Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Paola Luciana Correia

Frações: uma proposta de ensino para o 9º ano utilizando o software Geogebra e dobraduras

Juiz de Fora

2015

Paola Luciana Correia

Frações: uma proposta de ensino para o 9º ano utilizando o software Geogebra e dobraduras

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora: Dra. Valéria Mattos da Rosa

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Correia, Paola.
Frações: uma proposta de ensino para o 9º ano utilizando o software Geogebra e dobraduras / Paola Luciana Correia. – 2015.
44 f. : il.

Orientadora: Dra. Valéria Mattos da Rosa
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

1. Frações. 2. Geogebra. 3. Dobraduras. I. Rosa, Valéria Mattos da. II. Título.

Paola Luciana Correia

Frações: uma proposta de ensino para o 9º ano utilizando o software Geogebra e dobraduras

Dissertação apresentada ao PROFMAT (Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional) na Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática

Aprovada em: 31 de julho de 2015

BANCA EXAMINADORA

Professora Dra. Valéria Mattos da Rosa - Orientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professora Dra. Marli Regina dos Santos
Universidade Federal de Viçosa

Professor Dr. Rogério Casagrande
Universidade Federal de Juiz de Fora

Dedico este trabalho ao meu tão querido e amado esposo Ronald Martins... Pela compreensão em passar nossos primeiros sábados de casados sozinho! Pelo amor e companheirismo que dedicou a mim durante toda essa caminhada. Obrigada por nunca ter me deixado desistir!

AGRADECIMENTOS

"Por que dele, e por Ele, e para Ele são todas as coisas. Glória, pois, a Ele eternamente. Amém!!!"(Romanos 11: 36)

Primeiramente, agradeço ao Criador da vida por me proporcionar esta oportunidade.

À minha orientadora Doutora Valéria Mattos da Rosa, pelo grande apoio durante essa caminhada.

À minha família linda, pelo apoio de todos os dias. Pelas muitas orações e carinhos que dedicaram a mim neste momento tão importante. Por entenderem minha ausência nas festas e confraternizações enquanto eu estava nas aulas aos sábados. Sem vocês minha vida não faz sentido.

Ao meu amigo Ary, pelo grande apoio que me deu durante todo o curso, pelas indicações de materiais para a escrita deste trabalho e pelas caronas de ida e vinda para Visconde do Rio Branco. Obrigada meu caro!

Aos colegas do PROFMAT, pelos agradáveis sábados juntos. Foram ótimos momentos de convivência durante esses dois anos, onde pudemos trocar várias experiências. Nossos almoços e momentos de descontração na "Tia Cotinha" ficarão sempre guardados na memória.

Aos mestres, pela convivência durante todo o curso.

À CAPES, pelo grande apoio financeiro.

Aos queridos professores doutores Marli Regina dos Santos e Rogério Casagrande, por aceitarem fazer parte da banca e contribuírem positivamente para meu trabalho.

Enfim, obrigada a todos que oraram e contribuíram direta ou indiretamente para a conclusão desse sonho. Sou eternamente grata a todos vocês!!

Os números governam o mundo.

(Platão)

RESUMO

Esta proposta de ensino foi aplicada em uma turma de 9º ano de uma escola pública de Visconde do Rio Branco. Constatamos que neste nível escolar, ao contrário do que se é esperado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), os alunos ainda não têm domínio em reconhecer nem operar com os números racionais. Por essa razão, buscamos ao longo do nosso trabalho reconstruir os conceitos de fração, bem como consolidar os algoritmos utilizados para desenvolver as operações básicas com tais números, visando assim fixar a aprendizagem desses conteúdos. Para atingir tais objetivos, fizemos o uso do software Geogebra, que é um software gratuito, e realizamos atividades com dobraduras para reforçar o aprendizado. Concluímos que tal trabalho contribuiu consideravelmente para o ensino e aprendizagem de tais alunos e que outros professores podem levar tais ferramentas para auxiliar suas aulas.

Palavras-chave: Frações. Geogebra. Dobraduras.

ABSTRACT

The following proposal for teaching was aplied in a class of ninth grade in a public school of Visconde do Rio Branco. We noted that, in this school, unlike the level proposed by the National Curricular Parameters (PCNs), the students still have no domain to recognize or operate with the rational numbers. For this reason, the aim of our work was to re-build the concept of fraction as well as consolidate the algorithms used to develop the basic operations with such numbers. To achieve these goals, we made use of the software Geogebra, which is free software, and we performed activities with foldings to reinforce learning. We concluded that this work contributed significantly to the teaching and learning of such students and other teachers can take these tools to assist their classes.

Key-words: Fractions. Geogebra. Foldings

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MMC	Mínimo Múltiplo Comum
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora

LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA

Durante os anos que venho lecionando a disciplina de Matemática no ensino básico, percebi uma grande dificuldade por parte dos alunos, principalmente no que diz respeito às operações com números fracionários, que ao chegarem no Ensino Médio e até no Ensino Superior ainda têm dúvidas ao realizar as operações básicas com números racionais. Eles sempre fazem a mesma pergunta para todas as quatro operações : "Tem que tirar o MMC?". Isso me levou a perceber que eles não conseguiram, ao longo da jornada escolar, compreender o conceito de fração e nem os algoritmos utilizados para realizar as operações. Durante a resolução de um problema, se um aluno encontrar uma fração como resposta, ouço frases do tipo "Deu errado professora!". Isso nos levou a concluir que as frações não são consideradas para eles como um número e que um dos objetivos propostos pelos PCNs (BRASIL, 1998, p.39) ainda não foi alcançado por eles. Segundo os PCNs, ao fim do Ensino Fundamental:

> [...] o aluno perceberá a existência de diversas categorias numéricas criadas em função de diferentes problemas que a humanidade teve que enfrentar — números naturais, números inteiros positivos e negativos, números racionais (com representações fracionárias e decimais) e números irracionais. À medida que se deparar com situações-problema — envolvendo adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação —, ele irá ampliando seu conceito de número.

O conceito de frações é introduzido nos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental e os alunos utilizam e manipulam tais números durante todo o processo escolar. Nos perguntamos então por que os alunos chegam nas séries finais do Ensino Fundamental e até mesmo no Ensino Médio e universitário sem uma boa compreensão desses números? Poderia ser pela má formação matemática dos professores que lecionam para as séries iniciais? Poderia ser uma má compreensão da notação das frações? Poderia ser o nosso hábito de pronunciar as frações de maneira errônea?

Percebi que muitas vezes ao colocarmos uma fração no quadro eles enxergam dois números naturais separados por uma barra e por isso, ao somar frações, somar os numeradores e denominadores como se tivessem somando números naturais, faz sentido para os alunos.

Tantas indagações e desconfortos nos levaram a apresentar uma proposta de ensino que pudesse intervir diretamente no aprendizado do aluno. Consideramos o uso materiais manipulativos pois estes auxiliam muito no ensino de frações, já que o aluno pode interagir melhor com o conteúdo e participar efetivamente de cada etapa. Ressaltamos que cada atividade deve ser cuidadosamente organizada pelo professor, para que ao manipular, os alunos possam construir os conceitos e atingir os objetivos propostos.

1.2 OBJETIVOS DO TRABALHO

Nosso intuito principal é apresentar uma proposta pedagógica, envolvendo aplicativos matemáticos e dobraduras, para o resgate dos conceitos e operações com frações dentro do próprio programa proposto pela escola.

Fazendo uso do software Geogebra e das dobraduras, buscamos reconstruir o conceito de fração, esclarecendo propriedades e algoritmos utilizados, a fim de sanar as compreensões errôneas. Buscamos assim, cumprir um dos objetivos propostos pelos PCNs, que consiste em propiciar aos alunos, concluir este ciclo sabendo manipular os números racionais no que se refere aos algoritmos utilizados nas operações e ao reconhecimento de tais números.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No capítulo a seguir faremos uma breve apresentação dos aspectos históricos, da importância tanto dos materiais manipuláveis quanto da informática na aprendizagem. Também faremos a construção do conjunto dos números racionais, que servirá como embasamento teórico para os professores leitores. No capítulo 3, relataremos nossa proposta pedagógica, bem como as atividades desenvolvidas pelos alunos ao longo da pesquisa. Para finalizar, o capítulo 4 trará nossa conclusão e resultados do trabalho desenvolvido.

2 EMBASAMENTO TEÓRICO

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

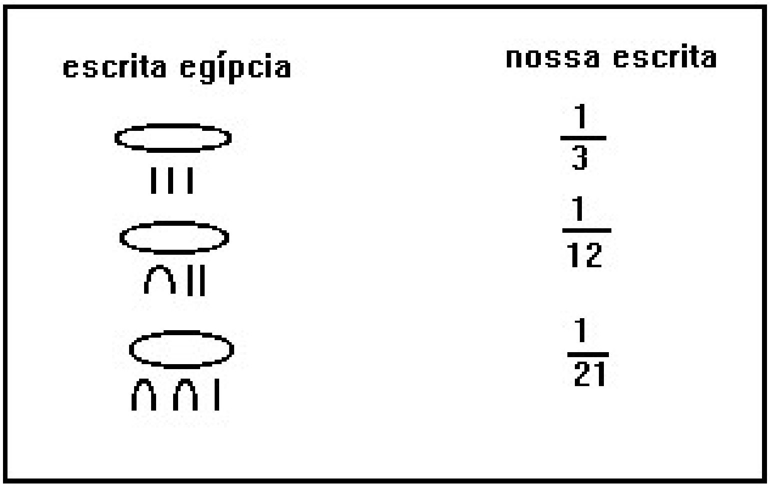
A história nos mostra que a ideia de fração e sua utilização faz parte do cotidiano desde a antiguidade. Segundo Boyer (1974, p. 9):

> Os homens da Idade da Pedra não usavam frações mas com o advento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações.

O Egito foi um dos berços da matemática antiga e por isso, por muito tempo, foi um dos mais ricos campos de pesquisas históricas sobre a antiguidade. Ao contrário dos chineses, que faziam registros em materiais perecíveis, os egípcios tinham um zelo imenso com os registros que faziam nos papiros. O papiro Rhind, que é uma das fontes mais ricas que relata a história desta matemática, data de 1650 a.C. e foi publicado em 1927 pelo egiptólogo escocês A. Henry Rhind, por isso o nome. Nele está bem descrito o uso que os egípcios faziam das frações.

Segundo Eves (2004), para evitar dificuldades computacionais, os egípcios representavam as frações, com exceção do $\frac{2}{3}$, como soma de frações unitárias. Essa redução era possível devido a existência de tábuas que davam a representação para frações do tipo $\frac{2}{n}$, que eram as únicas necessárias devido à natureza diádica da multiplicação egípcia. Desse modo, para representar $\frac{2}{7}$, eles escreviam $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$; para representar $\frac{2}{97}$, eles escreviam $\frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$, por exemplo. Usando a notação hieroglífica egípcia, eles indicavam as frações unitárias colocando um símbolo elíptico sobre o número do denominador, como mostra a figura a seguir.

Figura 1 – Notação Hieroglífica



Fonte: www.acervosaber.com.br

A maioria dos registros egípcios eram de caráter aritmético e alguns dos problemas que aparecem nos registros nos mostram que eles tinham familiaridade com regras utilizadas por nós. Somavam frações com denominadores diferentes e encontravam os resultados corretos, parecendo utilizar, um processo parecido com o nosso mínimo múltiplo comum como mostra o procedimento usado no Papiro Ahmes, para resolver o problema que consistia em dividir um pão para dez homens:

> Se um homem recebe $\frac{1}{10}$ de um pão, dois homens receberão $\frac{2}{10}$ ou $\frac{1}{5}$ e quatro receberão $\frac{2}{5}$, ou seja, $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ de um pão. Portanto oito homens receberão $\frac{2}{3}+\frac{2}{15}$, ou $\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$, e oito homens mais dois homens terão $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$, ou um pão inteiro. (BOYER, 1974, p.11)

O uso das frações unitárias se estenderam por muitos séculos. O matemático Leonardo de Pisa (1180-1250), mais conhecido como Fibonacci, em sua obra mais famosa Liber abaci (Livro do ábaco), não só usava como fornecia tabelas para converter frações comuns em frações unitárias.

A representação decimal das frações, apesar de não ser mais novidade, só ganhou força com um trabalho elaborado em 1585 por Simon Stevin (1548-1620) cujo título era De triende (O décimo), porém a notação com separação por vírgula ou ponto usada por nós, foi sugerida por John Napier (1550-1617) em 1617.

Podemos perceber no decorrer da história que o surgimento dos números racionais ocorreu de acordo com as necessidades práticas. Números resultantes de operações e medições não exatas. Porém mais tarde com o avanço da matemática, houve uma formalidade na construção desse conjunto e é isso que mostraremos adiante.

2.2 A IMPORTÂNCIA DOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS E DA INFORMÁTICA NA APRENDIZAGEM

A maioria dos alunos encontram grande dificuldade para aprender matemática. Por esse motivo:

> [...] conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos é de grande utilidade para que o professor compreenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos. (BRASIL, 1998, p. 30)

O uso de materiais manipuláveis e da informática é uma grande possibilidade para os professores na superação desses obstáculos, pois podemos entendê-los como novas maneiras de representar o conhecimento. Porém, segundo Fiorentini e Miorim (1990, p.6)

> o professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem, estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina.

Com essa afirmação percebemos que ao lançar mão desses materiais, devemos ter conhecimento do perfil da turma, para saber qual estratégia é mais adequada para eles. Não se trata de levar tecnologia para a sala de aula e deixar os alunos brincarem, trata de construção de conhecimento significativo e por esse motivo o professor condutor deve ter aulas bem preparadas e objetivos traçados.

Enfim, para o bom aprendizado da matemática não há um caminho único. O professor deve conhecer diversas possibilidades de trabalho para aprimorar sua prática.

2.3 CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Optamos em acrescentar este tópico com o objetivo de dar um embasamento teórico do assunto para os professores.

2.3.1 **Construção**

Seja $\mathbb{Z}^*=\{m \in \mathbb{Z} | m \neq 0\}$ e consideremos sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m,n)|m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\}$ a relação $\sim$ definida por

$$(m,n) \sim (p,q) \text{ se e somente se, } mq = np$$

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência e por isso são válidas as propriedades a seguir:

1. Propriedade Reflexiva: $(m,n) \sim (m,n)$
2. Propriedade Simétrica: $(m,n) \sim (p,q) \Rightarrow (p,q) \sim (m,n)$
3. Propriedade Transitiva:$(m,n) \sim (p,q)$ e $(p,q) \sim (r,s) \Rightarrow (m,n) \sim (r,s)$

As propriedades 1 e 2 decorrem diretamente da definição, portanto nos preocupamos em verificar só a propriedade 3.

Temos, por hipótese, que $mq = np$ e $ps = qr$. Multiplicando a primeira dessas igualdades por s e a segunda por n, obtemos: $mqs = nps$ e $nps = nqr$. Daí vem que $mqs = nqr$ e, concluímos que $ms = nr$, pois $q \in \mathbb{Z}^*$. Portanto, $(m,n) \sim (r,s)$.

Assim, a relação $\sim$ determina em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ uma partição em classes de equivalência. Para cada par $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, representaremos a classe de equivalência à qual esse elemento pertence por $\frac{m}{n}$. Isto é:

$$\frac{m}{n} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | (x,y) \sim (m,n)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | nx = my\}$$

Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* | 2x = y\} = \{(1,2);\ (-1,-2);\ (2,4);\ (-2,-4);\ ...\}$$

É claro que $(m,n) \in \frac{m}{n}$ para todo $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, pela propriedade reflexiva. Além disso, como

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow (m,n) \sim (r,s)$$

então:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow \; ms = nr$$

Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} = ...$$

O conjunto de todas as classes de equivalência determinada por $\sim$ sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, é o conjunto $\mathbb{Q}$. Logo:

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{m}{n} | (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$$

Dessa forma, cada $a \in \mathbb{Q}$ admite infinitas representações $\frac{m}{n}$ $(m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}^*)$. Em cada uma delas m é o *numerador* e n o *denominador*.

Afirmamos que dois elementos $a, b \in \mathbb{Q}$ sempre admitem representações de denominadores iguais. De fato, se $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$, então

$$\frac{m}{n} = \frac{ms}{ns} \text{ e } \frac{r}{s} = \frac{nr}{ns}$$

pois $m(ns) = n(ms)$ e $r(ns) = s(nr)$.

Os elementos de $\mathbb{Q}$ são chamados de *números racionais* desde que se definam adição, multiplicação e relação de ordem, que o faremos a seguir.

2.3.2 **Operações**

2.3.2.1 *Adição em* $\mathbb{Q}$

Definição 1 Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Chamamos *soma* de a com b e indicamos por $a + b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte forma:

$$a + b = \frac{ms}{ns} + \frac{nr}{ns} = \frac{ms+nr}{ns}$$

É fácil verificar que a soma $a + b$ independe dos pares ordenados escolhidos para definir a e b.

De fato:

$$a = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \text{ e } b = \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'} \Rightarrow mn' = nm' \text{ e } rs' = sr'$$

Vamos multiplicar a primeira dessas igualdades por ss' e a segunda por nn' e em seguida, somar as relações obtidas membro a membro:

$$msn's' + rns'n' = nsm's' + nsr'n'$$

Colocando $n's'$ em evidência no primeiro membro e ns no segundo obtemos:

$$(ms + rn)n's' = ns(m's' + r'n')$$

E daí vem que:

$$\frac{ms+rn}{ns} = \frac{m's'+r'n'}{n's'}$$

Podemos concluir assim, que a correspondência

$$(a, b) \to \; a + b,$$

conforme a definição 1, é uma aplicação e, portanto trata-se de uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamamos *adição em* $\mathbb{Q}$.

Propriedades da adição:

1. Propriedade associativa: $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in \mathbb{Q}$
2. Propriedade comutativa: $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{Q}$

3. Elemento neutro: é a classe de equivalência $\frac{0}{1} = \frac{0}{2} = ...$, que indicamos por 0. De fato:

$$\frac{m}{n} + \frac{0}{1} = \frac{m.1+0.n}{n.1} = \frac{m.1}{n.1} = \frac{m}{n}$$

para todo $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

4. Simétrico aditivo: se $a = \frac{m}{n}$, então $-a = \frac{-m}{n}$, qualquer que seja a, pois:

$$\frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{mn+(-m)n}{nn} = \frac{0}{nn} = 0$$

Definição 2 Se $a, b \in \mathbb{Q}$, denominamos *diferença* entre a e b, e indicamos por $a-b$, o seguinte elemento de $\mathbb{Q}$:

$$a - b = a + (-b)$$

Como $(-b) \in \mathbb{Q}$, $\forall b \in \mathbb{Q}$, então

$$(a, b) \to a - b$$

é uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamaremos *subtração* em $\mathbb{Q}$.

2.3.2.2 *Multiplicação em* $\mathbb{Q}$

Definição 3 Chamamos *produto* de $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ por $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ o elemento

$$ab = a.b = \frac{mr}{ns} \in \mathbb{Q}$$

o qual, podemos mostrar (de modo análogo ao da soma), não depende das particulares representações tomadas para a e b.

A *multiplicação* em $\mathbb{Q}$ é a operação definida por

$$(a, b) \to ab$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$.

Valem as seguintes propriedades:

1. Propriedade associativa: $a(bc) = (ab)c$, $\forall\ a, b \in \mathbb{Q}$

2. Propriedade comutativa: $ab = ba$, $\forall$ $a, b \in \mathbb{Q}$

3. Elemento neutro: é a classe de equivalência $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$..., que indicamos por 1. De fato:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{m.1}{n.1} = \frac{m}{n}$$

para todo $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

4. Inverso Multiplicativo: Todo $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, admite inverso multiplicativo. Se $a = \frac{m}{n}$, então $m \neq 0$ e daí 4 $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ e portanto

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{mn}{nm} = 1$$

Vamos indicar, como é de costume, o inverso de a por a^{-1}, assim

$$a = \frac{m}{n}, a \neq 0 \Rightarrow \ a^{-1} = \frac{n}{m}$$

É claro que se $a \neq 0$ temos:

$$(a^{-1})^{-1} = (\frac{n}{m})^{-1} = \frac{m}{n} = a$$

Outro fato importante no que se refere aos inversos é que se a e b são elementos não nulos:

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

De fato, como

$$(ab)(a^{-1}b^{-1}) = (aa^{-1})(bb^{-1}) = 1$$

então efetivamente $a^{-1}b^{-1}$ é o inverso de ab.

Note que a multiplicação é distributiva em relação à adição:

$$a(b + c) = ab + ac, \forall \ a, b, c \in \mathbb{Q}$$

Nota Após definidas todas essas propriedades de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$, podemos concluir que $\mathbb{Q}$ é um corpo.

Convém ainda destacar os seguintes resultados para a multiplicação em $\mathbb{Q}$:

1. $a(b-c) = ab - ac$

2. $a - 0 = a$

3. $a(-b) = (-a)b = -ab$

4. $(-a)(-b) = ab$

   Todas essas propriedades são provadas usando as propriedades de $\mathbb{Z}$.

5. $ab = 0 \Rightarrow \ a = 0 \ ou \ b = 0$

   Prova: Vamos supor $a \neq 0$, então de $ab = 0$ obtemos $a^{-1}(ab) = a^{-1}.0 = 0$ Como $a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1.b = b$, então $b = 0$.

6. $ab = ac$ e $a \neq 0 \Rightarrow$
   $b = c$

   Prova: $ab = ac \Rightarrow \ ab + [-(ac)] = 0 \Rightarrow \ ab + a(-c) = 0 \Rightarrow \ a(b-c) = 0 \Rightarrow \ bc = 0$, pois $a \neq 0 \Rightarrow \ b = c$

   As duas últimas propriedades, lei do anulamento do produto e lei do cancelamento da multiplicação, são equivalentes entre si.

7. Para todo $a \in \mathbb{Q}*$: $ax = b \Leftrightarrow \ x = a^{-1}b$.

   Prova: $(\Rightarrow)$ Da hipótese segue que $a^{-1}(ax) = a^{-1}b$. Mas $a^{-1}(ax) = (a^{-1}a)x = 1.x = x$. Logo $x = a^{-1}b$.

   $(\Leftarrow)$ Como $x = a^{-1}b$, então temos:

$$ax = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1.b = b.$$

Definição 4 Entendemos por *divisão* em $\mathbb{Q}$ a operação de $\mathbb{Q} \times \ \mathbb{Q}^*$ em $\mathbb{Q}$ definida por:

$$(a, b) \to \ ab^{-1}$$

O elemento ab^{-1} é chamado *quociente* de a por b e pode ser indicado por $a : b$.

Por exemplo, se $a = \frac{2}{3}$ e $b = \frac{1}{5}$, então:

$$a : b = \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{5})^{-1} = \tfrac{2}{3}.\tfrac{5}{1} = \tfrac{10}{3}$$

Para a divisão em $\mathbb{Q}$ vale a seguinte propriedade: se $a, b, c \in \mathbb{Q} \ e \ c \neq 0$, então:

$$(a+b) : c = a : c + b : c$$

De fato: se $c = \frac{r}{s}(r, s \in Z^*)$, então:

$$(a+b) : c = (a+b).\tfrac{s}{r} = a.\tfrac{s}{r} + b.\tfrac{s}{r} = a : \tfrac{r}{s} + b : \tfrac{r}{s} = a : c + b : c.$$

3 DESENVOLVIMENTO DA PROPOSTA

3.1 SOBRE O ENSINO DE FRAÇÕES

A fim de compreender o modo como o conceito e as operações com frações é apresentado aos alunos do Ensino Fundamental, analisamos a abordagem de dois livros didáticos usados pelos professores do 6º ano da escola onde trabalho e entrevistamos alguns professores desta escola.

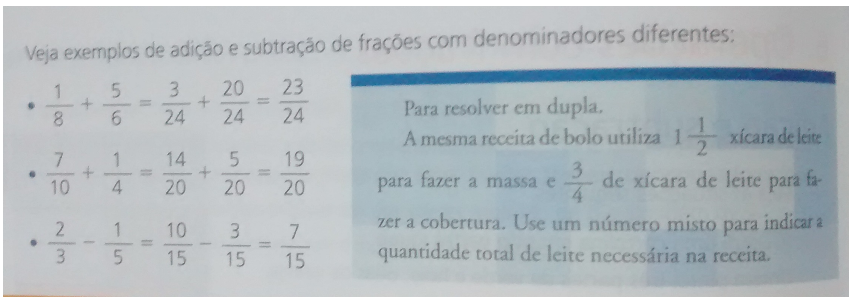
Como já dito anteriormente, o conceito de fração é exposto aos alunos no 4º e 5º anos. Os conceitos são construídos através da relação parte - todo utilizando barras retangulares e pizzas para melhor visualização ao efetuar as operações com mesmo denominador. Sendo que esses conceitos devem ser consolidados no 6º ano do Ensino Fundamental. Este fato nos levou a analisar os seus livros didáticos. O primeiro livro que pesquisamos é *Praticando Matemática* de Andrini e Vasconcelos (2002). Os autores iniciam os conceitos de fração através de um exemplo básico com divisão de uma pizza e a partir daí define fração, numerador e denominador da seguinte maneira:

> - O número que aparece embaixo (chamado denominador da fração) indica em quantas partes iguais o inteiro foi dividido.
>
> - O número que aparece em cima (numerador da fração) indica quantas dessas partes forram tomadas.

Para iniciar as operações com frações, os autores o fazem por meio das frações equivalentes. Começam exemplificando com frações de mesmo denominador e em seguida o faz com frações de denominadores diferentes utilizando sempre o método das frações equivalentes.

Em nenhum momento os autores utilizam, nos exemplos das operações de soma e subtração, os algoritmos de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) que geralmente os professores utilizam, como podemos perceber na figura a seguir:

Figura 2 – Soma e subtração de frações


Veja exemplos de adição e subtração de frações com denominadores diferentes:

- $\frac{1}{8} + \frac{5}{6} = \frac{3}{24} + \frac{20}{24} = \frac{23}{24}$
- $\frac{7}{10} + \frac{1}{4} = \frac{14}{20} + \frac{5}{20} = \frac{19}{20}$
- $\frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$

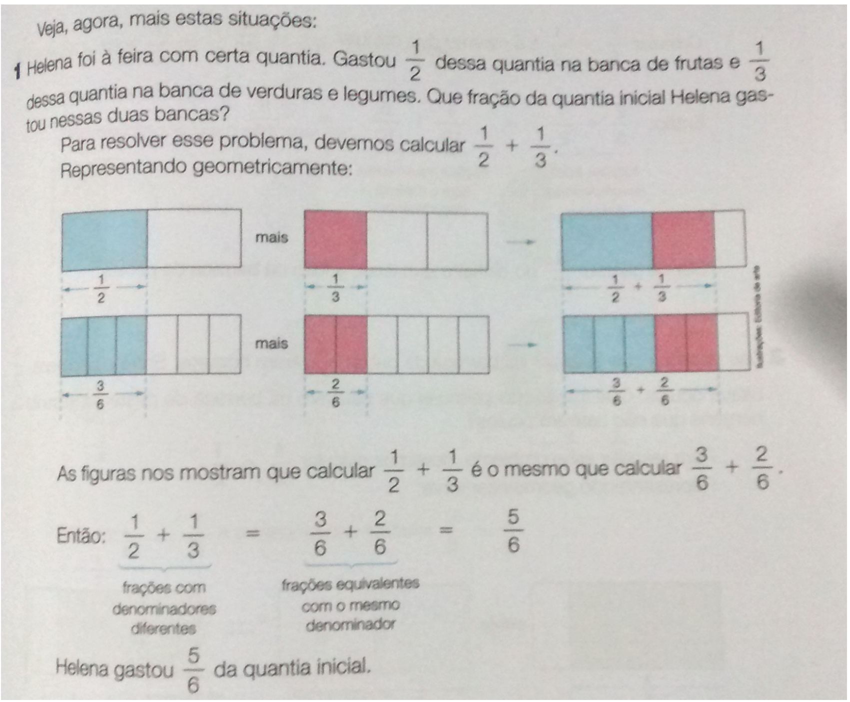
Para resolver em dupla.
A mesma receita de bolo utiliza $1\frac{1}{2}$ xícara de leite para fazer a massa e $\frac{3}{4}$ de xícara de leite para fazer a cobertura. Use um número misto para indicar a quantidade total de leite necessária na receita.

Fonte: Praticando Matemática (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2002, p. 180).

O segundo livro pesquisado foi *A conquista da Matemática* de Giovanni Jr. e Castrucci (2009). De modo análogo aos autores do livro citado anteriormente, estes autores introduziram os conceitos de fração também por meio de um exemplo básico de divisão de pizzas. A partir disso utiliza barras retangulares e relógios para explorar mais exemplos.

Neste, as operações com frações também são feitas pelo método das frações equivalentes, porém o autor menciona o MMC como denominador de tais frações equivalentes. A divisão é feita primeiramente com a ideia de "quantas vezes cabe" porém posteriormente é ensinado o algoritmo, como mostram as figuras a seguir:

Figura 3 – Soma de frações


Veja, agora, mais estas situações:

1 Helena foi à feira com certa quantia. Gastou $\frac{1}{2}$ dessa quantia na banca de frutas e $\frac{1}{3}$ dessa quantia na banca de verduras e legumes. Que fração da quantia inicial Helena gastou nessas duas bancas?

Para resolver esse problema, devemos calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Representando geometricamente:

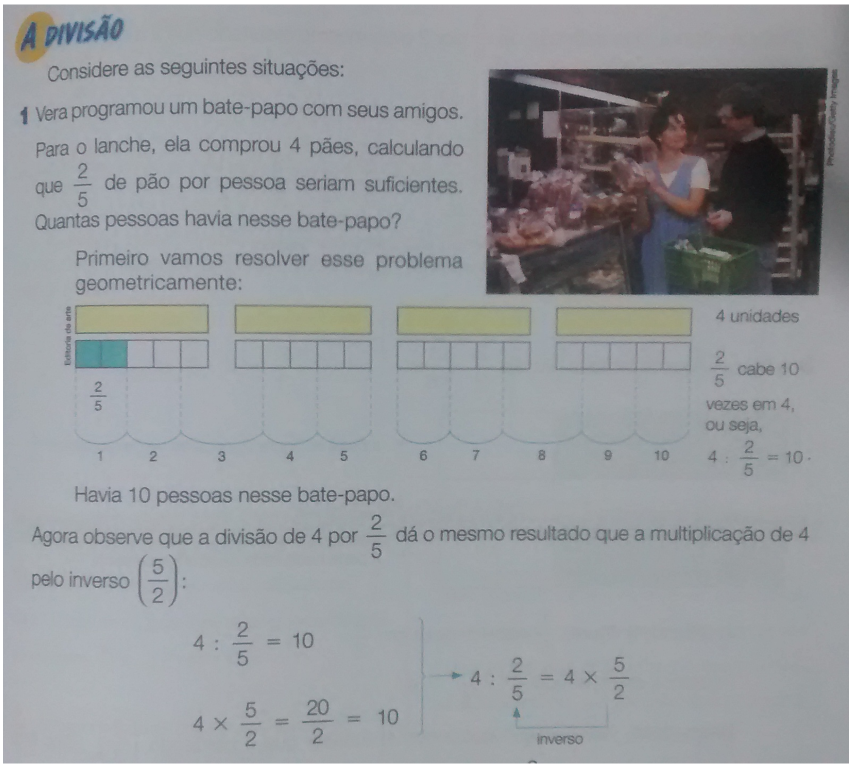
As figuras nos mostram que calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ é o mesmo que calcular $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$.

Então: $\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\text{frações com denominadores diferentes}} = \underbrace{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}}_{\text{frações equivalentes com o mesmo denominador}} = \frac{5}{6}$

Helena gastou $\frac{5}{6}$ da quantia inicial.

Fonte: A conquista da Matemática (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009, p. 187).

Figura 4 – Divisão de frações



A DIVISÃO

Considere as seguintes situações:

1 Vera programou um bate-papo com seus amigos. Para o lanche, ela comprou 4 pães, calculando que $\frac{2}{5}$ de pão por pessoa seriam suficientes. Quantas pessoas havia nesse bate-papo?

Primeiro vamos resolver esse problema geometricamente:

4 unidades

$\frac{2}{5}$ cabe 10 vezes em 4, ou seja, $4 : \frac{2}{5} = 10$.

Havia 10 pessoas nesse bate-papo.

Agora observe que a divisão de 4 por $\frac{2}{5}$ dá o mesmo resultado que a multiplicação de 4 pelo inverso $\left(\frac{5}{2}\right)$:

$$4 : \frac{2}{5} = 10$$

$$4 \times \frac{5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$4 : \underbrace{\frac{2}{5} = 4 \times \frac{5}{2}}_{\text{inverso}}$$

Fonte: A conquista da Matemática (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009, p. 203).

Com tais análises podemos concluir que os algoritmos que utilizamos não são ditados pelos livros didáticos. Cabe ao professor, após interiorizado os conceitos, ensinar os algoritmos aos alunos.

A fim de ver a relação do que é apresentado pelos livros e o modo como os professores ensinam, fizemos uma pesquisa com alguns professores de matemática da escola em questão. Alguns iniciam as operações com frações já pelo algoritmo, outros seguem exatamente o método descrito acima pelos livros didáticos.

A resposta de uma professora do 6º ano à questão 6 do questionário que segue em anexo, me chamou muita atenção: "Porque nas séries iniciais não foi introduzido adequadamente. As frações têm que ser primeiro visualizada e depois matematicamente. Esse conceito tem que ser muito bem introduzido."

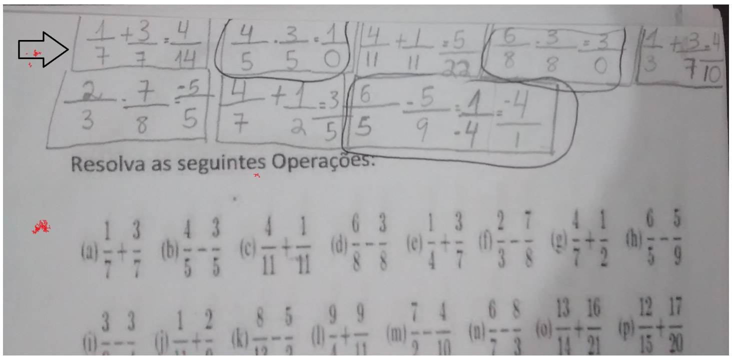
Ela introduz o ensino de frações pelo visual, tradicionalmente com "barras de chocolate"e "pizzas". A soma e a subtração ela introduz com frações equivalentes e a multiplicação e divisão através de situações problemas. Só após essa construção dos conceitos que ela ensina os algoritmos que conhecemos para realizar tais operações.

Outros professores, até de ensino médio, responderam que não sabiam justificar as operações pois não trabalhavam com esse assunto. Mas a maioria respondeu que já começa a ensinar pelos algoritmos.

Com as respostas ao questionário, pudemos perceber que a maioria dos professores, apesar de utilizarem o livro didático, não faz exatamente como ele propõe, uma vez que os autores não iniciam tais assuntos usando os algoritmos "divide pelo debaixo e multiplica pelo de cima".

Dessa forma, procuramos analisar se o modo como tem sido ensinado está atingindo os alunos e para tal, realizamos uma avaliação diagnóstica para uma turma na fase final do Ensino Fundamental:

Figura 5 – Resolução de um aluno



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Para nossa surpresa, dentre os 32 alunos participantes, somente 2 realizaram as operações corretamente. Na Figura 5 anterior temos um exemplo feito por um aluno, mas que foi a resposta padrão dos 29 restantes.

O diagnóstico obtido nos levou a conclusão de que tais alunos não atingiram as metas propostos pelos PCNs para este tema e despertou em nós o desejo de realizar um trabalho de resgate desses conceitos. Para tal , realizamos todas as atividades dentro da próprio horário escolar fazendo paralelo com a matéria proposta pelo programa para não prejudicar o cumprimento do mesmo. O desenvolvimento do trabalho está descrito a seguir.

3.2 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FRAÇÕES

Com tal diagnóstico, percebemos que precisávamos de algo rápido e prático. Por isso optamos por fazer atividades lançando mão de aplicativos encontrados no site www.geogebra.org e dobraduras, pois assim os alunos poderiam construir os conceitos.

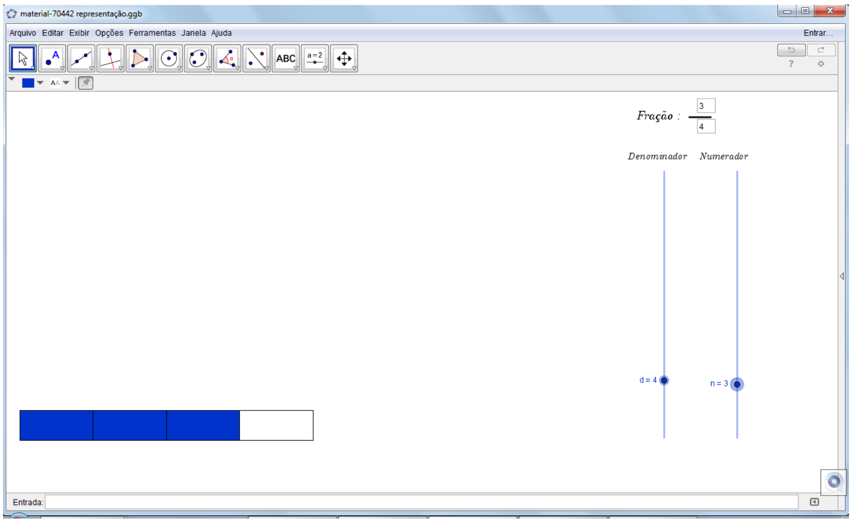
As atividades foram realizadas numa turma de 9º ano de uma escola referência de Visconde do Rio Branco no próprio horário da aula para não prejudicar o programa escolar.

3.2.1 Desenvolvimento das Atividades

ATIVIDADE 1 : **Reconhecendo as frações**

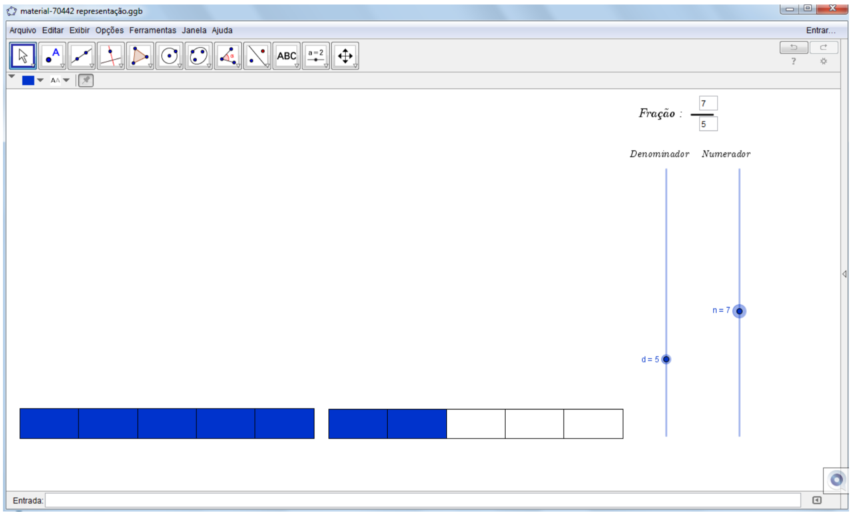
A primeira atividade foi o reconhecimento das frações fazendo uso do aplicativo de representação de frações do Geogebra. Através dele podemos representar de forma rápida e mais visível várias frações, além de notar a função do numerador e do denominador.

Figura 6 – Representação da fração $\frac{3}{4}$



Fonte: www.geogebra.org

Figura 7 – Representação da fração $\frac{7}{5}$



Fonte: www.geogebra.org

O uso desse software facilitou muito essa atividade, pois com ele pudemos mostrar várias frações em pouquíssimo tempo uma vez que existe um cursor para mudar o numerador e outro para o denominador!

Aproveitei esse momento para explicar a diferença que há entre os tamanhos das partes. Se eu divido um inteiro em 6 partes e divido um outro inteiro do mesmo tamanho em 8 partes é claro que cada uma destas partes têm tamanhos diferentes.

Esta primeira atividade foi essencial para os alunos relembrarem os conceitos.

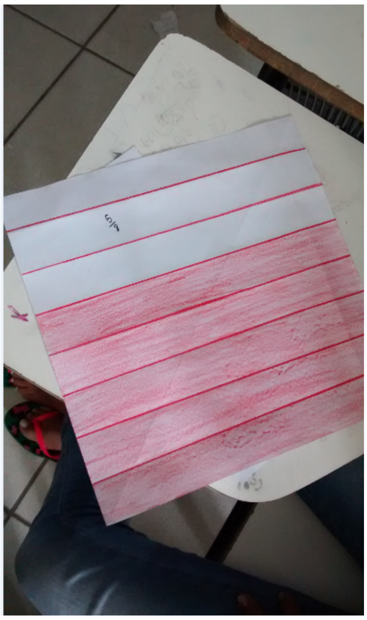
ATIVIDADE 2 : **Representando as frações com dobraduras**

Essa atividade foi feita para fixar a anterior.

Separei a turma em duplas. Distribuí uma folha branca A4 para cada um dos alunos. Em seguida, pedi para que cada um construísse um quadrado usando somente dobras. Por terem pouco contato com materiais manipuláveis, vários alunos não conseguiram alcançar o objetivo. Dessa forma, pedi àqueles que conseguiram auxiliassem aos outros colegas.

Após construídos os quadrados, pedi que uma pessoa de cada dupla dividisse seu inteiro em quatro partes e a outra em oito partes. Eles o fizeram com facilidade. Em seguida pedi que eles representassem, colorindo, a fração que quisessem.

Figura 8 – Representação da fração $\frac{5}{8}$ usando dobraduras



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Fiquei surpreendida com a reação deles. Apesar de já estarem no 9º ano eles adoraram a atividade de dobrar e colorir!

Durante a atividade um aluno disse: "Professora, todas as aulas podiam ser assim!"

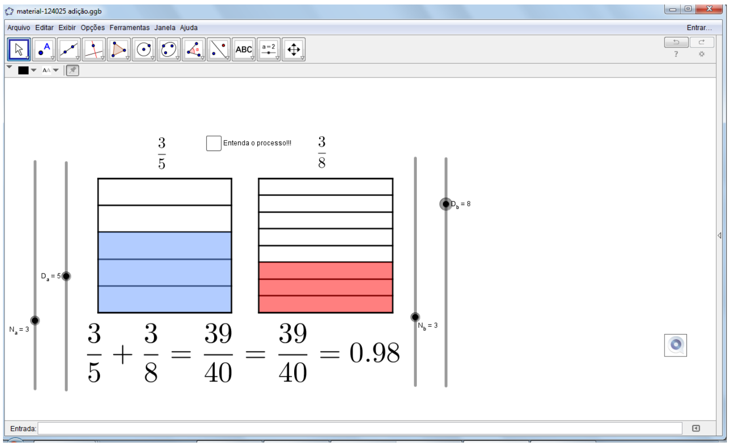
ATIVIDADE 3 : **Somando frações**

A atividade a seguir é a principal da proposta. Através dela fizemos um processo de desconstrução dos conceitos adquiridos erroneamente pelos alunos no decorrer do processo escolar.

Como já dito e visto anteriormente, ao se depararem com uma soma ou subtração de frações, eles simplesmente somavam os numeradores e denominadores. Isso nos levou a concluir que durante o processo não ficou claro para eles que ao somar frações estamos lidando com "pedaços"de tamanhos diferentes e por isso não podemos simplesmente "juntar".

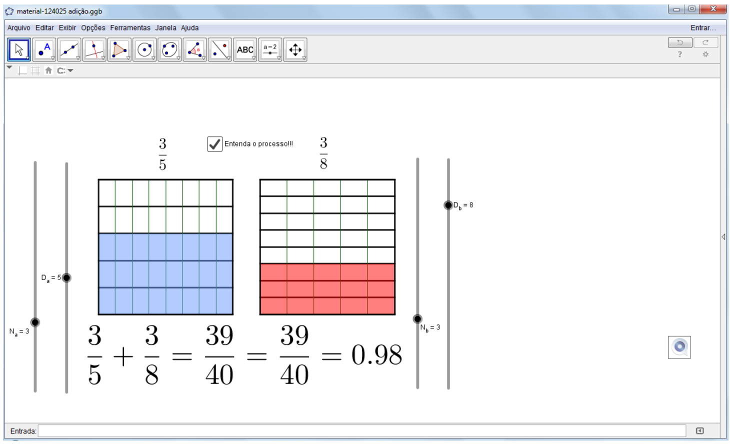
Com o uso do aplicativo, pude mostrar para eles que as frações $\dfrac{3}{5}$ e $\dfrac{3}{8}$ que tínhamos inicialmente, podem ser representadas por $\dfrac{24}{40}$ e $\dfrac{15}{40}$, respectivamente, aproveitando para falar das frações equivalentes. Ao fazer essa "transformação"eles perceberam que as partes ficaram do mesmo tamanho e, por isso poderíamos somá-las obtendo $\dfrac{39}{40}$.

Figura 9 – Soma de frações utilizando o Geogebra



Fonte: www.geogebra.org

Figura 10 – Soma de frações utilizando Geogebra



Fonte: www.geogebra.org

Após essa demonstração, pudemos desconstruir conceitos equivocados e aprender novos conceitos. Eles perceberam que na soma das frações o novo denominador não precisava ser necessariamente o MMC, mas poderia ser qualquer outro múltiplo comum entre os denominadores e esse poderia ser encontrado simplesmente pela multiplicação deles. Com isso pudemos trabalhar as frações equivalentes.

ATIVIDADE 4 : **Somando frações**

Com os alunos já separado em duplas, e com suas frações prontas da atividade anterior, pedi que cada dupla somassem suas frações, utilizando somente as dobraduras.

A fala de uma aluna me surpreendeu:

"Professora, não podemos somar assim não ué, os pedaços são diferentes!."

Esse foi o primeiro grande resultado positivo que obtive após as atividades! Uma aluna que nunca havia participado efetivamente da minha aula, conseguiu compreender o principal conceito envolvido na soma das frações.

Essa pergunta foi peça chave para o desenvolvimento da atividade. A partir disso conduzi a atividade através de outras indagações. Eu disse a eles: "A colega já percebeu que do jeito que nossas partes estão não podemos juntar, alguém saberia me dizer como eu torno esses pedaços iguais pra conseguir somar?"

Rapidamente um colega respondeu: "Ué professora, como os denominadores são 8 e 4, vamos ter que dobrar o papel em 32 partes, só não sei como que faz isso!"

Nesse passo da atividade houve intervenção minha, porque muitos não conseguiram realizar a dobradura corretamente, fui nas carteiras para auxiliá-los e contei com a ajuda dos outros colegas. Após todos estarem com o papel dividido em 32 partes pedi que eles realizassem a operação. A maioria conseguiu. Eles perceberam que para somar o papel deveria ser dividido novamente e essa nova divisão significava o novo denominador da fração. Agora nosso denominador seria o 32 e não mais 8 nem 4.

Esta atividade foi fantástica! Eles conseguiram visualizar tranquilamente porque devemos ter um denominador comum às frações para somá-las e que esse denominador significa a quantidade de partes que meu inteiro ficou dividido.

ATIVIDADE 5 : **Multiplicação e divisão de frações**

Essa atividade foi realizada na semana posterior.

Como dito anteriormente, ao se depararem com qualquer operação que envolve frações os alunos faziam sempre a mesma pergunta: "Tem que tirar MMC?" Logo, o intuito dessa atividade foi mostrar aos alunos porque na multiplicação e na divisão não precisamos fazer MMC.

Comecei a atividade com alguns exemplos no quadro! Fizemos a multiplicação de um número natural por uma fração:

$$2.\frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

Rapidamente eles perceberam que bastava multiplicar 2 por 2 e repetir o denominador 5.

Fizemos a multiplicação de uma fração por outra fração. Fiz a seguinte pergunta: "Se eu tenho metade de um inteiro e pego a metade dessa metade, com quanto fico?"

Representamos com barras no quadro e rapidamente eles responderam $\frac{1}{4}$!

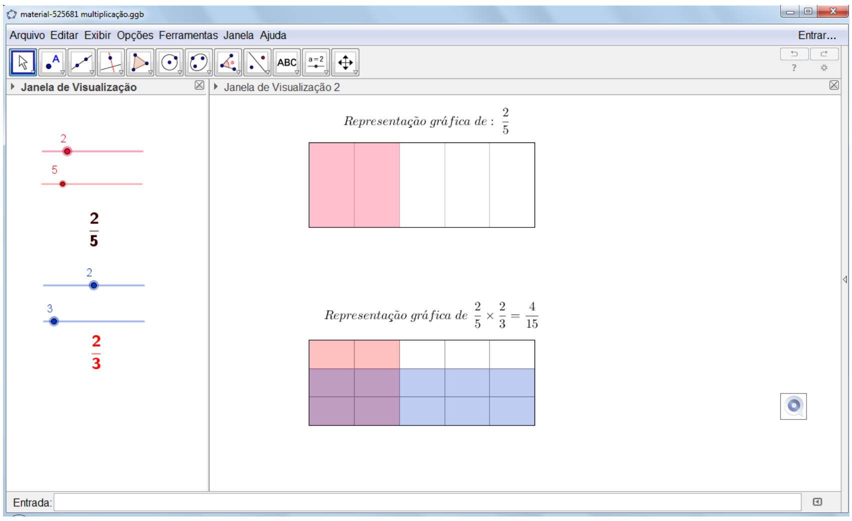
$$\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Com esse exemplo eles perceberam que para multiplicar duas frações basta multiplicar denominador com denominador e numerador com numerador.

Após estes exemplos conseguimos estabelecer a multiplicação e diferenciá-la da adição e subtração.

Para reforçar, usei um aplicativo para multiplicação de duas frações! Com ele pudemos fazer várias multiplicações de frações bem rápido. Eles escolhiam as frações a serem multiplicadas e falavam os resultados, e em seguida nós conferíamos o resultado utilizando o aplicativo. Eles adoraram!

Figura 11 – Multiplicação de frações utilizando Geogebra



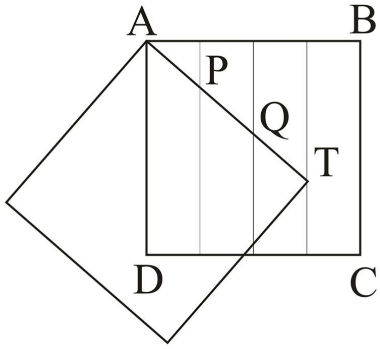
Fonte: www.geogebra.org

Fizemos esta atividade com dobraduras também!

Novamente com a turma dividida em duplas, pedi que eles formassem dois quadrados congruentes com a folha que receberam. Dessa vez o fizeram com facilidade! Em seguida pedi que eles dividissem um dos quadrados em 4 partes iguais e colorissem uma fração qualquer. O segundo passo foi dividir o outro quadrado em 3 partes iguais! Nenhum deles conseguiu fazer. Então eu intervi ensinando o seguinte procedimento:

Faça um dos vértices do quadrado que ainda não foi dobrado, coincidir com o vértice A do papel que você dobrou em 4 partes e um outro vértice coincidir com a 3ª linha de dobra. Veja a figura:

Figura 12 – Divisão do papel em três partes iguais utilizando dobraduras



Observe que AP = PQ = QT

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

A justificativa que mostra que tal divisão foi feita corretamente é fácil. Note que o segmento AD é paralelo ao BC, por construção. É fácil visualizar que o segmento AT é transversal aos lados AD e BC do quadrado, e por isso, pelo Teorema de Tales, os segmentos AP, PQ e QT são congruentes.

Podemos usar esse método para dividir um papel em qualquer número de partes. Para tal, basta escolhermos uma potência de 2 maior que o número de partes desejada.

Através dessa atividade os alunos perceberam a diferença entre a multiplicação e a divisão de frações, que são as operações que eles mais confundem.

Utilizando essas mesmas dobraduras, justificamos a divisão de frações.

Comecei a atividade com divisão de números inteiros. Perguntei para eles quanto que é 10 dividido por 2, eles rapidamente responderam que era 5. Aproveitei para explicar o motivo. Disse para eles que 10 dividido por 2 era 5 pois o 2 "cabia"5 vezes "dentro"do 10! Fiz mais alguns exemplos com números inteiros e partimos para as frações utilizando a mesma ideia.

Perguntei aos alunos quantas vezes $\frac{1}{8}$ cabia dentro do $\frac{1}{4}$, com suas dobraduras em mãos eles conseguiram ver isso na prática e responderam 2. Com isso pudemos estabelecer a divisão. Eles perceberam que $\frac{1}{8}$ cabe 2 vezes dentro do $\frac{1}{4}$ e isso significa que a $\frac{1}{4}$ dividido por $\frac{1}{8}$ é igual a 2. Aproveitei esse momento para explorar o algoritmo utilizado nesta operação.

Após realizadas todas essas atividades percebemos que havia uma maior compreensão por parte dos alunos, no que diz respeito às operações com números fracionários.

Aproveitei o momento para retomar os algoritmos das operações, uma vez que agora já estava justificado para eles o motivo do uso de cada um.

O próximo passo a ser dado foi a utilização de situações problemas e atividades que fixassem os algoritmos.

ATIVIDADE 6

Exercícios propostos aos alunos:

1. Para uma gincana do 9º reuniram-se 200 alunos no pátio. $\frac{2}{5}$ eram do grupo vermelho; $\frac{1}{4}$ do azul; e os demais do verde. a) A que fração do total corresponde todos os alunos dos grupos vermelho e azul? b) A que fração do total corresponde o grupo verde? c) Quantos alunos fazem parte do grupo azul? E do verde?

2. Em uma urna foram colocadas 120 bolinhas coloridas. Dessas bolas:
   $\frac{1}{6}$ é azul;
   $\frac{2}{5}$ são vermelhas;
   $\frac{3}{10}$ são verdes;
   O restante é amarela.

   Com as informações acima, determine a quantidade de bolinhas de cada cor: a) azuis;

   b) vermelhas;

   c) verdes;

   d) amarelas.

3. De segunda-feira a sexta-feira, Amanda passa $\frac{2}{3}$ de seu dia acordada e, desse período, $\frac{3}{8}$ ela passa estudando.
   a) Que fração do dia, de segunda-feira a sexta-feira, Amanda passa estudando?

   b) Quantas horas por dia Amanda estuda de segunda-feira a sexta-feira?

CONCLUSÃO DAS ATIVIDADES

Após a realização pude perceber o quanto os alunos evoluíram no que diz respeito às operações com frações. Durante as aulas ao ministrar o conteúdo de equações fracionárias, percebi o quanto as atividades anteriores ampliaram a visão dos alunos.

Equação fracionária, em geral, é o conteúdo que os alunos menos absorvem no 9º ano, e dessa vez foi diferente! O modo como os aplicativos do Geogebra efetuam as somas de frações, tomando como denominador comum o produto dos denominadores de cada fração, facilitou muito no aprendizado desse conteúdo e ajudou construir os conceitos de forma correta.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO

A maior motivação para a escrita desse trabalho foi perceber durante a minha ainda tão curta caminhada docente que os alunos já num nível elevado do ensino, apresentam imensas dificuldades para operar, comparar e reconhecer as diferentes formas de um número racional.

Apesar de terem um contato com as frações ainda nas séries iniciais, a maioria deles chegam nas séries finais do ensino fundamental sem alcançar um dos objetivos dos PCNs, o qual é realizar uma boa manipulação de tais números. Percebi durante o processo escolar que outros conteúdos estavam ficando comprometidos por causa desse. Daí o desejo de realização desse trabalho.

Aulas diferenciadas e materiais manipulativos motivam a participação dos alunos na aula, e isso nos ajudou bastante no desenvolvimento das atividades. A utilização dos aplicativos do Geogebra além de facilitar a visualização das operações, otimizou o tempo gasto no desenvolvimento do trabalho de maneira que não interrompesse o conteúdo programático da escola, uma vez que todas as atividades foram desenvolvidas na própria sala de aula. Vale ressaltar que o Geogebra é um software gratuito e por isso os demais colegas da área podem utilizar essa ferramenta para auxiliar em sala de aula sem prejudicar o conteúdo.

Não foi uma tarefa fácil realizar uma atividade desse tipo em um sala com 40 adolescentes de 14 ou 15 anos mas foi desafiador e eles participaram efetivamente de tudo. Fizeram perguntas e sanaram dúvidas. Construímos juntos os significados das operações e passamos a entender o motivo de tirar o MMC. A atividade de dobraduras os encantou! Eles puderam ver na prática o motivo pelo qual ao somarmos $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ não somamos numerador com numerador e denominador com denominador. Eles, por si só perceberam que não podíamos tomar “pedaços” de tamanhos diferentes e simplesmente “juntar”. Foi um processo de reconstrução onde aproveitamos a carga prévia trazida pelos alunos.

Após justificados os processos de resolução das operações, fizemos atividades que nos auxiliassem na fixação dos algoritmos, afinal, os algoritmos facilitarão as operações.

Ao meu ver, fizemos um trabalho de resgate, pelo nível onde foi feito, mas seria uma proposta que pode ser usada em qualquer nível para auxiliar no ensino aprendizagem, pois estamos tratando de um tema no qual os alunos sempre têm dúvidas. Cabe ao professor condutor das atividades adaptá-la para sua sala de aula.

Pude perceber um avanço enorme por parte dos alunos no que diz respeito às operações de soma e subtração de frações. Durante as aulas, ao resolvermos alguns exercícios de equações do 2º grau e de equações fracionárias, eles não tiveram dificuldade nenhuma ao se depararem com equações onde os coeficientes eram não inteiros e não se assustaram ao encontrarem como solução números fracionários. Só tivemos ganhos com o trabalho desenvolvido. Pretendemos continuar com essas atividades do Geogebra e das dobraduras que tanto nos tem auxiliado nas aulas. E assim, podemos dizer que nossos objetivos foram alcançados!

REFERÊNCIAS

[1] ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M.J. **Praticando Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

[2] BARBOZA, C. M. **Frações** Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 02 maio 2015.

[3] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996

[4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : matemática Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: Ministério da Educação, 1997.

[5] DANIEL, D. **Frações** Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 02 maio 2015.

[6] DOMINGUES, H.H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

[7] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

[8] FIORENTINI,D.; MIORIM.M.A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**, 1990. Publicado do Boletim SBEM-SP. Ano 4 - nº7. Disponível em: http://www.matematicahoje.com.br/telas/sala/didaticos/. Acesso em: 06 agosto 2015.

[9] GIOVANNI JR, J.R,; CARTRUCCI, B. **A conquista da matemática, 6º ano**. Ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009.

[10] JESUS, A. B. M. **Uma proposta de ensino de frações voltada para a construção do conhecimento** 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade Federal de Lavras.

[11] LOPES, A. (BIGODE). **Projeto Velear: Matemática**. São Paulo: Scipione, 2012.

[12] MANETTA, M. **Frações Equivalentes** Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 02 maio 2015.

[13] SANTOS, M. **Soma de Frações** Disponível em: https://www.geogebra.org/. Acesso em: 02 maio 2015.

[14] WAGNER, E. **Teorema de Tales**. Disponível no material do PROFMAT. Disciplina MA13. SBM, 2015

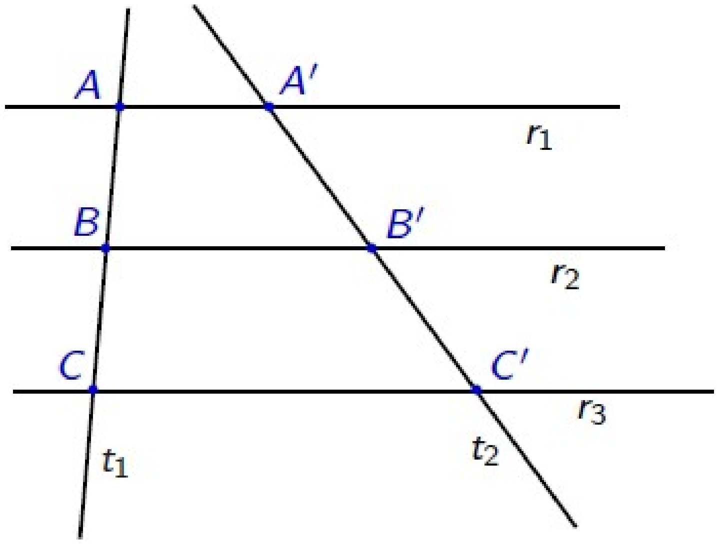
APÊNDICE A – Enunciado e demonstração do Teorema de Tales

Teorema 1

Se um feixe de paralelas determina sobre uma transversal segmentos iguais, determinará sobre qualquer outra transversal segmentos iguais.

Considere as paralelas r_1, r_2, r_3 e as transversais t_1, t_2.

Figura 13 – Retas paralelas cortadas por transversais



Fonte: Eduardo Wagner - Material do PROFMAT

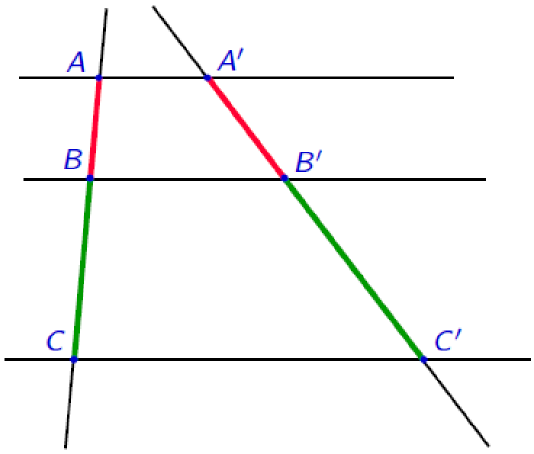
Na figura acima, se $AB = BC$ então $A'B' = B'C'$.

Para demonstrar trace por A' e por B' paralelas a t_1 e observe a congruência de triângulos.

Teorema de Tales

Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos respectivamente proporcionais.

A figura abaixo mostra três retas paralelas cortadas por duas transversais.



Fonte:

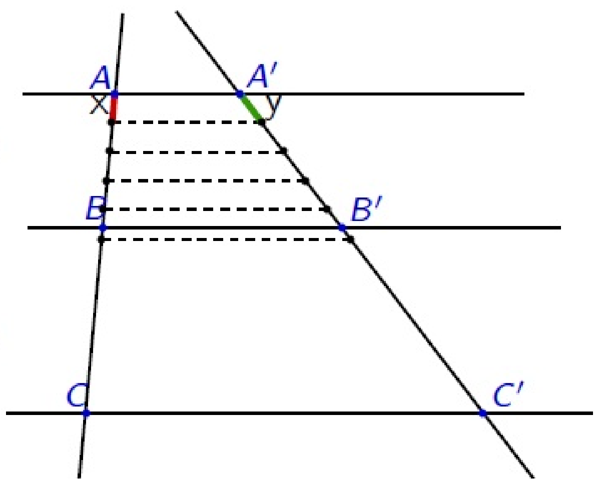
Com os elementos da figura acima o Teorema de Tales diz que:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

Demonstração

1) Suponha que AB e BC são comensuráveis, ou seja, existe um segmento x que cabe um número inteiro de vezes em AB e um número inteiro de vezes em BC. Desta forma, $AB = mx$ e $BC = nx$ com m e n naturais. Daí, $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$.

Traçando novas paralelas pelos pontos que dividem AB e BC em partes iguais obtemos na segunda transversal $A'B' = my$, $B'C' = ny$ e, consequentemente, $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}$.



Temos então $\frac{AB}{BC} = \frac{A^{'}B^{'}}{B^{'}C^{'}}$, ou seja, $\frac{AB}{A^{'}B^{'}} = \frac{BC}{B^{'}C^{'}}$.

2) Se AB e BC não são comensuráveis, escolha um segmento x que cabe n vezes em BC (n natural, claro). Então $BC = nx$. Suponha, por outro lado que esse segmento x esteja contido entre m vezes e $m+1$ vezes em AB. Então $mx < AB < (m+1)x$ e, dividindo por $BC = nx$ temos: $\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC} < \frac{m+1}{n}$.

Traçando novas paralelas como no item anterior, temos que $\frac{m}{n} < \frac{A^{'}B^{'}}{B^{'}C^{'}} < \frac{m+1}{n}$.

As duas razões, $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{A^{'}B^{'}}{B^{'}C^{'}}$ estão entre $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$.

A diferença entre essas duas razões é $\frac{1}{n}$ que tende a zero quando n cresce indefinidamente.

Portanto, temos $\frac{AB}{BC} = \frac{A^{'}B^{'}}{B^{'}C^{'}}$, ou seja, $\frac{AB}{A^{'}B^{'}} = \frac{BC}{B^{'}C^{'}}$.

ANEXO A – Questionários Feito com Professores de Matemática

Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT

Questionário: DOCENTES

ATENÇÃO: Não é necessário se identificar.

1) Em qual ano/série você introduz em sua sala de aula as operações com números racionais? Ensina soma e subtração pelo MMC?

2) Saberia justificar o algoritmo utilizado para somar e subtrair frações?

3) Conhece outro método para ensinar essas operações? (Que não seja MMC)

4) Saberia explicar porquê na soma de frações não podemos somar numerador com numerador e denominador com denominador?

5) Por que não precisamos fazer MMC na multiplicação e divisão de frações?

6) Na sua opinião, por que os alunos ainda chegam ao Ensino Médio com dúvidas (principalmente) nas operações com números racionais?

Obrigada pela sua contribuição para o sucesso do meu trabalho!!