UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

FACULDADE DE ECONOMIA

MATEUS BARBOSA SILVA

TEOREMAS DE PONTO FIXO E A DEMONSTRAÇÃO DA EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO GERAL

JUIZ DE FORA - MG

2022

MATEUS BARBOSA SILVA

TEOREMAS DE PONTO FIXO E A DEMONSTRAÇÃO DA EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO GERAL

Monografia apresentada ao curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Dr. Paulo César Coimbra Lisbôa

JUIZ DE FORA - MG

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Barbosa, Mateus.
TEOREMAS DE PONTO FIXO E A DEMONSTRAÇÃO DA EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO GERAL / MATEUS BARBOSA SILVA. – 2022.
43 f.

Orientador: Paulo César Coimbra Lisbôa
Monografia – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Economia. , 2022.

1. Equilíbrio Geral. 2. Existência de equilíbrio. 3. Teoremas de ponto fixo. I. Coimbra, Paulo César, orient. II. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
REITORIA - FACECON - Depto. de Economia

FACULDADE DE ECONOMIA / UFJF

ATA DE APROVAÇÃO DE MONOGRAFIA II

NA DATA DE 11/08/2022, A BANCA EXAMINADORA, COMPOSTA PELOS PROFESSORES

1 - PAULO CÉSAR COIMBRA LISBÔA - ORIENTADOR, E;

2 - SIDNEY MARTINS CAETANO.

REUNIU-SE PARA AVALIAR A MONOGRAFIA DO ACADÊMICO MATHEUS BARBOSA SILVA INTITULADA: TEOREMAS DE PONTO FIXO E A DEMONSTRAÇÃO DE EXISTÊNCIA DE EQUILÍBRIO GERAL.

A BANCA RESOLVEU APROVAR A REFERIDA MONOGRAFIA.

Documento assinado eletronicamente por **Paulo César Coimbra Lisbôa**, **Professor(a)**, em 16/08/2022, às 09:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Sidney Martins Caetano**, **Professor(a)**, em 16/08/2022, às 14:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0908970** e o código CRC **7362BA34**.

Referência: Processo nº 23071.928863/2022-29 SEI nº 0908970

RESUMO

Este estudo tem o objetivo de apresentar os teoremas de ponto fixo de Brouwer e de Kakutani, e de detalhar o modelo e a demonstração de existência de equilíbrio apresentada por Debreu (1959). Assim, essa monografia pode servir como uma primeira introdução à pesquisa desenvolvida em equilíbrio geral na década de 1950.

Palavras-chave: existência de equilíbrio geral; teoremas de ponto fixo; modelo de Arrow-Debreu.

ABSTRACT

This study aims to present the fixed-point theorems of Brouwer and Kakutani and to detail the proof of existence of general equilibrium presented by Debreu (1959). Thus, this monograph can be a first introduction to the research conducted in general equilibrium during the 1950s.

Keywords: existence of general equilibrium; fixed-point theorems; Arrow-Debreu model.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\forall$	Para todo
$\exists$	Existe
$\in$	Pertence
$\subset$	Subconjunto de
$\geq$	Maior ou igual em todas as coordenadas
$\gg$	Estritamente maior em todas as coordenadas
$>$	Maior ou igual em todas as coordenadas e estritamente maior em pelo menos uma
$\succsim_i$	Relação de preferência fraca do consumidor i
$\succ_i$	Relação de preferência forte do consumidor i
$\sim_i$	Relação de indiferença do consumidor i

SUMÁRIO

1 Introdução

Este trabalho tem o objetivo de apresentar os teoremas de ponto fixo de Brouwer e de Kakutani e, a seguir, detalhar a maneira como se dá demonstração da existência de equilíbrio geral em Debreu (1959), dando especial enfoque à utilização do teorema de ponto fixo de Kakutani na demonstração.

Segundo Arrow e Hahn (1971), apesar de uma noção geral da capacidade de um sistema competitivo de alcançar uma alocação de recursos considerada eficiente já ser conhecida por economistas como Adam Smith e David Ricardo, o reconhecimento do conceito de equilíbrio geral é inequivocamente atribuído ao economista francês Léon Walras, que formalizou um modelo de economia competitiva em Walras (1874).

Debreu (1982) afirma que o modelo matemático de uma economia competitiva de Léon Walras foi concebido como uma tentativa de explicar o estado de equilíbrio alcançado por um grande número de pequenos agentes interagindo através de mercados. Embora Walras tivesse percebido a importância de um argumento matemático para demonstrar a existência de um estado de equilíbrio, seu argumento a partir da igualdade entre o número de equações e variáveis era pouco convincente.

De acordo com Takayama (1985), apesar de seu reconhecimento da questão da existência de equilíbrio ser muito engenhosa e estar à frente do seu tempo, o método empregado por Walras possuía claras falhas e, embora pudesse dar condições necessárias, não era capaz de descrever de forma geral condições suficientes para a existência de uma solução de equilíbrio.

Assim, apesar da descrição de Walras ter sido influente o suficiente para que Debreu (1984) afirmasse que Walras fosse o fundador da teoria matemática de equilíbrio geral, a existência de equilíbrio constituía um importante problema em aberto nas ciências econômicas.

Segundo Arrow e Hahn (1971), o maior avanço na solução desse problema depois de Walras viria de Wald (1933) e Wald (1934), artigos em que Abraham Wald demonstrou a existência de equilíbrio em uma série de modelos alternativos, incluindo um modelo simplificado desenvolvido por Cassel (1924) e um modelo de trocas puras.

No entanto, o trabalho de Wald possuía grande complexidade matemática, e sua contribuição não chamou a atenção dos economistas.(DEBREU, 1989)

A maior contribuição para o desenvolvimento da demonstração da existência de equilíbrio geral que viria teve origem em dois artigos de John von Neumann. No primeiro deles, von Neumann (1928) estabeleceu a existência de um par de estratégias de equilíbrio para um jogo de soma-zero de duas pessoas, constituindo um ponto de sela para a utilidade dos jogadores. No segundo, von Neumann (1937) transformou o problema de existência de equilíbrio em um modelo de economia dinâmica em um problema equivalente de ponto de sela. (DEBREU, 1982)

Para resolver esse problema, von Neumann generalizou um teorema de ponto fixo que havia sido desenvolvido por Brouwer (1911). A importância desse artigo resulta do fato dele conter o primeiro uso nas ciências econômicas de ferramentas hoje comuns: argumentos de dualidade, técnicas de pontos fixos para uma prova de existência, e argumentos de convexidade.(WEINTRAUB, 1983)

Segundo Debreu (1989), von Neumann (1937) continha um lema que seria reformulado de maneira mais conveniente e com uma prova consideravelmente mais simples em Kakutani (1941), que então ganhou o nome de teorema de ponto fixo de Kakutani.

O teorema de ponto fixo de Kakutani seria posteriormente utilizado por Nash (1950) para provar a existência de equilíbrio em um jogo finito, resultado que ficou conhecido como teorema de equilíbrio de Nash.

Tudo isso culminaria, em 1954, na demonstração da existência de equilíbrio geral, com a publicação quase simultânea dos artigos de Mckenzie (1954) e de Arrow e Debreu (1954) na revista Econometrica. Enquanto o artigo de Mckenzie se concentrava em um modelo de comércio internacional e demonstrava a existência de equilíbrio utilizando diretamente o teorema desenvolvido por Kakutani (1941), o artigo de Arrow e Debreu lidava com um modelo de produção e consumo integrados, que ficou conhecido como o modelo de Arrow-Debreu, cujo equilíbrio foi demonstrado a partir de uma generalização do teorema de Nash (1950).

Segundo Ingrao e Israel (1990), apesar de muitos manuais terem sido publicados desde a década de 50, quase toda literatura avançada no campo de equilíbrio geral utilizou a linguagem da apresentação axiomática do Debreu (1959) e esse livro constituiu um importante ponto de referência para toda a literatura subsequente na área.

Debreu (1959) apresenta a teoria de equilíbrio geral por meio de uma abordagem axiomática, em que as premissas e as deduções que levam às conclusões são expressadas de maneira explícita, retirando as ambiguidades dos conceitos ao descrevê-los através de objetos matemáticos. Além disso, ele descreve um modelo mais geral do que Arrow e Debreu (1954) e utiliza uma demonstração mais próxima de Mckenzie (1954) para a existência de equilíbrio. No entanto, a característica formal desse livro, ao mesmo tempo que traz a vantagem da clareza matemática, pode dissuadir leitores menos habituados à abstração de textos de economia matemática.

Não faltam referências que façam uma introdução à teoria do equilíbrio geral, descrevendo um modelo de economia e demonstrando a existência de equilíbrio geral em níveis variados de detalhe e complexidade.

Textos como Hildebrand e Kirman (1976) e Florenzano (2003) apresentam modelos matematicamente mais complexos. Mas-Colell, Whinston e Green (1995) e Araújo (2011) apresentam modelos simplificados. Border (1985) e Ok (2011) têm como objetivo principal descrever a matemática necessária e deixam de lado a descrição de equilíbrio geral. Embora Starr (2011) se proponha a ser um livro de introdução à Debreu (1959), ele utiliza hipóteses mais fortes para simpificar a demonstração e deixa importantes passos das demonstrações como exercícios ao leitor.

Sendo assim, esse trabalho se propõe a preencher essa lacuna expositiva, detalhando as demonstrações mais complexas de Debreu (1959) e apresentando os teoremas de ponto fixo que, apesar de sua importância para a teoria de equilíbrio geral, não são explorados de maneira pormenorizada em Debreu (1959). Dessa maneira, esse trabalho pode, ao reunir e esclarecer detalhes sobre os teoremas de ponto fixo e a demonstração de existência de equilíbrio geral, servir como introdução à Debreu (1959) e à literatura que dele derivou.

Sendo assim, esse trabalho será divido, além dessa introdução, em três capítulos. No segundo, introduziremos os principais conceitos e teoremas cujo conhecimento prévio é necessário para os capítulos seguintes, mas cujas demonstrações fogem do escopo do trabalho. No terceiro capítulo, os teoremas de ponto fixo de Brouwer e Kakutani serão apresentados. O quarto capítulo se dedica à descrição do modelo de economia e do detalhamento da demonstração de existência de equilíbrio presente em Debreu (1959). No quinto capítulo concluímos o trabalho, com uma indicação do desenvolvimento posterior à Debreu (1959).

2 Preliminares Matemáticos

Aqui lembraremos algumas definições e resultados essenciais para as seções que se seguem.

2.1 Conjunto fechado

Definição 2.1.1. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se dada uma sequência $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $x^k \in X$, e $\lim x^k = a$, temos $a \in X$.*

Definição 2.1.2. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é dito aderente à X quando existe uma sequência de pontos de X que converge para x. O fecho de X, denominado $\mathrm{cl}(X)$ é o conjunto de todos os pontos de aderência de X.*

2.2 Conjunto compacto

Definição 2.2.1. *Um conjunto é compacto quando é fechado e limitado.*

Teorema 2.2.1. *A soma de um número finito de conjuntos compactos é compacto.*

Teorema 2.2.2. *A interseção de um número finito de conjuntos compactos é um conjunto compacto.*

Teorema 2.2.3. *O produto cartesiano de conjuntos compactos é compacto.*

Proposição. *Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então existem $x_1, ..., x_n \in K$ tais que $(V_\delta(x_i))_{i\in\mathbb{N}\cap(0,n)}$ é uma cobertura aberta de K.*

Teorema 2.2.4. *Seja $f : S \to \mathbb{R}$. Se f é contínua em S e S é compacto e não-vazio, então $f(S)$ possui elemento máximo e mínimo.*

2.3 Conjunto convexo

Definição 2.3.1. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se para todo $x, y \in X$ e $\lambda \in [0,1]$, temos $\lambda x + (1-\lambda)y \ \in X$.*

Teorema 2.3.1. *A soma de um número finito de conjuntos convexos é um conjunto convexo*

Teorema 2.3.2. *A interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo*

Teorema 2.3.3. *O produto cartesiano de conjuntos convexos é convexo.*

Definição 2.3.2. *A combinação convexa de um número finito de pontos $x_1, ..., x_n$ é o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n \ , \ \sum \lambda = 1 \ , \ \lambda_i \geq 0 \text{ para } i = 1, ..., n\}$*

Definição 2.3.3. *A envoltória convexa de um conjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$*, denotada* $\mathrm{co}(X)$ *é o conjunto de todas as combinações convexas de pontos de* X*.*

Definição 2.3.4. *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$*. Um ponto* x *é dito interior de* X *se existe* $\epsilon > 0$ *tal que a bola aberta de centro* x *e raio* ϵ *está contida em* X

Teorema 2.3.4. *(Teorema de Caratheodory) Seja* $E \subset \mathbb{R}^m$*. Se* $x \in \mathrm{co}(E)$*, então* x *pode ser escrito como uma combinação convexa de não mais do que* $m+1$ *pontos em* E*, i.e., existem* $z^0, ..., z^m \in E$ *e* $\lambda_0, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}_+$ *com* $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ *tal que* $x = \sum_{i=0}^m \lambda_i z^i$*.*

Definição. *Seja* k *um número real não-negativo. O conjunto* $K = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \mathrm{Max}\{|x_1|, \ldots, |x_m|\} \leq k\}$ *é um cubo fechado de* $\mathbb{R}^m$ *com centro 0 e largura* $2k$*.*

3 Teoremas de Ponto Fixo

Uma das técnicas essenciais para a demonstração de existência de equilíbrio geral em Debreu (1959) que explicaremos no capítulo seguinte é a utilização do teorema de ponto fixo de Kakutani.

Dada uma função real $f : X \to X$, um **ponto fixo** de f é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Um teorema de ponto fixo é uma proposição que afirma que uma função que satisfaz determinadas condições deve ter um ponto fixo.

Apresentaremos nesse capítulo os teoremas de ponto fixo de Brouwer e de Kakutani.

O teorema de ponto fixo de Brouwer, cuja enunciação original é devida à Brouwer (1911), nos diz, em uma forma mais geral, que, dado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^N$ não-vazio, compacto, e convexo, uma função contínua $f : X \to X$ possui um ponto fixo.

A importância desse teorema para as ciências econômicas foi exposta por Uzawa (1962), que mostrou que não só o teorema de ponto fixo de Brouwer é condição suficiente para a existência de equilíbrio em uma economia com uma função de excesso de demanda, mas ele é também uma condição necessária.

No entanto, existem situações em que as regras que definem as funções que descrevem o comportamento dos agentes econômicos associam à um elemento do domínio da função mais do que um só elemento do contradomínio. Nesses casos se faz necessário a utilização de correspondências, uma generalização do conceito de função. Nesses casos, não é mais possível utilizar o teorema de Brouwer.

Um teorema que generaliza o teorema de ponto fixo de Brouwer para correspondências foi apresentado por Kakutani (1941), motivado pelo uso de pontos fixos em von Neumann (1937). Esse resultado ficou conhecido como o teorema de ponto fixo de Kakutani e ele afirma que, dado um conjunto $K \subset \mathbb{R}^N$ não-vazio, compacto e convexo, uma correspondência hemicontínua superior $\varphi : X \to X$ com valores convexos e não-vazios possui um ponto fixo, ou seja, existe $x \in X$ tal que $x \in \varphi(x)$.

Entre as aplicações do teorema de ponto fixo de Kakutani nas ciências econômicas, pode-se citar Nash (1950), em teoria dos jogos, e Mckenzie (1954) e Debreu (1959) na teoria de equilíbrio geral.

Nesse capítulo, apresentaremos primeiro o teorema de ponto fixo de Brouwer e sua demonstração, utilizando para isso o lema de Sperner. Para apresentarmos depois a demonstração do teorema de ponto fixo de Kakutani, usaremos o teorema de ponto fixo de Brouwer e o lema de aproximação de von Neumann.

3.1 Teorema de ponto fixo de Brouwer

Mostraremos nessa seção o teorema de ponto fixo de Brouwer e sua demonstração.

Primeiro demonstraremos o teorema de ponto fixo de Brouwer para um tipo de conjunto convexo, compacto e não-vazio mais simples, chamado o simplexo fechado. Para isso, descreveremos os simplexos fechados e um importante resultado chamado o lema de Sperner, que será utilizado na demonstração.

Depois, mostraremos que o teorema se estende para qualquer conjunto que seja convexo, compacto e não-vazio e teremos o resultado final que almejamos.

Park (1999) enfatiza duas abordagens para a demonstração do teorema de ponto fixo de Brouwer: a de Sperner (1928), que utiliza o resultado que ficou conhecido como lema de Sperner, e a de Knaster, Kuratowski e Mazurkiewicz (1929), que utilizaram o lema de Sperner para demonstrar a equivalência entre o que agora é chamado de teorema de KKM e o teorema de ponto fixo de Brouwer. Uma descrição da demonstração do teorema de ponto fixo de Brouwer utilizando o teorema de KKM pode ser encontrada no capítulo 9 de Starr (2011) ou nos capítulos 5 e 9 de Border (1985).

3.1.1 Simplexos

Descreveremos agora o conjunto convexo, compacto e não-vazio chamado o N-simplexo fechado para o qual provaremos inicialmente o teorema de Brouwer. A descrição adiante se baseia no capítulo 3 de Border (1985) e no capítulo 9 de Starr (2011).

Sejam $x_1, ..., x_{N+1}$ $N+1$ pontos linearmente independentes em $\mathbb{R}^K$, tal que $K \geq N$. O ***N*-simplexo** fechado definido por $x_1, ..., x_{N+1}$ é a envoltória convexa de $x_1, ..., x_{N+1}$, ou seja, é o seguinte conjunto S de combinações convexas:

$$S = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i = 1,\ i = 1, ..., N+1 \right\} = \mathrm{co}(\{x_1, ..., x_{N+1}\})$$

Podemos distinguir os simplexos em simplexos fechados, como o definido acima, e simplexos abertos, como definidos em Border (1985) substituindo-se a condição $\lambda_i \geq 0$ acima por $\lambda_i > 0$. Nesse trabalho, consideraremos apenas os simplexos fechados, como descritos em Starr (2011).

A i-ésima **coordenada baricêntrica** de $x \in S$ é o termo λ_i na soma que define S. Os **vértices** de S são os pontos $x_1, x_2, ..., x_{N+1}$. Uma **face** F do simplexo S é o simplexo definido por um subconjunto dos vértices de S. Definimos o conjunto $C(x) = \{i \mid \lambda_i > 0\}$ de forma que se $C(x) = \{1, ..., k\}$, então x pertence à face $\mathrm{co}(\{x_{i1}, ..., x_{ik}\})$.

Uma **subdivisão simplicial** de S é uma coleção J de simplexos $\{S_j\}_{j \in J}$ tal que:

(i) $\bigcup S_j = S$.

(ii) para quaisquer $j, k \in J$, $S_j \cap S_k$ ou é vazio, ou é igual uma face comum;

(iii) os elementos de $\{S_j\}$ têm interiores disjuntos.

Dessa maneira, cada vértice original de S pertence à somente um S_j, e os vértices de S_j no interior de S pertencem à mais de um S_j, desde que J possua mais do que um elemento.

Seja $\{S_j\}$ uma subdivisão simplicial de S, um N-simplexo, e seja V o conjunto de todos os vértices de todos os subsimplexos. Rotularemos os vértices de cada subsimplexo com um dos números $1, 2, ..., N+1$ de acordo com uma função $\gamma : V \to \{1, ..., N+1\}$, em que $\gamma(v) \in C(v)$. Temos uma **rotulação admissível** se existe tal função, de modo que todos os vértices v_{ij} de cada S_j são rotulados com o índice de um dos elementos de $C(v_{ij})$. Um simplexo possui um **conjunto completo de rótulos** quando γ assume todos os valores $1, ..., N+1$ em seu conjunto de vértices.

3.1.2 Lema de Sperner

Apresentamos agora o lema de Sperner e sua demonstração como descrita no capítulo 9 de Starr (2011).

Lema 3.1.1. *Seja $\{S_j\}$ uma subdivisão simplicial do N-simplexo. Rotulemos $\{S_j\}$ por uma rotulagem admissível. Então existe $S^{'} \in \{S_j\}$ tal que $S^{'}$ possui um conjunto completo de rótulos.*

Demonstração. Vamos provar que o número de subsimplexos com um conjunto completo de rótulos é ímpar. Como 0 não é ímpar, então estará provado que existe ao menos um tal subsimplexo.

A prova se dará por indução em $\mathbb{N}$.

Para o caso em que N=1, o 1-simplexo terá os rótulos 1 e 2 e cada subsimplexo da subdivisão simplicial possuirá dois vértices.

Seja a o número de subsimplexos em que ambos os vértices são rotulados 1, e b o número de subsimplexos em que um dos vértices é rotulado 1 e o outro é rotulado 2. Com isso, o número total de vértices de $\{S_j\}$ rotulados por 1 será $2a + b$.

Se representarmos por c o número de vértices no interior de $\{S_j\}$ rotulados por 1, teremos que o número total de vértices de $\{S_j\}$ rotulados por 1 será $2c + 1$.

Logo, temos que $2a + b = 2c + 1$.

Como $(1 + 2c)$ é ímpar, $(2a + b)$ também será ímpar e, portanto, b é ímpar. Como b representa o número de subsimplexos em que um dos vértices é rotulado 1 e o outro é rotulado 2, b é o número de subsimplexos com um conjunto completo de rótulos. Logo, a proposição é válida para o 1-simplexo.

Agora, supondo que a proposição é verdadeira para o (N-1)-simplexo.

Pela hipótese indutiva, uma subdivisão simplicial $\{S_j\}$ e uma rotulagem admissível de um N-simplexo seja suficiente para que cada face de dimensão (N-1) do N-simplexo possua um número ímpar de subsimplexos com um conjunto completo de rótulos.

Denominemos por a os subsimplexos de $\{S_j\}$ rotulados com $\{1, ..., N\}$ mas não com $N+1$, e por b os subsimplexos de $\{S_j\}$ com um conjunto completo de rótulos, que terão então uma face rotulada com $\{1, ..., N\}$. Como os N-simplexos de $\{S_j\}$ possuem cada um $N+1$ vértices e os subsimplexos a são rotulados apenas com $\{1, ..., N\}$, um desses rótulos terá de ser usado duas vezes. Logo, se contarmos o número de faces rotuladas com $\{1, ..., N\}$, os subsimplexos a contarão com duas tais faces e os subsimplexos b terão uma. Assim, no total, teremos $2a + b$.

Considerando agora as faces de dimensão $(N-1)$ que utilizam exatamente os rótulos $\{1, 2, ..., N\}$. Chamaremos de c as faces no interior de $\{S_j\}$ e que, portanto, aparecem em dois simplexos adjacentes, enquanto as faces d no exterior de $\{S_j\}$ aparecem em apenas um simplexo. Temos então um total de $2c + d$ faces rotuladas com $\{1, ..., N\}$

Assim, conseguimos a equação $2a + b = 2c + d$.

As faces exteriores de $\{S_j\}$ rotuladas com $\{1, ..., N\}$ devem pertencer às faces do simplexo original cujos vértices são rotulados com $\{1, ..., N\}$ Essa face original é um (N-1)-simplexo.

Pela hipótese indutiva, toda subdivisão simplicial desse (N-1)-simplexo possui um número ímpar de subsimplexos com um conjunto completo de rótulos $\{1, ..., N\}$. Logo, podemos dizer que d é ímpar e, sendo $2a$ par, b será ímpar.

Dessa maneira, se uma subdivisão simplicial com uma rotulagem admissível de um (N-1)-simplexo possui um número ímpar de subsimplexos, então o mesmo é verdadeiro para o n-simplexo. Então, em conjunto com a demonstração para o caso N=1, completa-se a prova por indução do Lema de Sperner.

$\square$

3.1.3 Teorema de ponto fixo de Brouwer

Apresentamos agora o teorema de ponto fixo de Brouwer para simplexos e sua demonstração como descrita no capítulo 6 de Border (1985).

Teorema 3.1.1. *Seja $S \subset \mathbb{R}^{N+1}$ um N-simplexo e $f : S \to S$ uma função contínua. Então existe $x^* \in S$ tal que $f(x^*) = x^*$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ e consideremos uma subdivisão simplicial $\{S_j^\varepsilon\}$ em que cada S_j está contido em uma (n+1)-bola de raio menor ou igual à ε.

Seja V o conjunto de vértices da subdivisão e definamos uma função de rotulação $r : V \to \{1, ..., N+1\}$ tal que para $v \in \text{co}(x_{i1}, ..., x_{ik})$ temos:

$$r(v) \ \in \ \{i_1, ..., i_k\} \cap \{i \mid \lambda_i(f(v)) \leq \lambda_i(v)\}$$

Essa interseção é não-vazia, pois se tívessemos $\lambda_i(f(v)) > \lambda_i(v)$ para todo $i \in \{i_0, ..., i_k\}$, teríamos a seguinte contradição:

$$1 = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i(f(v)) > \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(v) = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i(v) = 1$$

Logo, temos uma subdivisão simplicial com um conjunto completo de rótulos e podemos aplicar o lema de Sperner(3.1.1) e teremos a garantia de que existe um subsimplexo com um conjunto completo de rótulos.

Então existe um simplexo $\text{co}(\{p_1^{\varepsilon}, ..., p_{N+1}^{\varepsilon}\})$ tal que para todo i temos $\lambda_i(f(p_i^{\varepsilon})) \leq \lambda_i(p_i^{\varepsilon})$.

Se definimos uma subdivisão simplicial $\{S_j^{\epsilon}\}$ para cada $\epsilon > 0$, com $\epsilon \to 0$, então, sendo cada subsimplexo compacto, podemos extrair uma subsequência convergente de simplexos tal que $\lim_{\varepsilon \to 0} p_i^{\varepsilon} = x^*$, para todo $i = 1, ..., N+1$.

Sendo f contínua, temos $\lambda_i(f(x^*)) \leq \lambda_i(x^*)$, para $i = 1, ..., N+1$. Então, como $\sum_i \lambda_i(f(x^*)) = \sum_i \lambda_i(x^*) = 1$, temos $f(x^*) = x^*$.

□

Agora, enunciamos a generalização do teorema de Brouwer para qualquer conjunto convexo, compacto e não-vazio.

Teorema 3.1.2. *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ convexo, compacto e não-vazio, e seja $f : K \to K$ contínua. Então f tem um ponto fixo.*

Demonstração. A demonstração desse resultado está presente no capítulo 6 de Border (1985).

□

3.2 Teorema de ponto fixo de Kakutani

Nesta seção apresentaremos o teorema de ponto fixo de Kakutani e a sua demonstração.

Primeiramente vamos expor o conceito de correspondências e algumas definições e resultados importantes de correspondências para a demonstração do teorema de ponto fixo de Kakutani e na demonstração de existência de equilíbrio que faremos no próximo capítulo.

Para a demonstração do teorema de ponto fixo de Kakutani, utilizaremos o teorema de ponto fixo de Brouwer, que demonstramos na seção anterior, e os lemas de aproximação de von Neumann e de Cellina, que apresentaremos nessa seção.

O caminho escolhido para essa demonstração se baseia na descrição que Border (1985) faz do teorema de Cellina (1969), que tem como corolário o teorema de ponto fixo de Kakutani e que foi demonstrado utilizando um lema de von Neumann (1937) e o teorema de ponto fixo de Brouwer.

3.2.1 Correspondências

A seguinte descrição se baseia em Ok (2011), Border (1985), Aliprantis e Border (2005) e Debreu (1959).

Uma correspondência φ com domínio em $X \subset \mathbb{R}^n$ e contradomínio em $Y \subset \mathbb{R}^m$ associa à cada $x \in X$ um subconjunto $\varphi(x)$ de Y. Para distinguir φ de uma função, escrevemos a correspondência como $\varphi : X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y$.

Podemos ter uma correspondência em que para todo $x \in X$, $\varphi(x)$ é composta de um só elemento. Assim, poderíamos descrever φ através de uma função $f : X \to Y$, de modo que $\varphi(x) = \{f(x)\}$. Chamaremos esse tipo de correspondência de **correspondência univalorada**.

Associamos à correspondência $\varphi : X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y$ um **gráfico** $\operatorname{Gr}\varphi$, dado por:

$$\operatorname{Gr}\varphi = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \varphi(x)\}$$

Uma correspondência $\varphi : X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y$ possui **gráfico fechado** quando para qualquer sequência de elementos de X, (x^n), com $x^n \to x$, e uma sequência (y^n), com $y^n \in \varphi(x^n)$ e $y^n \to y$, temos $y \in \varphi(x)$.

Existem duas formas naturais de se definir o inverso de uma correspondência $\varphi : X \rightarrow\!\!\!\rightarrow Y$, de forma que para correspondências univaloradas se tem uma definição equivalente ao inverso de funções:

- O **inverso superior** de um conjunto $A \subset Y$ é:

$$\varphi^{+}[A] = \{x \in X \mid \varphi(x) \subset A\}$$

- O **inverso inferior** de um conjunto $A \subset Y$ é:

$$\varphi^{-}[A] = \{x \in X \mid \varphi(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

O conceito de continuidade de uma função é comumente ser estendido de duas maneiras distintas para as correspondências de forma a preservar a continuidade para correspondências univaloradas: a hemicontinuidade inferior e a hemicontinuidade superior. Assim como para funções, podemos definir a hemicontinuidade de correspondências a partir de vizinhanças e a partir de limite de sequências.

Pela primeira abordagem, utilizada por Border (1985), temos as definições de hemicontinuidade a partir dos inversos da correspondência:

Definição 3.2.1. *Dada uma correspondência $\varphi : X \rightarrow\rightarrow Y$ e um conjunto aberto $A \subset Y$. φ é hemicontínua superior quando, para todo $x \in X$, temos:*

$$x \in \varphi^{+}[A] \implies \exists\epsilon > 0 \text{ tal que } V_\epsilon(x) \subset \varphi^{+}[A]$$

Definição 3.2.2. *Dada uma correspondência $\varphi : X \rightarrow\rightarrow Y$ e um conjunto aberto $A \subset Y$. φ é hemicontínua inferior quando, para todo $x \in X$, temos:*

$$x \in \varphi^{-}[A] \implies \exists\epsilon > 0 \text{ tal que } V_\epsilon(x) \subset \varphi^{-}[A]$$

Pela segunda abordagem, que é a utilizada por Kakutani (1941) e por Debreu (1959), temos a definição sequencial:

Definição 3.2.3. *Dada uma correspondência $\varphi : X \rightarrow\rightarrow Y$. φ é* ***hemicontínua superior*** *se, para todo $x \in X$, temos:*

1. *Y é compacto .*
2. *$Gr\,\varphi$ é fechado, ou seja, se $x^n \to x$ e $y^n \in \varphi(x^n)$, com $y^n \to y$, então $y \in \varphi(x)$.*

Definição 3.2.4. *Uma correspondência $\varphi : X \rightarrow\rightarrow Y$ é* ***hemicontínua inferior*** *se, para todo $x \in X$, dada uma sequência de pontos de X, (x^n), com $x^n \to x$, e um ponto $y \in \varphi(x)$, temos uma sequência (y^n), com $y^n \in \varphi(x^n)$, tal que $y^n \to y$.*

As duas definições de hemicontinuidade superior só são equivalentes quando a correspondência possui valores compactos e um contradomínio compacto.

Como o nosso objetivo principal nesse trabalho é detalhar as demonstrações de Debreu (1959), consideraremos durante todo o trabalho apenas a definição sequencial de hemicontinuidade.

Enunciaremos agora alguns resultados sobre correspondências presentes no capítulo 1 de Debreu (1959) e que serão importantes para as demonstrações do capítulo seguinte.

Definição 3.2.5. *Uma correspondência é dita contínua quando ela é hemicontínua superior e hemicontínua inferior.*

Proposição. *Se temos N correspondências hemicontínuas superiores φ_n, para $n = 1, ...N$, então $\sum_{n=1}^{N} \varphi_n$ é hemicontínua superior.*

Da mesma maneira, se temos N correspondências hemicontínuas inferiores φ_n, para $n = 1, ...N$, então $\sum_{n=1}^{N} \varphi_n$ é hemicontínua inferior.

Teorema 3.2.1. *(Teorema de Máximo de Berge)*

Seja $X_i \subset \mathbb{R}^L$, $P \subset \mathbb{R}^L$, $u : X_i \to \mathbb{R}$, e $B_i : P \rightarrow\rightarrow X_i$, e seja $D_i : P \rightarrow\rightarrow X_i$, onde $D_i(p) = \{x^* \mid x^* \text{ maximiza } u_i(x) \text{ para } x \in B_i(p)\}$. Se u_i é contínua em X_i e B_i é contínua (hemicontínua superior e inferior) em x^*, então D_i é hemicontínua superior em x^* e a função dada pelo máximo de $u(x)$, para $x \in D_i(p)$ é contínua.

Demonstração. A demonstração desse teorema está disponível no capítulo 23 de Starr (2011). □

3.2.2 Lema de Cellina

Aqui enunciaremos uma versão menos geral do lema de Cellina, demonstrado no capítulo 13 de Border (1985).

Lema 3.2.1. *Seja $\gamma : E \to\to F$ uma correspondência hemicontínua superior com valores convexos e não-vazios, onde $E \subset \mathbb{R}^m$ é compacto e $F \subset \mathbb{R}^k$ é convexo e fechado. Para $\delta > 0$, definimos $\gamma^\delta(x)$ como $\gamma^\delta(x) = \mathrm{co} \bigcup_{z \in V_\delta(x)} \gamma(z)$. Então para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que:*

$$Gr\ \gamma^\delta \subset V_\varepsilon(Gr\ \gamma)$$

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, $Gr\ \gamma^\delta \not\subset V_\varepsilon(Gr\ \gamma)$. Então existe uma sequência (x_n, y_n), com $(x_n, y_n) \in Gr\ \gamma^{\frac{1}{n}}$ tal que $dist((x_n, y_n), Gr\ \gamma) \geq \varepsilon > 0$.

Se $(x_n, y_n) \in Gr\, \gamma^{\frac{1}{n}}$, então $y_n \in \gamma^{\frac{1}{n}}(x_n) = co \bigcup_{z \in V_{\frac{1}{n}}(x_n)} \gamma(z)$

Pelo teorema 2.3.4, existem $y_n^0 \ldots, y_n^k \in \bigcup_{z \in V_{\frac{1}{n}}(x_n)} \gamma(z)$, tais que $y_n = \sum_{i=1}^k \lambda_n^i y_n^i$, com $\lambda^i \geq 0$, $\sum \lambda^i = 1$, e $y_n^i \in \gamma(z_n^i)$ com $|z_n^i - x_n| < \frac{1}{n}$.

Como γ é hemicontínua superior, podemos aplicar a definição sequencial de hemicontinuidade superior, e temos sequências convergentes tais que $x_n \to x$, $y_n^i \to y^i$, $\lambda_n^i \to \lambda^i$, $z_n^i \to x$, para todo i, $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i y^i$ e $(x, y^i) \in Gr\, \gamma$.

Como γ possui valores convexos, $(x, y) \in Gr\, \gamma$, o que contradiz $\mathrm{dist}((x_n, y_n), Gr\, \gamma) \geq \varepsilon$ para todo n.

□

3.2.3 Lema de aproximação de von Neumann

Utilizando o lema de Cellina, demonstrado na seção anterior, poderemos agora provar uma versão menos geral do Lema de aproximação de von Neumann, cuja demonstração se encontra no capítulo 13 de Border (1985).

Lema 3.2.2. *Seja $\varphi : E \to\to F$ uma correspondência hemicontínua superior com valores não-vazios e convexos, onde $E \subset \mathbb{R}^m$ é compacto, e $F \subset \mathbb{R}^k$ é convexo e fechado. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma função contínua g tal que $Gr\, g \subset V_\varepsilon(Gr\, \varphi)$.*

Demonstração. Segundo o lema 3.2.1, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $\gamma^\delta =$ temos $Gr\ \gamma^\delta \subset V_\varepsilon(Gr\ \gamma)$.

Como E é um conjunto compacto, o teorema 2.2 nos assegura a existência de uma cobertura aberta $(V_\delta(x_i))_{i\in\mathbb{N}\cap(1,n)}$, com $x_1, ..., x_n \in E$. Escolhemos $y_i \in \gamma(x_i)$ e consideramos $f_1, ..., f_n$ uma partição da unidade subordinada à essa cobertura e $g(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)y_i$. Então g é contínua e como f_i tem valor zero fora de $V_\delta(x_i)$, $f_i(x) > 0$ implica em $|x_i - x| < \delta$, logo $g(x) \in \gamma^\delta(x)$ e então $Gr\, f \subset V_\epsilon(Gr\,\gamma)$.

$\square$

3.2.4 Teorema de ponto fixo de Kakutani

Finalmente, temos a enunciação do teorema de ponto fixo de Kakutani. A demonstração a seguir se baseia na exposta no capítulo 15 de Border (1985).

Teorema 3.2.2. *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ não-vazio, compacto e convexo. Seja $\varphi : K \to\to K$ uma correspondência hemicontínua superior e com valores convexos e não-vazios. Então existe um $x^* \in K$ tal que $x^* \in \varphi(x^*)$, ou seja, φ tem um ponto fixo.*

Demonstração. Por meio do lema 3.2.2, podemos construir uma sequência de funções $g_n : K \to K$ tais que $Gr\; g_n \subset V_{\frac{1}{n}}(Gr\;\varphi)$.

Por 3.1.2, cada g_n possui um ponto fixo x_n tal que $x_n = g_n(x_n)$. Portanto, $(x_n, g_n(x_n)) \in V_{\frac{1}{n}}(Gr\;\gamma)$

Como o conjunto K é compacto, podemos extrair uma subsequência convergente de x_n, de modo que $x_n \to x_0$ e $g_n(x_n) \to g_0(x_0)$.

Como γ é hemicontínua superior, então $(x_0, g_0(x_0)) = (x_0, x_0) \in Gr\;\gamma$ e então $x_0 \in \gamma(x_0)$.

$\square$

4 Existência de equilíbrio geral

Nesse capítulo apresentaremos o modelo de economia de Arrow-Debreu descrito em Debreu (1959) e detalharemos a demonstração de existência de equilíbrio nele exposta. Nesse modelo, uma economia pode ser completamente descrita pela seguinte expressão:

$$\mathcal{E} = ((X_i, \succsim_i, \omega_i)_{i \in I}, (Y_j)_{j \in J}, (\theta_{ij})_{i \in I, j \in J})$$

Essa economia possui dois tipos de agentes, as firmas e os consumidores, que agem de acordo com os preços dados nos mercados. As firmas compram os insumos disponíveis no mercado para produzir bens de forma à maximizar seu lucro. O lucro das firmas é distribuído para os consumidores e, junto com o valor da venda de seus recursos, compõe o orçamento do consumidor, que será utilizado para comprar, de acordo com suas preferências, as mercadorias produzidas pela firma. Dessa maneira, o modelo integra a produção das firmas e o consumo dos consumidores.

A generalidade desse modelo é comprometida pelo conjunto de premissas utilizadas por Debreu (1959) para a demonstração de existência de equilíbrio. Levando isso em conta e considerando o objetivo comedido desse trabalho, a descrição do modelo nesse trabalho será feita apenas de maneira tão geral quanto essas premissas permitem.

Duas limitações a se destacar são o número finito de bens, consumidores e firmas, e o fato da relação de preferências dos consumidores ser transitiva e completa.

Na demonstração de existência que descreveremos, devida à Debreu (1959), daremos especial atenção a duas técnicas essenciais para o resultado: a equivalência do equilíbrio na economia original e em uma economia restrita que construiremos de maneira à satisfazer as condições para a aplicação do teorema de ponto fixo de Kakutani, e a aplicação do teorema de Kakutani em si numa correspondência de ajuste de preços.

4.1 Mercadorias e preços

Consideramos uma economia composta por um número $L \in \mathbb{N}$ de mercadorias. Descrevemos uma lista das quantidades de cada uma das mercadorias como um ponto em $\mathbb{R}^L$.

Economicamente, as mercadorias são interpretadas como bens ou serviços distinguíveis pelas suas características físicas, temporais e espaciais. Isso significa que um mesmo bem em dois lugares diferentes é considerado como dois bens distintos e, podendo ser negociado para datas diferentes, é descrito como sendo outra mercadoria.

Podemos diferenciar dois tipos de mercadorias: os insumos, que são as mercadorias utilizadas pelas firmas na produção, e os produtos, que são as mercadorias produzidas pelas firmas e que poderão ser utilizadas como insumo por outras firmas ou consumidas pelos consumidores.

À cada mercadoria ℓ está associado um preço $p_\ell \in \mathbb{R}$, que forma o vetor de preços $p = (p_1, \ldots, p_\ell, \ldots, p_L) \in \mathbb{R}^L$.

4.2 Firmas

Consideramos um conjunto finito J de firmas. Com um certo abuso de notação, denotaremos o número de firmas também como J, podendo assim indexá-las com $j = 1, ..., J$.

Cada firma $j \in J$ é completamente caracterizada por seu conjunto de produção $Y_j \subset \mathbb{R}^L$, composto pelos planos de produção y_j da firma. Dado um vetor de preços p, as firmas escolhem um plano de produção de forma à maximizar seu lucro.

Detalharemos a seguir o conjunto de produção da firma e depois descreveremos seu comportamento de maximização de lucro.

4.2.1 Conjunto de produção da firma

O **conjunto de produção** da firma $j \in J$, $Y_j \subset \mathbb{R}^L$, contém todas as combinações tecnicamente possíveis de insumos e produtos de uma firma. Isso quer dizer que caso os insumos especificados sejam fornecidos, a firma será capaz de produzir tal quantidade de bens.

Um ponto $y_j = (y_j^1, ..., y_j^L) \in Y_j$, chamado um **plano de produção** da firma j, especifica uma quantidade de mercadorias que uma firma j pode produzir ($y_j^\ell > 0$) ou utilizar para sua produção ($y_j^\ell < 0$).

Dados os planos de produção $y_j \in Y_j$ de cada firma, definimos o **plano de produção total** como $y = \sum_{j=1}^{J} y_j$, que agrega um dos planos de produção de cada uma das firmas da economia.

O conjunto $Y = \sum_{j=1}^{J} Y_j$ é chamado o **conjunto de produção total**, e representa as possibilidades de produção de toda a economia.

Para a demonstração de existência de equilíbrio, utilizaremos as seguintes premissas:

(P.1) Para todo $j \in J$, $0 \in Y_j$.

(P.2) Y é fechado.

(P.3) Y é convexo.

(P.4) $Y \cap (-Y) \subset 0$.

(P.5) $(-\mathbb{R}^L_+) \subset Y$.

Note que enquanto a premissa (P.1) faz uma afirmação sobre os conjuntos de produção Y_j de cada uma das firmas $j \in J$, as premissas (P.2),(P.3.),(P.4) e (P.5) fazem afirmações sobre o conjunto de produção total $Y = \sum_j Y_j$.

A premissa (P.1) nos permite dizer que é possível para cada firma escolher não produzir, deixando então de utilizar quaisquer insumos. Dessa maneira, sob um sistema de preços desfavorável, a firma não é obrigada a ter prejuízos. É fácil ver que essa premissa implica em $0 \in Y$.

A premissa (P.2) nos diz que o conjunto de produção total Y é fechado. Precisaremos dessa premissa para demonstrar a equivalência dos equilíbrios da economia restrita e da não-restrita. Note que o fato de Y ser fechado não quer dizer que todos os Y_j são fechados.

A premissa (P.3.) nos diz que o conjunto de produção total Y é convexo. Em conjunto com a premissa (P.1) permite afirmar que Y apresenta retornos não-crescentes de escala. Assim como na premissa anterior, essa hipótese não é suficiente para garantir que todos os Y_j são convexos.

A premissa (P.4) pode ser interpretada como significando a irreversibilidade da produção. Se temos um determinado plano de produção y com insumos e produtos não-nulos, então o plano de produção $-y$ não é possível.

$(P.5)$ é uma premissa de *free disposal.* Ela nos diz que é possível para os produtores se desfazerem de toda a sua produção. Em conjunto com as premissas (P.3.) e (P.2), essa premissa nos diz que $Y - \mathbb{R}^L_+ \subset Y$, que é a condição de *free disposal* exposta em Mas-Colell, Whinston e Green (1995).

4.2.2 Maximização do lucro

Dado um sistema de preços p definido de forma exógena e um plano de produção $y_j \in Y_j$, o lucro de $j \in J$ é determinado pelo produto interno $p \cdot y_j$.

No entanto, dependendo do vetor de preços p escolhido e do conjunto Y_j, pode não haver $y_j \in Y_j$ que maximiza o lucro. Mais adiante mostraremos que a limitação do espaço de preços à um conjunto P e a escolha de um $\widehat{Y}_j$ compacto na restrição da economia são suficientes para assegurar a existência de um lucro máximo.

Podemos definir uma função que nos dá o lucro máximo que a firma $j \in J$ pode ter para preços p, chamada a **função de lucro** da firma:

$$\pi_j : P \to \mathbb{R}\,, \;\; \pi_j(p) = \max_{y_j \in Y_j} \; p \cdot y_j$$

Podemos definir também a **correspondência de oferta**, que nos dá o conjunto de planos de produção que maximizam o lucro para determinado $p \in P$:

$$S_j : P \to\to Y_j\,, \;\; S_j(p) = \left\{ y_j \in Y_j \,|\, y_j = \underset{y_j \in Y_j}{\arg\max} \; p \cdot y_j \right\}$$

Agregando o comportamento de todas as firmas, determinamos a **função de lucro total** da economia:

$$\pi = P \to \mathbb{R} \ \ , \ \ \pi(p) = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p)$$

Podemos também definir a **correspondência de oferta total** da economia:

$$S : P \to\to Y \ \ , \ \ S(p) = \sum_{j=1}^{J} S_j(p)$$

Sendo assim, conseguimos descrever de forma completa as firmas de uma economia $\mathcal{E}$ através de $(Y_j)_{j \in J}$, em que $Y_j \subset \mathbb{R}^L$.

4.3 Consumidores

Consideramos um conjunto finito I de consumidores. Com um certo abuso de notação, denotaremos o número total de consumidores também como I, podendo assim indexá-los com $i = 1, ..., I$.

Cada consumidor $i \in I$ é completamente caracterizado por sua relação de preferência $\succsim_i$, sua dotação inicial $\omega_i \in \mathbb{R}^L$, sua participação acionária θ_{ij} nas firmas $j \in J$, e por seu conjunto de consumo $X_i \subset \mathbb{R}^L$, composto pelas cestas de consumo x_i do consumidor. Dado um vetor de preços p, os consumidores escolhem uma cesta de consumo que maximizam suas preferências, observando sua restrição orçamentária, constituída pelo valor de sua dotação inicial e de sua parte nos lucros das firmas.

Detalharemos a seguir o conjunto de consumo do consumidor, sua relação de preferência e sua restrição orçamentária, e depois especificaremos o seu comportamento de satisfação de preferências.

4.3.1 Conjunto de consumo

O **conjunto de consumo** do consumidor $i \in I$, $X_i \subset \mathbb{R}^L$, contém todas as combinações possíveis de mercadorias que um consumidor é capaz de consumir.

Um ponto $x_i = (x_i^1, ..., x_i^L) \in X_i$, chamado um **plano de consumo**, especifica a quantidade de mercadorias consumidas por $i \in I$.

Dado um conjunto de planos de consumo x_i de cada $i \in I$, definimos o **plano de consumo total** da economia como $x = \sum\limits_{i=1}^{I} x_i$.

O conjunto $X = \sum\limits_{i=1}^{I} X_i$ que agrega os conjuntos de consumo de cada $i \in I$ é chamado o **conjunto de consumo total** da economia.

Para a demonstração de existência de equilíbrio, consideraremos as seguintes premissas sobre o conjunto de consumo:

(C.1) X_i é fechado, para todo $i \in I$.

(C.2) X_i é convexo, para todo $i \in I$.

(C.3) X_i é limitado inferiormente, para todo $i \in I$.

Ao contrário das hipóteses sobre o conjunto de produção, essas premissas são todas feitas em relação ao conjunto de consumo individual de cada consumidor.

A premissa (C.1) nos diz que o conjunto de consumo X_i de cada $i \in I$ é fechado. Note que o fato de cada X_i ser fechado não quer dizer que X é fechado.

A premissa (C.2) nos diz que o conjunto de consumo X_i de cada $i \in I$ é convexo. Isso implica que o conjunto X é convexo, pois ele será a soma de conjuntos convexos.

A premissa (C.3) nos diz que o conjunto de consumo X_i de cada $i \in I$ possui um limite inferior. Essa premissa, em conjunção com (C.1) é suficiente para demonstrar que o conjunto X é fechado.

4.3.2 Preferências

À cada consumidor $i \in I$ está associada uma **relação de preferência** $\succsim_i$ em X_i, por meio da qual o consumidor i ordenará os planos de consumo $x_i \in X_i$.

Presumimos que $\succsim_i$ é uma relação binária completa, transitiva e simétrica em X_i. Sendo completa, quaisquer elementos de X_i podem ser comparados com $\succsim_i$, ou seja, para todo x_i e para todo y_i em X_i, temos uma das alternativas não-exclusivas: $x_i \succsim_i y_i$ ou $y_i \succsim_i x_i$. Se $\succsim_i$ é transitiva, então dados $x_i, y_i, z_i \in X_i$, se $x_i \succsim_i y_i$ e $y_i \succsim_i z_i$, então $x_i \succsim_i z_i$. Por último, se $\succsim_i$ é simétrica, então para todo $x_i \in X_i$, temos $x_i \succsim_i x_i$.

Dados x_i e y_i em X_i, podemos definir $x_i \succ_i y_i$ e $x_i \sim y_i$:

$$x_i \succ_i y_i \iff x_i \succsim_i y_i \text{ e } y_i \not\succsim_i x_i$$

$$x_i \sim y_i \iff {}_i x_i \succsim_i y_i \text{ e } y_i \succsim_i x_i$$

Introduzimos agora três premissas sobre a relação de preferência $\succsim_i$ do consumidor $i \in I$ em X_i:

(C.4) Para todo $x_i \in X_i$, existe $x_i' \in X_i$ tal que $x_i' \succ x_i$, para todo $i \in I$.

(C.5) Seja $x_i, x_i' \in X_i$ e $\alpha \in (0,1)$. $x_i' \succ_i x_i$ implica em $\alpha x_i' + (1-\alpha)x_i \succ_i x_i$, para todo $i \in I$.

(C.6) Para todo $x_i \in X_i$, os conjuntos $\{y_i \in X_i \mid y_i \succsim_i x_i\}$ e $\{y_i \in X_i \mid x_i \succsim_i y_i\}$ são fechados em X_i, para todo $i \in I$.

A premissa (C.4) nos diz que o consumidor $i \in I$ não possui um plano de consumo que seja preferível a todos os outros, ou seja, não existe um ponto de saciação em X_i.

(C.5) é a hipótese de convexidade das preferências. Ela corresponde à ideia de uma taxa marginal de substituição decrescente.

A premissa (C.6) é necessária para assegurar a existência de uma função de utilidade contínua que representa $\succsim_i$. De fato, com ela temos o seguinte teorema, apresentado em Debreu (1959):

Teorema 4.3.1. *Supondo (C.1), (C.2), (C.3) e (C.6). Seja $\succsim_i$ uma relação binária completa, transitiva e simétrica em X_i. Então existe $u_i : X_i \to \mathbb{R}$, com $u_i(\cdot)$ contínua em X_i, tal que $u_i(\cdot)$ é uma função de utilidade representando $\succsim_i$, ou seja, para todo $x_i, y_i \in X_i$, $u_i(x_i) \geq u_i(y_i)$ se e somente se $x_i \succsim_i y_i$.*

Demonstração. A demonstração desse teorema foge do escopo desse trabalho. No entanto, ela está disponível no capítulo 4.6 de Debreu (1959). □

Além disso, podemos afirmar que as premissas (C.4) e (C.6) implicam na condição de convexidade fraca, ou seja, para $x_i, x_i' \in X_i$ e $\alpha \in [0,1]$, $x_i' \succsim_i x_i$ implica em $\alpha x_i' + (1-\alpha)x_i \succsim_i x_i$, para todo $i \in I$.

4.3.3 Restrição orçamentária

Considera-se que os consumidores podem ter, já de início, parte dos recursos da economia, que serão vendidos à preço de mercado para compor parte da renda dos consumidores.

Assim, cada consumidor possui uma **dotação inicial de recursos**, que denotamos por ω_i. A **dotação total de recursos** da economia é composta por $\omega = \sum_{i \in I} \omega_i$.

Consideraremos a seguinte hipótese sobre a dotação inicial de cada consumidor $i \in I$:

(C.7) Existe $x_i^0 \in X_i$ tal que $x_i^0 \ll \omega_i$, para todo $i \in I$.

A premissa (C.7) nos assegura a existência de um vetor de consumo possível que pode ser comprado pelo consumidor. De fato, se $p > 0$, então $p \cdot x_i^0 < p \cdot \omega_i$.

Cada consumidor $i \in I$ pode possuir direito à uma parcela dos lucros de cada firma j de acordo com sua **participação acionária** θ_{ij}, de modo que para cada j, temos $\sum_{i=1}^{I} \theta_{ij} = 1$, e para todo $i \in I$ e $j \in J$, $\theta_{ij} \geq 0$.

Podemos definir agora a renda w_i de um consumidor $i \in I$. Dado um sistema de preços p, temos:

$$w_i = p \cdot \omega_i + \cdot \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \cdot \pi_j(p)$$

O valor do plano de consumo escolhido por $i \in I$ tem que ser menor ou igual à sua renda. Porém, dependendo do vetor de preços p e do conjunto X_i, pode não haver $x_i \in X_i$ com valor menor ou igual do que a renda. Mais adiante mostraremos que com a limitação do espaço de preços à um conjunto P e com a premissa (C.7), temos condições suficientes para assegurar a existência de tal plano de consumo.

Definimos a **correspondência do conjunto orçamentário**:

$$B_i(p) : P \rightarrow\rightarrow X_i \quad , \quad B_i(p) = \left\{ x_i \in X_i \,|\, p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \cdot \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \cdot \pi_j(p) \right\}$$

Note que a correspondência acima depende do comportamento das firmas para ser definida. Poderíamos, de forma mais geral, definir a correspondência a partir do vetor de preços p e de um valor de renda definido de forma exógena, permitindo, assim, uma análise mais ampla do comportamento específco do consumidor.

4.3.4 Demanda do consumidor

Dado um vetor de preços p, o consumidor $i \in I$ escolhe o maior elemento do conjunto $B_i(p)$ segundo sua relação de preferências $\succsim_i$. Equivalentemente, se vale o teorema 4.3.1, então o consumidor $i \in I$ escolhe $x_i \in B_i(p)$ que maximiza sua função de utilidade u_i em $B_i(p)$.

Mesmo que o conjunto P garanta que $B_i(p)$ é não-vazio, é necessário também que exista um elemento máximo em $B_i(p)$. Esse requerimento é satisfeito, pelo teorema 2.2.4, com a continuidade de u_i e a consideração de um conjunto X_i compacto e não-vazio na economia restrita.

Podemos então definir uma **correspondência de demanda** que indica, dado um preço p, o conjunto dos planos de consumo que poderão ser escolhidos por $i \in I$:

$$D_i : P \rightarrow\rightarrow X_i \quad , \quad D_i(p) = \{x_i \in B_i(p) \,|\, x_i \succsim y_i, \text{ para todo } y_i \in B_i(p)\}$$

Equivalentemente, podemos descrever a correspondência de demanda em termos da função de utilidade:

$$D_i : P \rightarrow\rightarrow X_i \quad , \quad D_i(p) = \{x_i \in B_i(p) \,|\, u_i(x_i) \geq u_i(y_i), \text{ para todo } y_i \in B_i(p)\}$$

Podemos também definir a **correspondência de demanda total** da economia:

$$D : P \rightarrow\rightarrow X \quad , \quad D(p) = \sum_{i=1}^{I} D_i(p)$$

Podemos então descrever de forma completa os consumidores de uma economia $\mathcal{E}$ através de $((X_i), \succsim_i, \omega_i)_{i\in I}$ e $(\theta_{ij})_{i\in I, j\in J}$, onde $X_i \subset \mathbb{R}^L$, $\omega_i \in \mathbb{R}^L$, $\succsim_i$ é uma relação binária transitiva, simétrica e completa em X_i, e $\forall i \in I \forall j \in J$, $\theta_{ij} \geq 0$ e $\sum_j \theta_{ij} = 1$.

4.4 Estados atingíveis, excesso de demanda e equilíbrio

Apresentaremos agora um conjunto de definições adicionais sobre elementos da economia.

Um **estado** $((x_i), (y_i))$ da economia $\mathcal{E}$ é uma $(I + J)$-túpla de pontos de $\mathbb{R}^L$. Ele especifica o plano de consumo $x_i \in X_i$ de cada $i \in I$ e o plano de produção $y_j \in Y_j$ de cada $j \in J$.

Um estado $((x_i), (y_j))$ da economia $\mathcal{E}$ é dito **atingível** se $x - y = \omega$. O conjunto de estados atingíveis de $\mathcal{E}$ é denotado A.

Dado um estado $((x_i), (y_j))$ da economia $\mathcal{E}$, o ponto $z = x - y - \{\omega\}$ é chamado um ponto de **excesso de demanda** de $\mathcal{E}$. Cada ponto z pertence ao conjunto $E = X - Y - \{\omega\}$.

Definimos então a **correspondência de excesso de demanda**:

$$Z : P \to\to E \quad , \quad Z(p) = D(p) - S(p) - \{\omega\}$$

Dado um sistema de preços $p \in P$, Z nos dá um conjunto de excessos de demanda compatíveis com a escolha ótima de cada consumidor e firma da economia.

Definimos adicionalmente uma correspondência que nos dá o conjunto de preços para os quais o valor de um ponto de excesso de demanda é maximizado:

$$\mu : E \to\to P \quad , \quad \mu(z) = \left\{ p \in P \mid p = \arg\max_{p\in P} p \cdot z \right\}$$

Definição 4.4.1. *Um **equilíbrio** da economia $\mathcal{E}$ é uma $(I + J + 1)$-tupla $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ de pontos de $\mathbb{R}^L$ tal que:*

(a) Para todo $i \in I$, x_i^* é o maior elemento de $\{x_i \in X_i \mid p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*\}$ para $\succsim_i$.

(b) Para todo $j \in J$, y_j^* maximiza lucros relativo à p^* em Y_j.

(c) $x^* - y^* = \omega$

O critério (a) nos diz que em equilíbrio, para cada consumidor $i \in I$, $x_i^* \in D_i(p^*)$.

O critério (b) nos diz que em equilíbrio, para cada firma $j \in J$, $y_j^* \in S_j(p^*)$.

O critério (c) nos diz que em equilíbrio, tem-se uma alocação atingível e que $Z(p^*) = 0$.

4.5 A demonstração de existência de equilíbrio

Definida a economia $\mathcal{E} = ((X_i, \succsim_i, \omega_i)_{i\in I}, (Y_j)_{j\in J}, (\theta_{ij})_{i\in I, j\in J})$, e definidas as premissas *P.1–P.5* e *C.1–C.7*, podemos dar início ao processo de exposição da demonstração de existência de equilíbrio em Debreu (1959).

Juntando todas as premissas apresentadas anteriormente, temos:

(P.1) Para todo $j \in J$, $0 \in Y_j$

(P.2) Y é fechado.

(P.3) Y é convexo.

(P.4) $Y \cap (-Y) \subset 0$

(P.5) $(-\mathbb{R}^L_+) \subset Y$

(C.1) X_i é fechado, para todo $i \in I$.

(C.2) X_i é convexo, para todo $i \in I$.

(C.3) X_i é limitado inferiormente, para todo $i \in I$.

(C.4) Para todo $x_i \in X_i$, existe $x'_i \in X_i$ tal que $x'_i \succ x_i$, para todo $i \in I$.

(C.5) Se $x_i \in X_i$, $x'_i \in X_i$ e $\alpha \in (0,1)$, então: $x'_i \succ_i x_i$ implica em $\alpha x'_i + (1-\alpha)x_i \succ_i x_i$, para todo $i \in I$.

(C.6) Para todo $x_i \in X_i$, os conjuntos $\{y_i \in X_i \,|\, y_i \succsim_i x_i\}$ e $\{y_i \in X_i \,|\, x_i \succsim_i y_i\}$ são fechados em X_i, para todo $i \in I$.

(C.7) Existe $x^0_i \in X_i$ tal que $x^0_i \ll \omega_i$, para todo $i \in I$.

Formalmente, o teorema que iremos demonstrar é:

Teorema 4.5.1. *Se temos as premissas P.1–P.5 e C.1–C.7, então a economia $\mathcal{E}$ possui um ponto de equilíbrio $((x^*_i), (y^*_j), p^*)$.*

Pelas premissas consideradas, alguns dos conjuntos Y_j podem não ser convexos e compactos, e alguns dos conjuntos X_i podem não ser limitados. Assim, não podemos garantir que as correspondências e funções que caracterizam o comportamento das firmas e do consumidores serão bem-definidas.

No entanto, se consideramos uma economia restrita em que, além das premissas anteriores, todos os Y_j são fechados, convexos e limitados, e todos os X_i são limitados, então o orçamento, a demanda, a oferta e o lucro são sempre bem-definidos, pois representam uma otimização em um conjunto compacto.

Como dito anteriormente, um dos aspectos fundamentais da demonstração de Debreu (1959) se baseia na possibilidade de se demonstrar que um equilíbrio da economia original é também um equilíbrio da economia restrita.

Além disso, pode-se escolher os conjuntos da economia restrita de forma que será possível aplicar o Teorema de Kakutani em uma correspondência de ajustes de preços. Se, dado um conjunto de informações sobre o estado da economia, ajustamos os preços de forma à se aproximar do cumprimento dos critérios de equilíbrio, em um estado de equilíbrio a correspondência de ajuste retornaria o preço que levaria à esse mesmo estado da economia, caracterizando então um ponto fixo.

A demonstração de existência se dividirá em três partes gerais:

(1) Criaremos uma economia restrita $\widehat{\mathcal{E}}$ e mostraremos que um equilíbrio na economia original também é um equilíbrio na economia restrita, e que teremos $p^* > 0$. Isso permite que nos limitemos ao problema de existência de equilíbrio em $\widehat{\mathcal{E}}$.

(2) Mostraremos que é possível aplicar o teorema de ponto fixo de Kakutani em uma correspondência de ajuste de preços definida com os objetos de $\widehat{\mathcal{E}}$ e, assim, obter um $p^* \in P$ de equilíbrio.

(3) Mostrar que o comportamento de cada firma e consumidor dado o sistema de preços p^* obtido anteriormente constitui de fato um equilíbrio em $\mathcal{E}$.

Apresentaremos agora a demonstração de Debreu(1959) em detalhes:

4.5.1 Parte (1): restringindo a economia

Mostraremos que se $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ é um equilíbrio da economia original $\mathcal{E}$, então ele também é um equilíbrio da economia restrita $\widehat{\mathcal{E}}$, definida a partir dos conjuntos $\widehat{X}_i$ e $\widehat{Y}_j$ que escolheremos para serem compactos, convexos e não-vazios.

Um $\mathcal{E}$-equilíbrio é um equilíbrio da economia:

$$\mathcal{E} = ((X_i, \succsim_i, \omega_i), (Y_j), (\theta_{ij}))$$

Consideremos uma economia alternativa $\bar{\dot{\mathcal{E}}}$ substituindo cada conjunto Y_j pelo fecho de sua envoltória convexa, $\mathrm{cl}(\mathrm{co}(Y_j))$, que denotaremos $\bar{\dot{Y}}_j$. Por definição, $\mathrm{cl}(\mathrm{co}(Y_j))$ é fechado e convexo. Como, pela premissas (C.1) e (C.2), os X_i são fechados e convexos, temos $X_i = cl(co(X_i))$.

Definimos então a economia $\bar{\dot{\mathcal{E}}}$:

$$\bar{\dot{\mathcal{E}}} = ((X_i, \succsim_i), (\bar{\dot{Y}}_j), (\omega_i), (\theta_{ij}))$$

Como somente os conjuntos Y_j foram modificados, para verificar que se $((x_i^*),(y_j^*),p^*)$ é um $\mathcal{E}$-equilíbrio, então $((x_i^*),(y_j^*),p^*)$ é um $\bar{\dot{\mathcal{E}}}$-equilíbrio, precisaremos demonstrar que:

$$y_j^* = \underset{y_j \in Y_j}{\arg\max}\ p^* \cdot y_j \quad \Longrightarrow \quad y_j^* = \underset{y_j \in \bar{\dot{Y}}_j}{\arg\max}\ p^* \cdot y_j$$

Consideremos o conjunto $\{y_j \in \mathbb{R}^L \mid p^* \cdot y_j \leq p^* \cdot y_j^*\}$. Ele contém Y_j e, como ele é convexo e fechado, ele contêm também $\bar{\dot{Y}}_j$. Logo, y^* também é arg max de $p^* \cdot y_j$ em $\bar{\dot{Y}}_j$. Portanto, podemos afirmar que se $((x_i^*),(y_j^*),p^*)$ é um equilíbrio da economia $\mathcal{E}$, então é também um equilíbrio da economia $\bar{\dot{\mathcal{E}}}$.

Utilizaremos o lema 4.5.1 para provar que o conjunto de estados atingíveis de $\bar{\dot{\mathcal{E}}}$ é limitado.

Lema 4.5.1. *Seja $\mathcal{E}$ uma economia tal que X seja limitado inferiormente, Y seja fechado, convexo e $Y \cap \mathbb{R}_+^L = \{0\}$ Se $n = 1$ ou $Y \cap (-Y) \subset \{0\}$, então o conjunto de estados de $\mathcal{E}$ atingíveis A é limitado. Além disso, se X é fechado, então $X - Y$ é fechado.*

Demonstração. Essa demonstração pode ser encontrada no capítulo 5 de Debreu (1959).

□

Então, precisamos assegurar que X é limitado inferiormente, $\bar{\dot{Y}} \cap (-\bar{\dot{Y}}) \subset \{0\}$, $\bar{\dot{Y}} \cap \mathbb{R}_+^L = \{0\}$, e que $\sum_j \bar{\dot{Y}}_j$ é fechado e convexo,

Pela premissa (C.3), X é limitado inferiormente. Pela premissa (P.4), $Y \cap (-Y) \subset \{0\}$ e então $\bar{\dot{Y}} \cap (-\bar{\dot{Y}}) \subset \{0\}$.

Para ver que $Y \cap \mathbb{R}_+^L = \{0\}$ bastar notar que (P.5) implica em $\mathbb{R}_+^L \subset -Y$, o que nos permite dizer, com $(P.4)$, que $Y \cap \mathbb{R}_+^L \subset \{0\}$. Com a premissa (P.1), temos também que $Y \cap \mathbb{R}_+^L \supset \{0\}$ e então temos $Y \cap \mathbb{R}_+^L = \{0\}$. É fácil ver que o argumento se estende para $\bar{\dot{Y}} \cap \mathbb{R}_+^L = \{0\}$

Para provar que $\bar{\dot{Y}}$ é fechado e convexo, veremos que $\sum_j \bar{\dot{Y}}_j = Y$, que é fechado e convexo pelas premissas (P.2) e (P.3.). Por definição, temos $Y_j \subset \bar{\dot{Y}}_j$ e então $Y \subset \sum_j \bar{\dot{Y}}_j$. Como a soma de conjuntos convexos é convexo, $\sum_j \operatorname{co}(Y_j) = \operatorname{co}(Y)$. Tomando o fecho de cada um dos dos lados, $\sum_j \bar{\dot{Y}}_j \subset \bar{\dot{Y}}$. Como, por (P.2) e (P.3.), Y já é fechado e convexo, então $\sum_j \bar{\dot{Y}}_j \subset Y$ e então $\sum_j \bar{\dot{Y}}_j = Y$.

Então podemos aplicar o lema 4.5.1 e dizer que o conjunto de estados de $\bar{\dot{\mathcal{E}}}$ atingíveis, A, é limitado.

Consideremos um cubo fechado K em $\mathbb{R}^L$ com centro 0 e raio grande o suficiente para conter em seu interior o conjunto de todos os x_i e y_j atingíveis.

Definimos então:

$$\widehat{X}_i = X_i \cap K \ \text{ e } \ \widehat{Y}_j = \bar{\dot{Y}}_j \cap K$$

Um $\widehat{\mathcal{E}}$-equilíbrio é um equilíbrio da economia:

$$\widehat{\mathcal{E}} = ((\widehat{X}_i, \succsim_i, \omega_i), (\widehat{Y}_j), , (\theta_{ij}))$$

Como interseção de conjuntos compactos e convexos, $\widehat{X}_i$ e $\widehat{Y}_j$ são compactos e convexos.

Pela condição (c) de equilíbrio, se $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ é um $\mathcal{E}$-equilíbrio, então $((x_i^*), (y_j^*))$ é atingível para $\bar{\bar{\mathcal{E}}}$, logo $x_i^* \in \widehat{X}_i \subset X_i$ e $y_j^* \in \widehat{Y}_j \subset \bar{\bar{Y}}_j$. Então $((x^*), (y^*), p^*)$ é um $\widehat{\mathcal{E}}$-equilíbrio.

Portanto, agora podemos dizer que todo $\mathcal{E}$-equilíbrio é um $\widehat{\mathcal{E}}$-equilíbrio.

$\square$

Vamos agora mostrar que, em equilíbrio, o vetor de preços é $p^* > 0$, ou seja, todas as coordenadas de p são maiores ou iguais à zero e pelo menos é estritamente maior do que zero.

Pela premissa (P.5), $-\mathbb{R}^L_+ \subset Y$. Se tivéssemos $p^* \ll 0$, ou seja, em todas as coordenadas de p, tivéssemos $p^*_\ell < 0$, então o problema de otimização $p^* \cdot y_j$ não atingiria máximo em Y_j. Para provar isso, basta ver que dado $p^* \ll 0$, para todo $y_j \in Y$, pode-se escolher um $y'_j \in -\mathbb{R}^L_+$ tal que $y'_j < y_j$, e então $p^* \cdot y'_j > p^* \cdot y_j$. Logo, se $p^* \ll 0$, então $S_j(p^*) = \emptyset$ e não podemos ter um y_j^* de equilíbrio.

Pela premissa $(C.4)$, $\forall x_i \in X_i \, \exists x'_i \in X_i$ tal que $x'_i \succ x_i$. Se $p^* = 0$, ou seja, em todas as coordenadas de p^*, $p^*_\ell = 0$, então, para todo $x_i \in X_i$, $p^* \cdot x_i = 0$, e então $X_i = B_i(p^*)$. Logo, se $p^* = 0$, então para todo $x_i \in B_i(p^*)$, existe $x'_i \in B_i(p)$ tal que $x'_i \succ x_i$ e, portanto, $D_i(p^*) = \emptyset$ e não podemos ter um x_i^* de equilíbrio.

Por consequência, em equilíbrio devemos ter $p^* \geq 0$ e $p^* \neq 0$, então $p^* > 0$.

É fácil ver que tanto D_i quanto S_j são homogêneos de grau zero em p. Logo, podemos então nos restringir a considerar somente os preços que estão no simplexo unitário P:

$$P = \left\{ p \in \mathbb{R}^L_+ \mid \sum_{\ell=1}^{L} p_l = 1, \; p_\ell \geq 0, \text{ para todo } \ell = 1, ..., L \right\}$$

$\square$

4.5.2 Parte (2): aplicando o Teorema de Ponto Fixo de Kakutani

Formalmente, iremos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.5.2. *Se temos as premissas P.1–P.5 e C.1–C.7, então existe* $p^* \in P$ *tal que* $\widehat{Z}(p^*) \cap (-\mathbb{R}^L) \neq \emptyset$.

Note que esse teorema diz que a economia pode satisfazer uma condição um pouco mais geral do que a condição (c) de equilíbrio, a de que $\widehat{Z}(p^*) \leq 0$

Consideraremos uma correspondência de ajuste de preços dada por:

$$\varphi : P \times \widehat{E} \rightarrow\rightarrow P \times \widehat{E} \text{ , em que } \varphi(p,z) = \mu(z) \times \widehat{Z}(p)$$

À cada ponto de excesso de demanda, φ associa um conjunto de preços que maximizam seu valor. À cada sistema de preços, φ associa um conjunto de excessos de demanda compatíveis com a escolha ótima, segundo um sistema de preços, de cada consumidor e firma da economia. Então, em um ponto de equilíbrio teríamos $(p, z) \in \varphi(p, z)$, um ponto fixo.

Para encontrar esse ponto fixo, utilizaremos o teorema de ponto fixo de Kakutani.

Para aplicar o Teorema de Ponto Fixo de Kakutani em φ, precisaremos das seguintes condições, que enunciaremos como teoremas nessa seção:

1. $P \times \widehat{E}$ é não-vazio, convexo e compacto. (Teorema 4.5.3)
2. $\varphi(p, z) = \mu(z) \times \widehat{Z}(p)$ é hemicontínua superior. (Teorema 4.5.4)
3. $\varphi(p, z) = \mu(z) \times \widehat{Z}(p)$ possui valores não-vazios e convexos. (Teorema 4.5.5)

Provaremos que $P \times \widehat{E}$ é não-vazio, convexo e compacto no teorema 4.5.3. Para isso, vamos primeiro provar, no lema 4.5.2, que P é não-vazio, convexo e compacto, e, no lema 4.5.3, que $\widehat{E}$ é não-vazio, convexo e compacto.

Lema 4.5.2. *P é não-vazio, convexo e compacto.*

Demonstração. O conjunto P é, por definição, um simplexo fechado, logo, é não-vazio, convexo e compacto. □

Lema 4.5.3. *$\widehat{E} = \widehat{X} - \widehat{Y} - \{\omega\}$ é não-vazio, convexo e compacto.*

Demonstração. Sabemos, pelo teorema 2.2.1, que a soma de um número finito de conjuntos compactos é um conjunto compacto. Além disso, pelo teorema 2.3.1, a soma de um número finito de conjuntos convexos é um conjunto convexo. A soma de conjuntos não-vazios é não-vazio.

Da seção **4.5.1**, sabemos que, por definição, os conjuntos $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$ são convexos, compactos e não-vazios. ω é, por definição, um ponto de $\mathbb{R}^L$, logo é convexo, compacto e não-vazio.

Portanto, o conjunto $\widehat{E} = \widehat{X} - \widehat{Y} - \{\omega\}$ é não-vazio, convexo e compacto.

□

Teorema 4.5.3. *$P \times \widehat{E}$ é não-vazio, convexo e compacto.*

Demonstração. Pelo teorema 2.2.3, o produto cartesiano de dois conjuntos compactos é compacto. Pelo teorema 2.3.3, o produto cartesiano de dois conjuntos convexos é convexo. O produto cartesiano de dois conjuntos não-vazios é não-vazio.

Pelos lemas 4.5.2 e 4.5.3, P e $\widehat{E}$ são não-vazios, convexos e compactos, logo, $P \times \widehat{E}$ é não-vazio, convexo e compacto.

□

Demonstraremos no teorema 4.5.4 que $\varphi(p, z) = \mu(z) \times \widehat{Z}(p)$ é hemicontínua superior. Para isso, precismos que as correspondências μ e $\widehat{Z}$ sejam hemicontínuas superiores.

Mostramos a hemicontinuidade superior de μ no lema 4.5.5.

Sendo $\widehat{Z}(p) = \widehat{D}(p) - \widehat{S}(p) - \{\omega\}$, para provar no lema 4.5.8 que $\widehat{Z}$ é hemicontínua superior, mostraremos primeiro que as correspondências $\widehat{D}$ e $\widehat{S}$ são hemicontínuas superiores.

A hemicontinuidade superior de $\widehat{S}$ é exposta no lema 4.5.4. Para provar, através do teorema de máximo de Berge (teorema 3.2.1), que $\widehat{D}$ é hemicontínua no lema 4.5.7, precisamos da hemicontinuidade de cada u_i, estabelecida anteriormente no teorema 4.3.1, e da continuidade de cada correspondência $\widehat{B}_i$, provada no lema 4.5.6.

Lema 4.5.4. *A correspondência $\widehat{S}$ é hemicontínua superior*

Demonstração. Mostraremos primeiro que para todo $j \in J$, a correspondência de oferta $\widehat{S}_j : P \to\to \widehat{Y}_j$ é hemicontínua superior.

Sendo $\widehat{S}_j$ hemicontínua superior, o contradomínio $\widehat{Y_j}$ é compacto e para todo ponto $p^0 \in P$, a seguinte afirmação é verdadeira: se $(p^v)_{v \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de termos de P com $p^v \to p^0$, e $(y_j^v)_{v \in \mathbb{N}}$ é uma sequência tal que $y_j^v \in \widehat{S}_j(p^v)$ e $y_j^v \to y_j^0$, então $y_j^0 \in \widehat{S}_j(p^0)$.

Suponhamos, por absurdo, que para tais sequências temos $y_j^0 \notin \widehat{S}_j(p^0)$. Como $\widehat{Y}_j$ é fechado, temos $y^0 \in \widehat{Y}_j$. E sendo $y_j^0 \notin \widehat{S}_j(p^0)$, existe $y_j' \in \widehat{Y}_j$ tal que $p^0 \cdot y_j^0 < p^0 \cdot y_j'$.

Logo, como $p^v \to p^0$, $y_j^v \to y_j^0$, e, trivialmente, $y_j' \to y_j'$, temos: $p^v \cdot y^v \to p^0 \cdot y^0$ e $p^v \cdot y_j' \to p^0 \cdot y_j'$

Portanto, existe $v^0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $v > v^0$, temos $p^v \cdot y_j^v < p^v \cdot y_j'$.

Mas como definimos $y_j^v \in \widehat{S}_j(p^v)$, tem-se $p^v \cdot y_j^v \geq p^v \cdot y_j'$, uma contradição. Então temos $y_j^0 \in \widehat{S}_j(p^0)$ e a correspondência $\widehat{S}_j$ é hemicontínua superior.

Como a correspondência $\widehat{S}$ é definida a partir da soma das correspondências $\widehat{S}_j$, pelo teorema **3.2.1**, $\widehat{S}$ é hemicontínua superior.

Lema 4.5.5. *μ é hemicontínua superior em $\widehat{Z}$.*

A demonstração se dá da mesma maneira que a demonstração da hemicontinuidade de $\widehat{S}_j$, substituindo-se apenas o conjunto P em $\widehat{S}_j$ por E e substituindo $\widehat{Y}_j$ por P.

□

Para demonstrar que $\widehat{D}$ é hemicontínua superior utilizaremos o Teorema de Máximo de Berge, que enunciamos em 3.2.1. Para isso, precisaremos que u_i seja uma função contínua e que $\widehat{B}_i$ seja uma correspondência contínua, ou seja, que $\widehat{B}_i$ seja hemicontínua superior e hemicontínua inferior.

A continuidade de u_i em X_i segue do teorema 4.3.1. Já a continuidade de $\widehat{B}_i$ será demonstrada a seguir.

Lema 4.5.6. *A correspondência $\widehat{B}_i : P \rightarrow\rightarrow \widehat{X}_i$ é contínua, ou seja:*

1. *$\widehat{B}_i$ é hemicontínua superior*
2. *$\widehat{B}_i$ é hemicontínua inferior*

Demonstração. Vamos primeiro provar que $\widehat{B}_i$ é hemicontínua superior.

Como o contradomínio da correspondência $\widehat{B}_i$, $\widehat{X}_i$ é compacto, basta provar que $\widehat{B}_i$ possui o gráfico fechado em $P \times \widehat{X}_i$.

Por definição, para todo $p \in P$ e dado um y^* de equilíbrio:

$$\widehat{B}_i(p) = \left\{ x_i \in \widehat{X}_i \,|\, p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + p \cdot \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \cdot y_j^* \right\}$$

Pela premissa (C.7), para todo $p \in P$, $p > 0$, existe $x_i^0 \in X_i$ tal que $p \cdot x_i^0 < \omega_i$. Além disso, a premissa (P.1) nos assegura que $0 \in Y_j$, 1ogo, como vimos na seção **4.2.1**, para todo $p \in P$, $\pi_j(p) \geq 0$.

Pela definição de $\widehat{B}_i(p)$, temos $x_i \in \widehat{X_i}$ tal que $p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + p \cdot \sum_j \theta_{ij} \cdot y_j^*$, então, sendo $\widehat{X_i}$ limitado inferiormente e fechado, podemos ver que o conjunto $\widehat{B}_i(p)$ é compacto e possui um gráfico fechado em $P \times \widehat{X}_i$. Logo, $\widehat{B}_i$ é hemicontínua superior.

Vamos agora provar que $\widehat{B}_i$ é hemicontínua inferior.

Seja (p^v) uma sequência de pontos de P tal que $p^v \to p^0$ e $x_i^0 \in \widehat{B}_i(p^0)$, ou seja, $p^0 \cdot x_i^0 \leq w_i^0$, sendo w_i^0 a renda w_i definida para preços p^0. Para que $\widehat{B}_i$ seja hemicontínua inferior, deve existir uma sequência (x_i^v), com $x_i^v \in \widehat{B}_i(p^0)$ tal que $x_i^v \to x_i^0$.

Sendo $x_i^v \in \widehat{B}_i(p^0)$, temos $p^v \cdot x_i^v \leq w_i^v$.

Consideraremos dois casos:

(a) $p^0 \cdot x_i^0 < w_i^0$

(b) $p^0 \cdot x_i^0 = w_i^0$

No caso (a), precisamos de que exista $v' \in \mathbb{N}$ tal que: $v > v' \implies p^v \cdot x_i^0 < w_i^v$.

Podemos definir então (x_i^v) em que: se $v \leq v'$, então x_i^v é um ponto qualquer de $\widehat{B}_i(p)$; se $v > v'$, então $x_i^v = x_i^0$.

Então temos $x_i^v \in \widehat{B}_i$ e $x_i^v \to x_i^0$.

Considerando agora o caso (b).

Pela premissa (C.7), podemos dizer que existe $x_i' \in X_i$ tal que $p^0 \cdot x_i' < w_i^0$.

Então existe $v' \in \mathbb{N}$ tal que:

$$v > v' \quad \implies \quad p^v \cdot x_i' < w_i^v \ \wedge \ p^v \cdot x_i' < p^v \cdot x_i^0$$

A última desigualdade segue do fato que $p^v \to p^0$ e $p^0 \cdot x = w$.

Consideremos então uma sequência (a^v) em que cada av é o ponto onde $[x_i', x_i^0]$ intercepta o hiperplano renda determinado por p^v e w^v.

Para todo $v > v'$, a^v existe, a^v é único, e $a^v \to x_i^0$.

Define-se então a sequência (x_i^v) como: se $v \leq v'$, então x_i^v é um ponto qualquer de $\widehat{B}_i(p^v)$; se $v > v'$, então $x_i^v = a^v$.

Então $x_i^v \in \widehat{B}_i$ e $x_i^v \to x_i^0$, e a demonstração está concluída.

□

Agora podemos mostrar que $\widehat{D}$ é hemicontínua superior.

Lema 4.5.7. *A correspondência $\widehat{D}$ é hemicontínua superior.*

Demonstração. Pelo teorema 4.3.1, a função u é contínua em X_i, resultado que pode ser estendido para $\widehat{X}_i$. Pelo lema 4.5.6, a correspondência $\widehat{B}_i$ é contínua. Pelo teorema 3.2.1, temos que $\widehat{D}_i$ é hemicontínua superior, para todo $i \in I$. A correspondência $\widehat{D}$, como soma de correspondências hemicontínuas superiores, é, portanto, hemicontínua superior.

□

Lema 4.5.8. *A correspondência $\widehat{Z}$ é hemicontínua superior*

Demonstração. Pelos lemas 4.5.7 e 4.5.4, $\widehat{D}$ e $\widehat{S}$ são correspondências hemicontínuas superiores.

A correspondência $\widehat{Z}$ é hemicontínua superior pois é soma de correspondências hemicontínuas superiores.

□

Teorema 4.5.4. *$\varphi(p,z) = \mu(z) \times \widehat{Z}(p)$ é hemicontínua superior.*

Demonstração. Com os lemas 4.5.8 e 4.5.5, podemos dizer que φ é hemicontínua superior pois é o produto cartesiano de duas correspondências hemicontínuas superiores.

□

Mostraremos no teorema 4.5.5 que $\varphi(p,z) = \mu(z) \times \widehat{Z}(p)$ possui valores não-vazios e convexos

Para isso, vamos mostrar, no lema 4.5.9, que μ possui valores não-vazios e convexos, e, no lema 4.5.12, que $\widehat{Z}$ possui valores não-vazios e convexos.

Para provar que $\widehat{Z}$ possui valores não-vazios e convexos, mostraremos que $\widehat{D}$ e $\widehat{S}$ possuem valores não-vazios e convexos, nos lemas 4.5.10 e 4.5.11, respectivamente.

Lema 4.5.9. *μ possui valores não-vazios e convexos.*

Demonstração. Como P é não-vazio e compacto, μ atinge máximo em P e então $\mu(z)$ é não-vazio.

Para demonstrar a convexidade de μ basta observar que ou $z = 0$ ou $z \neq 0$.

Se $z = 0$, então $\mu(z) = P$.

Se $z \neq 0$, então $\mu(z)$ é a interseção de P com o hiperplano $\{p \in P \mid p \cdot z = \max_{p \in P} p \cdot z\}$. Como interseção de dois conjuntos convexos, $\mu(z)$ será convexo.

□

Lema 4.5.10. *$\widehat{D}$ possui valores não-vazios e convexos.*

Demonstração. Se $p \in P$ e $x_i^1, x_i^2 \in \widehat{D}_i(p)$, então $x_i^1 \sim_i x_i^2$. Como vimos na seção **4.3.2**, as premissas (C.4) e (C.6) implicam na condição de convexidade fraca.

Então, para todo $\alpha \in [0,1]$, $\alpha x_i^2 + (1-\alpha)x_i^1 \succsim_i x_i^1$.

Logo, como $x_i^1 \in \widehat{D}_i(p)$, para todo $x_i \in \widehat{B}_i(p)$, $x_i^1 \succsim_i x_i$ e então $\alpha x_i^2 + (1-\alpha)x_i^1 \succsim_i x_i$.

Pela definição de $\widehat{B_i}$, podemos ver que $\alpha x_i^2 + (1-\alpha)x_i^1 \in B_i(p)$

Então $\alpha x_i^2 + (1-\alpha)x_i^1 \in \widehat{D}_i(p)$ e $\widehat{D}_i(p)$ é convexa em P.

Pelo teorema 2.2.4, $D_i(p)$ é não-vazio pois $\widehat{D}_i$ contém os maximizadores de u_i em $\widehat{B}_i$, um conjunto compacto.

O resultado segue do fato de todos os $\widehat{D}_i$ possuírem valores convexos e não vazios.

□

Lema 4.5.11. *$\widehat{S}$ possui valores não-vazios e convexos.*

Demonstração. Se $y'_j, y''_j \in \widehat{S}_j$, então $y'_j, y''_j \in \widehat{Y}_j$ e $\forall y_j \in Y_j$, temos $p \cdot y'_j \geq p \cdot y_j$ e $p \cdot y''_j \geq p \cdot y_j$.

Sendo $\widehat{Y}_j$ por definição convexo, temos $\forall \alpha \in [0,1],\ p \cdot (\alpha y'_j + (1-\alpha) y''_j) \geq p \cdot y_j$. Então $\widehat{S}_j(p)$ é convexo.

Ele é não-vazio pois $\widehat{S}_j$ maximiza uma função contínua $p \cdot y_j$ em um conjunto compacto.

Como soma de conjuntos não-vazios e convexos é convexo, $\widehat{S}_j$ possui valores não-vazios e convexos.

□

Lema 4.5.12. $\widehat{Z}(p) = \widehat{D}(p) - \widehat{S}(p) - \{\omega\}$ *possui valores não-vazios e convexos.*

Demonstração. Como $\widehat{Z}(p)$ é soma de conjuntos não-vazios e convexos, então $\widehat{Z}(p)$ será não-vazio e convexo para todo $p \in P$.

□

Teorema 4.5.5. $\varphi(p,z) = \mu(z) \times Z(p)$ *possui valores não-vazios e convexos.*

Demonstração. Como φ é o produto cartesiano de correspondências não-vazias e convexas, φ possuirá valores não-vazios e convexos. □

Satisfeitas todas as condições do Teorema de Kakutani, podemos afirmar que φ possui um ponto fixo, logo, $(p^*, z^*) \in \mu(z^*) \times \widehat{Z}(p^*)$, para algum $p^* \in P$.

Como $p^* \in \mu(z)$, então para todo $p \in P$, $p \cdot z^* \leq p^* \cdot z^*$. Como $z^* \in \widehat{Z}(p^*)$, então $p^* \cdot z^* \leq 0$.

Logo, para todo $p \in P$, $p \cdot z^* \leq 0$.

Como $p^* > 0$, temos $z^* \in -\mathbb{R}^L_+$. Então, existe $p^* \in P$ tal que $\widehat{Z}(p^*) \cap (-\mathbb{R}^L) \neq \emptyset$.

4.5.3 Parte (3): equilíbrio da economia restrita é um equilíbrio da economia

Agora mostraremos que o comportamento dos agentes quando o preço é o p^* definido na seção anterior é um ponto de equilíbrio da economia.

Como $z \in \widehat{Z}(p^*)$, existe, para todo $i \in I$ um consumo $x^*_i \in \widehat{D}_i(p^*)$ e, para todo $j \in J$, uma produção $y_j \in \widehat{S}_j(p^*)$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{I} x^*_i - \sum_{j=1}^{J} y_j - \omega = z \tag{4.1}$$

Sendo $\widehat{Y}_j \subset \bar{\bar{Y}}_j$ e $\sum_{j=1}^{J} \bar{\bar{Y}}_j = Y$, temos $\sum_{j=1}^{J} y_j = y \in Y$.

Como vimos na seção **4.2.1**, as premissas (P.2), (P.3.) e (P.5) implicam em $(Y - \mathbb{R}^L_+) \subset Y$. Logo, sendo $y \in Y$ e $z \in -\mathbb{R}^L_+$, temos $y + z \in Y$.

Então existe, para cada $j \in J$, um $y_j^* \in Y_j$ tal que:

$$\sum_{j=1}^{J} y_j^* = y + z \tag{4.2}$$

Agora vamos ver que $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$ é um equilíbrio de $\mathcal{E}$.

Substituindo 4.2 em 4.1, temos:

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* - \sum_{j=1}^{J} y_j^* - \omega = 0 \tag{4.3}$$

Logo, $((x_i^*), (y_j^*))$ é atingível em $\bar{\dot{\mathcal{E}}}$, então todo x_i^* e todo y_j^* estão no interior do cubo K. Temos então a condição (c) de equilíbrio

Definiremos agora:

$$w_i = p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p^* \cdot y_j$$

Como $x_i^* \in \widehat{D}_i(p^*)$, o consumo x_i^* é o maior elemento segundo $\precsim$ do conjunto $\widehat{B}_i(p^*) = \{x_i \in \widehat{X}_i \mid p^* \cdot x_i \leq w_i\}$.

Para ver que x_i^* também é o maior elemento segundo $\succsim_i$ de $B_i(p^*)$, da economia $\mathcal{E}$ inicial, suponhamos, por absurdo, que x_i^* não é o maior elemento de $B_i(p^*)$ segundo $\succsim_i$.

Então existe $x_i' \in B_i(p^*)$ tal que $x_i' \succ_i x_i^*$.

Pela premissa (C.5) e como $B_i(p^*)$ é convexo, para todo $\alpha \in (0,1)$, $x'' = \alpha x_i' + (1-\alpha)x_i^* \succ_i x_i^*$ e $x_i'' \in B_i(p^*)$.

Como x_i^* é atingível, ele pertence ao interior do cubo K, logo, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $x_i'' \in \widehat{B}_i(p^*) = B_i(p^*) \cap K$, logo, x_i^* não seria o maior elemento segundo $\precsim$ de $\widehat{B}_i(p^*)$, uma contradição.

Portanto, temos que x_i^* é o maior elemento segundo $\succsim_i$ de $B_i(p^*)$, da economia $\mathcal{E}$ inicial.

Mostraremos agora que $p^* \cdot x_i = w_i$. Suponhamos, por absurdo, que $p^* \cdot x_i < w_i$.

Pela premissa (C.7), existe $x_i' \in X_i$ tal que $x_i' \succ_i x_i$. Ou $p^* \cdot x_i' \leq p^* \cdot x_i^*$ ou $p \cdot x_i' > p \cdot x_i^*$.

Se $p^* \cdot x_i' \leq p^* \cdot x_i^*$, então $x_i^* \notin D_i(p^*)$. Logo, $p^* \cdot x_i' > p^* \cdot x_i^*$.

Com $p^* \cdot x_i^* < w_i$ e pela premissa (C.5), existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $x_i'' = \alpha x_i' + (1-\alpha)x_i^* \succ x_i^*$ e $w_i \geq p^* \cdot x_i''$. Então teríamos $x_i^* \notin D_i(p^*)$.

Portanto, não poderíamos ter $p^* \cdot x_i^* < w_i$.

Consequentemente, $p^* \cdot x_i^* = w_i$, para $x_i^* \in D_i(p^*)$.

Somando cada componente de $p^* \cdot x_i^* = w_i$ em relação a i, temos:

$$p^* \cdot \sum_{i=1}^{I} x_i^* = p^* \cdot \sum_{i=1}^{I} \omega_i + p \cdot \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \cdot y_j$$

$$\implies \; p^* \cdot x^* = p^* \cdot \omega + p \cdot y \implies p^* \cdot z = 0$$

Por 4.2, temos $p^* \cdot y^* = p^* \cdot y$.

Como $y_j \in S_j(p^*)$, para preços p^*, y_j maximiza lucros em $\widehat{Y}_j$, para todo $j \in J$. Portanto, y maximiza lucros em $\widehat{Y}$, assim como y^*. Sendo assim, podemos afirmar que, dado o sistema de preços p^*, y_j^* maximiza lucros em $\widehat{Y}_j$, para todo $j \in J$.

Além disso, como $p^* \cdot y^* = p^* \cdot y_j$, temos

$$w_i = p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$$

Então, agora temos a condição (a) de equilíbrio para $\mathcal{E}$.

Para verificarmos a validade da condição (b), suponhamos, por absurdo, que existe $y_k' \in Y_k$ tal que $p \cdot y_k' > p \cdot y_k^*$ e então

$$y' = \sum_{j \neq k}^{J} y_j^* + y_k' > \sum_{j=1}^{J} y_j^* = y^*$$

Sendo y_j^* interior à K e Y convexa pela premissa (P.3.), poderíamos ter $\alpha \in [0,1]$ tal que $\alpha y' + (1-\alpha) y^* > y^*$ e $\alpha y' + (1-\alpha) y^* \in \widehat{Y}$, uma contradição.

Logo, temos a condição (b) para $\mathcal{E}$.

Portanto, temos todas as condições de equilíbrio e provamos que se temos as premissas *P.1–P.5* e *C.1–C.7*, então a economia $\mathcal{E}$ possui um ponto de equilíbrio $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$.

$\square$

5 Considerações Finais

O presente trabalho centrou-se na apresentação dos teoremas de ponto fixo de Brouwer e Kakutani e na demonstração da existência de equilíbrio em Debreu (1959).

Como vimos no capítulo 1, o desenvolvimento da teoria de pontos fixos foi essencial para o processo que resultou na demonstração de existência de equilíbrio em Mckenzie (1954) e Arrow e Debreu (1954). Detalhamentos sobre a história do desenvolvimento da demonstração de existência de equilíbrio geral e da teoria de equilíbrio geral foram elaboras por Weintraub (1983), Ingrao e Israel (1990), Blaug (2003) e Weintraub (2002).

Esperamos que com os detalhamentos providos nos capítulos 3 e 4, seja possível fazer uma leitura mais diligente do texto original de Debreu (1959), além de explorar os trabalhos que possuem um objeto de estudo semelhante como Nash (1950), Arrow e Debreu (1954) e Mckenzie (1954).

Algumas das restrições que citamos no modelo de Debreu (1959) foram relaxadas em trabalhos como McKenzie (1959), Aumann (1966) e Mas-Colell (1974). Detalhamentos acerca desses desenvolvimentos estão disponíveis em Arrow e Hahn (1971), Hildebrand e Kirman (1976), Arrow e Intriligator (1982), Mas-Colell, Whinston e Green (1995), Florenzano (2003) e Starr (2011).

No desenvolvimento posterior da teoria de equilíbrio geral, outros teoremas de ponto fixo foram desenvolvidos, permitindo demonstrações com premissas menos restritas e com modelos mais gerais. Uma revisão desses desenvolvimentos pode ser vista em Ben-El-Mechaiekh et al. (2009). Surgiram também outras técnicas de demonstração distintas das de Debreu (1959). Uma revisão dessas técnicas pode ser vista em Florenzano (2003).

REFERÊNCIAS

ALIPRANTIS, C.; BORDER, K. **Infinite Dimensional Analysis** .Spriger-Verlag 2005.

ARAÚJO, Aloísio. **Introdução à Economia Matemática**. IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

ARROW, Kenneth J.; DEBREU, Gerard. **Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy**. Econometrica: Journal of the Econometric Society, p. 265-290, 1954.

ARROW, K. ; HAHN, F. **General Competitive Analysis**. North Holland, 1971

ARROW, K. J. MD Intriligator **Handbook of Mathematical Economics.** 1982.

AUMANN, Robert J. **Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders.** Econometrica: Journal of the Econometric Society, p. 1-17, 1966.

BEN-EL-MECHAIEKH et al. **General equilibrium and fixed point theory: A partial survey.** Journal of fixed point theory and applications, v. 6, n. 2, p. 207-226, 2009.

BORDER, Kim C. **Fixed point theorems with applications to economics and game theory**. Cambridge University Press, 1985.

BLAUG, Mark. **The formalist revolution of the 1950s.** Journal of the History of Economic Thought, v. 25, n. 2, p. 145-156, 2003.

BROUWER, Luitzen Egbertus Jan. **Über abbildung von mannigfaltigkeiten**. Mathematische annalen, v. 71, n. 1, p. 97-115, 1911.

CASSEL, Gustav. **Theory of Social Economy**. Harcourt, Brace & Company, 1924.

CELLINA, Arrigo. **Approximation of set valued functions and fixed point theorems**. Annali di matemática pura ed applicata, v. 82, n. 1, p. 17-24, 1969.

DEBREU, Gerard. **Theory of value: An axiomatic analysis of economic equilibrium**. Yale University Press, 1959.

DEBREU, G. **Existence of competitive equilibrium**. In: ARROW, K. J.; INTRILIGATOR, M. D. Handbook of Mathematical Economics. 1982.

DEBREU, Gerard. **Economic theory in the mathematical mode**. The American Economic Review, v. 74, n. 3, p. 267-278, 1984.

DEBREU, G. **Existence of general equilibrium**. In: EATWELL, John. General Equilibrium. Palgrave Macmillan, Londres, 1989.

FLORENZANO, Monique. **General equilibrium analysis: existence and optimality properties of equilibria**. Springer Science & Business Media, 2003.

GEANAKOPLOS, John. **Arrow-Debreu model of general equilibrium.** In: EATWELL, John. General Equilibrium. Palgrave Macmillan, Londres, 1989.

HILDENBRAND, Werner; KIRMAN, Alan P. **Introduction to equilibrium analysis: variations on themes by Edgeworth and Walras.** Elsevier, 1976.

INGRAO, Bruna; ISRAEL, Giorgio. **The Invisible Hand – Economic Equilibrium in the History of Science** . 1990.

KAKUTANI, Shizuo et al. **A generalization of Brouwer's fixed point theorem**. Duke Mathematical Journal, v. 8, n. 3, p. 457-459, 1941.

KNASTER, Bronisław; KURATOWSKI, Casimir; MAZURKIEWICZ, Stefan. **Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe**. Fundamenta Mathematicae, v. 14, p. 132-137, 1929.

MAS-COLELL, Andrew. **An equilibrium existence theorem without complete or transitive preferences**. Journal of Mathematical Economics, v. 1, n. 3, p. 237-246, 1974.

MAS-COLELL, A., WHINSTON, M., GREEN, J. **Microeconomic theory.** New York: Oxford University Press, 1995.

MCKENZIE, Lionel. **On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems**. Econometrica: Journal of the Econometric Society, p. 147-161, 1954.

MCKENZIE, Lionel W. **On the existence of general equilibrium for a competitive market**. Econometrica: journal of the Econometric Society, p. 54-71, 1959.

NASH, John. **Equilibrium points in n-person games**. Proceedings of the national academy of sciences, v. 36, n. 1, p. 48-49, 1950.

VON NEUMANN, John. **Zur theorie der gesellschaftsspiele**. Mathematische annalen, v. 100, n. 1, p. 295-320, 1928.

VON NEUMANN, John. **Uber ein okonomsiches gleichungssystem und eine verallgemeinering des browerschen fixpunktsatzes**. In: Erge. Math. Kolloq. 1937. p. 73-83.

NIKAIDO, Hukukane. **Introduction to sets and mappings in modern economics**. North-Holland, 1970.

OK, Efe A. **Real analysis with economic applications**. Princeton University Press, 2011.

PARK, Sehie. **Ninety years of the Brouwer fixed point theorem**. Vietnam J. Math, v. 27, n. 3, p. 187-222, 1999.

SPERNER, Emanuel. **Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes**. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. Springer-Verlag, 1928. p. 265-272.

STARR, Ross M. **General equilibrium theory: An introduction**. Cambridge University Press, 2011.

TAKAYAMA, Akira. **Mathematical economics**. Cambridge University Press, 1985.

UZAWA, Hirofumi. **Walras' existence theorem and Brouwer's fixed-point theorem**. The Economic Studies Quarterly (Tokyo. 1950), v. 13, n. 1, p. 59-62, 1962.

WALD, Abraham. **Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktions-gleichungen**. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 1933.

WALD, Abraham. **Uber Produktionsgleichungen und der okonomischen Wertlehre.** Ergebnisse eines mathematischen Kolloquimus, 1934.

WALRAS, Leon. **Eléments d'économie politique pure ou Théorie de la richesse sociale**. Paris. Guillaumin et Cie, Bâle, H. Georg, 1874.

WEINTRAUB, E. Roy. **On the existence of a competitive equilibrium: 1930-1954**. Journal of Economic Literature, v. 21, n. 1, p. 1-39, 1983.

WEINTRAUB, E. Roy. **How Economics Became a Mathematical Science.** Duke University Press, 2002.