ &= \int dy \Big[\{\pi_0(x), A_0(y)\}\, \partial_1\pi_1 - e^2(\alpha-1)A_0 \{\pi_0(x), A_0(y)\} \\ &- e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi)\{\pi_0(x), A_0(y)\} - e^2 A_1 \{\pi_0(x), A_0(y)\} \Big] \approx 0 \\ &= \int dy \Big[-\partial_1\pi_1 + e^2(\alpha-1)A_0 + e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi) + e^2 A_1 \Big] \delta(x-y) \approx 0 \\ &= -\partial_1\pi_1 + e^2(\alpha-1)A_0 + e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi) + e^2 A_1 \approx 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

gerando outro vínculo na teoria, denominado de **vínculo secundário**

$$\Omega_2 = -\partial_1\pi_1 + e^2(\alpha-1)A_0 + e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi) + e^2 A_1 \approx 0, \tag{4.13}$$

que nada mais é que a lei de Gauss ($\partial.\vec{E} = 0$) modificada. A partir disso escreve-se a hamiltoniana total, definida da seguinte maneira

$$H_T = H_p + \int dx \Lambda_2 \Omega_2. \tag{4.14}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
H_T = \int dx \Big\{ & \frac{1}{2}\pi_1^2 + \frac{1}{2}\pi_\varphi^2 + \frac{1}{2}(\partial_1\varphi)^2 + e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi)A_1 + \frac{1}{2}e^2(\alpha+1)A_1^2 \\
& - A_0\big[-\partial_1\pi_1 + \frac{e^2(\alpha-1)}{2}A_0 + e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi) + e^2 A_1 \big] + \Lambda_1\Omega_1 + \Lambda_2\Omega_2 \Big\}.
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Considerando a condição de consistência para ambos os vínculos em relação a H_T ($\dot{\Omega}_1 = \{\Omega_1, H_T\} \approx 0$ e $\dot{\Omega}_2 = \{\Omega_2, H_T\} \approx 0$), os multiplicadores de Lagrange Λ_1 e Λ_2 podem ser determinados, resultando em

$$
\Lambda_1 = \partial_1 A_1 - \frac{\pi_1}{\alpha - 1}, \qquad \Lambda_2 = 0. \tag{4.16}
$$

Como os multiplicadores foram determinados, conclui-se que a cadeia de vínculos se encerra. Logo, o modelo de Schwinger Quiral possui dois vínculos

$$
\Omega_1 = \pi_0 \approx 0. \tag{4.17}
$$

$$
\Omega_2 = -\partial_1\pi_1 + e^2(\alpha-1)A_0 + e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi) + e^2 A_1 \approx 0. \tag{4.18}
$$

Para verificar se o vínculo é de primeira ou segunda classe calcula-se o seguinte parêntese de Poisson dos vínculos

$$
\begin{aligned}
\{\Omega_1(x), \Omega_2(y)\} =& \big\{\pi_0, -\partial_1\pi_1 + e^2(\alpha-1)A_0 + e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi) + e^2 A_1\big\} \\
=& e^2(\alpha-1)\{\pi_0, A_0\} = -e^2(\alpha-1)\delta(x-y).
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Sendo que para o $\alpha > 1$ eles são de segunda classe, e para $\alpha = 1$ eles são de primeira classe. Como mencionado no início, aqui será abordado o caso de $\alpha > 1$ onde o modelo CSM possui uma estrutura de vínculos de segunda classe.

4.1.1 Parêntese de Dirac

Como o sistema apresenta vínculos de segunda classe, podemos determinar a matriz dos parênteses de Poisson dos vínculos (4.17) e (4.18), escrita da seguinte forma

$$
C = \begin{pmatrix} \{\Omega_1, \Omega_1\} & \{\Omega_1, \Omega_2\} \\ \{\Omega_2, \Omega_1\} & \{\Omega_2, \Omega_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -e^2(\alpha-1) \\ e^2(\alpha-1) & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y). \tag{4.20}
$$

A inversa desta matriz é

$$C^{-1} = \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\delta(x-y). \tag{4.21}$$

Considerando a definição do parêntese de Dirac dada em (A.37), tem-se

$$\begin{aligned}\{F(x),G(y)\}_D =& \{F(x),G(y)\} - \\ & - \iint d^3z d^3\bar{z}\left\{F(x),\phi^A(z)\right\} C^{-1}_{AB}\left\{\phi^B(\bar{z}),G(y)\right\}.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Os parênteses de Dirac podem ser calculados

$$\begin{aligned}\{A_0(x),A_0(y)\}_D =& \{A_0(x),A_0(y)\} - \\ & - \iint dzd\bar{z}\left\{A_0(x),\pi_0(z)\right\}\left(\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)\left\{e^2(\alpha-1)A_0(\bar{z}),A_0(y)\right\} - \\ & - \iint dzd\bar{z}\left\{A_0(x),e^2(\alpha-1)A_0(z)\right\}\left(-\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)\left\{\pi_0(\bar{z}),A_0(z)\right\} \\ & = 0\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\{\varphi(x),\varphi(y)\}_D = 0, \tag{4.24}$$

$$\{A_1(x),A_1(y)\}_D = 0, \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\{A_0(x),A_1(y)\}_D =& \{A_0(x),A_1(y)\} - \\ & - \iint dzd\bar{z}\left\{A_0(x),\pi_0(z)\right\}\left(\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)\left\{-\partial_1\pi_1(\bar{z}),A_1(y)\right\} - \\ & - \iint dzd\bar{z}\left\{A_0(x),e^2(\alpha-1)A_0(z)\right\}\left(-\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)\left\{\pi_0(\bar{z}),A_1(z)\right\} \\ & = \iint dzd\bar{z} g_{00}\delta(x-z)\left(\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)\partial_1(-g_{11}\delta(\bar{z}-y)) \\ & = (g_{00}-g_{11})\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_1\delta(x-y) = \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_1\delta(x-y),\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$
\begin{aligned}
\{A_0(x),\varphi(y)\}_D = & \{A_0(x),\varphi(y)\} - \iint dz d\bar{z}\,\{A_0(x),\pi_0(z)\}\left(\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right) e\,\{\pi_\varphi(\bar{z}),\varphi(y)\} \\
& - \iint dz d\bar{z}\,\left\{A_0(x), e^2(\alpha-1)A_0(z)\right\}\left(-\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)\{\pi_0(\bar{z}),\varphi(z)\} \\
& = - \iint dz d\bar{z} g_{00}\delta(x-z)\left(\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)(-e\delta(\bar{z}-y)) \\
& = \frac{1}{e(\alpha-1)}\delta(x-y),
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

$$
\{\pi_\mu(x),\pi_\mu(y)\}_D = 0, \tag{4.28}
$$

$$
\{\pi_\varphi(x),\pi_\varphi(y)\}_D = 0, \tag{4.29}
$$

$$
\begin{aligned}
\{A_0(x),\pi_1(y)\}_D = & \{A_0(x),\pi_1(y)\} - \iint dz d\bar{z}\,\{A_0(x),\pi_0(z)\}\left(\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right) e^2\,\{A_1(\bar{z}),\pi_1(y)\} \\
& - \iint dz d\bar{z}\,\left\{A_0(x), e^2(\alpha-1)A_0(z)\right\}\left(-\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)\{\pi_0(\bar{z}),\pi_1(z)\} \\
& - \iint dz d\bar{z} g_{00}\delta(x-z)\left(\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right) e^2 g_{11}\delta(\bar{z}-y) \\
& = \frac{1}{(\alpha-1)}\delta(x-y),
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

$$
\begin{aligned}
\{A_1(x),\pi_1(y)\}_D = & \{A_1(x),\pi_1(y)\} - \iint dz d\bar{z}\,\{A_1(x),\pi_0(z)\}\left(\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right) e^2\,\{A_1(\bar{z}),\pi_1(y)\} \\
& - \iint dz d\bar{z}\,\{A_1(x),\partial_1\pi_1(z)\}\left(-\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)\{\pi_0(\bar{z}),\pi_1(z)\} \\
& = g_{11}\delta(x-y) = -\delta(x-y),
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

$$\begin{aligned}
\{\varphi(x),\pi_\varphi(y)\}_D =& \{\varphi(x),\pi_\varphi(y)\} - \iint dz d\bar{z}\, \{\varphi(x),\pi_0(z)\}\left(\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)\{e\partial_1\varphi(\bar{z}),\pi_\varphi(y)\} \\
&- \iint dz d\bar{z}\, \{\varphi(x), e\pi_\varphi(z)\}\left(-\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)\{\pi_0(\bar{z}),\pi_\varphi(z)\} \\
&= \delta(x-y),
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
\{A_0(x),\pi_\varphi(y)\}_D =& \{A_0(x),\pi_\varphi(y)\} - \iint dz d\bar{z}\, \{A_0(x),\pi_0(z)\}\left(\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)\{e\partial_1\varphi(\bar{z}),\pi_\varphi(y)\} \\
&- \iint dz d\bar{z}\, \left\{A_0(x), e^2(\alpha-1)A_0(z)\right\}\left(-\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right)\{\pi_0(\bar{z}),\pi_\phi(z)\} \\
&= - \iint dz d\bar{z} g_{00}\delta(x-z)\left(\frac{\delta(z-\bar{z})}{e^2(\alpha-1)}\right) e\partial_1\delta(\bar{z}-y) \\
&= -\frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1\delta(x-y).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Resultando nas seguintes álgebras

$$\{A_0(x),A_0(y)\}_D = \{\varphi(x),\varphi(y)\}_D = \{A_1(x),A_1(y)\}_D = 0, \tag{4.34}$$

$$\{A_0(x),A_1(y)\}_D = \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_1\delta(x-y), \tag{4.35}$$

$$\{A_0(x),\varphi(y)\}_D = \frac{1}{e(\alpha-1)}\delta(x-y), \tag{4.36}$$

$$\{\pi_\mu(x),\pi_\mu(y)\}_D = \{\pi_\varphi(x),\pi_\varphi(y)\}_D = 0, \tag{4.37}$$

$$\{A_0(x),\pi_1(y)\}_D = \frac{1}{(\alpha-1)}\delta(x-y), \tag{4.38}$$

$$\{A_1(x),\pi_1(y)\}_D = -\delta(x-y), \tag{4.39}$$

$$\{\varphi(x),\pi_\varphi(y)\}_D = \delta(x-y), \tag{4.40}$$

$$\{A_0(x),\pi_\varphi(y)\}_D = -\frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1\delta(x-y). \tag{4.41}$$

4.2 Aplicação do método *Gauge Unfixing* Aprimorado

Na aplicação do método de Dirac, foi observado que para $\alpha > 1$ o modelo de Schwinger quiral possui dois vínculos de segunda classe, ou seja, não possui invariância de calibre.

Nessa seção será encontrada uma versão invariante de calibre para este modelo. Para este fim, utiliza-se o método de *gauge unfixing* aprimorado que tem como função converter os respectivos vínculos (4.17), (4.18) de segunda classe em vínculos de primeira classe.

Esse processo gerará dois casos que serão estudos separadamente. Cada caso é descrito pela escolha de um dos vínculos ser o gerador de simetria de calibre e o outro consequentemente é descartado.

4.2.1 Caso I

Esse caso I será dedicado ao vínculo Ω_1 como sendo o gerador de simetria de calibre. Para isso redefini-se o vínculo Ω_1, como

$$\psi = \frac{\Omega_1}{e^2(\alpha-1)} = -\frac{\pi_0}{e^2(\alpha-1)}, \tag{4.42}$$

e

$$\Omega_2 = -\partial_1\pi_1 + e^2(\alpha-1)A_0 + e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi) + e^2 A_1, \tag{4.43}$$

de tal modo que ψ com Ω_2 formem um par canonicamente conjugado $\{\psi(x), \Omega_2(y)\} = \delta(x-y)$. O vínculo Ω_2 será descartado, passando a fazer parte dos termos nas séries de potências que definirão as funções de primeira classe [20].

As transformações de calibre infinitesimais geradas por ψ, resultam em

$$\delta A_0(x) = -\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\int dy\varepsilon(y)\{A_0(x), \psi(y)\} = -\frac{\varepsilon(x)}{e^2(\alpha-1)}, \tag{4.44}$$

$$\delta\pi_1(x) = \delta A_1(x) = \delta\varphi(x) = \delta\pi_\varphi(x) = 0, \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}\delta\Omega_2 &= \int dy\varepsilon(y)\{\Omega_2(x), \psi(y)\} \\ &= -\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\int dy\varepsilon(y)\left\{e^2(\alpha-1)A_0(x), \pi_0(y)\right\} = -\varepsilon(x).\end{aligned} \tag{4.46}$$

Observa-se que apenas o campo A_0 não é invariante de calibre. Com isso, a quantidade invariante de calibre $\tilde{A}_0$ será definida pela seguinte série de potência em Ω_2

$$\tilde{A}_0(x) = A_0(x) + \int dy b_1(x,y)\Omega_2(y) + \iint dydz b_2(x,y,z)\Omega_2(y)\Omega_2(z) + ... \tag{4.47}$$

Aplicando a condição variacional, encontra-se

$$\begin{aligned} \delta\tilde{A}_0(x) = \delta A_0(x) &+ \int dy\delta b_1(x,y)\Omega_2(y) + \int dy b_1(x,y)\delta\Omega_2(y) + \\ &+ \iint dydz\delta b_2(x,y,z)\Omega_2(y)\Omega_2(z) + \iint dydz b_2(x,y,z)\delta\Omega_2(y)\Omega_2(z) + \\ &+ \iint dydz b_2(x,y,z)\Omega_2(y)\delta\Omega_2(z) + ... = 0. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Calculando os termos com potência zero em Ω_2, tem-se

$$\delta A_0(x) + \int dy b_1(x,y)\delta\Omega_2(y) = 0. \tag{4.49}$$

Substituindo as Eq's (4.44) e (4.46), obtém-se

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon(x)}{e^2(\alpha-1)} - \int dy b_1(x,y)\varepsilon(y) = 0, \\ b_1(x,y) = -\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\delta(x-y). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Os termos de primeira ordem em Ω_2, fica

$$\int dy\delta b_1(x,y)\Omega_2 + 2\iint dydz b_2(x,y,z)\delta\Omega_2(y)\Omega_2(z) = 0. \tag{4.51}$$

Substituindo as Eq's (4.46) e (4.50), encontra-se

$$\begin{aligned} -\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\int dy\delta\left[\delta(x-y)\right]\Omega_2(y) - 2\iint dydz b_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_2(z) = 0 \\ -\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\iint dydz\varepsilon(z)\left\{\delta(x-y),\psi(z)\right\}\Omega_2(z) - 2\iint dydz b_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_2(z) = 0 \\ 0 - 2\iint dydz b_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_2(z) = 0, \end{aligned}$$

como ε é arbitrário e Ω_2 não pode ser nulo na série, então

$$b_2(x,y,z) = 0. \tag{4.52}$$

Logo, todos os termos de correção b_n são nulos para $n \geq 2$. Substituindo a Eq. (4.50) em (4.47) o campo de calibre $\tilde{A}_0(x)$, fica

$$\tilde{A}_0(x) = A_0(x) - \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\Omega_2(x). \tag{4.53}$$

Assim, os campos invariantes de calibre para o modelo de Schwinger quiral são

$$\tilde{A}_0 = A_0 - \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\Omega_2, \tag{4.54}$$

$$\tilde{A}_1 = A_1, \tag{4.55}$$

$$\tilde{\pi}_1 = \pi_1, \tag{4.56}$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi, \tag{4.57}$$

$$\tilde{\pi}_\varphi = \pi_\varphi. \tag{4.58}$$

Com essas novas variáveis, podemos agora calcular seus parênteses de Poisson

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_1(y)\right\} &= \left\{A_0(x) - \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\Omega_2(x), \pi_1(y)\right\} = -\frac{1}{(\alpha-1)}\left\{A_1(x), \pi_1(y)\right\} \\ &= -\frac{1}{(\alpha-1)}g_{11}\delta(x-y) = \frac{1}{(\alpha-1)}\delta(x-y),\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{A}_0(x), \tilde{\varphi}(y)\right\} &= \left\{A_0(x) - \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\Omega_2(x), \varphi(y)\right\} = -\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\left\{e\pi_\varphi(x), \varphi(y)\right\} \\ &= \frac{1}{e(\alpha-1)}\delta(x-y),\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_\varphi(y)\right\} &= \left\{A_0(x) - \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\Omega_2(x), \pi_\varphi(y)\right\} = -\frac{1}{e(\alpha-1)}\left\{\partial_1\varphi(x), \pi_\varphi(y)\right\} \\ &= -\frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1\delta(x-y),\end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\left\{\tilde{A}_0(x),\tilde{A}_1(y)\right\}=\left\{A_0(x)-\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\Omega_2(x),A_1(y)\right\}=-\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\left\{-\partial_1\pi_1(x),A_1(y)\right\}$$
$$=\frac{1}{e^2(\alpha-1)}(-\partial_1 g_{11}\delta(x-y))=\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_1\delta(x-y), \tag{4.62}$$

$$\left\{\tilde{A}_1(x),\tilde{\pi}_1(y)\right\}=\left\{A_1(x),\pi_1(y)\right\}=g_{11}\delta(x-y)=-\delta(x-y), \tag{4.63}$$

$$\left\{\tilde{\varphi}(x),\tilde{\pi}_\varphi(y)\right\}=\left\{\varphi(x),\pi_\varphi(y)\right\}=\delta(x-y). \tag{4.64}$$

Logo, conclui-se que os parênteses de Poisson das variáveis invariantes de calibre são iguais aos parênteses de Dirac das variáveis originais, calculadas na subseção 4.1.1, mostrando a consistência que existe no nosso método.

Agora, pode-se escrever a hamiltoniana e a lagrangiana com as variáveis GU. Para isso, basta fazer a substituição direta das variáveis originais pelas as encontradas na aplicação do GU aprimorado, como segue

$$A_0,A_1,\varphi,\pi_1,\pi_\varphi\rightarrow\tilde{A}_0,\tilde{A}_1,\tilde{\varphi},\tilde{\pi}_1,\tilde{\pi}_\varphi. \tag{4.65}$$

Então, substituindo na hamiltoniana canônica do modelo (4.10), obtém-se

$$\begin{aligned}\tilde{H}_c=&\int dx\Bigg\{\frac{1}{2}\tilde{\pi}_1^2+\frac{1}{2}\tilde{\pi}_\varphi^2+\frac{1}{2}(\partial_1\tilde{\varphi})^2+e\big(\partial_1\tilde{\varphi}+\tilde{\pi}_\varphi\big)\tilde{A}_1+\frac{1}{2}e^2\big(\alpha+1\big)\tilde{A}_1^2\\&-\tilde{A}_0\Big[-\partial_1\tilde{\pi}_1+\frac{e^2(\alpha-1)}{2}\tilde{A}_0+e(\partial_1\tilde{\varphi}+\tilde{\pi}_\varphi)+e^2\tilde{A}_1\Big]\Bigg\}\\=&\int dx\Bigg\{\frac{1}{2}\pi_1^2+\frac{1}{2}\pi_\varphi^2+\frac{1}{2}(\partial_1\varphi)^2+e\big(\partial_1\varphi+\pi_\varphi\big)A_1+\frac{1}{2}e^2\big(\alpha+1\big)A_1^2+\\&+\left[A_0-\frac{\Omega_2}{e^2(\alpha-1)}\right]\partial_1\pi_1-\frac{e^2(\alpha-1)}{2}\left[A_0-\frac{\Omega_2}{e^2(\alpha-1)}\right]^2-\\&-e(\partial_1\varphi+\pi_\varphi)\left[A_0-\frac{\Omega_2}{e^2(\alpha-1)}\right]-e^2A_1\left[A_0-\frac{\Omega_2}{e^2(\alpha-1)}\right]\Bigg\},\end{aligned}$$

agrupando os termos, encontra-se

$$\begin{aligned}\tilde{H}_c=&H_c+\int dx\frac{\Omega_2}{e^2(\alpha-1)}\Big[-\partial_1\pi_1+e^2(\alpha-1)A_0+e(\partial_1\varphi+\pi_\varphi)+e^2A_1\Big]-\\&-\int dx\frac{\Omega_2^2}{2e^2(\alpha-1)},\end{aligned} \tag{4.66}$$

onde o termo dentro do colchetes corresponde ao vínculo secundário (4.18), substituindo tem-se

$$\tilde{H}_c = H_c + \int dx \frac{1}{2e^2(\alpha-1)}\Omega_2^2. \tag{4.67}$$

Simplificando a expressão (4.67), encontra-se

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_c = &\int dx \Big\{ \frac{1}{2}\pi_1^2 + \frac{1}{2}\pi_\varphi^2 + \frac{1}{2}(\partial_1\varphi)^2 + e\big(\partial_1\varphi + \pi_\varphi\big)A_1 + \frac{1}{2}e^2\big(\alpha+1\big)A_1^2 + \\
&+ A_0\partial_1\pi_1 - \frac{e^2(\alpha-1)}{2}A_0A_0 - e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi)A_0 - e^2A_1A_0 \\
&\frac{1}{2e^2(\alpha-1)}\left[-\partial_1\pi_1 + e^2(\alpha-1)A_0 + e(\partial_1\varphi+\pi_\varphi) + e^2A_1\right]^2 \Big\} \\
= &\int dx \Big\{ \frac{1}{2}\pi_1^2 + \frac{1}{2}\pi_\varphi^2 + \frac{1}{2}(\partial_1\varphi)^2 + e\big(\partial_1\varphi + \pi_\varphi\big)A_1 + \frac{1}{2}e^2\big(\alpha+1\big)A_1^2 + \\
&\frac{1}{2e^2(\alpha-1)}(\partial_1\pi_1)^2 - \frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1\pi_1\big(\partial_1\varphi+\pi_\varphi\big) - \frac{1}{(\alpha-1)}\partial_1\pi_1 A_1 \\
&+ \frac{1}{(\alpha-1)}e\big(\partial_1\varphi+\pi_\varphi\big)A_1 + \frac{1}{2(\alpha-1)}\big(\partial_1\varphi+\pi_\varphi\big)^2 + \frac{1}{2(\alpha-1)}e^2A_1^2 \Big\},
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_c = \int dx \Big[&\frac{\alpha}{2(\alpha-1)}\pi_\varphi^2 + \frac{1}{e(\alpha-1)}\pi_\varphi\left[-\partial_1\pi_1 + e\partial_1\varphi\right] + \frac{\alpha}{2(\alpha-1)}(\partial_1\varphi)^2 - \frac{1}{e(\alpha-1)}(\partial_1\varphi)(\partial_1\pi_1) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\pi_1^2 + \frac{(\partial_1\pi_1)^2}{e^2(\alpha-1)}\right) + \frac{e^2\alpha^2}{2(\alpha-1)}A_1^2 + \frac{e\alpha}{(\alpha-1)}A_1\left(\partial_1\varphi + \pi_\varphi - \frac{\partial_1\pi_1}{e\alpha}\right)\Big].
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Podemos obter também uma lagrangiana invariante. Para esse fim, será utilizada a forma funcional da lagrangiana (4.1) [11, 26]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \int dx \Big[&-\frac{1}{4}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + e(g^{0\nu}-\epsilon^{0\nu})(\partial_0\varphi)A_\nu + e(g^{1\nu}-\epsilon^{1\nu})(\partial_1\varphi)A_\nu + \\
&+ \frac{1}{2}e^2\alpha A_0A_0 + \frac{1}{2}e^2\alpha A_1A_1\Big].
\end{aligned} \tag{4.69}$$

Então, a lagrangiana (4.69) pode inicialmente ser escrita da seguinte forma

$$\tilde{\mathcal{L}} = \int dx \Big[-\frac{1}{2}\tilde{F}_{01}\tilde{F}_{01} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\tilde{\varphi})^2 + e(\tilde{A}_0 - \tilde{A}_1)(\partial_0\tilde{\varphi}) + e(\tilde{A}_0 - \tilde{A}_1)(\partial_1\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}e^2\alpha\tilde{A}_0\tilde{A}_0 + \\ + \frac{1}{2}e^2\alpha\tilde{A}_1\tilde{A}_1 \Big]. \tag{4.70}$$

Sendo $\tilde{F}_{01} = (\partial_0\tilde{A}_1 - \partial_1\tilde{A}_0)$ e fazendo a substituição das variáveis originais pelas variáveis GU, tem-se

$$\tilde{\mathcal{L}} = \int dx \Big[-\frac{1}{2}(\partial_0 A_1 - \partial_1\tilde{A}_0)(\partial_0 A_1 - \partial_1\tilde{A}_0) + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi + e(\tilde{A}_0 - A_1)(\partial_0\varphi) + \\ + e(\tilde{A}_0 - A_1)(\partial_1\varphi) + \frac{1}{2}e^2\alpha\tilde{A}_0\tilde{A}_0 + \frac{1}{2}e^2\alpha A_1 A_1 \Big]. \tag{4.71}$$

Visto que, a variável original A_0 não está mais presente no sistema. Não é possível escrever a lagrangiana (4.71) em uma forma manifestamente covariante.

4.2.2 Caso II

No caso II, será usado o vínculo Ω_2 como sendo o gerador de simetria. Definindo

$$\chi = \frac{1}{e^2(\alpha - 1)}\left[-\partial_1\pi_1 + e^2(\alpha - 1)A_0 + e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi) + e^2 A_1\right], \tag{4.72}$$

e

$$\Omega_1 = \pi_0, \tag{4.73}$$

tal que $\{\chi(x), \Omega_1(y)\} = \delta(x-y)$. O vínculo Ω_1 será descartado. Seguindo com o mesmo procedimento realizado no caso I, tem-se as seguintes transformações de calibre infinitesimais geradas por χ

$$\delta A_0 = \int dy\varepsilon(y)\left\{A_0(x), \chi(y)\right\} = 0, \tag{4.74}$$

$$\delta A_1 = \int dy\varepsilon(y)\left\{A_1(x), \chi(y)\right\} = \frac{1}{e^2(\alpha - 1)}\int dy\varepsilon(y)\left\{A_1(x), -\partial_1\pi_1(y)\right\} \\ = \frac{1}{e^2(\alpha - 1)}\int dy\varepsilon(y)(-g_{11}\partial_1\delta(x-y)) = -\frac{1}{e^2(\alpha - 1)}\partial_1\varepsilon(x), \tag{4.75}$$

$$\tag{4.76}$$

$$
\begin{aligned}
\delta\varphi &= \int dy\varepsilon(y)\left\{\varphi(x),\chi(y)\right\} = \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\int dy\varepsilon(y)\left\{\varphi(x),e\pi_\varphi(y)\right\}\\
&= \frac{1}{e(\alpha-1)}\varepsilon(x), \qquad (4.77)\\
\delta\pi_\varphi &= \int dy\varepsilon(y)\left\{\pi_\varphi(x),\chi(y)\right\} = \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\int dy\varepsilon(y)\left\{\pi_\varphi(x),e\partial_1\varphi(y)\right\}\\
&= \frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1\varepsilon(x), \qquad (4.78)\\
\delta\pi_1 &= \int dy\varepsilon(y)\left\{\pi_1(x),\chi(y)\right\} = \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\int dy\varepsilon(y)\left\{\pi_1(x),e^2A_1(y)\right\}\\
&= \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\int dy\varepsilon(y)\left(-e^2g_{11}\delta(x-y)\right) = \frac{1}{(\alpha-1)}\varepsilon(x), \qquad (4.79)\\
\delta\Omega_1 &= \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\int dy\varepsilon(y)\left\{\Omega_1(x),\chi(y)\right\} = -\varepsilon(x). \qquad (4.80)
\end{aligned}
$$

Apenas o campo A_0 é invariante de calibre. Desta forma, as quantidades invariante de calibre $\tilde{A}_1$, $\tilde{\varphi}$,$\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_\varphi$ serão definidas como segue:

Para $\tilde{A}_1$ tem-se a seguinte série de potência

$$
\tilde{A}_1(x) = A_1(x) + \int dyc_1(x,y)\Omega_1(y) + \iint dydzc_2(x,y,z)\Omega_1(y)\Omega_1(z) + ... \qquad . \qquad (4.81)
$$

Aplicando a condição variacional, tem-se

$$
\begin{aligned}
\delta\tilde{A}_1(x) = \delta A_1(x) &+ \int dy\delta c_1(x,y)\Omega_1(y) + \int dyc_1(x,y)\delta\Omega_1(y) +\\
&+ \iint dydz\delta c_2(x,y,z)\Omega_1(y)\Omega_1(z) + \iint dydzc_2(x,y,z)\delta\Omega_1(y)\Omega_1(z) +\\
&+ \iint dydzc_2(x,y,z)\Omega_1(y)\delta\Omega_1(z) + ... = 0. \qquad (4.82)
\end{aligned}
$$

Separando os termos com potência zero em Ω_1, encontra-se

$$
\delta A_1(x) + \int dyc_1(x,y)\delta\Omega_1(y) = 0. \qquad (4.83)
$$

Substituindo as Eq's (4.75) e (4.80), tem-se

$$-\frac{\partial_1 \varepsilon(x)}{e^2(\alpha-1)} - \int dy c_1(x,y)\varepsilon(y) = 0,$$

$$c_1(x,y) = \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_1\delta(x-y). \tag{4.84}$$

Para os termos de primeira ordem em Ω_1, tem-se

$$\int dy\delta c_1(x,y)\Omega_1(y) + 2\iint dydz c_2(x,y,z)\delta\Omega_1(y)\Omega_1(z) = 0. \tag{4.85}$$

Substituindo as Eq's (4.80) e (4.84), obtém-se

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\int dy\delta\left[\partial_1\delta(x-y)\right]\Omega_1(y) - 2\iint dydz c_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_1(z) = 0\\
-\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\iint dydz\varepsilon(z)\left\{\partial_1\delta(x-y),\chi(z)\right\}\Omega_1(z) - 2\iint dydz c_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_1(z) = 0\\
0 - 2\iint dydz c_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_1(z) = 0
\end{aligned}$$

$$c_2(x,y,z) = 0. \tag{4.86}$$

Isto é, os coeficientes são nulos para $n \geq 2$. Assim, o campo invariante de calibre $\tilde{A}_1$ assume a seguinte forma

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1(x) &= A_1(x) + \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\int dy\partial_1\delta(x-y)\Omega_1(y)\\
&= A_1(x) - \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\int dy\partial_1\Omega_1(y)\delta(x-y)\\
&= A_1(x) - \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_1\Omega_1(x).
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Para o campo $\tilde{\varphi}$, a série de potência e sua variação, são dadas por

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) + \int dy c_1(x,y)\Omega_1(y) + \iint dydz c_2(x,y,z)\Omega_1(y)\Omega_1(z) + ... \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\varphi}(x) = {} & \delta\varphi(x) + \int dy \delta c_1(x,y)\Omega_1(y) + \int dy c_1(x,y)\delta\Omega_1(y) + \\ & + \iint dydz \delta c_2(x,y,z)\Omega_1(y)\Omega_1(z) + \iint dydz c_2(x,y,z)\delta\Omega_1(y)\Omega_1(z) + \\ & + \iint dydz c_2(x,y,z)\Omega_1(y)\delta\Omega_1(z) + ... = 0.\end{aligned} \tag{4.89}$$

Para o termo de ordem zero, tem-se

$$\delta\varphi(x) + \int dy c_1(x,y)\delta\Omega_1(y) = 0. \tag{4.90}$$

Usando (4.77) e (4.80), obtém-se

$$\frac{1}{e(\alpha-1)}\varepsilon(x) - \int dy c_1(x,y)\varepsilon(y) = 0,$$

$$c_1(x,y) = \frac{1}{e(\alpha-1)}\delta(x-y). \tag{4.91}$$

O termo de primeira ordem em Ω_1, é

$$\int dy \delta c_1(x,y)\Omega_1(y) + 2\iint dydz c_2(x,y,z)\delta\Omega_1(y)\Omega_1(z) = 0. \tag{4.92}$$

Substituindo (4.91) e (4.80), obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{e(\alpha-1)}\int dy \delta\left[\delta(x-y)\right]\Omega_1(y) - 2\iint dydz c_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_1(z) &= 0 \\ \frac{1}{e(\alpha-1)}\iint dydz \varepsilon(z)\left\{\delta(x-y),\chi(z)\right\}\Omega_1(z) - 2\iint dydz c_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_1(z) &= 0 \\ 0 - 2\iint dydz c_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_1(z) &= 0\end{aligned}$$

$$c_2(x,y,z) = 0. \tag{4.93}$$

Desta forma, tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x) &= \varphi(x) + \frac{1}{e(\alpha-1)}\int dy\delta(x-y)\Omega_1(y) \\ &= \varphi(x) + \frac{1}{e(\alpha-1)}\Omega_1(x).\end{aligned} \tag{4.94}$$

A série de potência para $\tilde{\pi}_1$ é

$$\tilde{\pi}_1(x) = \pi_1(x) + \int dyc_1(x,y)\Omega_1(y) + \iint dydzc_2(x,y,z)\Omega_1(y)\Omega_1(z) + ... \tag{4.95}$$

A sua variação é dada por

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\pi}_1(x) = \delta\pi_1(x) &+ \int dy\delta c_1(x,y)\Omega_1(y) + \int dyc_1(x,y)\delta\Omega_1(y) + \\ &+ \iint dydz\delta c_2(x,y,z)\Omega_1(y)\Omega_1(z) + \iint dydzc_2(x,y,z)\delta\Omega_1(y)\Omega_1(z) + \\ &+ \iint dydzc_2(x,y,z)\Omega_1(y)\delta\Omega_1(z) + ... = 0.\end{aligned} \tag{4.96}$$

A equação de ordem zero em Ω_1 resulta em

$$\delta\pi_1(x) + \int dyc_1(x,y)\delta\Omega_1(y) = 0. \tag{4.97}$$

Utilizando as Eq's (4.79) e (4.80) tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\alpha-1)}\varepsilon(x) - \int dyc_1(x,y)\varepsilon(y) = 0, \\ c_1(x,y) = \frac{1}{(\alpha-1)}\delta(x-y).\end{aligned} \tag{4.98}$$

Os termos de primeira ordem também são nulos

$$\begin{aligned}\int dy\delta c_1(x,y)\Omega_1(y) + 2\iint dydzc_2(x,y,z)\delta\Omega_1(y)\Omega_1(z) = 0 \\ \frac{1}{(\alpha-1)}\int dy\delta\left[\delta(x-y)\right]\Omega_1(y) - 2\iint dydzc_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_1(z) = 0\end{aligned} \tag{4.99}$$

$$\frac{1}{(\alpha-1)}\iint dydz\varepsilon(z)\left\{\delta(x-y),\chi(z)\right\}\Omega_1(z)-2\iint dydzc_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_1(z)=0$$
$$0-2\iint dydzc_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_1(z)=0$$

$$c_2(x,y,z)=0. \tag{4.100}$$

Logo, o campo invariante de calibre resulta em

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_1(x) &= \pi_1(x)+\frac{1}{(\alpha-1)}\int dy\delta(x-y)\Omega_1(y)\\ &= \pi_1(x)+\frac{1}{(\alpha-1)}\Omega_1(x).\end{aligned} \tag{4.101}$$

Por último para o campo $\tilde{\pi}_\varphi$, encontra-se

$$\tilde{\pi}_\varphi(x)=\pi_\varphi(x)+\int dyc_1(x,y)\Omega_1(y)+\iint dydzc_2(x,y,z)\Omega_1(y)\Omega_1(z)+... \tag{4.102}$$

Aplicando a condição variacional

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\pi}_\varphi(x) = {} & \delta\pi_\varphi(x)+\int dy\delta c_1(x,y)\Omega_1(y)+\int dyc_1(x,y)\delta\Omega_1(y)+\\ & +\iint dydz\delta c_2(x,y,z)\Omega_1(y)\Omega_1(z)+\iint dydzc_2(x,y,z)\delta\Omega_1(y)\Omega_1(z)+\\ & +\iint dydzc_2(x,y,z)\Omega_1(y)\delta\Omega_1(z)+...=0.\end{aligned} \tag{4.103}$$

Calculando os termos de ordem zero, encontra-se

$$\delta\pi_\varphi(x)+\int dyc_1(x,y)\delta\Omega_1(y)=0, \tag{4.104}$$

$$\frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1\varepsilon(x)-\int dyc_1(x,y)\varepsilon(y)=0,$$
$$c_1(x,y)=-\frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1\delta(x-y), \tag{4.105}$$

onde foi usado o seguinte ansatz $\int dy\left(-\frac{\partial_1^y\delta(x-y)}{e(\alpha-1)}\right)\varepsilon(y)=\frac{\partial_1^x\varepsilon(x)}{e(\alpha-1)}$. Utilizando as Eq's (4.105) e (4.80), os termos de primeira ordem em Ω_1 ficam da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{e(\alpha-1)}\int dy\delta\left[\partial_1\delta(x-y)\right]\Omega_1(y)-2\iint dydzc_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_1(z)=0\\
-\frac{1}{e(\alpha-1)}\iint dydz\varepsilon(z)\left\{\partial_1\delta(x-y),\chi(z)\right\}\Omega_1(z)-2\iint dydzc_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_1(z)=0\\
0-2\iint dydzc_2(x,y,z)\varepsilon(y)\Omega_1(z)=0
\end{aligned}
$$

$$
c_2(x,y,z)=0. \tag{4.106}
$$

Com isso, tem-se o seguinte campo invariante de calibre

$$
\begin{aligned}
\tilde{\pi}_\varphi(x) &= \pi_\varphi(x)-\frac{1}{e(\alpha-1)}\int dy\partial_1\delta(x-y)\Omega_1(y)\\
&= \pi_\varphi(x)+\frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1\Omega_1(x).
\end{aligned} \tag{4.107}
$$

Assim, as variáveis GU para esse caso são

$$
\tilde{A}_0 = A_0, \tag{4.108}
$$

$$
\tilde{A}_1 = A_1-\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_1\Omega_1, \tag{4.109}
$$

$$
\tilde{\varphi} = \varphi+\frac{1}{e(\alpha-1)}\Omega_1, \tag{4.110}
$$

$$
\tilde{\pi}_1 = \pi_1+\frac{1}{(\alpha-1)}\Omega_1, \tag{4.111}
$$

$$
\tilde{\pi}_\varphi = \pi_\varphi+\frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1\Omega_1. \tag{4.112}
$$

Calculando os parêntese de Poisson entre as variáveis GU, encontra-se

$$
\begin{aligned}
\left\{\tilde{A}_0(x),\tilde{\pi}_1(y)\right\} &= \left\{A_0(x),\pi_1(y)+\frac{1}{(\alpha-1)}\pi_0(y)\right\}\\
&= \frac{1}{(\alpha-1)}g_{00}\delta(x-y)=\frac{1}{(\alpha-1)}\delta(x-y)=\left\{A_0(x),\pi_1(y)\right\}_D,
\end{aligned} \tag{4.113}
$$

$$\left\{\tilde{A}_0(x), \tilde{\varphi}(y)\right\} = \left\{A_0(x), \varphi(y) + \frac{1}{e(\alpha-1)}\pi_0(y)\right\} = \frac{1}{e(\alpha-1)}\delta(x-y) = \{A_0(x), \varphi(y)\}_D\,, \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_\varphi(y)\right\} &= \left\{A_0(x), \pi_\varphi(y) + \frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1^y\pi_0(y)\right\} = \frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1^y\delta(x-y) \\ &= -\frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1^x\delta(x-y) = \{A_0(x), \pi_\varphi(y)\}_D\,,\end{aligned} \tag{4.115}$$

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{A}_0(x), \tilde{A}_1(y)\right\} &= \left\{A_0(x), A_1(y) - \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_1^y\pi_0(y)\right\} = -\frac{1}{e^2(\alpha-1)}(\partial_1^y g_{00}\delta(x-y)) \\ &= -\frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_1^y\delta(x-y) = \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_1^x\delta(x-y) = \{A_0(x), A_1(y)\}_D\,,\end{aligned} \tag{4.116}$$

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{A}_1(x), \tilde{\pi}_1(y)\right\} &= \left\{A_1(x) - \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_1\pi_0(x), \pi_1(y) + \frac{1}{(\alpha-1)}\pi_0(y)\right\} = g_{11}\delta(x-y) \\ &= -\delta(x-y) = \{A_1(x), \pi_1(y)\}_D\,,\end{aligned} \tag{4.117}$$

$$\begin{aligned}\{\tilde{\varphi}(x), \tilde{\pi}_\varphi(y)\} &= \left\{\varphi(x) + \frac{1}{e(\alpha-1)}\pi_0(x), \pi_\varphi(y) + \frac{1}{e(\alpha-1)}\partial_1\pi_0(y)\right\} = \delta(x-y) \\ &= \{\varphi(x), \pi_\varphi(y)\}_D\,.\end{aligned} \tag{4.118}$$

Isto é, a álgebra dos parênteses de Poisson entre as variáveis GU são iguais a álgebra dos parênteses de Dirac entre as variáveis originais do espaço de fase.

Assim como no caso anterior, é realizada a substituição direta das variáveis originais pelas variáveis GU na hamiltoniana canônica, resultando na seguinte hamiltoniana invariante de calibre.

$$
\begin{aligned}
\tilde{H}_c^* = & \int dx \Big\{ \frac{1}{2}\tilde{\pi}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{\pi}_\varphi^2 + \frac{1}{2}(\partial_1\tilde{\varphi})^2 + e\big(\partial_1\tilde{\varphi} + \tilde{\pi}_\varphi\big)\tilde{A}_1 + \frac{1}{2}e^2\big(\alpha+1\big)\tilde{A}_1^2 \\
& - \tilde{A}_0\big[-\partial_1\tilde{\pi}_1 + \frac{e^2(\alpha-1)}{2}\tilde{A}_0 + e(\partial_1\tilde{\varphi} + \tilde{\pi}_\varphi) + e^2\tilde{A}_1\big]\Big\} \\
= & \int dx \Big\{ \frac{1}{2}\Big[\pi_1^2 + \frac{2\pi_1\pi_0}{(\alpha-1)} + \frac{\pi_0^2}{(\alpha-1)^2}\Big] + \frac{1}{2}\Big[\pi_\varphi^2 + \frac{2\pi_\varphi\partial_1\pi_0}{e(\alpha-1)} + \frac{(\partial_1\pi_0)^2}{e^2(\alpha-1)^2}\Big] + \\
& + \frac{1}{2}\Big[(\partial_1\varphi)^2 + \frac{2\{(\partial_1\varphi)(\partial_1\pi_0)}{e(\alpha-1)} + \frac{(\partial_1\pi_0)^2}{e^2(\alpha-1)^2}\Big] + e\Big[(\partial_1\varphi + \pi_\varphi)A_1 + \frac{2A_1\partial_1\pi_0}{e(\alpha-1)} - \\
& - \frac{(\partial_1\varphi)(\partial_1\pi_0)}{e^2(\alpha-1)} - \frac{\pi_\varphi\partial_1\pi_0}{e^2(\alpha-1)} - \frac{2(\partial_1\pi_0)^2}{e^3(\alpha-1)^2}\Big] + \frac{1}{2}e^2(\alpha-1)\Big[A_1^2 - \frac{2A_1\partial_1\pi_0}{e^2(\alpha-1)} + \\
& + \frac{(\partial_1\pi_0)^2}{e^4(\alpha-2)^2}\Big] + A_0\partial_1\pi_1 + A_0\frac{\partial_1\pi_1}{(\alpha-1)} - \frac{1}{2}e^2(\alpha-1)A_0^2 - e\Big[A_0(\partial_1\varphi + \pi_\varphi) + \\
& + \frac{2A_0\partial_1\pi_0}{e(\alpha-1)}\Big] - e^2\Big(A_0A_1 - \frac{A_0\partial_1\pi_0}{e^2(\alpha-1)}\Big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\tilde{H}_c^* = H_c + \int dx \Big[\frac{[\pi_1 + (\alpha-1)\partial_1 A_1]}{(\alpha-1)}\pi_0 + \frac{(\partial_1\pi_0)^2}{2e^2(\alpha-1)} + \frac{\pi_0^2}{2(\alpha-1)^2}\Big], \tag{4.119}
$$

satisfaz a seguinte condição $\left\{\chi, \tilde{H}_c^*\right\} = 0$, ou seja, é uma função de primeira classe. Calculando as equações de Hamilton geradas por (4.119), tem-se

$$
\dot{A}_0 = \left\{A_0, \tilde{H}_c^*\right\} = \frac{1}{(\alpha-1)}\pi_1 + \partial_1 A_1 - \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_1\partial_1\pi_0 + \frac{1}{(\alpha-1)^2}\pi_0, \tag{4.120}
$$

$$
\dot{A}_1 = \left\{A_1, \tilde{H}_c^*\right\} = -\pi_1 + \partial_1 A_0 - \frac{1}{(\alpha-1)}\pi_0, \tag{4.121}
$$

$$
\dot{\varphi} = \left\{\varphi, \tilde{H}_c^*\right\} = \pi_\varphi - e(A_0 - A_1), \tag{4.122}
$$

$$
\dot{\pi}_1 = \left\{\pi_1, \tilde{H}_c^*\right\} = e(\partial_1\varphi + \pi_\varphi) + e^2(\alpha+1)A_1 - e^2 A_0 - \partial_1\pi_0, \tag{4.123}
$$

$$
\dot{\pi}_\varphi = \partial_1\partial_1\varphi + e(\partial_1 A_1 - \partial_1 A_0), \tag{4.124}
$$

$$
\dot{\pi}_0 = \left\{\pi_0, \tilde{H}_c^*\right\} = \Omega_2 = e^2(\alpha-1)\chi \approx 0. \tag{4.125}
$$

A equação (4.125) nos permite fazer a seguinte generalização

$$A_0 \to \tilde{A}_0 = A_0 - \frac{1}{e^2(\alpha-1)}\partial_0\pi_0. \tag{4.126}$$

Realizando a evolução temporal de A_0 e $\tilde{A}_0$, observa-se que ambas são iguais. Assim, pode-se substituir A_0 por $\tilde{A}_0$ na hamiltoniana (4.119), resultando em

$$\tilde{H}_c^* = H_c + \int dx \left[\frac{[\pi_1 + (\alpha-1)\partial_1 A_1]}{\alpha-1}\pi_0 - \frac{1}{2e^2(\alpha-1)}(\partial_\mu\pi_0)^2 + \frac{1}{2(\alpha-1)^2}\pi_0^2\right]. \tag{4.127}$$

A lagrangiana de primeira classe pode ser obtida realizando a seguinte transformação de Legendre inversa

$$\tilde{\mathcal{L}}^* = \int dx \left\{\pi_0\dot{A}_0 - \pi_1\dot{A}_1 + \pi_\varphi\dot{\varphi} - \tilde{H}_c^*\right\}. \tag{4.128}$$

Das Eq's (4.121) e (4.122), obtém-se as seguintes relações

$$\pi_1 = -\dot{A}_1 + \partial_1 A_0 - \frac{\pi_0}{(\alpha-1)}. \tag{4.129}$$

$$\pi_\varphi = \dot{\varphi} + e(A_0 - A_1). \tag{4.130}$$

Então, substituindo (4.129), (4.130) e $\tilde{H}_c^*$ em (4.128), encontra-se

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}^* = \int dx \Big\{ &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + e(g^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu})(\partial_\mu\varphi)A_\nu + \\ &+ \frac{1}{2}e^2\alpha A_\mu^2 + \frac{\pi_0}{(\alpha-1)}\left[(\alpha-1)g^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu}\right]\partial_\mu A_\nu - \frac{(\partial_1\pi_0)^2}{2e^2(\alpha-1)}\Big\}.\end{aligned} \tag{4.131}$$

Observa-se que π_0 é um novo campo que aparece, com capacidade de introduzir a invariância de calibre na lagragiana. Como a lagrangiana é definida no espaço de configuração e não no espaço de fase, o momento π_0 se comporta como um campo externo no espaço de configuração, ou seja, podemos interpreta-lo como um campo de Stueckelberg θ[22]. Além disso, se fizermos $\pi_0 = 0$, obtém-se a lagrangiana original do sistema.

Essa lagrangiana é a mesma encontrada por Vytheeswaran através do método GU Usual [1].

Capítulo 5

Considerações Finais

O modelo de Schwinger Quiral bosonizado é um sistema vinculado de segunda classe, ou seja, não possui invariância de calibre. Na física teórica, a construção de sistema com invariância de calibre é fundamental para a construção do modelo padrão da física de partículas e para as discussões das interações físicas fundamentais [29]. Diante disto, para recuperar a invariância de calibre do modelo de SC bosonizado, foi aplicado o método *gauge unfixing* aprimorado. O método consiste em converter sistemas de segunda classe em sistemas de primeira classe (invariante de calibre).

Inicialmente, foi analisada sua estrutura canônica pelo método de Dirac onde foi observado que para $\alpha > 1$ o sistema apresenta dois vínculos de segunda classe. Consequentemente, os parênteses de Dirac foram calculados.

Posteriormente, realizou-se a aplicação do método *gauge unfixing* aprimorado, o qual, nos forneceu dois casos com hamiltonianas e lagrangianas distintas. No caso I, onde o vínculo primário foi definido como gerador de simetria de calibre, não foi possível obter uma lagrangiana manisfestamente covariante. No caso II, no qual o vínculo secundário foi escolhido como gerador de simetria de calibre, obtivemos uma lagrangiana do tipo Stueckelberg, onde π_0 apareceu como um campo que corrige a invariância de calibre. Se $\pi_0 = 0$, tem-se a lagrangiana original de volta.

Destaca-se, que a álgebra dos parênteses de Poisson das variáveis GU, para ambos os casos, são consistentes com a álgebra dos parênteses de Dirac das variáveis originais.

A escolha por esse método consistiu no fato de tornar os cálculos menos extensos em comparação ao método *Gauge Unfixing* Usual em que se converte diretamente a hamiltoniana canônica numa hamiltoniana invariante. Com relação ao método de Batalin-Fradkin-Tyntin (BFT), o método GU apresenta uma vantagem de não se adicionar variáveis extras. Apenas variáveis do espaço de fase original são utilizadas.

Apêndice A

Quantização da Teoria de Maxwell

No capítulo 2, foi abordado o método de Dirac para sistema discreto, isto é, possui um número finito de graus de liberdade. Esse apêndice, será dedicado a um exemplo na teoria de campo. As quais possuem um número infinito de graus de liberdade, ou seja, é descrita por uma função $A_\mu(x)$ do espaço-tempo, função esta denominada campo [19].

Neste caso, substitui-se o índice discreto i por um índice contínuo x, ou seja,

$$q_i(t) = q(i,t) \rightarrow q(\vec{x},t) = A_\mu(x),$$

onde $x = (\vec{x},t) = (x^1, x^2, x^3, ..., x^n, x^0) = (x^\mu), \mu = 0, 1, 2, ..., n.$

A primeira e mais simples teoria de campo que pode ser citada é o eletromagnetismo, descrita pelo grupo abeliano U(1) [30]. Seja, então a seguinte densidade de lagrangiana de Maxwell sem fonte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{A.1}$$

sendo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ o tensor de campo eletromagnético. O momento canônico pode ser calculado a partir da definição:

$$\Pi^\rho = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0}. \tag{A.2}$$

Separando em componentes espaciais e temporais, tem-se como resultado

$$\begin{aligned} \Pi^0 &= F^{00} = 0, \\ \Pi^i &= F^{i0} = -E^i. \end{aligned} \tag{A.3}$$

E de (A.2) determina-se o **vínculo primário** da teoria:

$$\phi^1 = \Pi^0 \approx 0. \tag{A.4}$$

Utilizando a Eq. (2.16) pode-se obter a densidade hamiltoniana canônica do sistema

$$\mathcal{H} = \Pi^0 \dot{A}_0 - \Pi^i \dot{A}_i + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

onde de (A.3) tem-se $\dot{A}_i = -\pi^i - \partial^i A_0$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\Pi^i \Pi^i + \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij}\right) + \Pi^i \partial^i A_0. \tag{A.5}$$

Continuando com o método de Dirac, pode-se agora escrever a hamiltoniana primária adicionando-a o vínculo primário (A.4)

$$H_p = \int \mathcal{H} d^3x + \int \lambda_1 \phi^1(x) d^3x. \tag{A.6}$$

Substituindo as Eq's. (A.4) e (A.5) na expressão acima e integrando o terceiro termo por partes, obtém-se

$$H_p = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\Pi^i \Pi^i + \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij}\right) - A_0 \partial^i \Pi^i\right] + \int d^3x \lambda_1 \Pi^0. \tag{A.7}$$

Agora, pode-se calcular a evolução temporal do vínculo primário via parênteses de Poisson, definidos da seguinte forma

$$\{F(\mathbf{x},t), G(\mathbf{y},t)\} = \int d^3x \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\delta F(\mathbf{x},t)}{\delta \phi_\alpha(z)} \frac{\delta G(\mathbf{y},t)}{\delta \Pi^\alpha(z)} - \frac{\delta F(\mathbf{x},t)}{\delta \Pi^\alpha(z)} \frac{\delta G(\mathbf{y},t)}{\delta \phi_\alpha(z)}\right). \tag{A.8}$$

$$\begin{gathered}\{A_\mu(\mathbf{x},t), A_\nu(\mathbf{y},t)\} = \{\Pi_\mu(\mathbf{x},t), \Pi_\nu(\mathbf{y},t)\} = 0. \\ \{A_\mu(\mathbf{x},t), \Pi^\nu(\mathbf{y},t)\} = \delta^\nu_\mu \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}).\end{gathered} \tag{A.9}$$

Logo, calculando a evolução temporal de ϕ_1, obtém-se

$$\dot{\phi}^1(x) \approx \{\phi^1(x), H(y)\}$$

$$= \left\{\Pi^0, \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(\Pi^i \Pi^i + \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij}\right) - A_0 \partial^i \Pi^i\right] + \int d^3x \lambda^1 \Pi^0\right\}$$

$$= \partial^i \Pi^i = \nabla \cdot \Pi \equiv \phi^2 \approx 0. \tag{A.10}$$

Assim, encontra-se mais um vínculo, que nada mais é que a conhecida lei de Gauss ($\bigtriangledown.\vec{E} = 0$) [14].

Então, a teoria de Maxwell possui dois vínculos

$$\phi^1 = \Pi^0 \approx 0, \tag{A.11}$$

$$\phi^2 = \nabla \cdot \Pi \approx 0. \tag{A.12}$$

Para determinar se os vínculo são de 1° ou 2° classe, calcula-se o parêntese de Poisson entre todos os vínculos do sistema:

$$\left\{\phi^1, \phi^1\right\} = \left\{\Pi^0, \Pi^0\right\} = 0. \tag{A.13}$$

$$\left\{\phi^2, \phi^2\right\} = \left\{\partial^i \Pi^i, \partial^j \Pi^j\right\} = 0. \tag{A.14}$$

$$\left\{\phi^1, \phi^2\right\} = \left\{\Pi^0, \partial^i \Pi^i\right\} = 0. \tag{A.15}$$

Observa-se que os vínculos (A.11) e (A.12) são vínculos de primeira classe, cuja presença na teoria eletromagnética já era esperada, por se tratar de uma teoria de calibre [14].

Assim, pode-se reescrever a hamiltoniana total desses vínculos de primeira classe da seguinte forma

$$H_T = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\Pi^i \Pi^i + \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij} \right) - A_0 \partial^i \Pi^i + \lambda_1 \Pi^0 + \lambda_2 \partial^i \Pi^i \right]. \tag{A.16}$$

Agora o próximo passo a ser seguido no método de Dirac, é a construção da matriz dos parênteses de Poisson. Para isso, é necessário que os vínculos sejam de segunda classe. Mas como foi observado, tem-se dois vínculos de primeira classe. Logo, para resolver esse problema, será utilizado o processo de fixação de calibre. Tendo como objetivo transformar os vínculos de primeira classe em vínculos de segunda classe.

Prosseguindo, tem-se da Eq. (A.16) às seguintes equações de Hamilton

$$\dot{A}_0 = \lambda_1, \tag{A.17}$$

$$\dot{A}_k = \Pi_k - \partial_k(\lambda_2 - A_0), \tag{A.18}$$

$$\dot{\Pi}_0 = 0, \tag{A.19}$$

$$\dot{\Pi}_k = \partial^i(\partial_k A_i - \partial_i A_k). \tag{A.20}$$

Pela equação (A.17), nota-se que A_0 não é uma quantidade física pois λ_1 é uma quantidade arbitrária. Logo, pode-se fazer, sem perda de generalidade

$$A_0 = 0. \quad \text{(calibre temporal)} \tag{A.21}$$

Mas, seu parêntese de Poisson com Π^0 não forma um par canonicamente conjugado

$$\left\{A_0(x), \Pi^0(y)\right\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \neq 0, \tag{A.22}$$

o que significa que pode-se tomar A_0 como um vínculo

$$\phi^3 = A_0 \approx 0. \tag{A.23}$$

Entretanto, essa fixação de calibre só transformou o vínculo primário em um vínculo de segunda classe. Por isso, precisa-se de uma outra condição de fixação de calibre para transformar o vínculo secundário em um vínculo de segunda classe.

Com isso, considere a equação de movimento obtida da lagrangiana (A.1),

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{A.24}$$

$$\Rightarrow \quad \Box A_\nu - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu = 0. \tag{A.25}$$

Pode-se escolher uma função $\alpha(x)$ tal que

$$\partial^\mu A_\mu = \partial^0 A_0 - \partial^i A_i = 0 \quad \text{(calibre de Lorentz)}. \tag{A.26}$$

Contudo, de acordo com a equação (A.17), $\partial^0 A_0 = \lambda_1$, de modo que o calibre de Lorentz envolve uma derivada temporal de um multiplicador de Lagrange. Este calibre não é adequado neste formalismo.

Porém, utilizando o calibre temporal, o calibre de Lorentz torna-se

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{(calibre de Coulomb)}. \tag{A.27}$$

É observado que o parêntese de Poisson do calibre de Coulomb com o vínculo secundário é diferente de zero

$$\left\{\nabla \cdot \vec{A}(x), \nabla \cdot \vec{\Pi}(y)\right\} = \nabla^2 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \neq 0. \tag{A.28}$$

Logo, toma-se o calibre de Coulomb como um vínculo:

$$\phi^4 = \nabla \cdot \vec{A} \approx 0. \tag{A.29}$$

Portanto, o conjunto final de vínculos desta teoria é

$$\phi^1 = \Pi^0 \approx 0, \tag{A.30}$$
$$\phi^2 = \nabla \cdot \vec{\Pi} \approx 0, \tag{A.31}$$
$$\phi^3 = A_0 \approx 0, \tag{A.32}$$
$$\phi^4 = \nabla \cdot \vec{A} \approx 0. \tag{A.33}$$

Consequentemente, pode-se construir a matriz C dos parênteses de Poisson, dada por

$$C = \begin{pmatrix} \{\phi^1, \phi^1\} & \{\phi^1, \phi^2\} & \{\phi^1, \phi^3\} & \{\phi^1, \phi^4\} \\ \{\phi^2, \phi^1\} & \{\phi^2, \phi^2\} & \{\phi^2, \phi^3\} & \{\phi^2, \phi^4\} \\ \{\phi^3, \phi^1\} & \{\phi^3, \phi^2\} & \{\phi^3, \phi^3\} & \{\phi^3, \phi^4\} \\ \{\phi^4, \phi^1\} & \{\phi^4, \phi^2\} & \{\phi^4, \phi^3\} & \{\phi^4, \phi^4\} \end{pmatrix}.$$

Assim, para esse sistema a matriz de vínculos assume a seguinte forma

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \tag{A.34}$$

A inversa desta matriz é

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla^{-2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla^{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x-y), \tag{A.35}$$

onde

$$\nabla^{-2}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{\nabla^2}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = -\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}, \tag{A.36}$$

é a inversa formal do Laplaciano (função de Green).

Tomando a definição do parêntese de Dirac para um caso contínuo [14], tem-se

$$\begin{aligned}\{F(x), G(y)\}_D =& \{F(x), G(y)\} - \\ & - \int\int d^3z d^3\bar{z} \left\{F(x), \phi^A(z)\right\} C^{-1}_{AB} \left\{\phi^B(\bar{z}), G(y)\right\}.\end{aligned} \tag{A.37}$$

Logo, para esta teoria o parêntese de Dirac toma a seguinte forma explícita:

$$\begin{aligned}&\{F(x), G(y)\}_D = \{F(x), G(y)\} - \\ &- \int\int d^3z d^3\bar{z} \left\{F(x), \Pi^0(z)\right\} \delta^{(3)}(\vec{z}-\bar{\vec{z}}) \left\{A_0(\bar{z}), G(y)\right\} - \\ &- \int\int d^3z d^3\bar{z} \left\{F(x), A_0(z)\right\} \left(-\delta^{(3)}(\vec{z}-\bar{\vec{z}})\right) \left\{\Pi^0(\bar{z}), G(y)\right\} - \\ &- \int\int d^3z d^3\bar{z} \left\{F(x), \nabla\cdot\vec{\Pi}(z)\right\} \left(\nabla^{-2}\delta^{(3)}(\vec{z}-\bar{\vec{z}})\right) \left\{\nabla\cdot\vec{A}(\bar{z}), G(y)\right\} - \\ &- \int\int d^3z d^3\bar{z} \left\{F(x), \nabla\cdot\vec{A}(z)\right\} \left(-\nabla^{-2}\delta^{(3)}(\vec{z}-\bar{\vec{z}})\right) \left\{\nabla\cdot\vec{\Pi}(\bar{z}, G(y)\right\}.\end{aligned} \tag{A.38}$$

Então substituindo $\{F(x), G(y)\}_D$ por $\{A_\mu(x), A_\nu(y)\}_D$ e $\{\Pi^\mu(x), \Pi^\nu(y)\}_D$, tem-se

$$\{A_\mu(x), A_\nu(y)\}_D = 0 = \{\Pi^\mu(x), \Pi^\nu(y)\}_D, \tag{A.39}$$

os quais comutam.

Em seguida fazendo para $\{A_\mu(x), \Pi^\nu(y)\}_D$, encontra-se

$$\begin{aligned}
\{A_\mu(x), \Pi^\nu(y)\}_D &= \{A_\mu(x), \Pi^\nu(y)\} - \\
&- \int\int d^3z d^3\bar{z} \left\{A_\mu(x), \Pi^0(z)\right\} \delta^{(3)}(\vec{z} - \vec{\bar{z}}) \left\{A_0(\bar{z}), \Pi^\nu(y)\right\} - \\
&- \int\int d^3z d^3\bar{z} \left\{A_\mu(x), \nabla \cdot \vec{\Pi}(z)\right\} \left(\nabla^{-2}\delta^{(3)}(\vec{z} - \vec{\bar{z}})\right) \left\{\nabla \cdot \vec{A}(\bar{z}), \Pi^\nu(y)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{A_\mu(x), \Pi^\nu(y)\}_D = \delta^\nu_\mu \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) - \delta^0_\mu \delta^\nu_0 \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) - \\
- \delta^i_\mu \delta^\nu_j \frac{\partial_i \partial^j}{\nabla^2} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \{A_\mu(x), \Pi^\nu(y)\}_D = \left(\delta^\nu_\mu - \delta^0_\mu \delta^\nu_0 - \delta^i_\mu \delta^\nu_j \frac{\partial_i \partial^j}{\nabla^2}\right) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \tag{A.40}$$

Separando as componentes em espaciais e temporais para os seguintes parênteses de Dirac, tem-se

$$\{A_i(x), A_j(y)\}_D = 0 = \left\{\Pi^i(x), \Pi^j\right\}_D, \tag{A.41}$$

$$\left\{A_0(x), \Pi^0(y)\right\}_D = 0, \tag{A.42}$$

$$\left\{A_i(x), \Pi^j(y)\right\}_D = \left(\delta^j_i - \frac{\partial_i \partial^j}{\nabla^2}\right) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \tag{A.43}$$

Observe-se que no parênteses de Dirac a quantidade $\{A_0(x), \Pi^0(y)\}_D = 0$, agora é igual a zero.

A expressão (A.43) pode ainda ser escrita como

$$\left\{A_i(x), \Pi^j(y)\right\}_D = \delta^j_{i,\mathrm{tr}}(\vec{x} - \vec{y}), \tag{A.44}$$

onde

$$\delta^j_{i,\mathrm{tr}}(\vec{x} - \vec{y}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{y})} \left(\delta^j_i - \frac{k_i k^j}{\vec{k}^2}\right), \tag{A.45}$$

a qual é conhecida como *função delta de Dirac transversa.*

Assim, aplicando a relação

$$\{,\}_D \to -i[,],$$

tem-se os seguintes comutadores

$$[A_i(x), A_j(y)] = 0 = \left[\Pi^i(x), \Pi^j\right], \tag{A.46}$$

$$\left[A_i(x), \Pi^j(y)\right] = i\left(\delta_i^j - \frac{\partial_i \partial^j}{\nabla^2}\right)\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \tag{A.47}$$

Referências Bibliográficas

[1] A. S. Vytheeswaran. Hidden symmetries in second-class constrained systems: Are new fields necessary? *Int. J. Mod. Phys. A*, 17(28):4095, 2002. 1, 13, 42

[2] H. O. Girotti, H. J. Rothe, and Klaus D. Rothe. Canonical quantization of a two-dimensional model with anomalous breaking of gauge invariance. *Phys. Rev. D*, 33(2):514, 1986. 1

[3] R. Rajaraman. Hamiltonian formulation of the anomalous chiral Schwinger model. *Phys. Lett. B*, 154(4):305, 1985. 1

[4] A. S. Vytheeswaran. Gauge invariance in an anomalous gauge theory: the chiral Schwinger model. *J. Phys. G: Nuclear and Particle Physics*, 19(7):957, 1993. 1, 2

[5] J. Sonnenschein. Chiral bosons. *Nucl. Phys. B*, 309(4):752, 1988. 1

[6] J. Ananias Neto, A. C. R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, and D. C. Rodrigues. Embedding second class systems via symplectic gauge-invariant formalism. *arXiv preprint hep-th/0109089*, 2001. 1

[7] L. D. Faddeev and S. L. Shatashvili. Realization of the Schwinger term in the Gauss law and the possibility of correct quantization of a theory with anomalies. *Physics Letters B*, 167(2):225, 1986. 1

[8] I. A. Batalin and E. S. Fradkin. Operator quantization of dynamical systems with irreducible first-and second-class constraints. *Physics Letters B*, 180(1-2):157, 1986. 2

[9] I. A. Batalin and I. V. Tyutin. Existence theorem for the effective gauge algebra in the generalized canonical formalism with abelian conversion of second-class constraints. *International Journal of Modern Physics A*, 6(18):3255, 1991. 2

[10] P. Mitra and R. Rajaraman. Gauge-invariant reformulation of theories with second-class constraints. *Annals of Physics*, 203(1):157, 1990. 2, 13

[11] J. Ananias Neto. An improved gauge unfixing formalism and the abelian pure chern simons theory. *Braz. J. Phys.*, 37:1106, 2007. 2, 13, 14, 21, 32

[12] R. Anishetty and A. S. Vytheeswaran. Gauge invariance in second-class constrained systems. *J. of Phys. A: Mathematical and General*, 26(20):5613, 1993. 2, 13

[13] A. S. Vytheeswaran. Gauge unfixing in second-class constrained systems. *Annals of Physics*, 236(2):297, 1994. 2, 13

[14] J. B. Neto. Teoria de Campos e a Natureza: Parte Quântica. *São Paulo: Editora Livraria da Física*, 2017. 3, 4, 5, 8, 9, 10, 47, 50

[15] J. B NETO. *Matemática para físicos com aplicações: tratamento clássico e quântico volume II*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011. 3, 6

[16] Dirac P. A. M. *Lectures on Quantum Mechanics.* 1964. 3, 6, 7, 8, 19, 23

[17] Nivaldo A. Lemos. *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, 2007. 4, 5, 15

[18] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. Classical mechanics. 3rd, 2002. 5

[19] Jairzinho Amarildho Ramos Medina. Método de Dirac e de Faddeev e Jackiw: um estudo comparativo, 2000. 6, 45

[20] C. N. Costa. Análise da Estrutura Canônica do Setor de Calibre CPT-Par Massivo do Modelo Padrão Estendido. *Dissertação de Mestrado, UFJF, MG, 2021.* 7, 9, 10, 14, 15, 19, 28

[21] Marcos Cavalcanti de Sousa. Estrutura Canônica de Teorias de Gauge via Método de Dirac, 2016. 8

[22] Leite Fernandes Rafael. Invariância de calibre e análise de vínculos em teorias de campo eletromagnético no espaço-tempo não-comutativo, 2017. 9, 42

[23] I. A. Batalin, S. L. Lyakhovich, and I. V. Tyutin. Split involution and second class constraints. *Mod. Phys. Lett. A*, 7(21):1931, 1992. 13

[24] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek. Symplectic quantization of constrained systems. *Mod. Phys. Lett. A*, 7(19):1737, 1992. 13

[25] E. C. G. Stueckelberg. Theory of the radiation of photons of small arbitrary mass. *Helv. Phys. Acta*, 30:209–215, 1957. 13

[26] Paulo R. F. Alves, C. N. Costa, Everton M. C. Abreu, J. Ananias Neto, and Albert C. R. Mendes. Revealing hidden symmetries and gauge invariance of the massive Carroll-Field-Jackiw model. *EPL (Eur. Lett.)*, 131(3):31004, 2020. 14, 32

[27] J. Ananias Neto. The gauge unfixing formalism and the solutions of the Dirac bracket commutators. *arXiv preprint arXiv:0904.4711*, 2009. 18

[28] A. S. Vytheeswaran. Gauge invariances in second class constrained systems-A comparative look at two methods. *arXiv preprint hep-th/9904084*, 1999. 21

[29] Luz R. R., G. V. Ambrósio, Costa C. N., R. P. M Moreira, R. A. S. Paiva, and G. X. A. Petronilo. Campos de Calibre e o Modelo Padrão de Partículas Elementares: uma revisão pedagógica. *E-boletim da Física*, 10:1, 2021. 43

[30] J. M. C. Malbouisson F. C. Khanna, A. P. C. Malbouisson and A. E. Santana. *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications*. World Scientific, 2009. 45