

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Física

**Daniel de Lima Canedo**

**Modelo cosmológico do tipo Kantowski-Sachs com fluidos de radiação, poeira  
e fantasma**

Juiz de Fora  
2020

Daniel de Lima Canedo

Modelo cosmológico do tipo Kantowski-Sachs com fluidos de radiação, poeira  
e fantasma

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Lima Canedo, Daniel.

Modelo cosmológico do tipo Kantowski-Sachs com fluidos de radiação,  
poeira e fantasma / Daniel de Lima Canedo. – 2020.

111 f. : il.

Orientador: Gil de Oliveira Neto

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto  
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2020.

1. Modelo cosmológico Anistrópico. 2. Kantowski-Sachs. 3. Fluido  
de Radiação. 4. Fluido de Poeira. 5. Fluido Fantasma. 6. Parâmetro de  
Anisotropia. 7. Parametrização de Misner. I. Oliveira Neto, Gil. Modelo  
cosmológico do tipo Kantowski-Sachs com fluidos de radiação, poeira e  
fantasma.

**Daniel de Lima Canedo**

**"Modelo cosmológico do tipo Kantowski-Sachs com fluidos de radiação, poeira e fantasma".**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 25 de janeiro de 2021.

**BANCA EXAMINADORA**



---

Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF

p/



---

Prof. Dr. Germano Amaral Monerat  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

p/



---

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro  
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

## AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus por me manter motivado a buscar novos conhecimentos e a estar preparado para as oportunidades.
- Aos meus pais: Symone de Brito Lima Canedo e Dilson de Jesus Canedo que a todo momento, e de diversas formas, me sustentaram, apoiaram e aconselharam a minha caminhada acadêmica.
- Ao meu querido avô, Eloy Lima, pelas experiências adquiridas que foram fundamentais para eu chegar até aqui.
- À minha namorada, Emmanuelle de Oliveira Santos, pelo apoio e por estar presente compartilhando todos os momentos. Contribuindo assim para a construção da nossa história.
- Ao professor Dr. Gil de Oliveira Neto, por acreditar e investir em mim. Agradeço pelos ensinamentos adquiridos ao longo desse tempo, pelo exemplo de profissional a ser seguido e pela amizade construída.
- Ao professor Me. Jorge Luiz Gomes Dias, pelo aprendizado obtido durante todo curso de graduação, por ter me incentivado e ter acreditado onde eu poderia chegar. Agradeço pela nossa amizade e pelo tempo de convivência.
- Ao professor Me. Fabiano Pereira de Oliveira, pelo companheirismo, pela amizade, pelos ensinamentos e por suas orientações durante o curso de graduação.
- Ao professor Dr. Sergio Eduardo de Carvalho Eyer Joras, por ter me apresentado e me iniciado nessa incrível área da física que é a cosmologia.
- À Universidade Federal de Juiz de Fora, ao Programa de Pós-Graduação em Física e ao órgão financiador CAPES pelo investimento confiado a mim.

“O que as suas mãos tiverem que fazer, que o façam com toda a sua força, pois na sepultura, para onde você vai, não há atividade nem planejamento, não há conhecimento nem sabedoria.”

*Eclesiastes 9:10 NVI*

## RESUMO

Nesta dissertação estudamos a dinâmica de um universo descrito por um modelo cosmológico do tipo Kantowski-Sachs onde o conteúdo material são os fluidos de poeira, radiação e fantasma. Este último representando a energia escura. O estudo foi feito, inicialmente, considerando modelos para cada fluido, separadamente. Posteriormente, consideramos um modelo com todos os fluidos juntos. Os resultados obtidos dos estudos com os fluidos de poeira e radiação mostram que o universo não é expansivo sob a ação desses fluidos. Já para o fluido fantasma temos que os fatores de escala,  $a(t)$  e  $b(t)$ , vão para valores infinitos em um tempo finito, resultando na singularidade do tipo *Big Rip*. Devido ao fluido fantasma dominar sobre os fluidos de radiação e poeira, no modelo em que estão presentes os três fluidos, chamado fluido completo, obtivemos a expansão do universo com os fatores de escala indo para a singularidade do tipo *Big Rip*. Sendo homogênea e anisotrópica, a métrica de Kantowski-Sachs nos permitiu estudar a anisotropia do modelo através do parâmetro de anisotropia de expansão ( $\Delta$ ). Mediante a análise dos diversos valores das condições iniciais e parâmetros do modelo, concluímos que a medida em que o tempo tende para a singularidade o modelo se torna isotrópico. Por fim, inspirado na parametrização de Misner, reescrevemos a métrica do modelo em termos de um fator de escala  $a(t)$  e uma outra função  $\beta(t)$ , a qual descreve, exclusivamente, a anisotropia do modelo. Através do estudo desse modelo cosmológico, com essa nova parametrização e o fluido completo, concluímos que o fator de escala  $a(t)$  tende a singularidade do tipo *Big Rip* e a função  $\beta(t)$  tende a uma constante, quando o tempo tende ao instante da singularidade. Esse comportamento confirma a isotropização do modelo.

Palavras-chave: Métrica do tipo Kantowski-Sachs. Modelo cosmológico anisotrópico. Fluido fantasma. Parâmetro de anisotropia. Parametrização de Misner.

## ABSTRACT

In this dissertation we study the dynamics of a Universe described by a cosmological model of the Kantowski-Sachs type where the material content is the fluids of dust, radiation and phantom. The latter representing dark energy. The study was done separately for each fluid and then for all of them together. The results obtained from the studies with dust and radiation fluids show that the universe is not expansive due to the presence of these fluids. For the phantom fluid we have that the scale factors,  $a(t)$  and  $b(t)$ , go to infinite values in a finite time, resulting in the *Big Rip* type of singularity. Due to the domination of the phantom fluid over the radiation and dust fluids, in the model with all the three fluids, called complete fluid, we observed an expansion of the universe with the scale factors going to the *Big Rip* singularity. Being homogeneous and anisotropic, the Kantowski-Sachs metric allowed us to study the model's anisotropy through the expansion anisotropy parameter ( $\Delta$ ). Through the analysis for various values of the initial conditions and model parameters, we concluded that by the time the universe tends to the singularity the model becomes isotropic. Finally, inspired by the Misner's parameterization, we rewrote the metric in terms of a scale factor  $a(t)$  and another function  $\beta(t)$ , which describes the anisotropy. Through the study of this cosmological model with that new parameterization and the complete fluid, we concluded that the scale factor  $a(t)$  tends to the *Big Rip* singularity and the function  $\beta(t)$  tends to a constant, when the time tends to the singularity instant. This behavior confirms the isotropization of the model.

Key-words: Kantowski-Sachs metric. Anisotropic cosmological model. Phantom fluid. Anisotropy parameter. Misner's Parametrization.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r=1$ , $\dot{b}_0=0$ e $a_0 = b_0 = 1$ . . .	35
Figura 2 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r=20$ , $\dot{b}_0=3.472135954$ e $a_0 = b_0 = 1$ . . . . .	35
Figura 3 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r=50$ , $\dot{b}_0=6.071067810$ e $a_0 = b_0 = 1$ . . . . .	35
Figura 4 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 6.071067810$ e $a_0 = b_0 = 1$ . . . . .	36
Figura 5 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r = 50$ , $\dot{a}_0 = 50$ , $\dot{b}_0 = 0.48762225$ e $a_0 = b_0 = 1$ . . . . .	36
Figura 6 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r = 50$ , $\dot{a}_0 = 100$ , $\dot{b}_0 = 0.2447006$ e $a_0 = b_0 = 1$ . . . . .	37
Figura 7 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r = 4$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 1$ e $a_0 = b_0 = 1$ . . . . .	38
Figura 8 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r = 2601$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 50$ e $a_0 = b_0 = 1$ . . . . .	38
Figura 9 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r = 10201$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 100$ e $a_0 = b_0 = 1$ . . . . .	38
Figura 10 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 6.071067810$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	40
Figura 11 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 1.053600632$ , $a_0 = 10$ e $b_0 = 1$ . . . . .	40
Figura 12 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 0.1954564259$ , $a_0 = 18$ e $b_0 = 1$ . . . . .	40
Figura 13 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 6.071067810$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	41
Figura 14 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 0.17360277$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 18$ . . . . .	41
Figura 15 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_r = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 0.02683310$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 50$ . . . . .	42
Figura 16 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 0$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	44
Figura 17 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 20$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 3.472135954$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	44
Figura 18 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 6.071067810$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	44
Figura 19 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 6.071067810$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	46

Figura 20 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 50$ , $\dot{a}_0 = 50$ , $\dot{b}_0 = 0.48762225$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	46
Figura 21 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 50$ , $\dot{a}_0 = 100$ , $\dot{b}_0 = 0.2447006$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	46
Figura 22 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 4$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 1$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	47
Figura 23 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 2601$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 50$ , $a_0$ $= 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	47
Figura 24 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 10201$ , $\dot{a}_0 = 100$ , $\dot{b}_0 = 100$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	48
Figura 25 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 50$ , $\dot{a}_0 = 6.071067810$ , $\dot{b}_0$ $= 1$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	49
Figura 26 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 1.902498439$ , $a_0 = 10$ e $b_0 = 1$ . . . . .	49
Figura 27 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 1.278934683$ , $a_0 = 18$ e $b_0 = 1$ . . . . .	50
Figura 28 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 6.071067810$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	51
Figura 29 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 1.31320792$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 18$ . . . . .	51
Figura 30 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $C_p = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 0.48762225$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 50$ . . . . .	52
Figura 31 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 =$ $6.071067810$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	54
Figura 32 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -10$ , $C_f = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0$ $= 6.071067810$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	54
Figura 33 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -20$ , $C_f = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0$ $= 6.071067810$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	54
Figura 34 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 2$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 =$ $0.414213562$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	56
Figura 35 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 =$ $6.071067810$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	56
Figura 36 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 100$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 =$ $9.0$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	56
Figura 37 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 25$ , $\dot{a}_0 = 10$ , $\dot{b}_0 =$ $1.13552873$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	58
Figura 38 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 25$ , $\dot{a}_0 = 50$ , $\dot{b}_0 =$ $0.23942674$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	58

Figura 39 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 25$ , $\dot{a}_0 = 100$ , $\dot{b}_0 = 0.1199281$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	58
Figura 40 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 9$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 2$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	60
Figura 41 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 2601$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 50$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	60
Figura 42 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 10201$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 100$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	60
Figura 43 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 5$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 1.236067977$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	62
Figura 44 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 5$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 15.75974651$ , $a_0 = 50$ e $b_0 = 1$ . . . . .	62
Figura 45 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 5$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 22.32831014$ , $a_0 = 100$ e $b_0 = 1$ . . . . .	62
Figura 46 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 20$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 3.472135954$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	64
Figura 47 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 20$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 11130.45165$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 50$ . . . . .	64
Figura 48 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_f = 20$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 44621.47134$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 100$ . . . . .	64
Figura 49 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 0.732050808$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	69
Figura 50 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -10$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 0.73205080$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	69
Figura 51 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -20$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 0.73205080$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	69
Figura 52 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 2$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 1$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	70
Figura 53 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 50$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 6.21110255$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	70
Figura 54 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 100$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 9.099504938$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	71
Figura 55 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 2$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 1$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	72
Figura 56 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 50$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 6.211102551$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	72
Figura 57 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 100$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 9.099504938$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	73

Figura 58	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 2$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 1$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	74
Figura 59	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 50$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 6.211102551$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	74
Figura 60	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 100$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 9.099504938$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	75
Figura 61	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 50$ , $C_p = 50$ , $C_f = 50$ , $\dot{a}_0 = 10$ , $\dot{b}_0 = 5.779733838$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	76
Figura 62	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 50$ , $C_p = 50$ , $C_f = 50$ , $\dot{a}_0 = 50$ , $\dot{b}_0 = 1.468436929$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	76
Figura 63	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 50$ , $C_p = 50$ , $C_f = 50$ , $\dot{a}_0 = 100$ , $\dot{b}_0 = 0.742245359$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	77
Figura 64	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 2599$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 50$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	78
Figura 65	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 2599$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 50$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	78
Figura 66	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 2599$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 50$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	79
Figura 67	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 0.965213385$ , $a_0 = 2$ e $b_0 = 1$ . . . . .	81
Figura 68	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 6.981844674$ , $a_0 = 50$ e $b_0 = 1$ . . . . .	81
Figura 69	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 9.940490160$ , $a_0 = 100$ e $b_0 = 1$ . . . . .	81
Figura 70	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 2.542021634$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 2$ . . . . .	83
Figura 71	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 2450.499964743$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 50$ . . . . .	83
Figura 72	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 9900.499989821$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 100$ . . . . .	83
Figura 73	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 4.529197810$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	86
Figura 74	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2.4$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 4.221872143$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	86
Figura 75	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -3$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 3.455540908$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	86
Figura 76	– Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 4.529197810$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	88

Figura 77 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $b$ para $w = -2$ , $C_r = 1.8$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{b}_0 = 4.180345566$ , $a_0 = 1$ e $b_0 = 1$ . . . . .	88
Figura 78 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 2.6$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 3.763794774$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	88
Figura 79 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 4.529197810$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	90
Figura 80 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1.8$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 4.110910575$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	90
Figura 81 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 2.6$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 3.585889449$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	90
Figura 82 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 4.529197810$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	91
Figura 83 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1.4$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 3.938785066$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	91
Figura 84 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1.8$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 3.058741470$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	92
Figura 85 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1.4$ , $C_p = 1.4$ , $C_f = 1.4$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 3.402487464$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	93
Figura 86 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1.4$ , $C_p = 1.4$ , $C_f = 1.4$ , $\dot{a}_0 = 50$ , $\dot{\beta}_0 = 299.964914400$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	93
Figura 87 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1.4$ , $C_p = 1.4$ , $C_f = 1.4$ , $\dot{a}_0 = 100$ , $\dot{\beta}_0 = 599.982458300$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	93
Figura 88 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 4.114836518$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 2$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	95
Figura 89 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 3.636652189$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 2$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	95
Figura 90 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1.969970133$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 2$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	95
Figura 91 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 4.529197810$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	97
Figura 92 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 3.378955276$ , $a_0 = 1.1$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	97
Figura 93 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 2.380671575$ , $a_0 = 1.15$ e $\beta_0 = 1$ . . . . .	97
Figura 94 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 4.317773269$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1.4$ . . . . .	98
Figura 95 – Evolução temporal dos fatores de escala $a$ e $\beta$ para $w = -2$ , $C_r = 1$ , $C_p = 1$ , $C_f = 1$ , $\dot{a}_0 = 1$ , $\dot{\beta}_0 = 4.175199153$ , $a_0 = 1$ e $\beta_0 = 1.6$ . . . . .	98

Figura 96 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 3.997930835$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1.8$ . . . . . 99

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Variação do parâmetro $C_r$ para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de radiação. . . . .	35
Tabela 2 – Variação da condição inicial $\dot{a}_0$ , com $C_r = 50$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de radiação. . . . .	37
Tabela 3 – Variação da condição inicial $\dot{b}_0$ para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de radiação. . . . .	39
Tabela 4 – Variação da condição inicial $a_0$ , com $C_r = 50$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de Radiação. . . . .	40
Tabela 5 – Variação da condição inicial $b_0$ , com $C_r = 50$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de radiação. . . . .	42
Tabela 6 – Variação do parâmetro $C_p$ para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de poeira. . . . .	45
Tabela 7 – Variação da condição inicial $\dot{a}_0$ , com $C_p = 50$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de poeira. . . . .	46
Tabela 8 – Variação da condição inicial $\dot{b}_0$ para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de poeira. . . . .	48
Tabela 9 – Variação da condição inicial $a_0$ , com $C_p = 50$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de Poeira. . . . .	50
Tabela 10 – Variação da condição inicial $b_0$ , com $C_p = 50$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de poeira. . . . .	52
Tabela 11 – Variação do parâmetro $C_f$ , para a constante $w = -2$ , no modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma. . . . .	54
Tabela 12 – Variação do parâmetro $C_f$ para a constante $w = -10$ no modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma. . . . .	55
Tabela 13 – Variação do parâmetro $C_f$ para a constante $w = -20$ no modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma. . . . .	55
Tabela 14 – Variação do parâmetro $C_f$ , com $w = -2$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma. . . . .	57
Tabela 15 – Variação da condição inicial $\dot{a}_0$ , $C_f = 25$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma. . . . .	59
Tabela 16 – Variação da condição inicial $\dot{b}_0$ para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma. . . . .	61
Tabela 17 – Variação da condição inicial $a_0$ , com $C_f = 5$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma. . . . .	63
Tabela 18 – Variação da condição inicial $b_0$ , com $C_f = 20$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma. . . . .	65
Tabela 19 – Variação do parâmetro $w$ , com $\Delta$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo. . . . .	69

Tabela 20 – Variação do parâmetro $C_r$ , com $\Delta$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo. . . . .	71
Tabela 21 – Variação do parâmetro $C_p$ , com $\Delta$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo. . . . .	73
Tabela 22 – Variação do parâmetro $C_f$ , com $\Delta$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo. . . . .	75
Tabela 23 – Variação da condição inicial $\dot{a}_0$ , com $C_r = C_p = C_f = 50$ e $\Delta$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo. . . . .	77
Tabela 24 – Variação da condição inicial $\dot{b}_0$ , com $\Delta$ e obtendo $C_r$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo. . . . .	79
Tabela 25 – Variação da condição inicial $\dot{b}_0$ , com $\Delta$ e obtendo $C_p$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo. . . . .	79
Tabela 26 – Variação da condição inicial $\dot{b}_0$ , com $\Delta$ e obtendo $C_f$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo. . . . .	80
Tabela 27 – Variação da condição inicial $a_0$ , com $C_r = C_p = C_f = 1$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo. . . . .	82
Tabela 28 – Variação da condição inicial $b_0$ , com $C_r = C_p = C_f = 1$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo. . . . .	84
Tabela 29 – Variação do parâmetro $w$ para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo. . . . .	87
Tabela 30 – Variação do parâmetro $C_r$ para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo. . . . .	89
Tabela 31 – Variação do parâmetro $C_p$ para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo. . . . .	90
Tabela 32 – Variação do parâmetro $C_f$ para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo. . . . .	92
Tabela 33 – Variação da condição inicial $\dot{a}_0$ , com $C_r = C_p = C_f = 1.4$ , para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo. . . . .	94
Tabela 34 – Variação da condição inicial $\dot{\beta}_0$ , obtendo $C_r$ , para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo e $C_p = C_f = 1$ . . . . .	95
Tabela 35 – Variação da condição inicial $\dot{\beta}_0$ , obtendo $C_p$ , para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo e $C_r = C_f = 1$ . . . . .	96
Tabela 36 – Variação da condição inicial $\dot{\beta}_0$ , obtendo $C_f$ , para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo e $C_r = C_p = 1$ . . . . .	96
Tabela 37 – Variação da condição inicial $a_0$ , com $C_r = C_p = C_f = 1$ , para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo. . . . .	97
Tabela 38 – Variação da condição inicial $\beta_0$ , com $C_r = C_p = C_f = 1$ , para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo. . . . .	99



### Notações e Convenções:

No decorrer do presente texto será convencionado:

A derivada temporal de uma função  $g(t)$  será representada por  $\dot{g}(t)$ .

Dois índices repetidos, sendo um subscrito e o outro sobrescrito, denotam soma.

Índices gregos variam de 0 a 3.

Índices latinos variam de 1 a 3.

O índice 0 representa no geral a coordenada temporal.

A métrica possui assinatura  $(-, +, +, +)$ .

O determinante da métrica é denotado por  $g$ .

A derivada parcial de um tensor  $T$  em relação a coordenada  $x^\beta$  é denotada por:

$$\frac{\partial T}{\partial x^\beta} = \partial_\beta T = T_{,\beta}.$$

A derivada covariante de um tensor  $T$  em relação a coordenada  $x^\beta$  é denotada por:

$$T_{;\beta}.$$

As constantes  $c$  e  $8\pi G$  são iguais a 1.

## SUMÁRIO

	<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES . . . . .</b>	<b>7</b>
	<b>LISTA DE TABELAS . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>19</b>
1.1	MOTIVAÇÃO . . . . .	19
1.2	ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS . . . . .	20
<b>2</b>	<b>ELEMENTOS DA RELATIVIDADE GERAL . . . . .</b>	<b>22</b>
2.1	OS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL . . . . .	22
2.2	TRANSPORTE PARALELO E GEODÉSICAS . . . . .	23
2.3	TENSOR DE CURVATURA . . . . .	23
2.4	TENSOR DE EINSTEIN . . . . .	24
2.5	EQUAÇÃO DE EINSTEIN . . . . .	24
<b>3</b>	<b>TÓPICOS DA COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA . . . . .</b>	<b>26</b>
3.1	O UNIVERSO DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER . . . . .	26
3.2	O MODELO PADRÃO . . . . .	27
<b>4</b>	<b>MÉTRICA DO TIPO KANTOWSKI-SACHS . . . . .</b>	<b>29</b>
4.1	EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN . . . . .	29
4.1.1	Fluidos de Radiação, Poeira e Fantasma . . . . .	30
4.1.2	Fluido Completo . . . . .	31
<b>5</b>	<b>MÉTODO DE RESOLUÇÃO E RESULTADOS PRELIMINARES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN . . . . .</b>	<b>33</b>
5.1	MODELO COSMOLÓGICO DO TIPO KS COM FLUIDO DE RADIAÇÃO . . . . .	33
5.1.1	Variação do Parâmetro $C_r$ . . . . .	34
5.1.2	Variação da Condição Inicial $\dot{a}_0$ . . . . .	36
5.1.3	Variação da Condição Inicial $\dot{b}_0$ . . . . .	37
5.1.4	Variação da Condição Inicial $a_0$ . . . . .	39
5.1.5	Variação da Condição Inicial $b_0$ . . . . .	41
5.2	MODELO COSMOLÓGICO DO TIPO KS COM FLUIDO DE POEIRA . . . . .	42
5.2.1	Variação do Parâmetro $C_p$ . . . . .	43
5.2.2	Variação da Condição Inicial $\dot{a}_0$ . . . . .	45
5.2.3	Variação da Condição Inicial $\dot{b}_0$ . . . . .	47

5.2.4	Variação da Condição Inicial $a_0$ . . . . .	48
5.2.5	Variação da Condição Inicial $b_0$ . . . . .	50
5.3	MODELO COSMOLÓGICO DO TIPO KS COM FLUIDO FANTASMA	52
5.3.1	Variação do Parâmetro $w$ . . . . .	53
5.3.2	Variação do Parâmetro $C_f$ . . . . .	55
5.3.3	Variação da Condição Inicial $\dot{a}_0$ . . . . .	57
5.3.4	Variação da Condição Inicial $\dot{b}_0$ . . . . .	59
5.3.5	Variação da Condição Inicial $a_0$ . . . . .	61
5.3.6	Variação da Condição Inicial $b_0$ . . . . .	63
<b>6</b>	<b>MODELO COSMOLÓGICO DO TIPO KS COM FLUIDO COMPLETO: FLUIDO DE RADIAÇÃO, POEIRA E FAN- TASMA. . . . .</b>	<b>66</b>
6.1	PARÂMETRO DE ANISOTROPIA . . . . .	67
6.2	RESULTADOS PARA O FLUIDO COMPLETO . . . . .	68
6.2.1	Variação do Parâmetro $w$ . . . . .	68
6.2.2	Variação do Parâmetro $C_r$ . . . . .	70
6.2.3	Variação do Parâmetro $C_p$ . . . . .	71
6.2.4	Variação do Parâmetro $C_f$ . . . . .	73
6.2.5	Variação da Condição Inicial $\dot{a}_0$ . . . . .	75
6.2.6	Variação da Condição Inicial $\dot{b}_0$ . . . . .	77
6.2.7	Variação da Condição Inicial $a_0$ . . . . .	80
6.2.8	Variação da Condição Inicial $b_0$ . . . . .	82
6.3	PARAMETRIZAÇÃO DE MISNER . . . . .	84
6.3.1	<b>Modelo Cosmológico do Tipo KS com Parametrização e Fluido Completo . . . . .</b>	<b>84</b>
6.3.1.1	<i>Variação do Parâmetro <math>w</math> . . . . .</i>	<i>85</i>
6.3.1.2	<i>Variação do Parâmetro <math>C_r</math> . . . . .</i>	<i>87</i>
6.3.1.3	<i>Variação do Parâmetro <math>C_p</math> . . . . .</i>	<i>89</i>
6.3.1.4	<i>Variação do Parâmetro <math>C_f</math> . . . . .</i>	<i>91</i>
6.3.1.5	<i>Variação da Condição Inicial <math>\dot{a}_0</math> . . . . .</i>	<i>92</i>
6.3.1.6	<i>Variação da Condição Inicial <math>\dot{\beta}_0</math> . . . . .</i>	<i>94</i>
6.3.1.7	<i>Variação da Condição Inicial <math>a_0</math> . . . . .</i>	<i>96</i>
6.3.1.8	<i>Variação da Condição Inicial <math>\beta_0</math> . . . . .</i>	<i>98</i>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>100</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>101</b>

<b>A</b>	<b>Cálculo das equações de campo de Einstein para o modelo com métrica do tipo Kantowski-Sachs . . . . .</b>	<b>102</b>
A.1	Componentes da métrica . . . . .	102
A.2	Símbolo de Christoffel . . . . .	102
A.3	Tensor de Ricci . . . . .	103
A.4	Escalar de Ricci . . . . .	104
A.5	Tensor momento energia . . . . .	104
A.6	Conservação do tensor momento energia . . . . .	105
A.7	Equações de Einstein . . . . .	106
<b>B</b>	<b>Cálculo das equações de campo de Einstein para o modelo com métrica do tipo Kantowski-Sachs com uma nova parametrização</b>	<b>108</b>
B.1	Componentes da métrica . . . . .	108
B.2	Símbolo de Christoffel . . . . .	108
B.3	Tensor de Ricci . . . . .	109
B.4	Escalar de Ricci . . . . .	109
B.5	Tensor momento energia . . . . .	109
B.6	Conservação do tensor momento energia . . . . .	110
B.7	Equações de Einstein . . . . .	110

# 1 INTRODUÇÃO

Para uma melhor compreensão desta dissertação, vamos neste capítulo apresentar a razão para este trabalho, o porque de propor e estudar o modelo cosmológico do tipo Kantowski-Sachs com fluidos de radiação, poeira e fantasma. Em seguida, mostraremos como as ideias serão estruturadas por capítulos nesta dissertação.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

O Universo primordial pode ter tido diferentes propriedades das de hoje em dia devido as altas energias presentes naquela fase. Uma das possíveis diferentes propriedades é a presença de anisotropia no setor espacial. Com isso o Universo pode ter se expandido com velocidades diferentes em diferentes direções. No Universo atual a anisotropia é observada, por exemplo, ao observarmos as galáxias no céu. Em pequenas escalas de distâncias, as galáxias não são uniformemente distribuídas em diferentes direções. Aqui, nesse contexto, larga escala é da ordem de bilhões de anos-luz [1]. Existe na literatura diversos modelos para tentar representar o Universo [1], [3], porém o que é mais aceito e adotado é o modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), sendo baseado no princípio cosmológico e no postulado de Weyl.

O modelo padrão (FRW) além de ter características como homogeneidade e isotropia, relacionadas ao setor espacial do modelo, é constituído de um ou mais fluidos perfeitos, no seu setor de matéria. Para diferentes eras do Universo esses fluidos tem propriedades dominantes como: a radiação no início, depois a poeira e por último, e atualmente dominante para o modelo, a constante cosmológica representando a energia escura. O fluido de radiação é composto por partículas que se movem a uma velocidade muito alta, igual a velocidade da luz, no caso da radiação eletromagnética, ou próximo desta, como os neutrinos por exemplo. Essa velocidade alta das partículas resulta em uma energia cinética alta, proporcionando assim uma força resultante chamada de pressão de radiação. O fluido de poeira é caracterizado por ser composto por matéria com massa não relativística que exerce uma pressão aproximadamente nula. Já o fluido de constante cosmológica é representado por ter uma pressão negativa, possibilitando a expansão do universo pois o trabalho é realizado pela constante cosmológica.

Motivado por tentar compreender o Universo antigo e baseando-se na suposição que o mesmo pode não ter sido homogêneo e isotrópico [3], será proposto um modelo cosmológico com a quebra do princípio cosmológico na parte espacial. Ele terá uma métrica do tipo Kantowski-Sachs (KS). Esse modelo homogêneo e anisotrópico, terá como conteúdo material, a presença de fluidos de poeira, de radiação e do fluido fantasma. O fluido fantasma recebe esse nome por ter sua origem desconhecida e por ter energia positiva e pressão mais negativa que o fluido de constante cosmológica, proporcionando assim uma

expansão mais acelerada do Universo [7]. A métrica KS possui dois fatores de escala na parte espacial, sendo  $a(t)$  para a parte radial e  $b(t)$  para a angular. Essa métrica foi escolhida devido a sua simplicidade com relação a outras métricas anisotrópicas, como as do tipo Bianchi [1]. É importante ressaltar, também, que a métrica KS pode representar o interior de um buraco negro [8].

A construção e a análise do modelo, com métrica KS, será feita de modo que ele contenha, inicialmente, somente o fluido de radiação, depois somente o fluido de poeira e depois somente o fluido fantasma. Finalmente, consideraremos o caso em que o conteúdo material será constituído dos fluidos de radiação, poeira e fantasma, todos juntos. Esse conteúdo material do Universo, com os três tipos de fluidos, denominamos de fluido completo.

Como estamos interessados em estudar o Universo antigo, nessa dissertação, consideramos que o Universo inicia em uma singularidade do tipo *Big Bang* e posteriormente expande. Levando em conta que os dados observacionais mostram que o Universo está em uma fase de expansão acelerada [10], consideramos que o Universo vai terminar em uma singularidade do tipo *Big Rip*. Ou seja, os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  tendem para valores infinitos em tempos finitos. Outro objetivo da presente dissertação é estudar a isotropização do Universo na presença do fluido completo, com o passar do tempo. Ou seja, com o passar do tempo o Universo inicial anisotrópico (KS) se transforma em um Universo isotrópico (FRW). Usaremos para esse estudo o parâmetro de anisotropia e a parametrização de Misner [9]. Para concluir, será discutido como os resultados podem explicar a expansão acelerada do universo.

## 1.2 ESTRUTURA DOS CAPÍTULOS

No primeiro capítulo, são apresentados alguns modelos cosmológicos que tentam representar o Universo e algumas utilizações para a métrica do tipo KS. Por fim é introduzido a motivação e a construção deste trabalho.

No segundo capítulo, será apresentado uma revisão sobre a teoria da relatividade geral com alguns elementos, características e resultados que serão necessários para a compreensão deste trabalho.

No terceiro capítulo, serão apresentados alguns tópicos da teoria da cosmologia relativística buscando montar e compreender o modelo cosmológico que descreve o Universo atual.

No quarto capítulo, será apresentado o modelo homogêneo e anisotrópico com métrica do tipo Kantowski-Sachs que será a base dessa dissertação.

No quinto capítulo, será apresentado o método de resolução das equações de Einstein do modelo com métrica do tipo Kantowski-Sachs e os resultados para os modelos com o

fluido de radiação, de poeira e fluido fantasma em tópicos separados. Esses resultados serão importantes para entender a discussão do próximo capítulo.

No sexto capítulo, serão apresentados os resultados do modelo cosmológico com métrica do tipo Kantowski-Sachs na presença do fluido completo, sendo este formado pelos fluidos de radiação, poeira e fantasma. Serão apresentados também dois estudos sobre a isotropização do modelo: o parâmetro de anisotropia de expansão e a parametrização de Misner. Tais resultados serão discutidos com base na possível explicação da expansão atual do Universo.

Para concluir a dissertação serão destacados os principais resultados e em seguida, serão discutidas as perspectivas e as possíveis contribuições do presente trabalho no estudo da cosmologia.

## 2 ELEMENTOS DA RELATIVIDADE GERAL

O Princípio de Equivalência, desenvolvido por Albert Einstein em 1915 [2], diz que o movimento de uma partícula em um campo gravitacional independe da sua massa ou características de sua composição; e que podemos associar movimentos não inerciais à campos gravitacionais, devido a uma equivalência local [3]. Com esse princípio, Albert Einstein desenvolveu a teoria da relatividade geral onde essa teoria é uma generalização da teoria da relatividade especial na presença de referenciais não inerciais ou campos gravitacionais. Agora, o conceito newtoniano da gravidade decorrente da interação entre corpos massivos passa a ser interpretado como uma manifestação da curvatura no espaço-tempo. No decorrer do capítulo, serão apresentados alguns resultados, características e elementos importantes devido à presença da geometria na teoria.

### 2.1 OS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

Ao derivar um vetor qualquer, no espaço plano, escrito na forma de  $\vec{V} = V^\alpha \vec{a}_\alpha$ , em que  $V^\alpha$  são suas componentes e  $\vec{a}_\alpha$  seus vetores de base, os quais em geral não são constantes, vemos que o resultado é mais do que simplesmente a derivada de suas componentes. Obtém-se um termo que representa a derivada dos vetores de base,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{a}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{a}_\alpha}{\partial x^\beta}.$$

Para facilitar as contas o último termo, que também é um vetor, é reescrito como uma combinação linear dos vetores de base e, para isso, é introduzido o símbolo  $\Gamma_{\alpha\beta}^\eta$  chamado de símbolos de Christoffel:

$$\frac{\partial \vec{a}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\eta \vec{a}_\eta. \quad (2.1)$$

Onde o índice  $\alpha$  dá o vetor de base sendo diferenciado,  $\beta$  dá a coordenada em relação a qual o vetor de base está sendo diferenciado e  $\eta$  é a componente do vetor resultante da derivação. Os símbolos de Christoffel também aparecem na definição da derivada em espaço curvo. Na derivada covariante de vetores, da seguinte forma: (i) para vetores covariantes,

$$V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} - V_\eta \Gamma_{\alpha\beta}^\eta; \quad (2.2)$$

(ii) contravariantes,

$$V^\alpha_{;\beta} = V^\alpha_{,\beta} + V^\eta \Gamma_{\eta\beta}^\alpha; \quad (2.3)$$

e (iii) para um tensor misto  $T^\mu_{\nu}$ ,

$$T^\mu_{\nu;\beta} = T^\mu_{\nu,\beta} + T^\theta_{\nu} \Gamma_{\theta\beta}^\mu - T^\mu_{\theta} \Gamma_{\nu\beta}^\theta. \quad (2.4)$$

Onde essa última equação possui um termo a mais com símbolo de Christoffel, comparado as equações (2.3) e (2.2), pois é um tensor de rank 2. Os símbolos de Christoffel são de



muita importância pois seu uso permite expressar as derivadas em somente um sistema de coordenadas. Na ausência de torção no espaço tempo da relatividade geral, conseguimos relacioná-lo com a métrica na seguinte forma [4]:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\beta} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho} (g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\beta\mu,\alpha}). \quad (2.5)$$

Por fim, na ausência de torção, os símbolos de Christoffel tem a seguinte simetria:  $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$  [3].

## 2.2 TRANSPORTE PARALELO E GEODÉSICAS

A exigência para que ocorra um transporte paralelo diz que um vetor qualquer  $\vec{V}$  precisa estar definido em todos os pontos de uma curva. Além disso, é necessário que os vetores infinitesimalmente próximo ao longo dessa curva precisam ser paralelos e terem os mesmos módulos. Logo, podemos dizer que  $\vec{V}$  foi transportado paralelamente. Em um espaço-tempo curvo é impossível definir campos vetoriais globalmente paralelos, mas pode-se definir paralelismo local. Matematicamente, se  $\vec{U} = d\vec{x}/d\lambda$  é um vetor tangente a uma curva  $C$ , cujo  $\lambda$  é o parâmetro que descreve a curva, temos então que essa exigência para ocorrer o transporte paralelo é caracterizado por:

$$\frac{dV^{\alpha}}{d\lambda} = 0,$$

para que  $\vec{V}$  seja constante ao longo de uma curva  $C$ . Reescrevendo a equação acima em termos da tangente  $\vec{U}$ , temos a equação que representa o transporte paralelo de  $\vec{V}$  ao longo de uma curva  $C$ , resultando em:

$$\frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = V^{\alpha}_{;\beta} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = V^{\alpha}_{;\beta} U^{\beta} = 0. \quad (2.6)$$

Lembrando que a curva  $C$  está definida no espaço curvo, por isso a derivada covariante.

Já as geodésicas são curvas no espaço curvo, análogas as retas no espaço Euclidiano, ou seja, são curvas que transportam paralelamente seus próprios vetores tangentes. As geodésicas possuem como equação,

$$\frac{d^2 x^{\nu}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\nu}_{\mu\sigma} \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0, \quad (2.7)$$

que podem ser obtidas através da equação do transporte paralelo (2.6) [5].

## 2.3 TENSOR DE CURVATURA

De posse do transporte paralelo podemos definir o tensor de curvatura de Riemann, pois este é proporcional a variação de um vetor  $V^{\mu}$  após o transporte paralelo ao longo de um circuito fechado. Logo [5],

$$\delta V^{\mu} = \delta x_0^{\nu} \delta x_0^{\beta} [\Gamma^{\mu}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha} \Gamma^{\rho}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\rho\beta} \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}] V^{\alpha}. \quad (2.8)$$

Onde  $\delta x_0^\nu$  e  $\delta x_0^\beta$  representam a variação infinitesimal de coordenadas iniciais. Pela distribuição de índices, esse termo entre colchetes que está sendo contraído com o termo  $\delta x_0^\nu \delta x_0^\beta V^\alpha$  é um tensor misto de rank 4 representado por:

$$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\mu{}_{\rho\alpha} \Gamma^\rho{}_{\nu\beta} - \Gamma^\mu{}_{\rho\beta} \Gamma^\rho{}_{\nu\alpha}. \quad (2.9)$$

$R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$  na equação (2.9) é o tensor de curvatura de Riemann que nos dá a medida da curvatura intrínseca de uma dada superfície ou espaço-tempo. Em muitos casos utiliza-se sua forma completamente covariante,

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} [\Gamma^\lambda{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\lambda{}_{\rho\alpha} \Gamma^\rho{}_{\nu\beta} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\beta} \Gamma^\rho{}_{\nu\alpha}]. \quad (2.10)$$

Sendo  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  anti-simétrico no primeiro par e no segundo par de índices e simétrico na troca de dois pares de índice. A contração do primeiro índice com o terceiro, no tensor de Riemann (2.10), gera o Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\alpha} = g^{\nu\beta} R_{\nu\mu\beta\alpha} = R_{\alpha\mu}. \quad (2.11)$$

Fazendo uma contração dos dois índices no tensor de Ricci (2.11) temos o escalar de Ricci, também conhecido como escalar de curvatura,

$$R = g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.12)$$

## 2.4 TENSOR DE EINSTEIN

Para poder falar do tensor de Einstein primeiramente precisamos falar da identidade de Bianchi que é uma combinação linear de primeira derivada covariante do tensor de Riemann [4],

$$R_{\alpha\beta\eta\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\eta;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\eta} = 0. \quad (2.13)$$

Após duas contrações na equação (2.13) e levando em conta que as operações de abaixar e levantar índices comutam com a derivação covariante, podemos definir o tensor de Einstein por,

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R = G^{\beta\alpha}. \quad (2.14)$$

Sendo este simétrico e tendo a divergência nula devido a forma com que foi construído.

## 2.5 EQUAÇÃO DE EINSTEIN

A equação de Einstein pode ser obtida usando o princípio variacional na ação de Einstein-Hilbert ( $\mathcal{S}_G$ ), acrescido de um termo referente a matéria e energia ( $\mathcal{S}_M$ ) [1],

$$\delta(\mathcal{S}_G + \mathcal{S}_M) = 0, \quad (2.15)$$

sendo,

$$\mathcal{S}_G = \frac{c^4}{16\pi G} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.16)$$

e

$$\mathcal{S}_M = \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.17)$$

onde  $\mathcal{L}_M$  é densidade Lagrangiana de matéria e energia e  $g$  é o determinante da métrica. Aqui já estamos usando a constante cosmológica  $\Lambda$  que foi introduzida por Einstein após verificar que suas equações [6] [18], levavam a modelos de Universos dinâmicos e não estáticos, como se acreditava na época.

Ao fazermos a variação indicada na equação (2.15) e utilizando a seguinte definição para o tensor momento-energia ( $T^{\mu\nu}$ ),

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.18)$$

Obtemos a seguinte solução para a equação (2.15) [3],

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional e  $c$  é a velocidade da luz. A equação acima é conhecida como equação de campo de Einstein. Ela pode ser interpretada de forma que o lado esquerdo da equação representa a curvatura do espaço-tempo, enquanto o lado direito representa uma fonte de matéria que está curvando o espaço-tempo.

### 3 TÓPICOS DA COSMOLOGIA RELATIVÍSTICA

Atualmente o modelo cosmológico padrão é baseado em um Universo que apresenta o mesmo aspecto em diferentes pontos, conhecido como princípio cosmológico. Assim, para larga escala, o Universo deve manter suas propriedades de forma que seja homogêneo (não existe pontos privilegiados à outros) e isotrópico (não existe direções privilegiadas à outras, possuindo simetria esférica em relação a seus pontos) [3].

Pensando em como a teoria da relatividade geral podia ser aplicada em um sistema único como o Universo, onde tem-se diferentes observadores em diferentes estados de movimento, H. Weyl introduz um substrato por meio de um postulado [3]. Nele, as galáxias se movem como partículas fundamentais. Assim, esse substrato torna a matéria do Universo equivalente a um fluido perfeito podendo ser representado, de uma forma geral, pelo seguinte tensor momento energia que é homogêneo e isotrópico [1]:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Onde  $U^\mu$  é a quadri-velocidade do fluido em um referencial comóvel,  $\rho$  sua densidade e  $p$  sua pressão. Devido ao princípio cosmológico, a pressão  $p$  e a densidade  $\rho$  devem possuir apenas dependência temporal. Nesse sistema comóvel a única componente não nula da quadri-velocidade é a componente temporal.

#### 3.1 O UNIVERSO DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER

O modelo cosmológico que atualmente descreve o nosso Universo é o de Friedmann-Robertson-Walker (FRW), onde seu elemento de linha é caracterizado por não quebrar o princípio cosmológico. Usando a solução esfericamente simétrica tridimensional (isotropia) [3], podemos escrever o setor espacial dos modelos de FRW como:

$$d\sigma^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (3.2)$$

onde  $\lambda(r)$  é uma função a determinar,  $r$  é o raio da esfera,  $\theta$  e  $\phi$  são ângulos esféricos. A presença da exponencial no primeiro termo da equação (3.2) é para garantir que este seja positivo.

Para determinar o valor de  $\lambda(r)$ , precisamos usar a equação (2.11), a equação (3.2) e o fato de que o modelo de FRW é um modelo que tem uma curvatura constante em sua geometria (homogeneidade). Assim, podemos escrever o tensor de Riemann, devido a essa curvatura constante [3], da seguinte forma:

$$R_{abcd} = k (g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}). \quad (3.3)$$

Usando esse resultado para métrica (3.2), obtemos:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (3.4)$$

onde  $k$  pode assumir valores iguais a:  $-1$  (conhecido como Universo aberto e descrito por uma superfície hiperbólica);  $0$  (conhecido como Universo aberto e descrito por uma superfície plana); ou  $+1$  (conhecido como Universo fechado e descrito por uma superfície esférica). Nesta dissertação, não vamos estudar, em detalhes, as propriedades das geometrias com diferentes curvaturas constantes dos modelos de FRW. O motivo é que o principal objetivo dessa dissertação é estudar um modelo cosmológico anisotrópico com métrica diferente de FRW. Para mais detalhes veja [3].

Para não violar o princípio cosmológico, o elemento de linha (3.4) precisa manter a proporção entre todos os pontos do espaço em uma contração ou expansão. Logo, devemos acrescentar um função dependente do tempo  $a(t)$  denominada fator de escala. Assim, levando em conta a condição de ortogonalidade para  $t$ , podemos escrever o elemento de linha do espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right\}. \quad (3.5)$$

### 3.2 O MODELO PADRÃO

Para descrever o modelo cosmológico padrão é fundamental obtermos as equações de Einstein. Utilizando o princípio cosmológico representado na equação (3.5), o postulado de Weyl representado pela equação (3.1) e a relatividade geral representada pela equação (2.19), temos as seguintes equações não nulas:

$$3 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda = 8\pi\rho \quad (3.6)$$

e

$$\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda = -8\pi p. \quad (3.7)$$

Onde a equação (3.6) representa a componente temporal temporal e (3.7) as componentes espacial espacial (para coordenadas idênticas) das equações de Einstein para a métrica de FRW. A equação (3.6) também é conhecida como equação de Friedmann.

Aplicando a equação de conservação do tensor momento-energia,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (3.8)$$

para o  $T^{\mu\nu}$  (3.1), na métrica (3.5), obtém-se a seguinte equação da conservação de energia [1] :

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0. \quad (3.9)$$

O fluido perfeito obedece a equação de estado dado na seguinte forma:

$$p = w\rho, \quad (3.10)$$

onde  $w$  é uma constante.

O modelo cosmológico padrão é caracterizado por ter uma curvatura nula ( $k = 0$ ) e possuir diferentes épocas, quando um determinado fluido dominou sobre os demais. Na fase inicial, o Universo teve o fluido de radiação ( $w = \frac{1}{3}$ ) dominante. Esse fluido além de ser caracterizado por ter  $p = \frac{1}{3}\rho$ , possui uma interessante relação de sua densidade com o fator de escala  $a(t)$  em uma expansão do Universo. Vamos obter esse resultado [4] substituindo a equação (3.10) na equação (3.9), com ( $w = \frac{1}{3}$ ), e resolvendo para  $\rho$ :

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_r + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\rho_r a^4) &= 0.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Como o produto de  $\rho_r$  com  $a^4$  é constante no tempo para um Universo em expansão, que tenha somente o fluido de radiação, temos que a densidade desse fluido decairá com um fator  $a^4$ , ou seja,  $\rho_r \propto \frac{1}{a^4}$ .

Com o passar do tempo, o fluido de poeira passou a dominar no Universo. Assim, substituindo a equação (3.10) na equação (3.9), com ( $w = 0$ ), e resolvendo para  $\rho$  temos:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_p + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_p &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\rho_p a^3) &= 0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

A equação (3.12) nos informa que a taxa de variação do produto  $\rho_p$  com  $a^3$  é nula. Com isso, um Universo constituído por um fluido de poeira em expansão, tem a densidade do fluido inversamente proporcional ao cubo do fator de escala, ou seja  $\rho_p \propto \frac{1}{a^3}$ , além de ter sua pressão nula.

Finalmente, hoje em dia, o Universo é dominado por um fluido cuja densidade de energia é constante ( $w = -1$ ), podendo ser interpretado como uma constante cosmológica positiva. Essa constante cosmológica positiva é usada para descrever a energia escura, responsável pela expansão acelerada do Universo. Substituindo a equação (3.10) na equação (3.9), com ( $w = -1$ ), e resolvendo para  $\rho$  temos:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_\Lambda &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\rho_\Lambda) &= 0.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Assim, além de ter uma pressão negativa, a equação acima nos diz que a densidade do fluido de constante cosmológica é constante na expansão do Universo que só tenha esse fluido.

Ao resolver o sistema de equações (3.6), (3.9) e (3.10), é possível obter o fator de escala  $a(t)$  em função do tempo  $t$ , e de outros parâmetros do modelo. Isso pode ser feito mesmo em modelos cosmológicos em que o conteúdo material é representado por diferentes tipos de fluidos, ou seja, quando o universo teve a predominância de diferentes fluidos em diferentes épocas. Para mais detalhes veja [3].

## 4 MÉTRICA DO TIPO KANTOWSKI-SACHS

A métrica do tipo Kantowski-Sachs foi introduzida por R. Kantowski e R. K. Sachs [11] em 1965. Ela é baseada na invariância de um modelo espacialmente homogêneo sob a simetria de grupo em 4-dimensões com constante de curvatura positiva ( $k = +1$ ) [8] e  $\Lambda = 0$ . Sua representação padrão é dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dr^2 + b(t)^2 d\theta^2 + b(t)^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.1)$$

Onde  $t$  é a coordenada temporal,  $a(t)$  e  $b(t)$  são fatores de escala,  $r$  é a coordenada radial com  $r \in [0, +\infty)$  e  $\theta$  e  $\phi$  são coordenadas esféricas, sendo seus intervalos de variação iguais a  $[0, \pi]$  e  $[0, 2\pi]$ , respectivamente.

Comparando a métrica do tipo Kantowski-Sachs (4.1) com a métrica de FRW (3.5), vemos que agora temos dois fatores de escala,  $a(t)$  na parte radial e  $b(t)$  na parte angular, ao invés de apenas um na parte espacial. Isso se dá porque a métrica KS quebra o princípio cosmológico de forma que o elemento de linha não precisa manter a proporção entre todos os pontos do espaço em uma contração ou expansão. Essa anisotropia presente na métrica KS permite o estudo de diversos modelos em cosmologia e astrofísica. Desde a evolução temporal do Universo [12, 13, 14] até buracos negros [15, 16] e buracos de minhoca [17].

### 4.1 EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN

Para obter as equações de campo de Einstein referentes a métrica do tipo KS, vamos realizar o processo semelhante com que tratamos a métrica de FRW (3.5).

Partindo da métrica do tipo KS e usando a relatividade geral, podemos achar o tensor de Ricci (2.11) e o escalar de Ricci (2.12). As componentes covariante não nulas do tensor de Ricci para este modelo são:

$$R_{00} = -\frac{1}{a(t)b(t)}[\ddot{a}(t)b(t) + 2\ddot{b}(t)a(t)] \quad (4.2)$$

$$R_{11} = \frac{1}{b(t)}[a(t)\ddot{a}(t)b(t) + 2a(t)\dot{a}(t)\dot{b}(t)] \quad (4.3)$$

$$R_{22} = \frac{1}{a(t)}[b(t)\ddot{b}(t)a(t) + b(t)\dot{b}(t)\dot{a}(t) + \dot{b}(t)^2 a(t) + a(t)] \quad (4.4)$$

$$R_{33} = \frac{1}{a(t)}[b(t)\ddot{b}(t)a(t) \sin^2 \theta + b(t)\dot{b}(t)\dot{a}(t) \sin^2 \theta + \dot{b}(t)^2 a(t) \sin^2 \theta + a(t) \sin^2 \theta]. \quad (4.5)$$

Já o escalar de Ricci (2.12) é dado pela seguinte equação:

$$R = \frac{2}{a(t)b(t)^2}[\ddot{a}(t)b(t)^2 + 2b(t)\dot{b}(t)\dot{a}(t) + a(t) + \dot{b}(t)^2 a(t) + 2b(t)\ddot{b}(t)a(t)]. \quad (4.6)$$

Assim, de posse da métrica do tipo KS (4.1) e com o auxílio da relatividade geral representada pela equação (2.19) e do postulado de Weyl (3.1), obtemos as equações de campo de Einstein para o modelo com métrica do tipo KS [11]. (Para mais detalhes veja o Apêndice A):

$$2\frac{\dot{a}(t)\dot{b}(t)}{a(t)b(t)} + \frac{\dot{b}(t)^2}{b(t)^2} + \frac{1}{b(t)^2} = \rho(t), \quad (4.7)$$

$$2\frac{\ddot{b}(t)}{b(t)} + \frac{\dot{b}(t)^2}{b(t)^2} + \frac{1}{b(t)^2} = -p(t), \quad (4.8)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\ddot{b}(t)}{b(t)} + \frac{\dot{a}(t)\dot{b}(t)}{a(t)b(t)} = -p(t). \quad (4.9)$$

Aplicando a conservação do tensor momento-energia (3.8) para o  $T^{\mu\nu}$  (3.1), na métrica (4.1), obtém-se a seguinte equação de conservação de energia:

$$\dot{\rho}(t) + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\rho(t) + p(t)) + 2\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}(\rho(t) + p(t)) = 0. \quad (4.10)$$

Substituindo a equação de estado (3.10) na equação de conservação de energia (4.10), temos:

$$\dot{\rho}(t) + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\rho(t) + w\rho(t)) + 2\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}(\rho(t) + w\rho(t)) = 0. \quad (4.11)$$

Para resolvermos as equações de campo de Einstein, precisamos substituir a densidade e a pressão do fluido nas equações (4.7), (4.8) e (4.9). Utilizaremos a equação de conservação de energia (4.11) para escrevermos  $\rho(t)$  em função dos fatores de escala e de outros parâmetros do modelo. Como foi mencionado na introdução desta dissertação, usaremos o fluido completo que é composto pelo fluido fantasma, fluido de radiação e o fluido de poeira. O fluido fantasma é caracterizado por ter a pressão negativa, ou seja,  $w < -1$ , o fluido de radiação tem  $w = \frac{1}{3}$  e a pressão positiva; e o fluido de poeira tem  $w = 0$  e a pressão nula. Vamos agora descrever a densidade e as equações de Einstein para cada fluido usando  $a(t) = a$ ,  $b(t) = b$  e  $\rho(t) = \rho$ .

#### 4.1.1 Fluidos de Radiação, Poeira e Fantasma

Para descrever as equações de campo de Einstein para o fluido de radiação, de poeira e do fluido fantasma, vamos resolver a equação (4.11) e tirar o valor para  $\rho$ . Fazendo isso temos,

$$\rho = C(ab^2)^{-(1+w)}. \quad (4.12)$$

Onde  $\rho$  é a densidade do fluido e  $C$  é uma constante de integração positiva relacionada com a energia de expansão do fluido.



Utilizando  $p$ , da equação de estado (3.10), e  $\rho$  (4.12), nas equações (4.7)-(4.9), obtemos que as equações de campo de Einstein irão depender da constante  $C$  e do parâmetro  $w$ . Ou seja,

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} = C[ab^2]^{-(1+w)} \quad (4.13)$$

$$2\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} = -wC[ab^2]^{-(1+w)} \quad (4.14)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = -wC[ab^2]^{-(1+w)}. \quad (4.15)$$

Desta forma, para obtermos as equações de campo de Einsteins na métrica do tipo KS, para cada fluido, precisamos fixar o valor de  $w$ . Como estamos interessados em obter o comportamento dos fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$ , só precisamos de duas equações por só termos duas incógnitas. Assim, para obter a solução mais geral e não perder resultados do modelo, vamos montar um sistema utilizando a equação (4.13) pela sua simplicidade de ser de primeira ordem e uma segunda equação obtida pela diferença entre (4.15) e (4.14). Logo,

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} = C[ab^2]^{-(1+w)} \quad (4.16)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} = 0. \quad (4.17)$$

Aqui vamos frisar novamente que o fluido de radiação é caracterizado por ter  $w = \frac{1}{3}$  na equação de estado (3.10). Já o fluido de poeira por ter a pressão nula, tem  $w = 0$ . Finalmente, o fluido fantasma por ter sua densidade de energia positiva e pressão negativa, tem  $w < -1$ .

#### 4.1.2 Fluido Completo

Enfim, o fluido completo tem densidade dado por  $\rho_c = \rho_r + \rho_p + \rho_f$ , onde  $\rho_r$  é a densidade do fluido de radiação,  $\rho_p$  é a densidade do fluido de poeira e  $\rho_f$  é a densidade do fluido fantasma. Logo,

$$\rho_c = C_r[ab^2]^{-(1+\frac{1}{3})} + C_p[ab^2]^{-1} + C_f[ab^2]^{-(1+w)}. \quad (4.18)$$

Onde  $C_r$  é a constante de integração do fluido de radiação,  $C_p$  é a constante de integração do fluido de poeira e  $C_f$  é a constante de integração do fluido fantasma.

Substituindo  $p_c$  e  $\rho_c$  nas equações (4.7), (4.8) e (4.9), temos:

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} = C_r[ab^2]^{-\frac{4}{3}} + C_p[ab^2]^{-1} + C_f[ab^2]^{-(1+w)} \quad (4.19)$$

$$2\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} = -\frac{1}{3}C_r[ab^2]^{-\frac{4}{3}} - wC_f[ab^2]^{-(1+w)} \quad (4.20)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = -\frac{1}{3}C_r[ab^2]^{-\frac{4}{3}} - wC_f[ab^2]^{-(1+w)}. \quad (4.21)$$

Neste subtópico estamos interessados em estudar a dinâmica do Universo através da análise dos fatores de escala  $a$  e  $b$  em função do tempo, sendo esse Universo composto pelos fluidos perfeitos de radiação, poeira e fantasma. Para essa análise, vamos utilizar as equações (4.19)-(4.21) que são as equações de campo de Einsteins para a métrica do tipo Kantowsk-Sachs. Por termos duas incógnitas,  $a$  e  $b$ , e três equações, vamos utilizar o mesmo critério feito no subtópico anterior. Pela simplicidade, vamos utilizar a equação (4.19), por ser de primeira ordem, e uma segunda equação obtida pela diferença entre (4.21) e (4.20), preservando assim as características do modelo.

Assim, o estudo deste modelo será dado resolvendo um sistema composto pelas seguintes equações:

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} = C_r[ab^2]^{-\frac{4}{3}} + C_p[ab^2]^{-1} + C_f[ab^2]^{-(1+w)} \quad (4.22)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} = 0. \quad (4.23)$$

O nosso próximo passo é estudar e resolver todos os sistemas provenientes das equações de campo de Einstein para a métrica do tipo KS, para cada fluido acima.

## 5 MÉTODO DE RESOLUÇÃO E RESULTADOS PRELIMINARES DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Para resolvermos os sistemas de equações diferenciais ordinárias (4.16)-(4.17) e (4.22)-(4.23), separadamente, utilizaremos o cálculo numérico via *Maple Software 18* com o método *rkf45\_dae*, devido as equações diferenciais ordinárias não terem soluções analíticas. Nesse estudo queremos determinar como os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  evoluem no tempo. Observando esses sistemas de equações diferenciais ordinárias, vemos que eles dependem dos parâmetros  $w$  e  $C_w$ , onde  $w$  representa os diferentes tipos de fluídos: radiação ( $w = \frac{1}{3}$ ), poeira ( $w = 0$ ) e fantasma ( $w < -1$ ). Dessa forma, será importante determinarmos como as evoluções temporais dos fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  são influenciadas por esses parâmetros. É importante mencionarmos que, uma vez que os  $C_w$ 's representam as energias dos diferentes fluídos, esses parâmetros são positivos. Além da influência dos parâmetros  $w$ 's e  $C_w$ 's, iremos investigar como as dinâmicas de  $a(t)$  e  $b(t)$  são alteradas devido a variação das condições iniciais:  $a(t=0) \equiv a_0$ ,  $\dot{a}(t=0) \equiv \dot{a}_0$ ,  $b(t=0) \equiv b_0$  e  $\dot{b}(t=0) \equiv \dot{b}_0$ .

Para estudarmos como os parâmetros  $w$ 's,  $C_w$ 's e as condições iniciais afetam as dinâmicas dos fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$ , iremos variar uma dessas quantidades enquanto deixamos as demais fixadas. Assim, quando não estivermos variando as condições iniciais, elas serão fixadas em  $a_0 = \dot{a}_0 = b_0 = 1$  e a condição inicial  $\dot{b}_0$  será obtida ao resolvermos a equação (4.16), quando estivermos analisando o modelo para os fluídos de radiação, poeira e fantasma, separadamente, ou resolvendo a equação (4.22) quando estivermos analisando o fluido completo. Já quando estivermos variando a condição inicial  $\dot{b}_0$ , obteremos  $C_w$  resolvendo as equações (4.16) ou (4.22), dependendo do fluido em análise. Faremos esse procedimento com cada uma dessas quantidades. O ponto de partida será o estudo, separado, de cada tipo diferente de fluido perfeito. Nesse Capítulo, iniciaremos com o fluido perfeito de radiação, depois estudaremos o fluido perfeito de poeira e finalmente estudaremos o fluido perfeito fantasma.

### 5.1 MODELO COSMOLÓGICO DO TIPO KS COM FLUIDO DE RADIAÇÃO

Vamos iniciar o estudo deste modelo utilizando as equações (4.16) e (4.17), onde vamos substituir  $w = \frac{1}{3}$ . Logo,

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} = C[ab^2]^{-\frac{4}{3}} \quad (5.1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} = 0. \quad (5.2)$$

Essas equações, (5.1) e (5.2), geram um comportamento bem definido dos fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  na presença do parâmetro  $C_r$  e das condições iniciais  $a_0$ ,  $\dot{a}_0$ ,  $b_0$  e  $\dot{b}_0$ . Vamos lembrar que como queremos estudar  $a(t)$  e  $b(t)$ , só precisamos de duas equações.

Depois de calcularmos as solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (5.1)-(5.2) para um grande número de diferentes condições iniciais e de energias do fluido, obtivemos o seguinte comportamento para o fator de escala  $b(t)$ : uma expansão até um valor máximo e depois uma contração até uma singularidade do tipo *Big Crunch*, partindo de um valor inicial. Já para o fator de escala  $a(t)$ , temos: uma expansão em que ele vai para um valor finito em um tempo finito. Este comportamento ocorre devido o fator de escala  $b(t)$  dominar sobre  $a(t)$ . Assim,  $a(t)$  não vai para um valor infinito em um tempo finito, ou seja, não vai para uma singularidade do tipo *Big Rip* pois seu tempo de expansão está limitado até ocorrer a singularidade para o fator de escala  $b(t)$ .

### 5.1.1 Variação do Parâmetro $C_r$

Vamos aqui analisar qual a influência do parâmetro  $C_r$  na dinâmica dos fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$ .

Depois de resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.1)-(5.2) para um grande número de valores do parâmetro  $C_r$ , mantendo as condições iniciais fixadas em  $a_0 = \dot{a}_0 = b_0 = 1$ , a medida em que aumentamos  $C_r$  maiores são os valores obtidos para  $\dot{b}_0$ . Os valores obtidos para a condição inicial  $\dot{b}_0$  são achados resolvendo a equação (5.1) para as condições iniciais fixadas. Após estudarmos diversos valores de  $C_r$ , chegamos a conclusão que a medida em que aumentamos seu valor, maiores são os intervalos de tempo obtidos para ocorrer a singularidade do sistema.

O fator de escala  $b(t)$  começa em um dado valor e aumenta até um máximo para posteriormente ir a zero, dando origem a uma singularidade do tipo *Big Crunch*. Com o aumento do parâmetro  $C_r$ , o valor máximo do fator de escala  $b(t)$  aumenta e conseqüentemente ele leva mais tempo para atingir a singularidade. Assim, esse novo valor máximo é diretamente influenciado pela parâmetro  $C_r$  pois ao aumentá-lo, aumenta-se a condição inicial da velocidade  $\dot{b}_0$  do sistema. Já o fator de escala  $a(t)$ , que vai para um valor finito em um tempo finito, tem o seu valor máximo aumentado a medida que aumentamos o parâmetro  $C_r$  mantendo as condições iniciais fixadas. Aqui precisamos lembrar que o tempo para ocorrer a singularidade do sistema é o tempo em que  $b(t)$  leva para chegar à singularidade, limitando assim a expansão do fator de escala  $a(t)$ . Esse comportamento acontece devido o fator de escala  $b(t)$  dominar sobre  $a(t)$ . Alguns exemplos desse comportamento podem ser vistos nas Figuras 1-3 e na Tabela 1, onde consideramos os casos em que  $C_r = 1, 20$  e  $50$ .

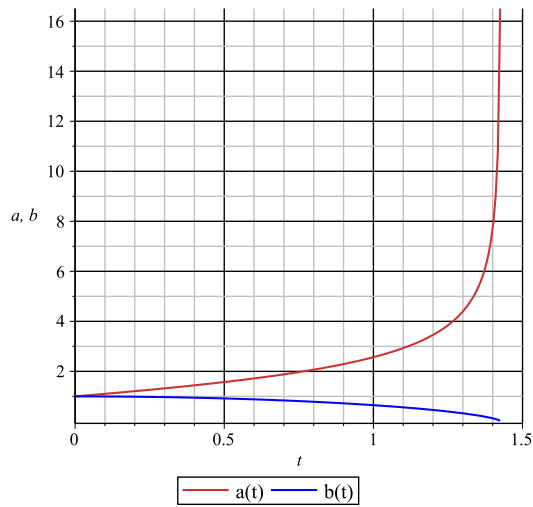


Figura 1 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r=1$ ,  $\dot{b}_0=0$  e  $a_0 = b_0 = 1$ .

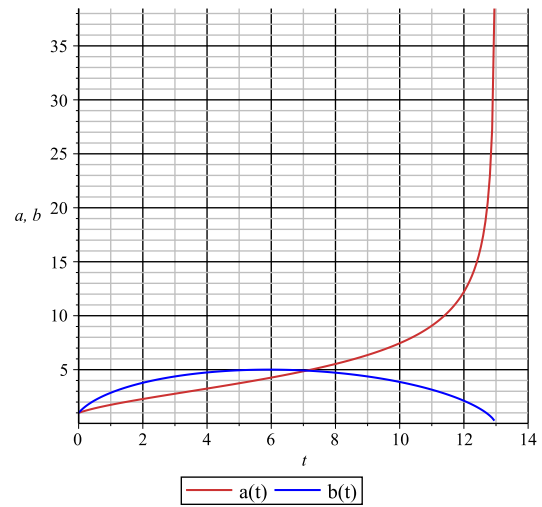


Figura 2 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r=20$ ,  $\dot{b}_0=3.472135954$  e  $a_0 = b_0 = 1$ .

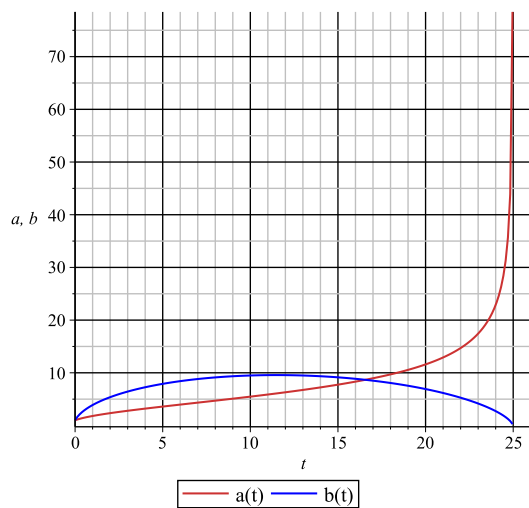


Figura 3 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r=50$ ,  $\dot{b}_0=6.071067810$  e  $a_0 = b_0 = 1$ .

Tabela 1 – Variação do parâmetro  $C_r$  para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de radiação.

$C_r$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t)_{m\acute{a}x}$	$a(t_s)$
1	0	1.4280973	1	678.792099899
20	3.472135954	12.990633	5.003617914	1475.766695122
50	6.071067810	24.988795	9.567521895	1.063345947 $10^4$

### 5.1.2 Variação da Condição Inicial $\dot{a}_0$

Como estamos analisando uma expansão em função do tempo, vamos tomar a variação positiva de  $\dot{a}_0$  mantendo fixado as condições iniciais  $a_0 = b_0 = 1$  para diversos valores de  $C_r$  e  $\dot{b}_0$ . Devido a escolha das condições iniciais, teremos que  $C_r \geq 1$  uma vez que o caso  $C_r = 1$  implica que  $\dot{b}_0 = 0$ . Logo, iremos considerar apenas os valores  $C_r > 1$ . A condição inicial  $\dot{b}_0$  será obtida resolvendo a equação (5.1) para as condições iniciais e parâmetros fixados.

Resolvendo numericamente o sistema composto pelas equações (5.1)-(5.2) para um grande número de valores da condição inicial  $\dot{a}_0$ , a medida em que aumentamos seus valores menores são os valores obtidos de  $\dot{b}_0$ . Depois de estudarmos diversos valores de  $\dot{a}_0$  chegamos a conclusão de que a medida em que aumentamos seu valor, menor é o intervalo de tempo para os fatores de escala sair da sua posição inicial e chegar à singularidade do sistema, se mantivermos fixo o parâmetro  $C_r$ .

Ao aumentar os valores de  $\dot{a}_0$  os valores obtidos para  $\dot{b}_0$  são cada vez menores, fazendo com que o valor máximo para o fator de escala  $b(t)$  seja cada vez menor. Esse resultado acarreta um tempo menor para  $b(t)$  atingir a singularidade do tipo *Big Crunch*, pois seu valor começa a decair mais rapidamente com o passar do tempo. Embora o fator de escala  $b(t)$  tenha valores menores com o aumento da condição inicial  $\dot{a}_0$ , mantendo  $C_r$  fixado, o fator de escala  $a(t)$  sempre alcança valores maiores devido sua velocidade inicial estar aumentando. Para exemplificar esses resultados, vamos tomar o caso em que a energia do fluido de radiação é  $C_r = 50$ . Alguns exemplos desse comportamento podem ser vistos nas Figuras de 4-6 e na Tabela 2.

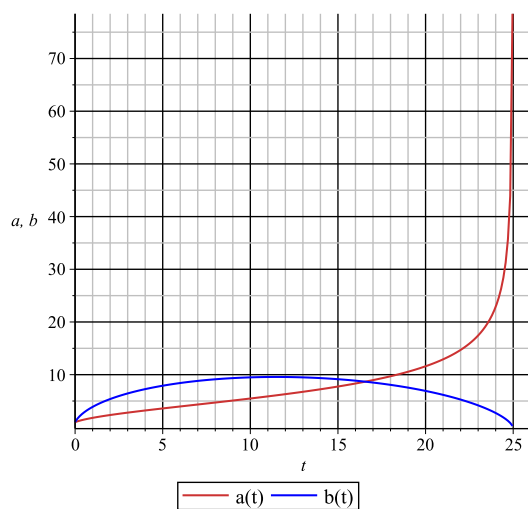


Figura 4 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.071067810$  e  $a_0 = b_0 = 1$ .

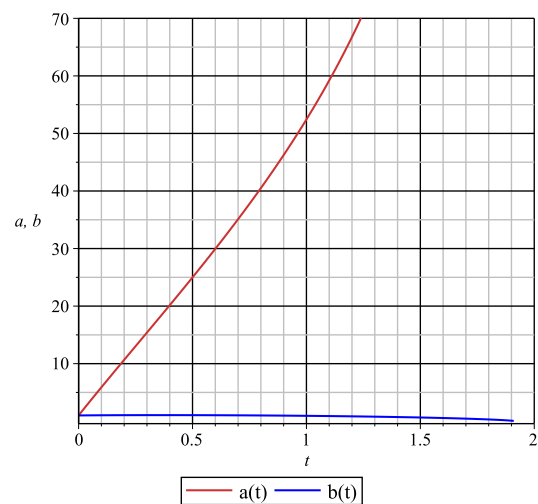


Figura 5 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 50$ ,  $\dot{b}_0 = 0.48762225$  e  $a_0 = b_0 = 1$ .

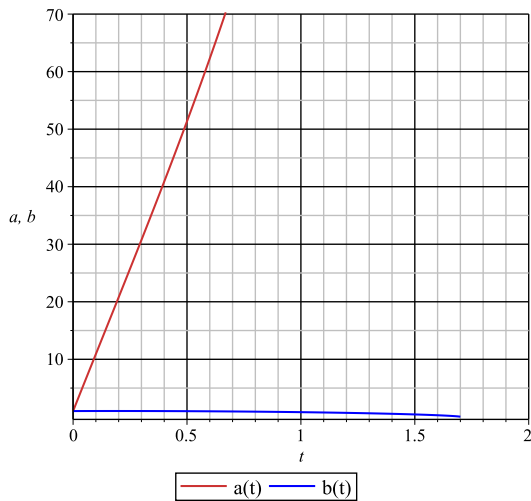


Figura 6 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 100$ ,  $\dot{b}_0 = 0.2447006$  e  $a_0 = b_0 = 1$ .

Tabela 2 – Variação da condição inicial  $\dot{a}_0$ , com  $C_r = 50$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de radiação.

$\dot{a}_0$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t)_{m\acute{a}x}$	$a(t_s)$
1	6.071067810	24.988795	9.567521913	2591.861179413
50	0.48762225	1.9170483	1.055269298	32248.329718553
100	0.2447006	1.7032183	1.013918598	1.588566241 $10^5$

### 5.1.3 Variação da Condição Inicial $\dot{b}_0$

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.1)-(5.2) para um grande número de valores da condição inicial  $\dot{b}_0$ , mantendo as condições iniciais fixadas em  $a_0 = b_0 = \dot{a}_0 = 1$ , aumentando o valor de  $\dot{b}_0$  temos que o parâmetro  $C_r$  aumenta seu valor. O parâmetro  $C_r$  é obtido a partir da equação (5.1), para as condições iniciais escolhidas. Ao estudarmos diversos valores de  $\dot{b}_0$ , chegamos a conclusão de que a medida em que aumentamos seu valor, maior é o intervalo de tempo para que os fatores de escala cheguem à singularidade. Fazendo isso, permitimos que o fator de escala  $b(t)$  tenha maior velocidade inicial e com isso alcance valores máximos cada vez maiores. Dessa forma, o tempo para chegar na singularidade do tipo *Big Crunch*, também aumenta. Novamente, como o fator de escala  $b(t)$  domina sobre  $a(t)$ , quanto maior o tempo para  $b(t)$  chegar na singularidade, mais  $a(t)$  pode aumentar seu valor final.

A influência no aumento do tempo para ocorrer a singularidade de  $b(t)$  está diretamente relacionando com o parâmetro  $C_r$ , ou seja, com a energia de expansão do fluido. Na Subseção (5.1.1) vimos que ao aumentar o parâmetro  $C_r$ , aumentamos o tempo para ocorrer a singularidade de  $b(t)$  e conseqüentemente aumentamos o valor da condição

inicial  $\dot{b}_0$ , fazendo com que  $b(t)$  chegue a valores maiores antes de ir para zero. Como exemplo, vamos tomar os casos em que  $C_r = 4, 2601$  e  $10201$ . Esses exemplos podem ser vistos nas Figuras 7-9 e na Tabela 3.

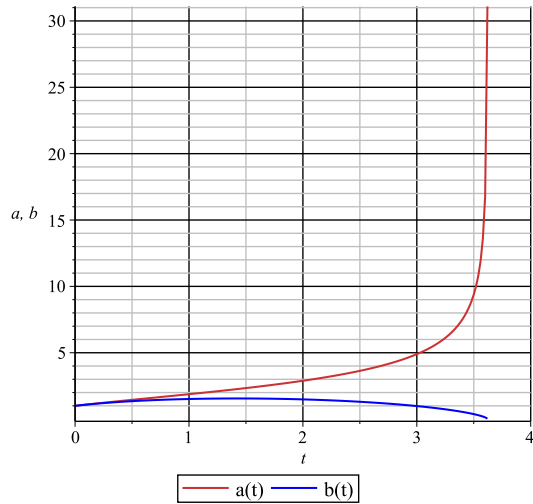


Figura 7 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r = 4$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 1$  e  $a_0 = b_0 = 1$ .

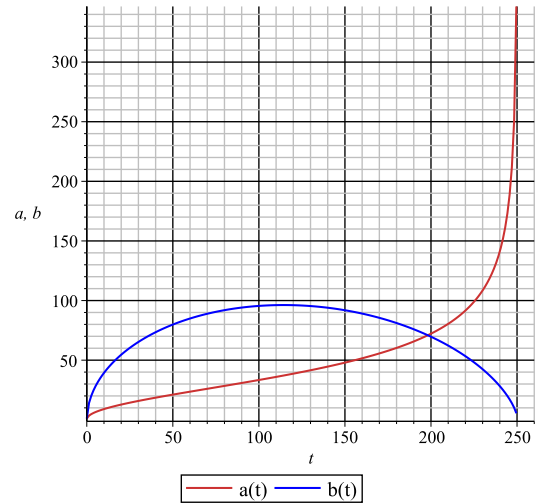


Figura 8 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r = 2601$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 50$  e  $a_0 = b_0 = 1$ .

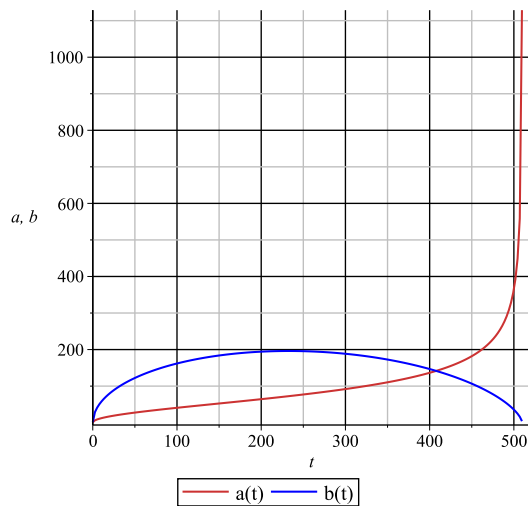


Figura 9 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r = 10201$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 100$  e  $a_0 = b_0 = 1$ .



Tabela 3 – Variação da condição inicial  $\dot{b}_0$  para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de radiação.

$\dot{b}_0$	$C_r$	$t_s$	$b(t)_{m\acute{a}x}$	$a(t_s)$
1	4	3.6238936	1.555554795	1376.711862233
50	2601	250.42587	96.227872326	17804.443438663
100	10201	509.97372	196.117131924	50241.721315459

#### 5.1.4 Variação da Condição Inicial $a_0$

Aqui vamos variar o valor em que o fator de escala  $a(t)$  começa sua expansão. Para isso, vamos fixar as condições iniciais em  $b_0 = \dot{a}_0 = 1$  com diversos valores de  $C_r$ , deixando a condição inicial  $\dot{b}_0$  ser determinada como solução da equação (5.1), para as condições iniciais escolhidas.

Depois de resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.1)-(5.2) para um grande número de valores da condição inicial  $a_0$ , aumentando seu valor obtemos valores menores para a velocidade inicial  $\dot{b}_0$ . Após estudarmos vários valores de  $a_0$  chegamos a conclusão que quanto maior o valor inicial de  $a(t)$ , menor é o intervalo de tempo que os fatores de escala levam para chegar à singularidade.

A medida em que aumentamos o valor de  $a_0$ , a condição inicial da velocidade de expansão  $\dot{b}_0$  diminui, fazendo com que o fator de escala  $b(t)$  obtenha um menor valor máximo em sua expansão e chegue na singularidade do tipo *Big Crunch* cada vez mais rápido. Devido o fator de escala  $b(t)$  dominar sobre  $a(t)$ , limitando assim sua expansão,  $a(t)$  vai para um valor finito em um tempo finito. Esse comportamento acarreta para o valor máximo do fator de escala  $a(t_s)$  um padrão não definido, podendo  $a(t_s)$  aumentar ou diminuir de acordo com o valor de  $a_0$ . Aqui precisamos ressaltar que como estamos procurando uma expansão do modelo, queremos valores positivos para  $a(t)$  e  $b(t)$ . Entretanto, a variação positiva da condição inicial  $a_0$  é limitada, pois ao aumentá-la estamos diminuindo o valor de  $\dot{b}_0$  até zero. Como um exemplo, se escolhermos  $C_r = 50$ , o maior valor inteiro positivo para  $a_0$  é 18, pois para valores maiores  $\dot{b}_0$  passa a ser um número complexo. Assim, como estamos interessados na expansão do modelo onde os fatores de escala são reais, esse resultado não é interessante. Alguns exemplos desse comportamento pode ser visto nas Figuras 10-12 e na Tabela 4, onde a energia do fluido de radiação é  $C_r = 50$ .

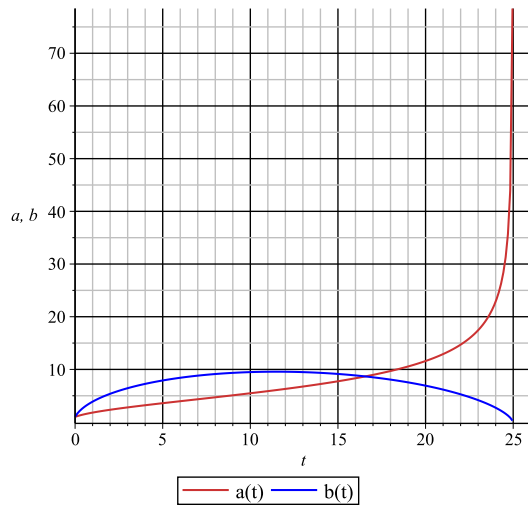


Figura 10 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.071067810$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

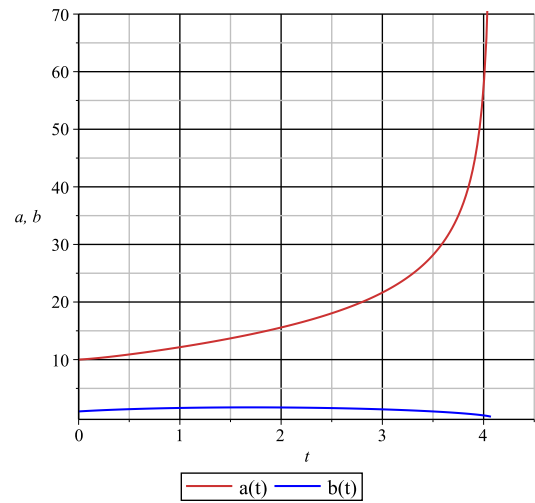


Figura 11 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 1.053600632$ ,  $a_0 = 10$  e  $b_0 = 1$ .

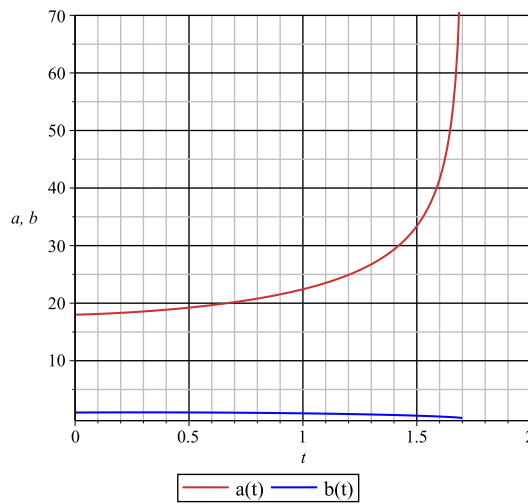


Figura 12 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 0.1954564259$ ,  $a_0 = 18$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 4 – Variação da condição inicial  $a_0$ , com  $C_r = 50$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de Radiação.

$a_0$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t)_{m\acute{a}x}$	$a(t_s)$
1	6.071067810	24.988795	9.567521899	2591.861179413
10	1.053600632	4.0854336	1.705472587	6373.625093243
18	0.1954564259	1.7081848	1.028372490	4727.9914766587

### 5.1.5 Variação da Condição Inicial $b_0$

Por fim, chegamos a última análise das condições iniciais para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de radiação. Vamos começar fixando as condições iniciais em  $a_0 = \dot{a}_0 = 1$  para diversos valores de  $C_r$ , deixando a condição inicial  $\dot{b}_0$  ser determinada como solução da equação (5.1), para as condições iniciais escolhidas.

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.1)-(5.2) para um grande número de valores da condição inicial  $b_0$ , aumentando o valor inicial de  $b_0$  temos que o valor de  $\dot{b}_0$  diminui. Depois de estudarmos vários valores de  $b_0$  chegamos a conclusão que quanto maior o valor inicial de  $b(t)$ , maior é o tempo dos fatores de escala para chegar à singularidade.

Como já vimos nas análises anteriores, o fator de escala  $b(t)$  tem sua expansão temporal limitada. Assim, aumentando o valor de  $b_0$  o fator de escala  $b(t)$  parte de um valor inicial cada vez maior chegando cada vez mais próximo de seu valor máximo. Quanto mais aumentamos  $b_0$ , menores são os valores obtidos para a velocidade inicial  $\dot{b}_0$ . Com isso, na maioria dos casos estudados, maior é o tempo para  $b(t)$  atingir a singularidade do tipo *Big Crunch*, pois seu valor inicial está mais distante do zero e seu  $\dot{b}_0$  é cada vez menor. Devido o fator de escala  $b(t)$  dominar sobre  $a(t)$ , ao aumentarmos o valor da condição inicial  $b_0$ , obtemos que, na maioria dos casos estudados,  $a(t)$  expande para valores cada vez maiores. Isso ocorre devido ao tempo para que  $b(t)$  chegue na singularidade aumentar. Para exemplificar, vamos tomar o caso em que  $C_r = 50$ . Os exemplos desse comportamento podem ser vistos nas Figuras 13-15 e na Tabela 5.

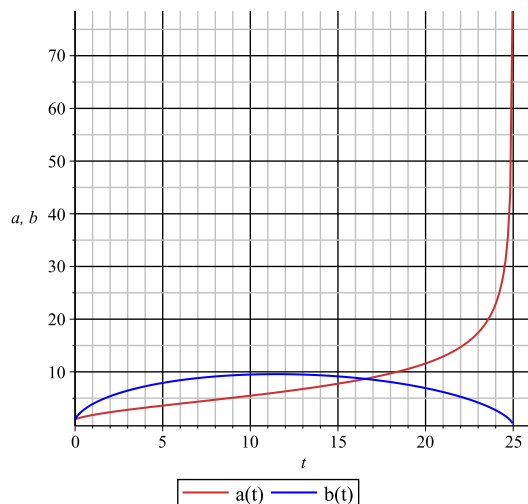


Figura 13 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.071067810$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

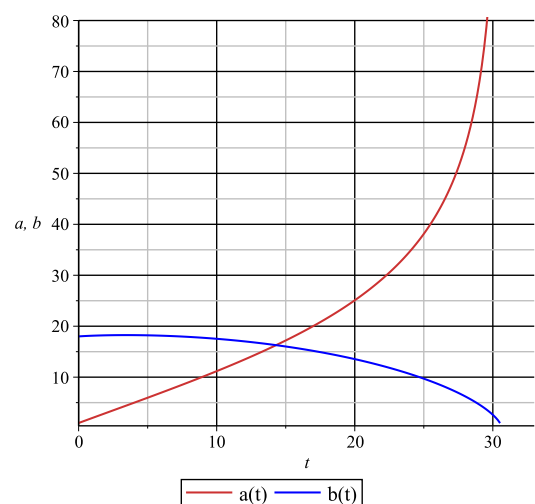


Figura 14 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 0.17360277$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 18$ .

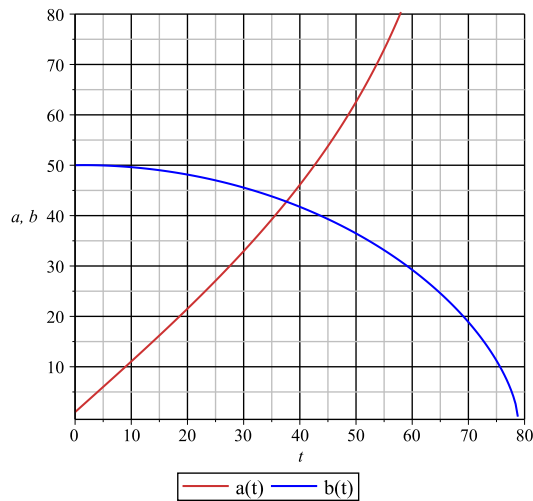


Figura 15 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_r = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 0.02683310$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 50$ .

Tabela 5 – Variação da condição inicial  $b_0$ , com  $C_r = 50$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de radiação.

$b_0$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t)_{m\acute{a}x}$	$a(t_s)$
1	6.071067810	24.988795	9.567521913	2591.8611794137
18	0.17360277	30.676259	18.253716405	14117.806809512
50	0.02683310	78.802751	50.020439217	37169.548936676

## 5.2 MODELO COSMOLÓGICO DO TIPO KS COM FLUIDO DE POEIRA

O estudo desse modelo ocorrerá substituindo  $w = 0$  no sistema composto pelas equações (4.16) e (4.17). Logo,

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} = C[ab^2]^{-1} \quad (5.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} = 0. \quad (5.4)$$

Calculando as soluções do sistema de equações ordinárias (5.3)-(5.4) para um grande número de condições iniciais e de energia do fluido, obtemos que o comportamento dos fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  para o modelo do tipo KS com fluido de poeira é qualitativamente similar aos fatores de escala do modelo do tipo KS com fluido de radiação. Ou seja,  $b(t)$  parte de um valor inicial e tem sua expansão até um valor máximo, para depois contrair até uma singularidade do tipo *Big Crunch*. Já  $a(t)$  tem uma expansão que vai para o finito em um tempo finito. Neste modelo, o fator de escala  $b(t)$  continua

dominando sobre o  $a(t)$ , fazendo com que este último não atinja uma singularidade do tipo *Big Rip*, pois seu tempo de expansão está limitado ao tempo de singularidade de  $b(t)$ . Nas próximas subseções analisaremos as diferenças quantitativas entre os modelos com fluido de radiação e poeira.

### 5.2.1 Variação do Parâmetro $C_p$

Como fizemos na Subseção (5.1.1) para o parâmetro  $C_r$ , vamos manter fixado as condições iniciais  $a_0 = \dot{a}_0 = b_0 = 1$  a medida em que variamos a energia de expansão do fluido. Aqui, o valor de  $\dot{b}_0$  é obtido resolvendo a equação (5.3) para as condições iniciais escolhidas.

Depois de resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.3)-(5.4) para um grande número de valores do parâmetro  $C_p$ , e para as demais condições iniciais fixadas, a medida em que aumentamos  $C_p$  maiores são os valores obtidos para  $\dot{b}_0$ . Após estudarmos diversos valores de  $C_p$ , chegamos a conclusão que a medida em que aumentamos seu valor, maiores são os intervalos de tempo obtidos para ocorrer a singularidade do sistema.

A medida em que aumentamos  $C_p$ , o tempo para ocorrer a singularidade aumenta devido a condição inicial  $\dot{b}_0$  aumentar. A expansão do fator de escala  $b(t)$  tem seu início em um valor inicial e vai até um máximo, para depois ir à zero. Ao aumentarmos o valor do parâmetro  $C_p$ , fazemos com que  $b(t)$  alcance maiores valores e conseqüentemente demore mais para atingir a singularidade *Big Crunch*. Esse novo valor máximo de  $b(t)$  está ligado diretamente com a condição inicial  $\dot{b}_0$ , pois aumentando o valor de  $C_p$ , quando resolvemos a equação (5.3), aumentamos o valor obtido de  $\dot{b}_0$ .

O fator de escala  $a(t)$  tem um valor finito em um tempo finito pois sua expansão é limitada à singularidade de  $b(t)$ . Ou seja, devido  $b(t)$  dominar sobre  $a(t)$ , este último não tem uma singularidade do tipo *Big Rip*, logo não vai para o infinito em um tempo finito. A medida em que aumentamos a energia de expansão do fluido,  $a(t)$  aumenta seu valor máximo devido a  $b(t)$  demorar mais para chegar na singularidade.

Ao compararmos os modelos do tipo KS com fluido de radiação com o do fluido de poeira, mantendo todas as condições iniciais iguais e fixadas, variando somente  $C_r$  e  $C_p$  nos seus respectivos modelos vemos que o fluido de poeira tem mais influência na expansão do que o fluido de radiação para a métrica de Kantowski-Sachs. Este comportamento pode ser observado nas Figuras 16-18 e na Tabela 6. As figuras e a tabela mostram que, para as mesmas condições, ao aumentar a energia de expansão do fluido de poeira o fator de escala  $b(t)$  demora mais para chegar na singularidade com relação ao mesmo valor de  $C_r$ . Devidos as condições iniciais fixadas serem iguais, a condição inicial  $\dot{b}_0$  é igual quando resolvemos (5.1) e (5.3), quando variamos  $C_r$  e  $C_p$  respectivamente, entretanto obtemos que o fator de escala  $b(t)$  chega a maiores valores quando aumentamos  $C_p$  comparados ao

mesmos valores de  $C_r$ .

Devido o tempo de  $b(t)$  chegar a singularidade ser maior para quando aumentamos  $C_p$ , comparado a  $C_r$  mantendo todas as condições iniciais iguais e fixadas, o fator de escala  $a(t)$  continua indo para o finito em um tempo finito porém agora com valores máximo maiores.

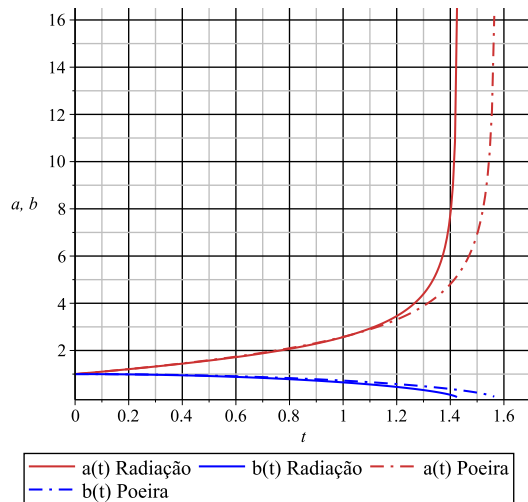


Figura 16 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 0$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

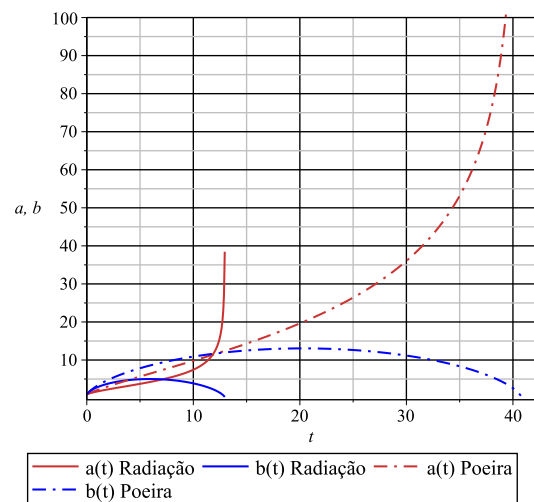


Figura 17 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 20$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 3.472135954$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

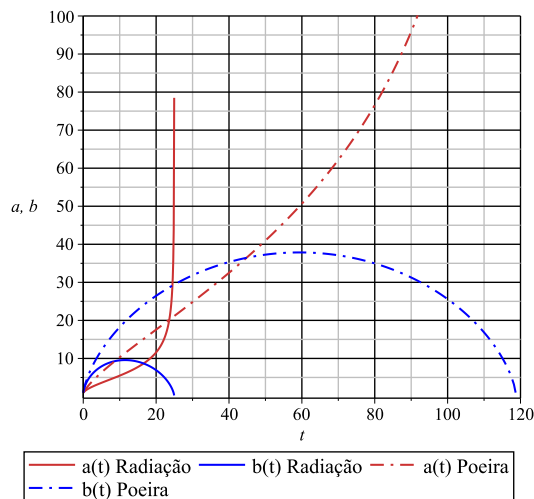


Figura 18 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.071067810$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 6 – Variação do parâmetro  $C_p$  para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de poeira.

$C_p$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t)_{m\acute{a}x}$	$a(t_s)$
1	0	1.5707964	1	1021.0740924701
20	3.472135954	40.826840	13.055718652	14395.911735621
50	6.071067810	118.82472	37.857854800	21789.638138754

### 5.2.2 Variação da Condição Inicial $\dot{a}_0$

Fixando as condições iniciais  $a_0 = b_0 = 1$ , vamos agora variar  $\dot{a}_0$  para diversos valores de  $C_p$  e  $\dot{b}_0$ . Como ocorrido no modelo do tipo KS com fluido de radiação, aqui também temos que  $C_p = 1$  implica em  $\dot{b}_0 = 0$  ao resolvermos a equação (5.3) mantendo as condições iniciais fixadas em  $a_0 = b_0 = 1$ . Logo, vamos considerar apenas os valores onde  $C_p > 1$ .

Assim, resolvendo numericamente o sistema composto pelas equações (5.3)-(5.4) para um grande número de valores da condição inicial  $\dot{a}_0$ , a medida em que aumentamos seus valores menores são os valores obtidos de  $\dot{b}_0$ . Depois de estudarmos diversos valores de  $\dot{a}_0$ , chegamos a conclusão de que a medida em que aumentamos seu valor, menor é o intervalo de tempo para os fatores de escala sair da sua posição inicial e chegar à singularidade do sistema, se mantivermos fixo o parâmetro  $C_p$ .

Os valores máximos do fator de escala  $b(t)$  são cada vez menores, pois ao aumentar a condição inicial  $\dot{a}_0$  obtemos a condição da velocidade inicial  $\dot{b}_0$  cada vez menor, impossibilitando que  $b(t)$  alcance maiores valores. Esse resultado faz com que  $b(t)$  atinja a singularidade do tipo *Big Crunch* cada vez mais rápido, pois seu valor começa a decair mais rapidamente com o tempo. Sendo  $b(t)$  dominante sobre  $a(t)$  no sistema, mesmo que  $b(t)$  chegue na singularidade mais rápido com o aumento da condição inicial  $\dot{a}_0$ , temos que para a maiorias dos casos estudados o fator de escala  $a(t)$  alcança maiores valores indo para o finito em um tempo finito, pois sua velocidade inicial é cada vez maior.

Comparando a variação da condição inicial  $\dot{a}_0$  entre os modelos do tipo KS com fluido de radiação e com o fluido de poeira, temos que, para os mesmo valores de condições iniciais e das energia de expansão dos fluidos,  $C_r = C_p = 50$  por exemplo, o tempo para ocorrer a singularidade do sistema é maior no modelo com o fluido de poeira. Novamente, a condição inicia  $\dot{b}_0$  é igual entre os modelos devido as condições iniciais fixadas e dos parâmetros  $C_r=C_p$ . Esses exemplos podem ser vistos nas Figuras 19-21 e na Tabela 7.

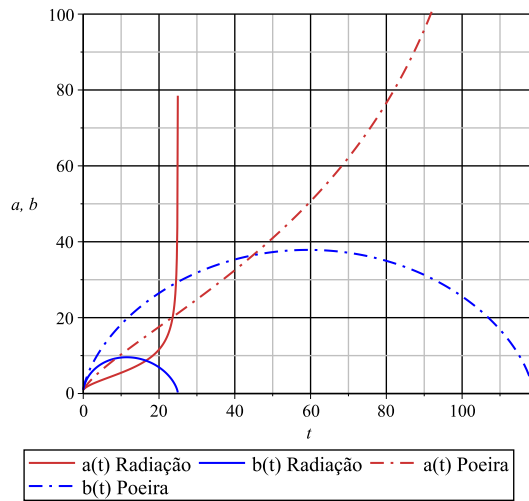


Figura 19 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.071067810$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

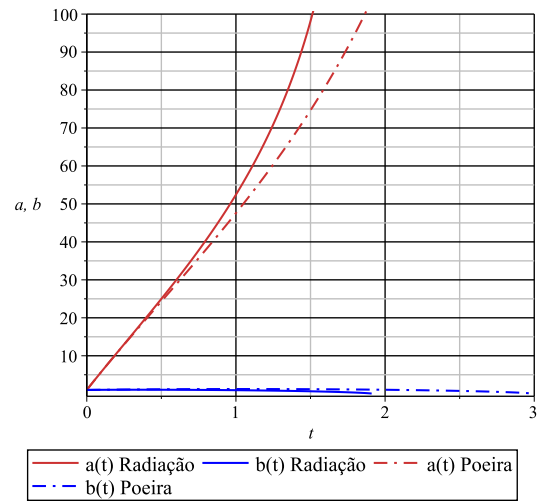


Figura 20 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 50$ ,  $\dot{b}_0 = 0.48762225$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

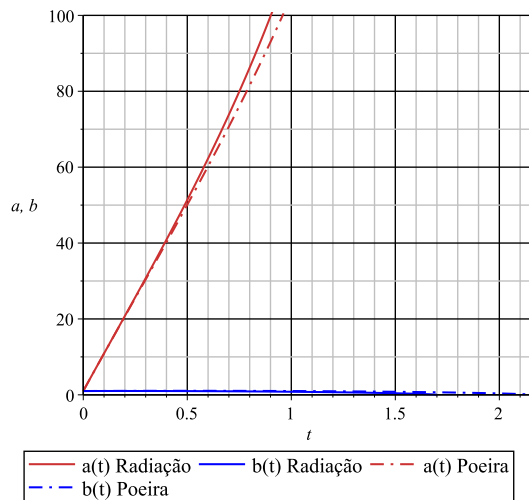


Figura 21 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 100$ ,  $\dot{b}_0 = 0.2447006$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 7 – Variação da condição inicial  $\dot{a}_0$ , com  $C_p = 50$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de poeira.

$\dot{a}_0$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t)_{m\acute{a}x}$	$a(t_s)$
1	6.071067810	118.82472	37.857854800	21789.638138754
50	0.48762225	2.9934898	1.237775446	78848.842601517
100	0.2447006	2.1639084	1.059878384	62616.778829678



### 5.2.3 Variação da Condição Inicial $\dot{b}_0$

Como vamos variar a condição inicial  $\dot{b}_0$  nesta subseção, obteremos o parâmetro  $C_p$  a partir da equação (5.3) mantendo as condições iniciais fixadas em  $a_0 = b_0 = \dot{a}_0 = 1$ . Assim, após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.3)-(5.4) para um grande número de valores da condição inicial  $\dot{b}_0$ , aumentando seus valores temos que o parâmetro  $C_p$  aumenta seu valor rapidamente. Ao estudarmos diversos valores de  $\dot{b}_0$ , chegamos a conclusão de que a medida em que aumentamos seu valor, maior é o intervalo de tempo para os fatores de escala chegar à singularidade.

Aumentando o valor de  $\dot{b}_0$  estamos aumentando o tempo para que o fator de escala  $b(t)$  chegue na singularidade *Big Crunch*. Esse comportamento é ocasionado pelo aumento da velocidade inicial permitindo assim que  $b(t)$  alcance um valor máximo maior. Devido  $b(t)$  dominar sobre  $a(t)$ , quanto maior o tempo para  $b(t)$  chegar a singularidade, mais tempo o fator de escala  $a(t)$  tem para expandir e conseqüentemente chegar em um valor máximo maior, indo assim para o infinito em um tempo finito.

Comparando quantitativamente a variação da condição inicial  $\dot{b}_0$  para modelo do tipo KS com fluido de radiação e para o modelo com fluido de poeira, para as mesmas condições iniciais fixadas, temos que os fatores de escala demoram mais para chegar na singularidade no modelo contendo o fluido de poeira. Apesar dos valores para  $C_r$  e  $C_p$ , obtidos nas equações (5.1) e (5.3) respectivamente, serem iguais a  $C_r = C_p = 4, 2601$  e  $10201$ , o fluido de poeira dá origem a uma maior expansão do que o fluido de radiação. Logo, os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  tem valores máximos maiores para o modelo com fluido de poeira comparado ao modelo com fluido de radiação. Esses comportamentos podem ser vistos nas Figuras 22-24 e na Tabela 8.

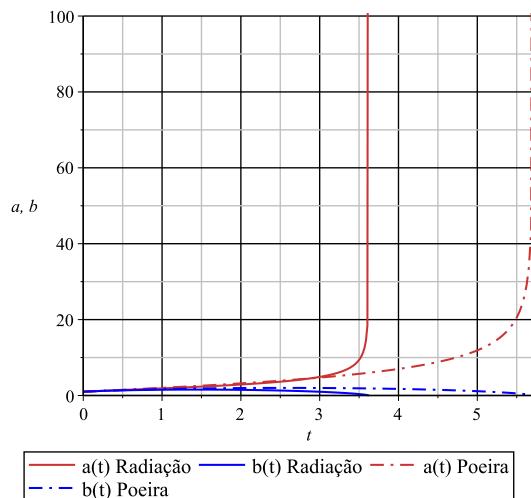


Figura 22 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 4$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 1$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

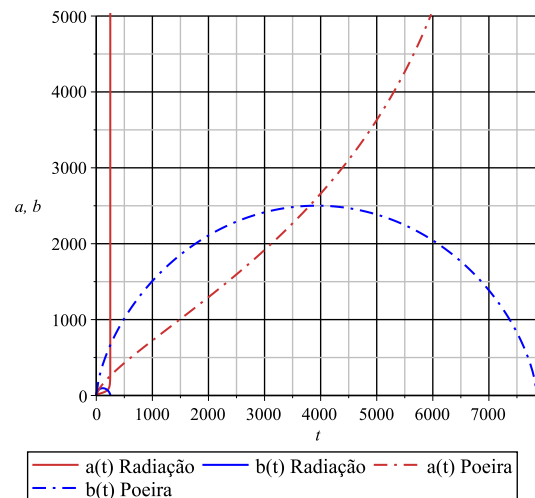


Figura 23 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 2601$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 50$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

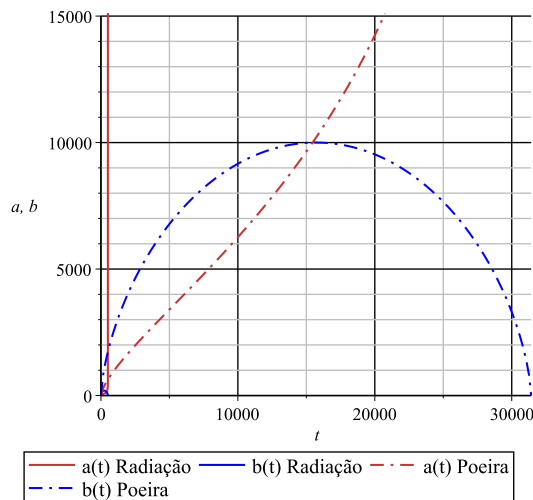


Figura 24 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 10201$ ,  $\dot{a}_0 = 100$ ,  $\dot{b}_0 = 100$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 8 – Variação da condição inicial  $\dot{b}_0$  para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de poeira.

$\dot{b}_0$	$C_p$	$t_s$	$b(t)_{m\acute{a}x}$	$a(t_s)$
1	4	5.7123883	1.999999837	3179.978729382
50	2601	7857.1050	2500.8500879352	2.1951683524 $10^6$
100	10201	31419.038	10000.381267469	6.142150380 $10^6$

### 5.2.4 Variação da Condição Inicial $a_0$

Para diversos valores de  $C_p$  e com as condições iniciais fixadas em  $\dot{a}_0 = \dot{b}_0 = 1$ , vamos agora variar positivamente o valor em que o fator de escala  $a(t)$  começa sua expansão. Aqui é importante lembrar que os valores de  $\dot{b}_0$  são obtidos resolvendo a equação (5.3) para as condições iniciais fixadas.

Depois de resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.3)-(5.4) para um grande número de valores da condição inicial  $a_0$ , aumentando seu valor obtemos valores menores para a velocidade inicial  $\dot{b}_0$ . Após estudarmos vários valores de  $a_0$  chegamos a conclusão que quanto maior o valor inicial de  $a(t)$ , menor é o intervalo de tempo em que os fatores de escala levam para chegar à singularidade.

Devido a condição da velocidade inicial de  $b(t)$  ser cada vez menor com o aumento de  $a_0$  para as condições iniciais fixadas, o valor máximo de  $b(t)$  diminui e conseqüentemente seu tempo para chegar a singularidade do tipo *Big Crunch* é cada vez menor. Como o fator de escala  $b(t)$  domina sobre  $a(t)$  durante a evolução, esse comportamento acarreta para o valor máximo do fator de escala  $a(t_s)$  um padrão não definido que vai para o finito em um tempo finito, podendo  $a(t_s)$  aumentar ou diminuir de acordo com o valor de  $a_0$ , como no modelo com fluido de radiação.

Comparando a variação da condição inicial  $a_0$  entre os modelos do tipo KS com fluido de radiação,  $C_r = 50$ , com o do fluido de poeira,  $C_p = 50$ , temos que o tempo para ocorrer a singularidade de  $b(t)$  é maior para o modelo com fluido de poeira, mantendo as mesmas condições iniciais fixadas. Esse aumento no tempo para ocorrer a singularidade faz com que  $b(t)$  chegue a maiores valores máximo para o modelo com fluido de poeira. Com o aumento no tempo para a singularidade de  $b(t)$ , temos que  $a(t)$  também alcança maiores valores na sua expansão comparado ao modelo com fluido de radiação. Alguns exemplos desse comportamento podem ser vistos nas Figuras 25-27 e na Tabela 9.

Diferentemente de quando variamos  $a_0$  para o modelo do tipo KS com fluido de radiação, aqui conseguimos variar até  $a_0 = 50$  resultando em  $\dot{b}_0 = 0$ . Após esse valor para a condição inicial  $a_0$ , os valores de  $\dot{b}_0$  tornam-se complexos.

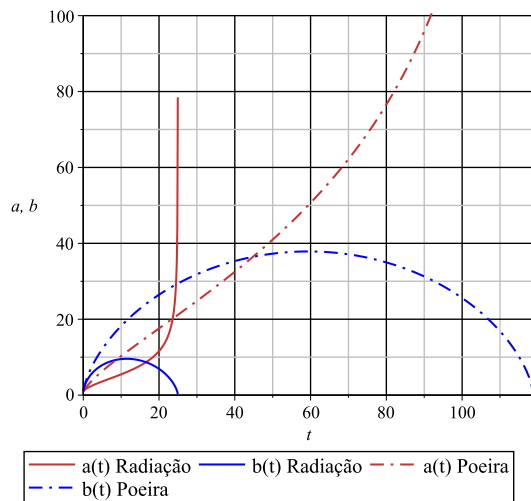


Figura 25 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 6.071067810$ ,  $\dot{b}_0 = 1$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

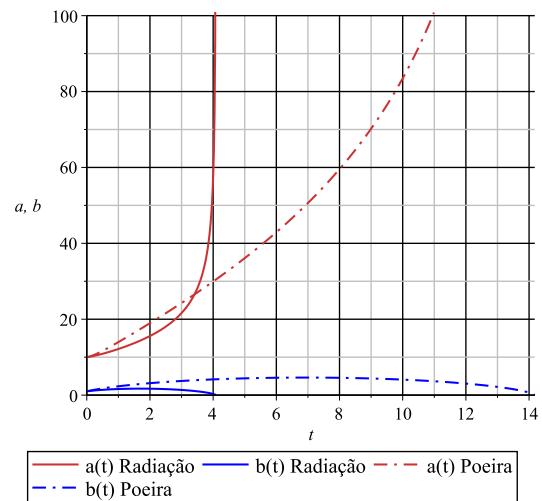


Figura 26 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 1.902498439$ ,  $a_0 = 10$  e  $b_0 = 1$ .

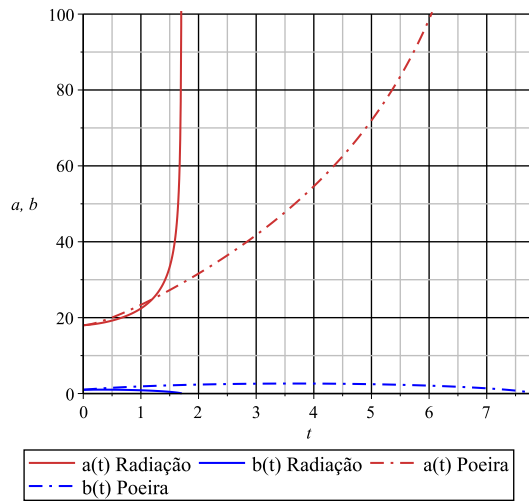


Figura 27 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 1.278934683$ ,  $a_0 = 18$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 9 – Variação da condição inicial  $a_0$ , com  $C_p = 50$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de Poeira.

$a_0$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t)_{m\acute{a}x}$	$a(t_s)$
1	6.071067810	118.82472	37.857854800	21789.638138754
10	1.902498439	14.179538	4.619499689	24144.778593663
18	1.278934683	7.8100958	2.635673692	1.092332870 $10^5$

### 5.2.5 Variação da Condição Inicial $b_0$

Para concluirmos essa subseção sobre o estudo do modelo cosmológico do tipo KS com fluido de poeira, vamos variar a condição inicial  $b_0$  mantendo as condições iniciais fixas em  $a_0 = \dot{a}_0 = 1$  para diversos valores de  $C_p$ . A condição  $\dot{b}_0$  será obtida resolvendo a equação (5.3) para as condições e parâmetros fixados.

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.3)-(5.4) para um grande número de valores da condição inicial  $b_0$ , aumentando seu valor temos que o valor de  $\dot{b}_0$  diminui. Depois de estudarmos vários valores de  $b_0$  chegamos a conclusão que quanto maior o valor inicial de  $b(t)$ , maior é o tempo dos fatores de escala para chegar à singularidade.

Aumentando a condição inicial  $b_0$ , temos que para a maioria dos casos o valor máximo do fator de escala  $b(t)$  aumenta. Esse comportamento ocorre pois quando aumentamos  $b_0$  estamos aumentando o valor em que  $b(t)$  começa sua expansão. Para esses resultados temos que na maioria dos casos o tempo da singularidade *Big Crunch* do fator para  $b(t)$  aumenta quando aumentamos a condição inicial  $b_0$ . Embora o fator de escala

$b(t)$  domine sobre  $a(t)$  delimitando o tempo de sua expansão neste modelo,  $a(t)$  vai para o finito em um tempo finito, mas não tem um padrão definido para o valor máximo podendo aumentar ou diminuir quando aumentamos  $b_0$ .

Comparando a variação da condição inicial  $b_0$  para os modelos do tipo KS com fluido de radiação,  $C_r = 50$ , com o do fluido de poeira,  $C_p = 50$ , vemos que o tempo para ocorrer a singularidade do sistema é sempre maior para o modelo com fluido de poeira, permitindo que o fator de escala  $b(t)$  desse modelo tenha maiores valores no final da expansão. Esse comportamento para  $b(t)$  é decorrente da condição inicial  $\dot{b}_0$  ser sempre maior para o modelo com fluido de poeira para os diversos casos estudados, apesar das mesmas condições fixadas entre os modelos, fornecendo uma velocidade inicial maior para o fator de escala. Apesar do comportamento dos valores máximo para  $a(t)$  serem diferentes entre os modelos estudados até aqui, o modelo com fluido de poeira tem sempre maiores valores para o fator de escala  $a(t)$  comparado com o modelo do fluido de radiação, quando variamos a condição inicial  $b_0$ . Alguns exemplos desse comportamento para os fatores de escala podem ser observados nas Figuras (28)-(30) e na Tabela 10.

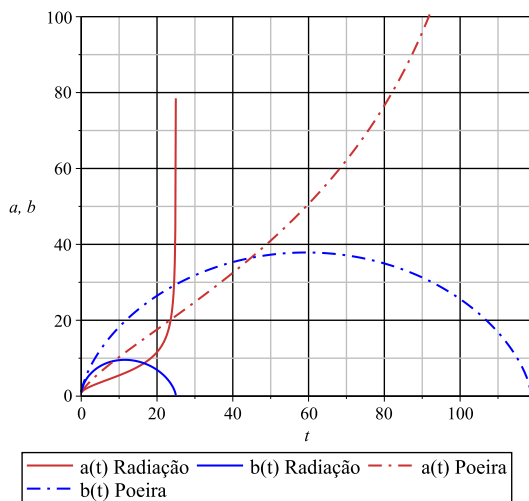


Figura 28 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.071067810$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

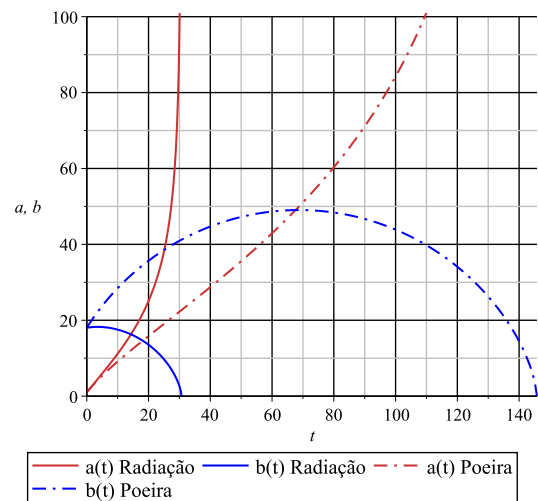


Figura 29 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 1.31320792$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 18$ .

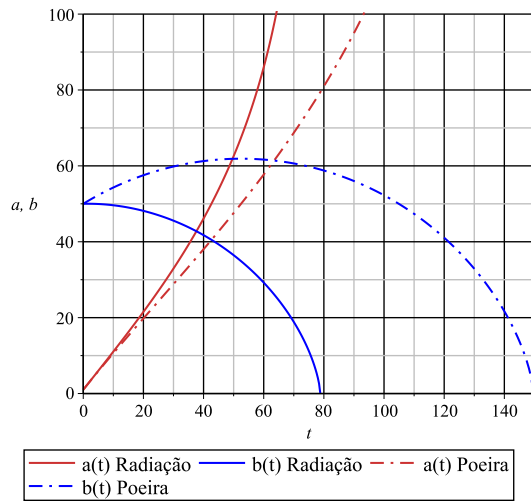


Figura 30 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $C_p = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 0.48762225$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 50$ .

Tabela 10 – Variação da condição inicial  $b_0$ , com  $C_p = 50$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido de poeira.

$b_0$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t)_{m\acute{a}x}$	$a(t_s)$
1	6.071067810	118.82472	37.857854800	21789.638138754
18	1.31320792	145.78854	49.041269750	34477.252712748
50	0.48762225	149.67447	61.888772332	56185.194401001

### 5.3 MODELO COSMOLÓGICO DO TIPO KS COM FLUIDO FANTASMA

O próximo passo neste trabalho será calcular os resultados para os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  no modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma representando a matéria do Universo. Para obter esses resultados, vamos utilizar o sistema composto pelas equações (4.16) e (4.17):

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} = C_f[ab^2]^{-(1+w)} \quad (5.5)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} = 0. \quad (5.6)$$

Como já mencionado nesta dissertação, o fluido fantasma tem sua pressão negativa e sua densidade de energia positiva. Assim, ao resolvermos as equações (5.5) e (5.6) precisamos usar  $w < -1$ .

Após calcularmos as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias (5.5)-(5.6) para um grande número de condições iniciais, da constante positiva relacionada a energia do fluido fantasma  $C_f$  e da constante  $w$  do fluido fantasma, obtemos que os fatores

de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  são expansivos e expandem de um valor inicial finito, até valores infinitos, em um tempo finito. Este comportamento dá origem a uma singularidade do tipo *Big Rip*. Ao calcularmos as soluções numéricas, usando o programa Maple, obtivemos o instante de tempo logo antes da solução atingir a singularidade do Big Rip. Chamaremos esse instante de tempo de  $t_s$  e os valores dos fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$ , no instante  $t_s$ , chamaremos de  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$ , respectivamente. O modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma apresenta uma expansão muito mais intensa do Universo, quando comparado aos modelos das Seções (5.1) e (5.2), estudados anteriormente.

### 5.3.1 Variação do Parâmetro $w$

Mantendo as condições iniciais em  $a_0 = b_0 = \dot{a}_0 = 1$ , vamos fixar  $C_f$  e variar  $w$  para obtermos a condição inicial  $\dot{b}_0$ , através da equação (5.5). Aqui precisamos lembrar que ao diminuir o valor de  $w$  estamos, em módulo, aumentando a pressão do fluido e sua densidade de energia, deixando o fluido fantasma mais repulsivo.

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.5)-(5.6), para um grande número de valores do parâmetro  $w$ , mantendo fixado os demais parâmetros e condições iniciais, concluímos que o intervalo de tempo em que os fatores de escala levam para chegar a singularidade do tipo *Big Rip* é cada vez menor a medida em que diminuimos  $w$ . Sendo o fluido fantasma caracterizado por ter  $w < -1$ , a medida em que deixamos seu valor mais negativo, mais rapidamente o universo atinge a singularidade *Big Rip*.

Devido a esse comportamento os fatores de escala tem menos tempo para evoluírem, desde suas posições iniciais até o instante  $t_s$ , fazendo com que os valores máximos de  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$  sejam cada vez menores quando diminuimos  $w$ . Alguns exemplos da variação do parâmetro  $w$  podem ser vistos nas Figuras 31-33 e nas Tabelas 11-13, onde foi considerado os casos em que  $w = -2, -10$  e  $-20$ , associados a energia do fluido  $C_f = 50$ .

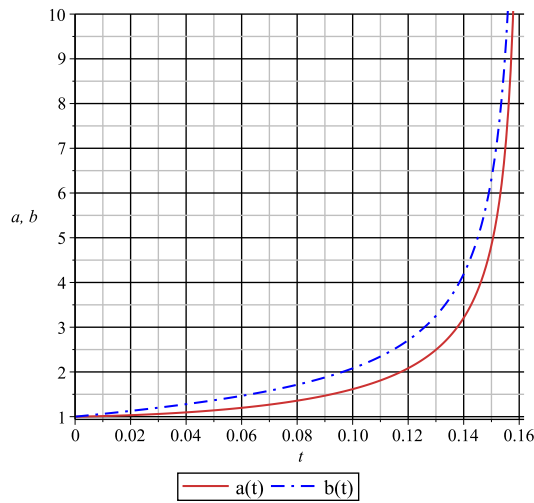


Figura 31 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.071067810$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

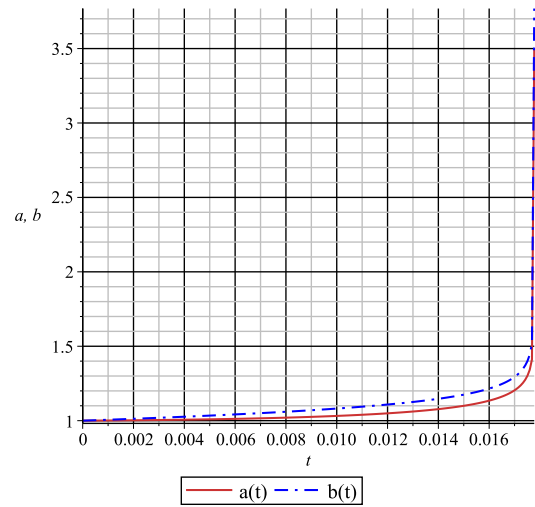


Figura 32 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -10$ ,  $C_f = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.071067810$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

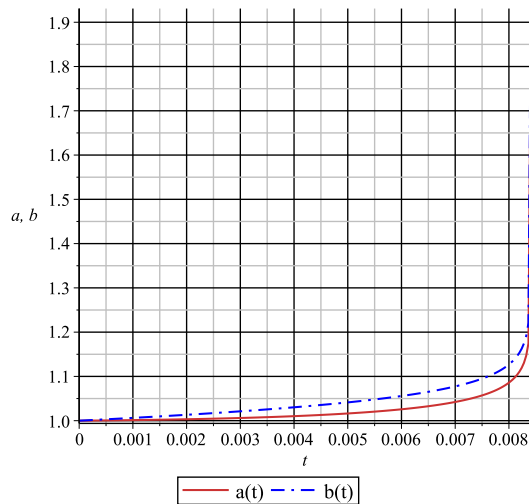


Figura 33 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -20$ ,  $C_f = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.071067810$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 11 – Variação do parâmetro  $C_f$ , para a constante  $w = -2$ , no modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma.

$C_f$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
2	0.414213562	0.87328434	$2.010413128 \cdot 10^5$	$1.6945438251 \cdot 10^{13}$	$2.636668734 \cdot 10^5$	$2.222403854 \cdot 10^{13}$
50	6.071067810	0.16175996	91852.549945479	$9.132130630 \cdot 10^{12}$	70295.998147520	$6.988942802 \cdot 10^{12}$
100	9	0.11396063	$1.394538983 \cdot 10^5$	$3.613640486 \cdot 10^{13}$	$1.035829978 \cdot 10^5$	$2.684125091 \cdot 10^{13}$



Tabela 12 – Variação do parâmetro  $C_f$  para a constante  $w = -10$  no modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma.

$C_f$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
2	0.414213562	0.098944808	3.867672866	$3.398352388 \cdot 10^8$	4.073420635	$3.579133690 \cdot 10^8$
50	6.071067810	0.017774418	3.768913385	$6.646698200 \cdot 10^8$	3.502174484	$6.176288449 \cdot 10^8$
100	9	0.012483109	4.088902531	$2.956763685 \cdot 10^9$	3.769563044	$2.725843121 \cdot 10^9$

Tabela 13 – Variação do parâmetro  $C_f$  para a constante  $w = -20$  no modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma.

$C_f$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
2	0.414213562	0.046946454	1.837701455	$6.536886535 \cdot 10^7$	1.886123991	$6.709130205 \cdot 10^7$
50	6.071067810	0.0084056552	1.930940532	$7.627234784 \cdot 10^8$	1.858058761	$7.339350921 \cdot 10^8$
100	9	0.0059008529	1.990644141	$2.546608676 \cdot 10^9$	1.907609579	$2.440383457 \cdot 10^9$

### 5.3.2 Variação do Parâmetro $C_f$

Para as condições iniciais fixadas em  $a_0 = b_0 = \dot{a}_0 = 1$ , vamos variar o parâmetro  $C_f$  fixando o parâmetro  $w = -2$ . A variação do parâmetro  $C_f$  nos permite obter informações sobre a condição inicial  $\dot{b}_0$  ao resolvermos a equação (5.5).

Depois de resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.5)-(5.6) para um grande número de valores do parâmetro  $C_f$ , a medida em que aumentamos  $C_f$  maiores são os valores obtidos para  $\dot{b}_0$ . Após estudarmos diversos valores de  $C_f$ , chegamos a conclusão que a medida em que aumentamos seu valor, menores são os intervalos de tempo obtidos para ocorrer a singularidade do tipo *Big Rip*. Como  $C_f$  está relacionado com a energia de expansão do fluido fantasma, ao aumentarmos seu valor menor será o intervalo de tempo necessário para ocorrer a singularidade do tipo *Big Rip*, devido ao fluido ser cada vez mais repulsivo.

Apesar desse intervalo de tempo para a solução atingir a singularidade ser cada vez menor ao aumentarmos  $C_f$ , por outro lado temos que  $\dot{b}_0$  aumenta nessas condições, e desta forma, os valores dos fatores de escala no instante anterior a singularidade  $t_s$ ,  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$ , não tem um comportamento bem definido, podendo aumentar ou diminuir quando aumentamos  $C_f$ . Aqui é importante ressaltar o seguinte resultado: para todas as variações do parâmetro  $C_f$ , o valor do fator de escala  $a(t_s)$  é maior que  $b(t_s)$  até  $C_f = 4$ . Após esse valor,  $b(t_s)$  é maior comparado com  $a(t_s)$ . Esse comportamento pode ser visto nas Tabelas 11-13, onde  $w = -2, -10, -20$ . Esse resultado pode ser explicado pelo fato de  $\dot{a}_0$  ser maior ou igual à  $\dot{b}_0$  até  $C_f = 4$ . Ao aumentarmos o valor de  $C_f$ , obtemos que o valor de  $\dot{b}_0$  passa a ser maior que o de  $\dot{a}_0$ . Como exemplos desse comportamento, vamos considerar os casos em que  $w = -2$  é associado as seguintes energias do fluido fantasma:  $C_f = 2, 50$  e  $100$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 34-36 e na Tabela 14.

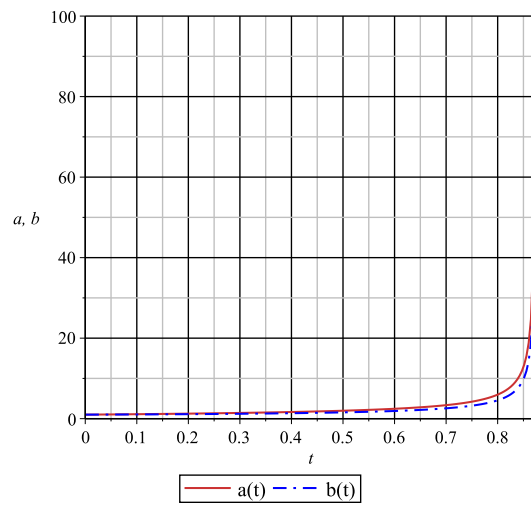


Figura 34 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 2$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 0.414213562$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

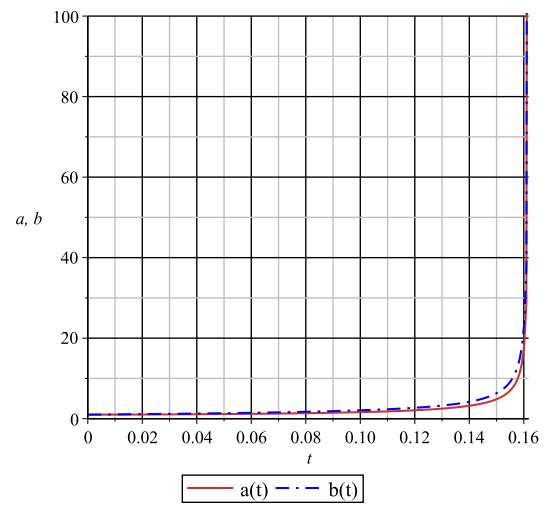


Figura 35 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.071067810$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

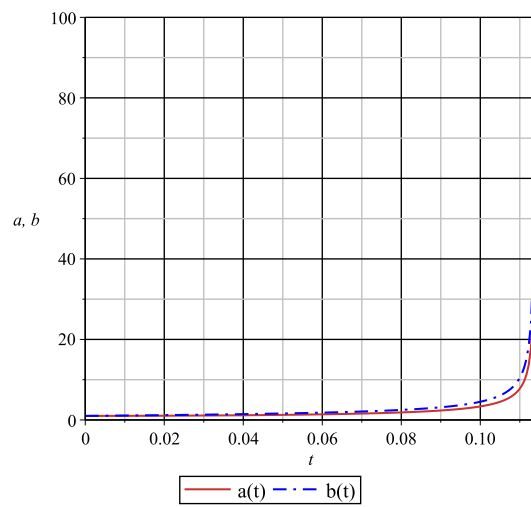


Figura 36 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 100$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 9.0$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 14 – Variação do parâmetro  $C_f$ , com  $w = -2$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma.

$C_f$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
2	0.414213562	0.87328434	2.010413128 $10^5$	1.694543825 $10^{13}$	2.636668734 $10^5$	2.222403854 $10^{13}$
3	0.732050808	0.69656421	2.504857876 $10^5$	3.330614427 $10^{13}$	2.817839506 $10^5$	3.746773688 $10^{13}$
4	1	0.59611106	2.089414023 $10^5$	2.347442068 $10^{13}$	2.168467458 $10^5$	2.436257753 $10^{13}$
5	1.236067977	0.52924854	2.819833395 $10^5$	5.412666233 $10^{13}$	2.780224802 $10^5$	5.336636971 $10^{13}$
20	3.472135954	0.25779219	98188.655479498	7.038700063 $10^{12}$	79952.250584841	5.731414510 $10^{12}$
25	4	0.23003503	2.211400700 $10^5$	5.936228854 $10^{13}$	1.768204530 $10^5$	4.746523928 $10^{13}$
50	6.071067810	0.16175996	91852.549945479	9.132130630 $10^{12}$	70295.998147520	6.988942802 $10^{12}$
60	6.745966692	0.14750121	70480.263525441	5.1363313049 $10^{12}$	53457.171674506	3.895753549 $10^{12}$
70	7.366600265	0.13644273	67275.351302444	4.921452471 $10^{12}$	50674.072976486	3.707004586 $10^{12}$
80	7.944271908	0.12754337	67931.246013238	5.375489579 $10^{12}$	50884.879656012	4.026587926 $10^{12}$
90	8.486832980	0.12018164	1.784513548 $10^5$	6.362479813 $10^{13}$	1.330613534 $10^5$	4.744150925 $10^{13}$
100	9	0.11396063	1.394538983 $10^5$	3.613640486 $10^{13}$	1.035829978 $10^5$	2.684125091 $10^{13}$

### 5.3.3 Variação da Condição Inicial $\dot{a}_0$

Vamos agora variar a condição inicial  $\dot{a}_0$  para diversos valores de  $\dot{b}_0$ , mantendo as condições iniciais  $a_0 = b_0 = 1$  e os parâmetros  $w$  e  $C_f$  fixos. Os valores que usaremos para  $\dot{b}_0$  serão obtidos resolvendo a equação (5.5). Vamos considerar os casos em que  $\dot{a}_0 \geq \dot{b}_0$ .

Resolvendo numericamente o sistema composto pelas equações (5.5)-(5.6) para um grande número de valores da condição inicial  $\dot{a}_0$ , a medida em que aumentamos seus valores menores são os valores obtidos de  $\dot{b}_0$ . Depois de estudarmos diversos valores de  $\dot{a}_0$ , chegamos a conclusão de que a medida em que aumentamos seu valor, menor é o intervalo de tempo para os fatores de escala sair da sua posição inicial e chegar a singularidade do tipo *Big Rip*.

Devido a velocidade inicial  $\dot{a}_0$  ser cada vez maior, a velocidade inicial  $\dot{b}_0$  ser cada vez menor e o intervalo de tempo, da posição inicial dos fatores de escala até  $t_s$ , ser cada vez menor; os fatores de escala  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$  não tem um comportamento bem definido, podendo aumentar ou diminuir seu valor. Para exemplificar esses resultados, vamos tomar o caso onde  $w = -2$  é associado a  $C_f = 25$ . Os exemplos podem ser observados nas Figuras 37-39 e na Tabela 15.

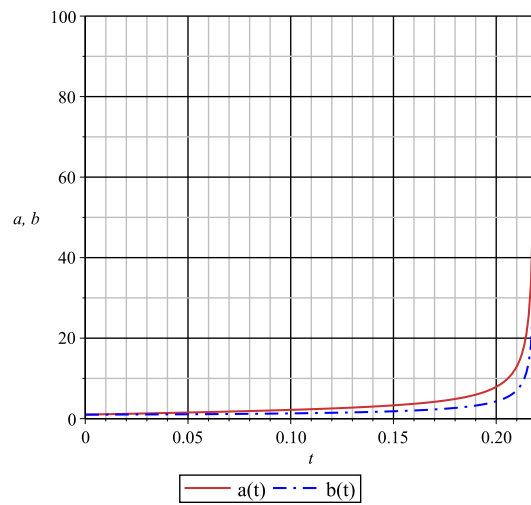


Figura 37 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 25$ ,  $\dot{a}_0 = 10$ ,  $\dot{b}_0 = 1.13552873$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

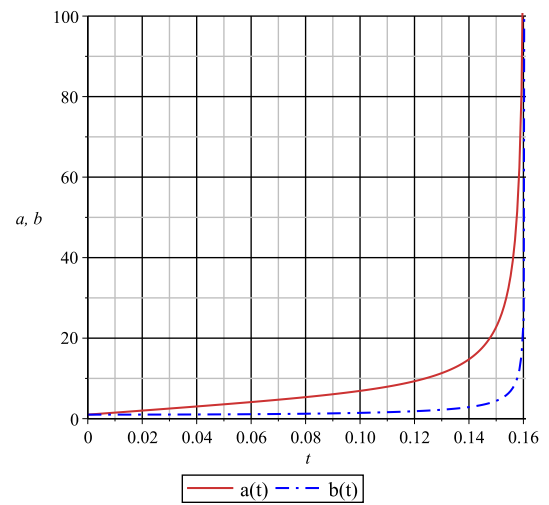


Figura 38 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 25$ ,  $\dot{a}_0 = 50$ ,  $\dot{b}_0 = 0.23942674$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

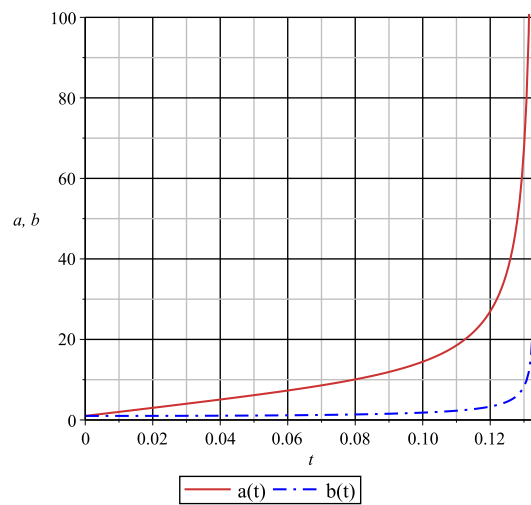


Figura 39 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 25$ ,  $\dot{a}_0 = 100$ ,  $\dot{b}_0 = 0.1199281$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 15 – Variação da condição inicial  $\dot{a}_0$ ,  $C_f = 25$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma.

$\dot{a}_0$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
10	1.13552873	0.21909302	2.709588117 10 <sup>5</sup>	1.495188349 10 <sup>14</sup>	4.976910097 10 <sup>5</sup>	2.746327476 10 <sup>14</sup>
50	0.23942674	0.16093269	52467.056956759	4.128703949 10 <sup>12</sup>	2.699365597 10 <sup>5</sup>	2.124166863 10 <sup>13</sup>
60	0.19966778	0.15350401	45840.620961677	3.128838689 10 <sup>12</sup>	2.660391336 10 <sup>5</sup>	1.815842095 10 <sup>13</sup>
70	0.17121918	0.14730533	44453.035907034	3.049045146 10 <sup>12</sup>	2.856953266 10 <sup>5</sup>	1.959591023 10 <sup>13</sup>
80	0.14985964	0.14201937	47214.333673375	3.705150044 10 <sup>12</sup>	3.315104072 10 <sup>5</sup>	2.601530868 10 <sup>13</sup>
90	0.13323472	0.13743368	56446.133813652	6.020947904 10 <sup>12</sup>	4.285229127 10 <sup>5</sup>	4.570930260 10 <sup>13</sup>
100	0.1199281	0.13339993	50410.053008177	4.699489887 10 <sup>12</sup>	4.104062466 10 <sup>5</sup>	3.826021460 10 <sup>13</sup>

### 5.3.4 Variação da Condição Inicial $\dot{b}_0$

Para as condições iniciais em  $a_0 = b_0 = \dot{a}_0 = 1$  e do parâmetro  $w$  fixado, vamos variar a condição inicial  $\dot{b}_0$  e com isso obteremos os valores do parâmetro  $C_f$  resolvendo a equação (5.5). Vamos considerar os casos em que  $\dot{b}_0 \geq \dot{a}_0$ .

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.5)-(5.6) para um grande número de valores da condição inicial  $\dot{b}_0$ , aumentando seus valores temos que o parâmetro  $C_f$  aumenta seu valor. Ao estudarmos diversos valores de  $\dot{b}_0$ , chegamos a conclusão de que a medida em que aumentamos seu valor, menor é o intervalo de tempo para os fatores de escala chegar à singularidade do tipo *Big Rip*.

Apesar de  $\dot{b}_0$  e  $C_f$  aumentarem, vemos que o intervalo de tempo, da posição inicial dos fatores de escala até  $t_s$ , diminui. Desta forma, os valores dos fatores de escala  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$  não apresentam um padrão em suas expansões, podendo aumentar ou diminuir quando aumentamos  $\dot{b}_0$ . Alguns exemplos desse comportamento podem ser observados nas Figuras 40-42 e na Tabela 16 onde é considerado os casos em que  $w = -2$  é associado a  $C_f = 9, 2601$  e  $10201$ .

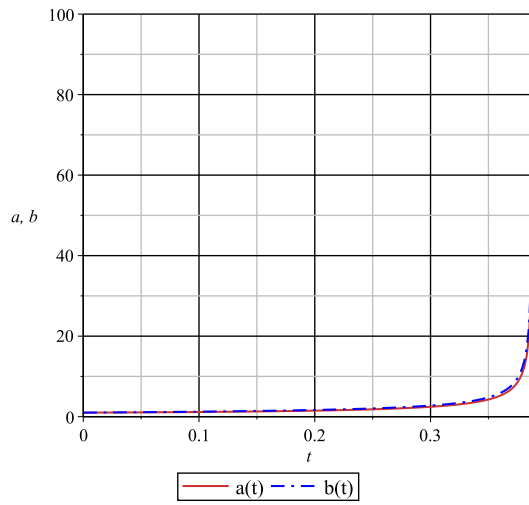


Figura 40 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 9$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 2$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

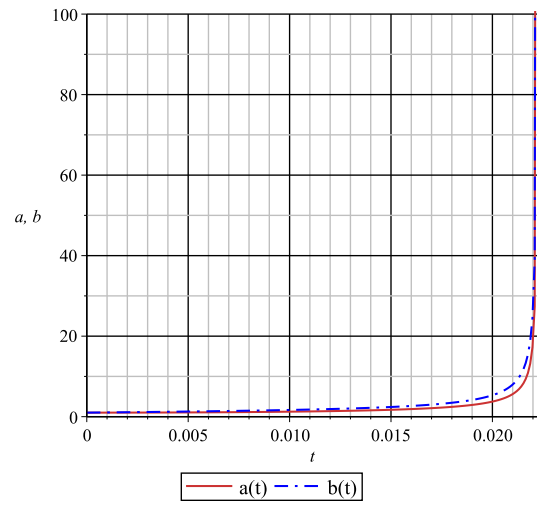


Figura 41 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 2601$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 50$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

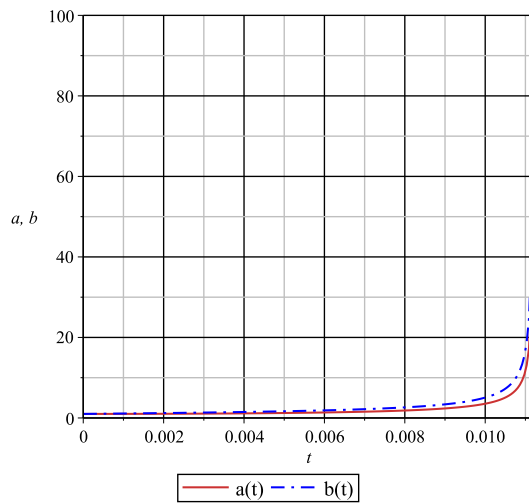


Figura 42 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 10201$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 100$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 16 – Variação da condição inicial  $\dot{b}_0$  para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma.

$\dot{b}_0$	$C_f$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
2	9	0.38889047	$2.013945770 \cdot 10^5$	$2.974680852 \cdot 10^{13}$	$1.792950582 \cdot 10^5$	$2.648261642 \cdot 10^{13}$
10	121	0.10351932	70788.692843309	$7.273957455 \cdot 10^{12}$	52242.231112258	$5.368198580 \cdot 10^{12}$
20	441	0.054028506	$2.537132272 \cdot 10^5$	$3.326550456 \cdot 10^{14}$	$1.816762871 \cdot 10^5$	$2.382041093 \cdot 10^{14}$
30	961	0.036554626	$4.337077127 \cdot 10^5$	$1.866341307 \cdot 10^{15}$	$3.073203015 \cdot 10^5$	$1.322468003 \cdot 10^{15}$
40	1681	0.027621570	$2.180702119 \cdot 10^5$	$4.413180841 \cdot 10^{14}$	$1.536991992 \cdot 10^5$	$3.110476924 \cdot 10^{14}$
50	2601	0.022197194	$2.000694697 \cdot 10^5$	$4.418729498 \cdot 10^{14}$	$1.405569184 \cdot 10^5$	$3.104336729 \cdot 10^{14}$
60	3721	0.018553624	$5.477764822 \cdot 10^5$	$6.548515831 \cdot 10^{15}$	$3.840020895 \cdot 10^5$	$4.590638428 \cdot 10^{15}$
70	5041	0.015937555	73837.063600561	$5.080558116 \cdot 10^{13}$	51680.860266609	$3.556040860 \cdot 10^{13}$
80	6561	0.013968059	$1.715371472 \cdot 10^5$	$4.765337929 \cdot 10^{14}$	$1.199239388 \cdot 10^5$	$3.331512190 \cdot 10^{14}$
90	8281	0.012431792	76963.168142253	$7.215461730 \cdot 10^{13}$	53756.994363034	$5.039833298 \cdot 10^{13}$
100	10201	0.011199973	93447.040499138	$1.300445526 \cdot 10^{14}$	65222.962328301	$9.076682315 \cdot 10^{13}$

### 5.3.5 Variação da Condição Inicial $a_0$

Nesta subseção iremos variar a condição inicial  $a_0$  para valores fixos de  $w$  e  $C_f$ , mantendo as condições iniciais  $\dot{a}_0 = b_0 = 1$  e, através da equação (5.5), obteremos a condição inicial  $\dot{b}_0$ .

Depois de resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.5)-(5.6) para um grande número de valores da condição inicial  $a_0$ , aumentando seu valor obtemos valores maiores para a velocidade inicial  $\dot{b}_0$ . Após estudarmos vários valores de  $a_0$  chegamos a conclusão que quanto maior o valor inicial de  $a(t)$ , menor é o intervalo de tempo que os fatores de escala levam para chegar à singularidade do tipo *Big Rip*.

Uma vez que  $a_0$  aumenta mas o intervalo de tempo  $t_s$  diminui, temos que os valores de  $a(t_s)$  não apresentam um padrão em suas expansões, podendo aumentar ou diminuir quando aumentamos  $a_0$ . O mesmo ocorre com os valores de  $b(t_s)$ , uma vez que  $\dot{b}_0$  aumenta e  $t_s$  diminui quando aumentamos  $a_0$ . Como exemplo, vamos tomar o caso onde  $w = -2$  é associado a  $C_f = 5$ . Esse caso pode ser observados nas Figuras 43-45 e na Tabela 17.

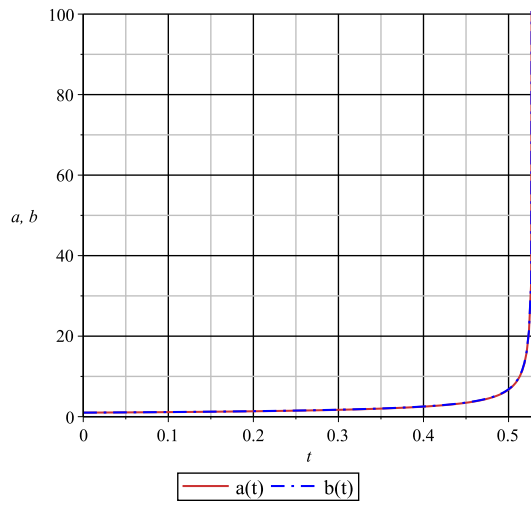


Figura 43 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 5$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 1.236067977$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

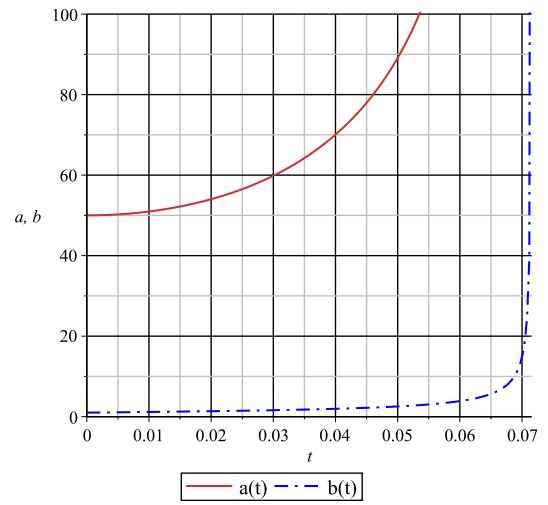


Figura 44 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 5$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 15.75974651$ ,  $a_0 = 50$  e  $b_0 = 1$ .

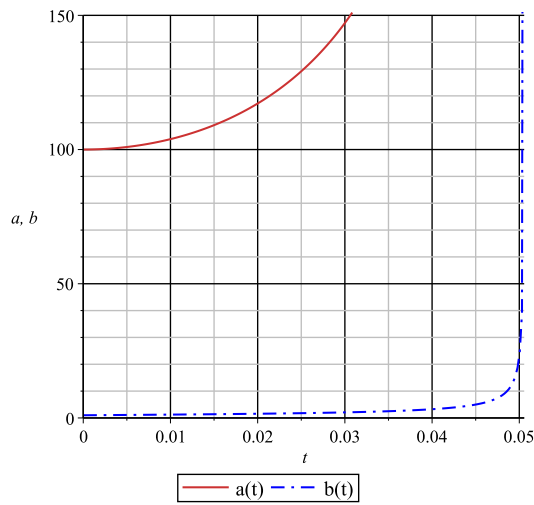


Figura 45 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 5$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 22.32831014$ ,  $a_0 = 100$  e  $b_0 = 1$ .



Tabela 17 – Variação da condição inicial  $a_0$ , com  $C_f = 5$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma.

$a_0$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
1	1.236067977	0.52924854	2.819833395 $10^5$	5.412666233 $10^{13}$	2.780224801 $10^5$	5.336636970 $10^{13}$
2	2.541381265	0.36564993	1.267734462 $10^5$	9.284044142 $10^{12}$	2.002221850 $10^5$	1.466293849 $10^{13}$
10	6.900714249	0.16039332	1.196132471 $10^6$	5.355749486 $10^{15}$	8.407644123 $10^6$	3.764568347 $10^{16}$
50	15.75974651	0.071527953	3.432744601 $10^5$	5.252408048 $10^{14}$	1.192070642 $10^7$	1.823974834 $10^{16}$
60	17.27495783	0.065289308	2.576123120 $10^5$	2.806648291 $10^{14}$	1.073150144 $10^7$	1.169181018 $10^{16}$
70	18.66726145	0.060441951	1.831834710 $10^5$	1.292439718 $10^{14}$	8.900745875 $10^6$	6.279864896 $10^{15}$
80	19.96248826	0.056535366	1.739333307 $10^5$	1.213700276 $10^{14}$	9.657007746 $10^6$	6.738622175 $10^{15}$
90	21.17851190	0.053299954	2.213567653 $10^5$	2.351990064 $10^{14}$	1.382454711 $10^7$	1.468904180 $10^{16}$
100	22.32831014	0.050563200	1.762618819 $10^6$	4.435653233 $10^{16}$	1.223017590 $10^8$	3.077738796 $10^{18}$

### 5.3.6 Variação da Condição Inicial $b_0$

Chegamos, enfim, no último caso em que vamos estudar neste capítulo em que abordamos o modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma. Com as condições iniciais fixadas em  $\dot{a}_0 = a_0 = 1$  e os parâmetros  $w$  e  $C_f$ , também fixados, vamos obter a condição inicial  $\dot{b}_0$  resolvendo a equação (5.5).

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (5.5)-(5.6) para um grande número de valores da condição inicial  $b_0$ , aumentando o valor inicial de  $b_0$  temos que o valor de  $\dot{b}_0$  aumenta rapidamente. Depois de estudarmos vários valores de  $b_0$  chegamos a conclusão que quanto maior o valor inicial de  $b(t)$ , menor é o tempo dos fatores de escala para chegar à singularidade do tipo *Big Rip*.

De modo que  $b_0$  e  $\dot{b}_0$  aumentam mas o intervalo de tempo, da posição inicial até  $t_s$ , diminui, temos que os valores de  $b(t_s)$  não apresentam um padrão em suas expansões, podendo aumentar ou diminuir quando aumentamos  $b_0$ . Observamos que os valores de  $a(t_s)$  também não tem um comportamento definido quando aumentamos  $b_0$ . Aqui é importante ressaltar que, para a maioria dos casos, os valores de  $b(t_s)$  são maiores que os de  $a(t_s)$ . Alguns exemplos desses comportamentos podem ser observados nas Figuras 46-48 e na Tabela 18 onde foi considerado o caso em que  $w = -2$  é associado a  $C_f = 20$ .

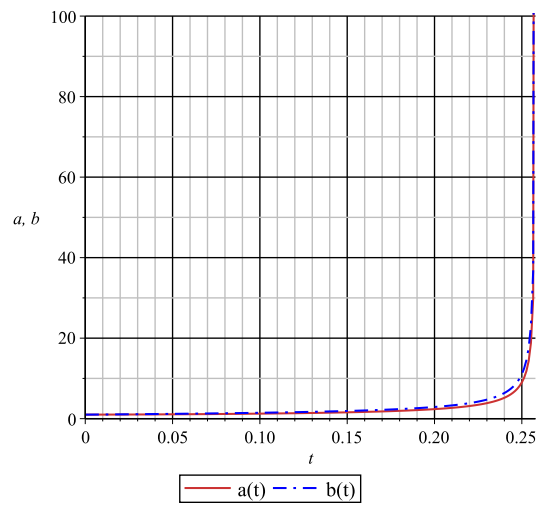


Figura 46 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 20$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 3.472135954$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

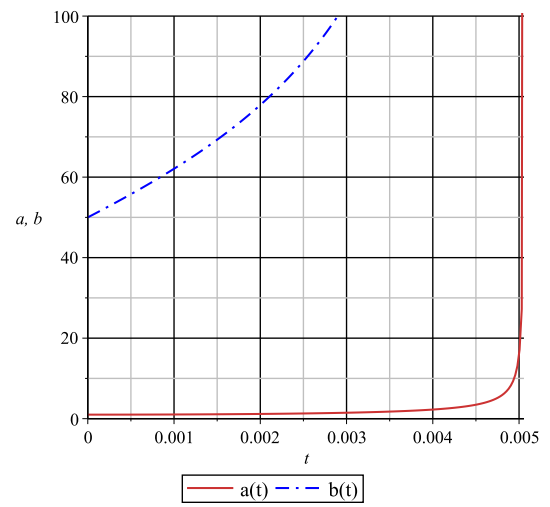


Figura 47 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 20$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 11130.45165$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 50$ .

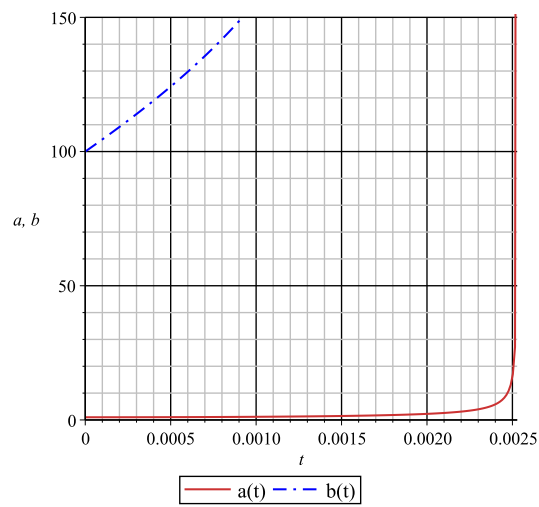


Figura 48 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_f = 20$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 44621.47134$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 100$ .

Tabela 18 – Variação da condição inicial  $b_0$ , com  $C_f = 20$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma.

$b_0$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
1	3.472135954	0.25779219	98188.655479498	7.038700063 $10^{12}$	79952.250584841	5.731414510 $10^{12}$
2	15.97220076	0.12740272	1.985641864 $10^5$	2.773175813 $10^{13}$	74206.545185148	1.036379462 $10^{13}$
10	437.3242672	0.025317623	1.933986785 $10^6$	3.562871006 $10^{15}$	1.361060976 $10^5$	2.507404632 $10^{14}$
50	11130.45165	0.0050567277	1.839466954 $10^7$	4.418972532 $10^{17}$	2.558386050 $10^5$	6.146043835 $10^{15}$
60	16039.80121	0.0042137000	1.047442568 $10^7$	9.867764250 $10^{16}$	1.213410900 $10^5$	1.143132765 $10^{15}$
70	21843.57796	0.0036115960	7.365072244 $10^7$	1.197524571 $10^{19}$	7.310587113 $10^5$	1.188666278 $10^{17}$
80	28541.78190	0.0031600500	3.105342152 $10^7$	1.292892225 $10^{18}$	2.696360745 $10^5$	1.122615638 $10^{16}$
90	36134.41302	0.0028088666	3.829633412 $10^8$	6.509677391 $10^{20}$	2.955162320 $10^6$	5.023238933 $10^{18}$
100	44621.47134	0.0025279318	1.388261823 $10^7$	1.545010900 $10^{17}$	96398.188988898	1.072825988 $10^{15}$

## 6 MODELO COSMOLÓGICO DO TIPO KS COM FLUIDO COMPLETO: FLUIDO DE RADIAÇÃO, POEIRA E FANTASMA.

Até aqui, nesta seção dos resultados, obtivemos os comportamentos dos fatores de escala,  $a(t)$  e  $b(t)$ , separadamente para cada modelo cosmológico com seus respectivos conteúdos materiais, ou seja, modelos com o fluido de radiação, fluido de poeira e fluido fantasma.

Neste trabalho estamos interessados em estudar o Universo primordial, considerando que o mesmo se inicia em uma singularidade do tipo *Big Bang* e posteriormente se expande aceleradamente [10]. Com isso, este Universo apresentará propriedades diferentes em diferentes épocas devido ao seu conteúdo material (fluido). No início dominará o fluido de radiação, devido às suas partículas com velocidades igual ou próximas a velocidade da luz, surgindo assim a pressão de radiação. Depois o fluido de poeira com suas partículas de massa não relativística, que exercem uma pressão aproximadamente nula; e por último o fluido fantasma que é conhecido por ter sua energia positiva e sua pressão negativa, proporcionando uma expansão acelerada do Universo.

Dito isso, o próximo passo será estudar o modelo cosmológico do tipo KS contendo todos os fluidos estudados anteriormente. O único fluido que contém todos os fluidos anteriores será chamado de fluido completo.

Afim de determinarmos os comportamentos dos fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  para o modelo do tipo KS com o fluido completo, vamos utilizar o sistema composto pelas equações (4.22) e (4.23):

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} = C_r[ab^2]^{-\frac{4}{3}} + C_p[ab^2]^{-1} + C_f[ab^2]^{-(1+w)} \quad (6.1)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{\dot{b}^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} = 0. \quad (6.2)$$

Após calcularmos as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias (6.1)-(6.2) para um grande número de condições iniciais, das constantes positivas  $C_r$ ,  $C_p$  e  $C_f$ , que estão relacionadas respectivamente com a energia do fluido de radiação, de poeira e do fluido fantasma, e da constante  $w$  do fluido fantasma, obtemos que os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$  são expansivos. Eles partem de um valor inicial finito e vão para valores infinitos em um tempo finito. Este comportamento dá origem a singularidade do tipo *Big Rip*. Devido a esse resultado vemos que o fluido fantasma, Seção (5.3), domina a evolução do fluido completo em relação aos outros constituintes: o fluido de radiação, Seção (5.1) e o de poeira, Seção (5.2), levando os fatores de escala à uma singularidade do tipo *Big Rip*.

Semelhantemente a subseção anterior, calculando as soluções numéricas para o modelo do tipo KS com o fluido completo obtemos o instante de tempo logo antes da

solução atingir a singularidade do *Big Rip*. Chamaremos esse instante de tempo de  $t_s$  e os valores dos fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$ , no instante  $t_s$ , chamaremos de  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$ , respectivamente.

## 6.1 PARÂMETRO DE ANISOTROPIA

Como mencionamos na Seção (3), o modelo cosmológico padrão FRW foi proposto de forma a não quebrar a isotropia, assim, sua métrica esfericamente simétrica possui apenas um fator de escala para toda a parte angular. Devido a quebra do princípio cosmológico na parte espacial do elemento de linha do tipo KS, nessa seção vamos introduzir o parâmetro de anisotropia,  $\Delta$ , que é um método para estudar a anisotropia de um modelo cosmológico. Posteriormente, vamos analisar os resultados e mostrar que, para diversas variações das condições iniciais e dos parâmetros, o Universo primordial descrito pelo modelo cosmológico do tipo Kantowski-Sachs inicia sua evolução temporal dos fatores de escala de forma anisotrópica e com o passar do tempo se transforma em um Universo isotrópico do tipo FRW.

O parâmetro de anisotropia de expansão [14] é definido como:

$$\Delta = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{H_i - H}{H} \right)^2, \quad (6.3)$$

onde  $H$  é o parâmetro de Hubble médio e  $H_{i=1,2,3}$  é o parâmetro de Hubble direcional nas direções  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ , respectivamente. Para a métrica de Kantowski-Sachs, o parâmetro de Hubble médio é dado por:

$$H = \frac{1}{3}(H_r + H_\theta + H_\phi) \quad (6.4)$$

e os parâmetros de Hubble direcionais são dados por:

$$H_r = \frac{\dot{a}}{a}, \quad H_\theta = \frac{\dot{b}}{b} \quad \text{e} \quad H_\phi = \frac{\dot{b}}{b}, \quad (6.5)$$

sendo  $a$  e  $b$  fatores de escala dependentes do tempo e  $\dot{a}$  e  $\dot{b}$  suas derivadas temporais, respectivamente. Como a métrica KS apresenta um fator de escala na parte radial e outro na parte angular, podemos substituir a equação (6.4) em (6.3) e utilizar que  $H_\theta = H_\phi$ . Com isso, obtemos o resultado,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{H_r - H}{H} \right)^2 + 2 \left( \frac{H_\theta - H}{H} \right)^2 \right] \\ \Delta &= 2 \left[ \left( \frac{H_r - H_\theta}{H_r + 2H_\theta} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

O estudo da equação (6.6) nos informa que o maior valor do parâmetro de anisotropia do modelo KS, ou seja o máximo absoluto, ocorre quando  $H_r \rightarrow \infty$  ou quando  $H_\theta \rightarrow 0$ . Logo,

$$\lim_{H_r \rightarrow \infty} \Delta = 2 = \lim_{H_\theta \rightarrow 0} \Delta. \quad (6.7)$$

Como  $H_\theta = \frac{\dot{b}}{b}$ , para que  $\Delta$  seja máximo precisamos que  $\dot{b}$  tenha um valor muito pequeno, comparado ao fator de escala  $b$ . Por outro lado, como  $H_r = \frac{\dot{a}}{a}$ , para que  $\Delta$  seja máximo precisamos que  $\dot{a}$  tenha um valor muito grande, comparado ao fator de escala  $a$ . Quando  $H_\theta \rightarrow \infty$  ou  $H_r \rightarrow 0$ , temos um outro valor máximo. Desta vez, um máximo local implicando em  $\Delta \rightarrow 0.5$ . Logo:

$$\lim_{H_r \rightarrow 0} \Delta = 0.5 = \lim_{H_\theta \rightarrow \infty} \Delta. \quad (6.8)$$

Finalmente, quando  $H_\theta = H_r$ , temos que  $\Delta = 0$ . Esse é o valor mínimo do parâmetro de anisotropia e significa que o Universo é isotrópico.

O estudo do parâmetro de anisotropia de expansão para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo será dado através dos resultados obtidos após solucionar o sistema de equações diferenciais ordinárias (6.1)-(6.2) para um grande número de condições iniciais e parâmetros do modelo.

## 6.2 RESULTADOS PARA O FLUIDO COMPLETO

### 6.2.1 Variação do Parâmetro $w$

Vamos iniciar o estudo deste modelo variando o parâmetro  $w$ . Para isso, vamos fixar as condições iniciais em  $a_0 = b_0 = \dot{a}_0 = 1$  e os parâmetros relacionados com as energias dos fluidos em  $C_r = C_p = C_f = 1$ . A condição inicial  $\dot{b}_0$  será obtida através da equação (6.1).

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (6.1)-(6.2), para um grande número de valores do parâmetro  $w$ , mantendo fixado os demais parâmetros e condições iniciais, concluimos que o intervalo de tempo em que os fatores de escala levam para chegar à singularidade do tipo *Big Rip* é cada vez menor a medida em que diminuimos  $w$ . O fluido completo se torna mais repulsivo quanto menor é o valor de  $w$ .

Com o intervalo de tempo para ocorrer a singularidade do Universo, da posição inicial dos fatores de escala até o *Big Rip*, cada vez menor com a diminuição de  $w$ , os fatores de escala  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$  tem seus valores máximos cada vez menor, pois tem menos tempo para evoluir. A partir do estudo dos valores do parâmetro de anisotropia, inicial  $\Delta(0)$  e final  $\Delta(t_s)$ , obtidos através da equação (6.6), podemos concluir que ocorre a isotropização do modelo para a variação do parâmetro  $w$ . Alguns exemplos desse comportamento pode ser observados nas Figuras 49-51 e na Tabela 19, onde é considerado os casos em que  $w = -2, -10$  e  $-20$ .

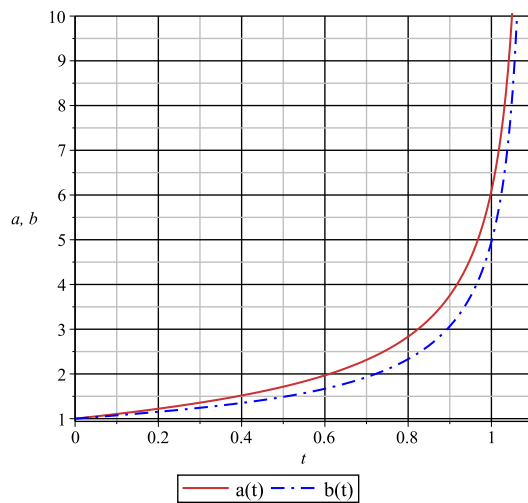


Figura 49 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 0.732050808$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

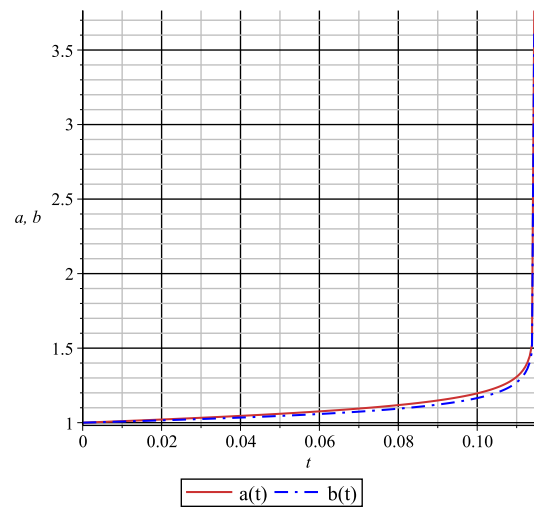


Figura 50 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -10$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 0.732050808$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

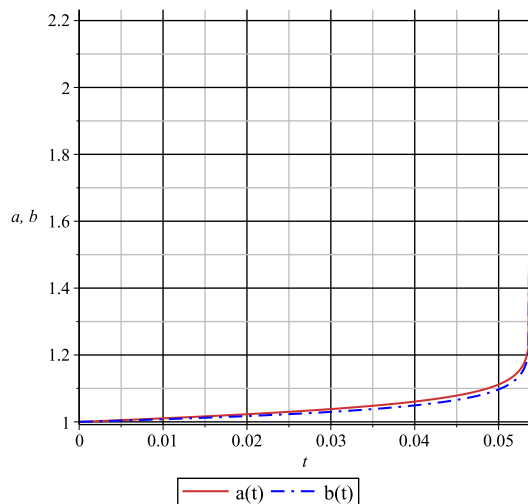


Figura 51 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -20$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 0.732050808$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 19 – Variação do parâmetro  $w$ , com  $\Delta$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo.

$w$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$	$\Delta(0)$	$\Delta(t_s)$
-2	0.732050808	1.0943921	47973.699646039	$3.227713573 \cdot 10^{11}$	59006.262301422	$3.969993700 \cdot 10^{11}$	0.023649266	$4.928779834 \cdot 10^{-15}$
-10	0.732050808	0.111445996	3.655062554	$9.578447332 \cdot 10^7$	3.764932930	$9.866373002 \cdot 10^7$	0.023649266	$2.738975849 \cdot 10^{-16}$
-20	0.732050808	0.053824136	2.200980543	$8.456647883 \cdot 10^9$	2.232454475	$8.577577450 \cdot 10^9$	0.023649266	$7.166738921 \cdot 10^{-17}$

### 6.2.2 Variação do Parâmetro $C_r$

Para as condições iniciais fixadas em  $a_0 = b_0 = \dot{a}_0 = 1$  e os parâmetros em  $C_p = C_f = 1$  e  $w = -2$ , vamos variar positivamente a constante relacionada a energia do fluido de radiação  $C_r$  de forma a obtermos a condição inicial  $\dot{b}_0$  na equação (6.1).

Resolvendo numericamente o sistema composto pelas equações (6.1)-(6.2) para um grande número de valores do parâmetro  $C_r$ , temos que ao aumentá-lo maiores são os valores obtidos para  $\dot{b}_0$ . Depois de estudarmos diversos valores de  $C_r$ , chegamos a conclusão que a medida em que aumentamos seu valor, menores são os intervalos de tempo em que os fatores de escala levam para atingir a singularidade do tipo *Big Rip*, devido ao fluido completo se tornar mais repulsivo. Aqui é importante ressaltar que, para todas as variações do parâmetro  $C_r$ , o fator de escala  $a(t_s)$  é maior que  $b(t_s)$  até  $C_r = 3$ . Após esse valor,  $b(t_s)$  é maior se comparado com  $a(t_s)$ .

Apesar de o intervalo de tempo para a solução atingir a singularidade ser cada vez menor ao aumentarmos  $C_r$ , por outro lado temos que  $\dot{b}_0$  aumenta nessas condições, desta forma, os valores dos fatores de escala no instante anterior a singularidade  $t_s$ ,  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$ , não tem um comportamento bem definido, podendo aumentar ou diminuir quando aumentamos  $C_r$ . Como exemplo desses resultados vamos considerar os casos em que  $w = -2$  é associado as seguintes energias do fluido completo: ( $C_r = 2, C_p = 1, C_f = 1$ ), ( $C_r = 50, C_p = 1, C_f = 1$ ), ( $C_r = 100, C_p = 1, C_f = 1$ ). Por fim, após estudarmos os valores de  $\Delta(0)$  e  $\Delta(t_s)$  obtidos para as diferentes energias relacionadas ao fluido completo, podemos concluir que o modelo se isotropiza quando variamos o parâmetro  $C_r$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 52-54 e na Tabela 20.

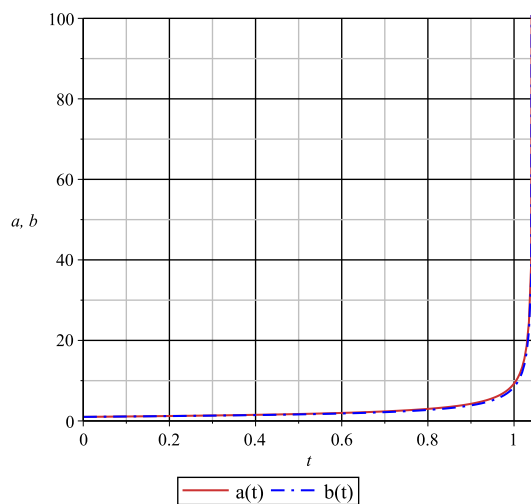


Figura 52 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2, C_r = 2, C_p = 1, C_f = 1, \dot{a}_0 = 1, \dot{b}_0 = 1, a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

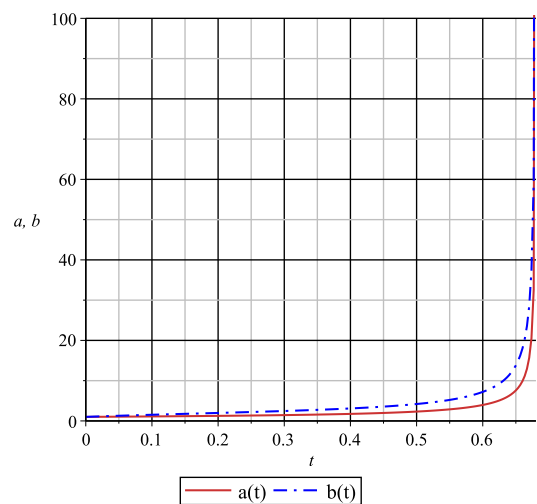


Figura 53 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2, C_r = 50, C_p = 1, C_f = 1, \dot{a}_0 = 1, \dot{b}_0 = 6.21110255, a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .



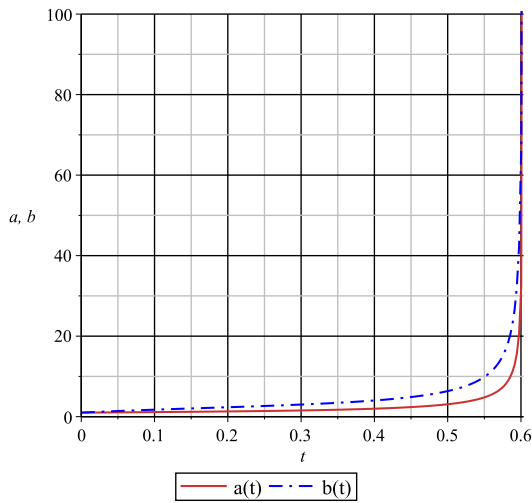


Figura 54 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 100$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 9.099504938$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 20 – Variação do parâmetro  $C_r$ , com  $\Delta$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo.

$C_r$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$	$\Delta(0)$	$\Delta(t_s)$
1	0.732050808	1.0943921	47973.699646039	$3.227713573 \cdot 10^{11}$	59006.262301422	$3.969993700 \cdot 10^{11}$	0.023649266	$4.928779834 \cdot 10^{-15}$
2	1	1.0450222	67455.801510833	$7.162428829 \cdot 10^{11}$	74330.056583229	$7.892333356 \cdot 10^{11}$	0	$3.592303612 \cdot 10^{-15}$
3	1.236067977	1.0081566	66950.200572312	$6.754978238 \cdot 10^{11}$	68133.633696168	$6.874380573 \cdot 10^{11}$	0.009245081	$3.143445020 \cdot 10^{-15}$
4	1.449489743	0.97888443	$3.272352756 \cdot 10^5$	$3.459543283 \cdot 10^{13}$	$3.131254046 \cdot 10^5$	$3.310372854 \cdot 10^{13}$	0.026580777	$2.629555297 \cdot 10^{-15}$
5	1.645751311	0.95469658	$4.116264989 \cdot 10^5$	$5.988179572 \cdot 10^{13}$	$3.747119583 \cdot 10^5$	$5.451160929 \cdot 10^{13}$	0.045283692	$1.885498634 \cdot 10^{-15}$
10	2.464101615	0.87388005	$3.072177075 \cdot 10^5$	$2.659950387 \cdot 10^{13}$	$2.382775394 \cdot 10^5$	$2.063053003 \cdot 10^{13}$	0.121990572	$2.081746056 \cdot 10^{-16}$
20	3.690415760	0.78944096	$1.165415918 \cdot 10^6$	$6.892209526 \cdot 10^{14}$	$7.725283435 \cdot 10^5$	$4.568692829 \cdot 10^{14}$	0.206107869	$1.626695706 \cdot 10^{-16}$
25	4.196152423	0.76236306	$3.062143259 \cdot 10^5$	$2.380930568 \cdot 10^{13}$	$1.934250439 \cdot 10^5$	$1.503951913 \cdot 10^{13}$	0.231601091	$4.870284633 \cdot 10^{-16}$
50	6.211102551	0.68042349	$1.825703811 \cdot 10^6$	$1.926914115 \cdot 10^{15}$	$1.002592590 \cdot 10^6$	$1.058172736 \cdot 10^{15}$	0.301468190	$1.955211651 \cdot 10^{-15}$
60	6.874007874	0.65962861	$3.640083342 \cdot 10^5$	$3.362388894 \cdot 10^{13}$	$1.931842589 \cdot 10^5$	$1.784466508 \cdot 10^{13}$	0.317272082	$2.915320684 \cdot 10^{-15}$
70	7.485281374	0.64233993	$4.936349981 \cdot 10^5$	$7.100771708 \cdot 10^{13}$	$2.547467327 \cdot 10^5$	$3.664445690 \cdot 10^{13}$	0.329797382	$4.253043929 \cdot 10^{-15}$
80	8.055385138	0.62759212	$5.284599831 \cdot 10^5$	$8.321414042 \cdot 10^{13}$	$2.663587104 \cdot 10^5$	$4.194227506 \cdot 10^{13}$	0.340041815	$3.657004208 \cdot 10^{-15}$
90	8.591663047	0.61476577	$9.407211849 \cdot 10^6$	$1.101305140 \cdot 10^{17}$	$4.646144449 \cdot 10^6$	$5.439256120 \cdot 10^{16}$	0.348623926	$2.784535621 \cdot 10^{-15}$
100	9.099504938	0.60344051	$9.508185015 \cdot 10^5$	$3.545185951 \cdot 10^{14}$	$4.613267025 \cdot 10^5$	$1.720085557 \cdot 10^{14}$	0.355950232	$2.853869456 \cdot 10^{-15}$

### 6.2.3 Variação do Parâmetro $C_p$

Para o parâmetro  $C_p$ , vamos fazer sua variação mantendo as condições iniciais fixadas em  $a_0 = b_0 = \dot{a}_0 = 1$  e os parâmetros em  $C_r = C_f = 1$  e  $w = -2$ . Com isso, acharemos a condição inicial  $\dot{b}_0$  através da equação (6.1).

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (6.1)-(6.2) para um grande número de valores do parâmetro  $C_p$ , aumentando a constante relacionada com a energia de expansão do fluido de poeira, obtemos maiores valores para  $\dot{b}_0$ . Estudando diversos valores de  $C_p$ , chegamos a conclusão que a medida em que aumentamos seu valor, menores são os intervalos de tempo para os fatores de escala atingir a singularidade do tipo *Big Rip*, desde suas posições iniciais. Analisando os mesmos valores de  $C_r$ , subseção

anterior, e  $C_p$ , com as mesmas condições iniciais e parâmetros fixados, vemos que o intervalo de tempo para que o Universo atinja a singularidade quando aumentamos o parâmetro  $C_p$  é menor do que quando aumentamos o parâmetro  $C_r$ . Devido a isso podemos dizer que o fluido de poeira domina sobre o fluido de radiação durante a expansão para o modelo cosmológico do tipo KS com o fluido completo. Aqui é importante ressaltar o seguinte resultado: para todas as variações do parâmetro  $C_p$  o fator de escala  $a(t_s)$  é maior que  $b(t_s)$  até  $C_p = 3$ . Após esse valor,  $b(t_s)$  é maior se comparado com  $a(t_s)$ .

Apesar do intervalo de tempo para a solução atingir a singularidade ser cada vez menor ao aumentarmos  $C_p$ , por outro lado temos que nessas condições  $\dot{b}_0$  aumenta, desta forma os valores dos fatores de escala no instante anterior a singularidade  $t_s$ ,  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$ , não tem um comportamento bem definido, podendo aumentar ou diminuir quando aumentamos  $C_p$ . Para exemplificar esses resultados vamos considerar os casos em que  $w = -2$  é associado as seguintes energias do fluido completo:  $(C_r = 1, C_p = 2, C_f = 1)$ ,  $(C_r = 1, C_p = 50, C_f = 1)$ ,  $(C_r = 1, C_p = 100, C_f = 1)$ . Analisando os diferentes valores de  $\Delta(0)$  e  $\Delta(t_s)$  obtidos para as diferentes energias relacionadas ao fluido completo, podemos concluir que o modelo se isotropiza quando variamos o parâmetro  $C_p$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 55-57 e na Tabela 21.

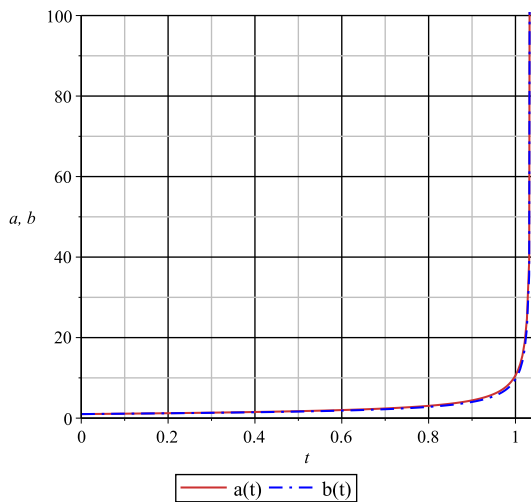


Figura 55 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 2$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 1$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

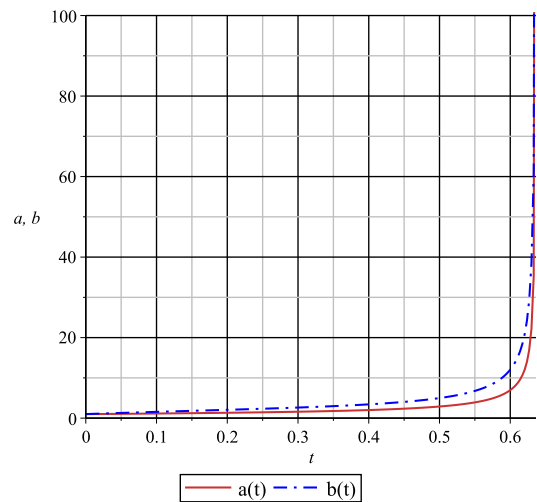


Figura 56 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 50$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.211102551$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

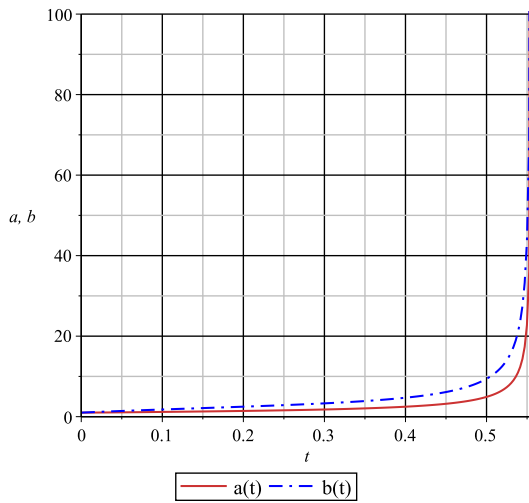


Figura 57 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 100$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 9.099504938$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 21 – Variação do parâmetro  $C_p$ , com  $\Delta$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo.

$C_p$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$	$\Delta(0)$	$\Delta(t_s)$
1	0.732050808	1.0943921	47973.699646039	$3.227713573 \cdot 10^{11}$	59006.262301422	$3.969993700 \cdot 10^{11}$	0.023649266	$4.928779834 \cdot 10^{-15}$
2	1	1.0367679	84172.741265240	$1.244366462 \cdot 10^{12}$	92540.484491861	$1.368070694 \cdot 10^{12}$	0	$3.632097336 \cdot 10^{-15}$
3	1.236067977	0.99449548	$2.568244824 \cdot 10^5$	$1.944960030 \cdot 10^{13}$	$2.608535891 \cdot 10^5$	$1.975472671 \cdot 10^{13}$	0.009245081	$2.926036262 \cdot 10^{-15}$
4	1.449489743	0.96132174	$3.148463421 \cdot 10^5$	$3.140291505 \cdot 10^{13}$	$3.010693494 \cdot 10^5$	$3.002878838 \cdot 10^{13}$	0.026580777	$2.605507958 \cdot 10^{-15}$
5	1.645751311	0.93414175	$2.850385583 \cdot 10^5$	$2.390651576 \cdot 10^{13}$	$2.597402614 \cdot 10^5$	$2.178471628 \cdot 10^{13}$	0.045283692	$1.610492068 \cdot 10^{-15}$
10	2.464101615	0.84461674	$8.208751859 \cdot 10^5$	$3.120071055 \cdot 10^{14}$	$6.431933099 \cdot 10^5$	$2.444718509 \cdot 10^{14}$	0.121990572	$2.599634762 \cdot 10^{-16}$
20	3.690415760	0.75280303	$2.979450578 \cdot 10^5$	$2.306148089 \cdot 10^{13}$	$2.024654340 \cdot 10^5$	$1.567118731 \cdot 10^{13}$	0.206107869	$5.252846696 \cdot 10^{-17}$
25	4.196152423	0.72367259	$1.046580827 \cdot 10^5$	$5.220822751 \cdot 10^{14}$	$6.815658969 \cdot 10^6$	$3.399961810 \cdot 10^{14}$	0.231601091	$1.826289732 \cdot 10^{-16}$
50	6.211102551	0.63634762	$1.786266428 \cdot 10^6$	$1.871204845 \cdot 10^{15}$	$1.031760155 \cdot 10^6$	$1.080821265 \cdot 10^{15}$	0.301468190	$1.139094612 \cdot 10^{-15}$
60	6.874007874	0.61437688	$4.192876068 \cdot 10^5$	$4.924576090 \cdot 10^{13}$	$2.354023047 \cdot 10^5$	$2.764824540 \cdot 10^{13}$	0.317272082	$1.776038622 \cdot 10^{-15}$
70	7.485281374	0.59616919	$3.266483546 \cdot 10^5$	$2.607934539 \cdot 10^{13}$	$1.792225089 \cdot 10^5$	$1.430898420 \cdot 10^{13}$	0.329797382	$1.914218252 \cdot 10^{-15}$
80	8.055385138	0.58067988	$2.999058391 \cdot 10^5$	$2.086379993 \cdot 10^{13}$	$1.614241169 \cdot 10^5$	$1.122992766 \cdot 10^{13}$	0.340041815	$3.117634646 \cdot 10^{-15}$
90	8.591663047	0.56724080	$3.243418541 \cdot 10^5$	$2.517025840 \cdot 10^{13}$	$1.717451212 \cdot 10^5$	$1.332812736 \cdot 10^{13}$	0.348623926	$1.674305621 \cdot 10^{-15}$
100	9.099504938	0.55539975	$2.492708239 \cdot 10^6$	$4.092394225 \cdot 10^{15}$	$1.301338356 \cdot 10^6$	$2.136467513 \cdot 10^{15}$	0.355950232	$1.871013441 \cdot 10^{-15}$

## 6.2.4 Variação do Parâmetro $C_f$

Agora, vamos variar o parâmetro  $C_f$  e, através da equação (6.1), vamos obter a condição inicial  $\dot{b}_0$  e então estudarmos a solução do sistema. Para isso, vamos fixar as condições iniciais em  $a_0 = b_0 = \dot{a}_0 = 1$  e os parâmetros em  $C_r = C_p = 1$  e  $w = -2$ .

Depois de resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (6.1)-(6.2) para um grande número de valores do parâmetro  $C_f$ , a medida em que aumentamos seu valor maiores são os valores obtidos para  $\dot{b}_0$ . Após estudarmos diversos valores de  $C_f$ , chegamos a conclusão que a aumentando seu valor, menores são os intervalos de tempo obtidos para ocorrer a singularidade do tipo *Big Rip*, tendo os fatores de escala evoluídos desde suas posições iniciais fixadas. Analisando esses intervalos de tempo para os mesmos

valores de  $C_r$ ,  $C_p$  e  $C_f$ , e para as mesmas condições iniciais e parâmetros fixados, vemos que eles são menores para o fluido fantasma. Logo, podemos dizer que o fluido fantasma domina sobre os fluidos de radiação e poeira, permitindo assim uma expansão mais acelerada do Universo no modelo cosmológico do tipo KS. Aqui é importante ressaltar que, para todas as variações do parâmetro  $C_f$ , o fator de escala  $a(t_s)$  é maior que  $b(t_s)$  até  $C_f = 2$ . Após esse valor,  $b(t_s)$  é maior se comparado com  $a(t_s)$ .

Apesar do intervalo de tempo para a solução atingir a singularidade ser cada vez menor ao aumentarmos  $C_f$ , por outro lado temos que  $\dot{b}_0$  aumenta nessas condições. Desta forma, os valores dos fatores de escala no instante anterior a singularidade  $t_s$ ,  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$ , não tem um comportamento bem definido, podendo aumentar ou diminuir quando aumentamos  $C_f$ . Como exemplo para esses resultados vamos considerar os casos em que  $w = -2$  é associado as seguintes energias do fluido completo:  $(C_r = 1, C_p = 1, C_f = 2)$ ,  $(C_r = 1, C_p = 1, C_f = 50)$ ,  $(C_r = 1, C_p = 1, C_f = 100)$ . Estudando os diferentes valores de  $\Delta(0)$  e  $\Delta(t_s)$  obtidos para as diferentes energias relacionadas ao fluido completo, podemos concluir que o modelo se isotropiza quando variamos o parâmetro  $C_f$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 58-60 e na Tabela 22.

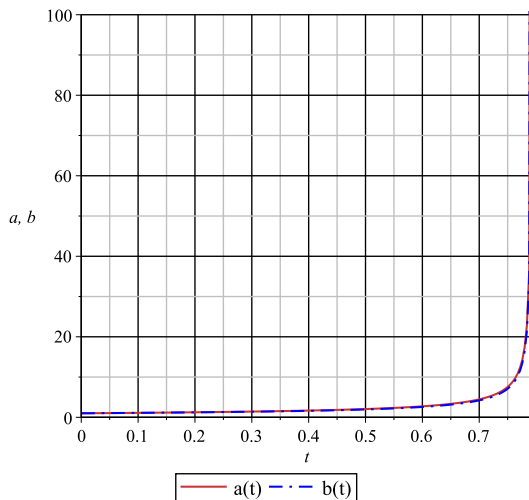


Figura 58 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 2$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 1$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

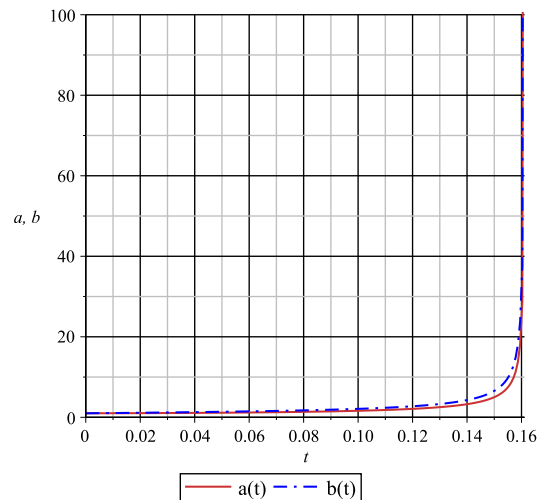


Figura 59 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.211102551$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

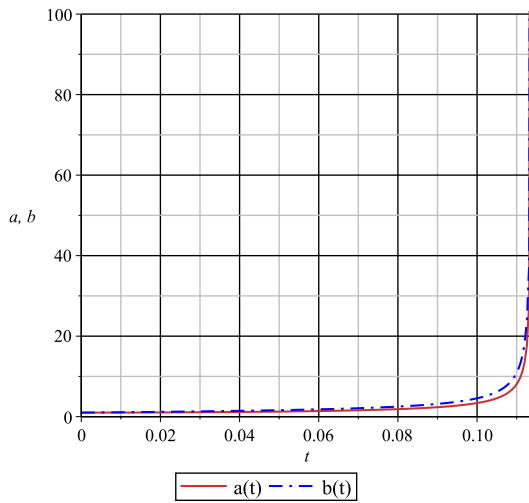


Figura 60 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 100$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 9.099504938$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 22 – Variação do parâmetro  $C_f$ , com  $\Delta$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo.

$C_f$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$	$\Delta(0)$	$\Delta(t_s)$
1	0.732050808	1.0943921	47973.699646039	3.227713573 $10^{11}$	59006.262301422	3.969993699 $10^{11}$	0.023649266	4.928779834 $10^{-15}$
2	1	0.79183835	4.160928928 $10^5$	9.399494447 $10^{13}$	4.421186816 $10^5$	9.987413014 $10^{13}$	0	3.487664566 $10^{-15}$
3	1.236067977	0.65211114	3.669973150 $10^5$	8.123131417 $10^{13}$	3.637434769 $10^5$	8.051110030 $10^{13}$	0.009245081	2.316794216 $10^{-15}$
4	1.449489743	0.56713730	9.764576476 $10^5$	1.059908524 $10^{15}$	9.267963291 $10^5$	1.006002907 $10^{15}$	0.026580777	2.159454656 $10^{-15}$
5	1.645751311	0.50847059	1.550445639 $10^5$	1.172545758 $10^{13}$	1.427527684 $10^5$	1.079587274 $10^{13}$	0.045283692	1.770306834 $10^{-15}$
10	2.464101615	0.36085199	2.190474334 $10^5$	3.782578865 $10^{13}$	1.864422376 $10^5$	3.219542062 $10^{13}$	0.121990572	7.906472689 $10^{-16}$
20	3.690415760	0.25520441	2.458064015 $10^5$	6.931179110 $10^{13}$	1.973933412 $10^5$	5.566041148 $10^{13}$	0.206107869	3.957937115 $10^{-16}$
25	4.196152423	0.22818800	2.927750809 $10^5$	1.190766113 $10^{14}$	2.315781464 $10^5$	9.418677231 $10^{13}$	0.231601091	3.186257329 $10^{-16}$
50	6.211102551	0.16111255	75162.282428435	5.517541317 $10^{12}$	57232.470389609	4.201342764 $10^{12}$	0.301468190	1.649597278 $10^{-16}$
60	6.874007874	0.14700984	1.446743385 $10^5$	3.094292771 $10^{13}$	1.092764408 $10^5$	2.337202969 $10^{13}$	0.317272082	1.073350848 $10^{-16}$
70	7.485281374	0.13605353	63380.307618199	4.232289519 $10^{12}$	47572.565718904	3.176710150 $10^{12}$	0.329797382	1.244212061 $10^{-16}$
80	8.055385138	0.12722533	1.226585130 $10^5$	2.351399544 $10^{13}$	91599.498247272	1.755989122 $10^{13}$	0.340041815	6.993195348 $10^{-17}$
90	8.591663047	0.11991547	3.798613000 $10^5$	4.200546456 $10^{14}$	2.824814550 $10^5$	3.123709772 $10^{14}$	0.348623926	4.606848927 $10^{-17}$
100	9.099504938	0.11373364	92726.797984060	1.301247353 $10^{13}$	68709.977466097	9.642161349 $10^{12}$	0.355950232	4.891785447 $10^{-17}$

### 6.2.5 Variação da Condição Inicial $\dot{a}_0$

O próximo passo será analisar o comportamento dos fatores de escala quando variamos a condição inicial  $\dot{a}_0$  para diversos valores dos parâmetros onde  $C_r = C_p = C_f$ . O valor da condição inicial  $\dot{b}_0$  será obtido usando a equação (6.1) e, para isso, vamos fixar as condições iniciais em  $a_0 = b_0 = 1$  e o parâmetro em  $w = -2$ .

Dito isto, vamos considerar os casos em que  $\dot{a}_0 > \dot{b}_0$ . Resolvendo numericamente o sistema composto pelas equações (6.1)-(6.2) para um grande número de valores da condição inicial  $\dot{a}_0$ , a medida em que aumentamos seus valores menores são os valores obtidos de  $\dot{b}_0$ . Depois de estudarmos diversos valores de  $\dot{a}_0$ , chegamos a conclusão de que a medida em que aumentamos seu valor, menor é o intervalo de tempo para os fatores

de escala sair da sua posição inicial e chegar à singularidade do tipo *Big Rip*. Devido a velocidade inicial de  $\dot{a}_0$  ser cada vez maior e o tempo  $t_s$  ser cada vez menor, os fatores de escala  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$  não tem um comportamento bem definido, podendo aumentar ou diminuir seus valores. Exemplificando esses resultados, vamos considerar o caso em que  $w = -2$  é associado a seguinte energia do fluido completo: ( $C_r = 50, C_p = 50, C_f = 50$ ). Analisando os diferentes valores de  $\Delta(0)$  e  $\Delta(t_s)$  obtidos, podemos concluir que o modelo se isotropiza quando variamos a condição inicial  $\dot{a}_0$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 61-63 e na Tabela 23.

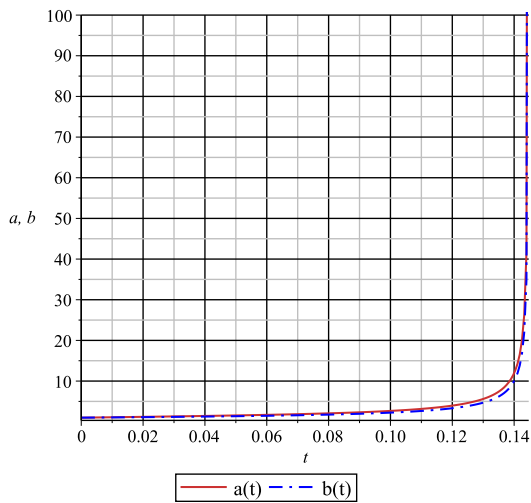


Figura 61 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2, C_r = 50, C_p = 50, C_f = 50, \dot{a}_0 = 10, \dot{b}_0 = 5.779733838, a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

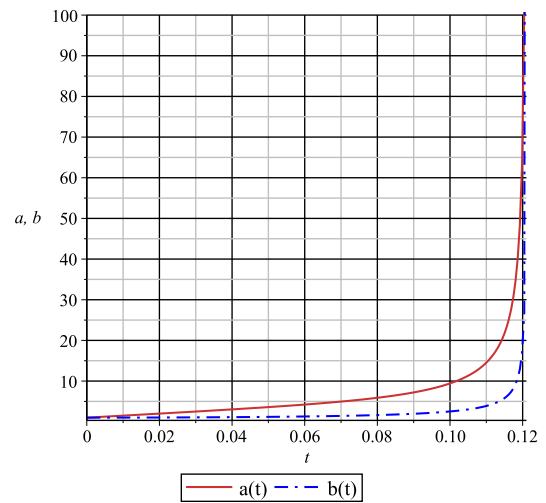


Figura 62 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2, C_r = 50, C_p = 50, C_f = 50, \dot{a}_0 = 50, \dot{b}_0 = 1.468436929, a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

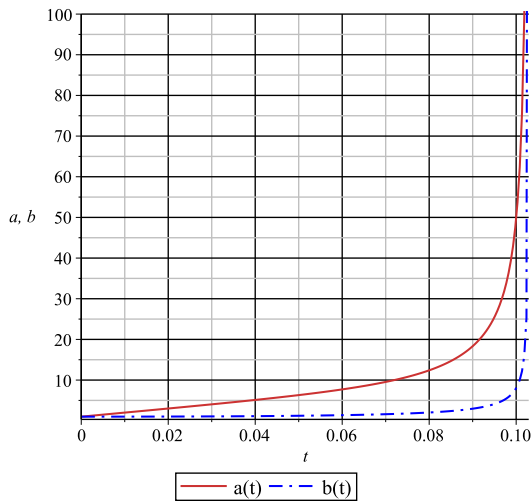


Figura 63 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 50$ ,  $C_p = 50$ ,  $C_f = 50$ ,  $\dot{a}_0 = 100$ ,  $\dot{b}_0 = 0.742245359$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 23 – Variação da condição inicial  $\dot{a}_0$ , com  $C_r = C_p = C_f = 50$  e  $\Delta$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo.

$\dot{a}_0$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$	$\Delta(0)$	$\Delta(t_s)$
10	5.779733838	0.14471854	$1.028862197 \cdot 10^5$	$1.515551177 \cdot 10^{13}$	$1.229882349 \cdot 10^5$	$1.811660820 \cdot 10^{13}$	0.076636138	$6.147471580 \cdot 10^{-15}$
20	3.430749027	0.13931514	71089.936992612	$7.554017895 \cdot 10^{12}$	$1.340524263 \cdot 10^5$	$1.424440961 \cdot 10^{13}$	0.760983585	$1.299922112 \cdot 10^{-14}$
25	2.820855486	0.13592719	$3.333938694 \cdot 10^5$	$3.907862452 \cdot 10^{14}$	$7.416504557 \cdot 10^5$	$8.693222918 \cdot 10^{14}$	1.047836574	$1.455682801 \cdot 10^{-14}$
50	1.46843692089	0.12104845	$1.035728208 \cdot 10^5$	$2.729519254 \cdot 10^{13}$	$3.884544984 \cdot 10^5$	$1.023718137 \cdot 10^{14}$	1.680977777	$1.558904372 \cdot 10^{-14}$
60	1.229078059	0.11641336	44798.933512743	$3.593033220 \cdot 10^{12}$	$1.923103813 \cdot 10^5$	$1.542397015 \cdot 10^{13}$	1.770829243	$1.432042954 \cdot 10^{-14}$
70	1.056315693	0.11238025	38523.931858088	$2.606862246 \cdot 10^{12}$	$1.851248993 \cdot 10^5$	$1.252714750 \cdot 10^{13}$	1.828084581	$1.715253736 \cdot 10^{-14}$
80	0.925892024	0.10883776	46431.624400521	$4.363459687 \cdot 10^{12}$	$2.457862021 \cdot 10^5$	$2.309800490 \cdot 10^{13}$	1.866561479	$1.699675353 \cdot 10^{-14}$
90	0.824005637	0.10569647	$1.337541648 \cdot 10^5$	$6.411058741 \cdot 10^{13}$	$7.705151873 \cdot 10^5$	$3.693206046 \cdot 10^{14}$	1.893563293	$9.100899020 \cdot 10^{-15}$
100	0.742245359	0.10288630	$1.231343010 \cdot 10^5$	$5.412708441 \cdot 10^{13}$	$7.646523153 \cdot 10^5$	$3.361239688 \cdot 10^{14}$	1.913196314	$1.422088638 \cdot 10^{-14}$

### 6.2.6 Variação da Condição Inicial $\dot{b}_0$

Para o nosso próximo passo, vamos aqui variar a condição inicial  $\dot{b}_0$  para cada constante de energia que contém o fluido completo, afim de obtermos informações sobre os fatores de escala. Assim, manteremos fixado as condições iniciais em  $a_0 = b_0 = \dot{a}_0 = 1$  e o parâmetro em  $w = -2$ . Como estaremos variando  $\dot{b}_0$ , vamos achar  $C_r$ ,  $C_p$  e  $C_f$  através da equação (6.1), separadamente. Aqui é importante lembrar que quando acharmos uma constante de energia relacionada ao fluido completo na equação (6.1), as outras são necessariamente iguais ao valor unitário.

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (6.1)-(6.2) para um grande número de valores da condição inicial  $\dot{b}_0$ , aumentando os valores de  $\dot{b}_0$  temos que a constante ( $C_r$ ,  $C_p$  ou  $C_f$ ) achada na equação (6.1) aumenta seu valor. Ao estudarmos diversos valores de  $\dot{b}_0$ , chegamos a conclusão de que a medida em que aumentamos seu valor, menor é o intervalo de tempo para os fatores de escala chegar

à singularidade do tipo *Big Rip*, pois o fluido completo se torna mais repulsivo com o aumento das constantes relacionadas a energia dos fluidos. Com o intervalo de tempo menor para ocorrer a singularidade e a velocidade inicial  $\dot{b}_0$  maior, os fatores de escala  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$  não tem um comportamento bem definido, podendo aumentar ou diminuir seus valores. Para exemplificar esses resultados, vamos considerar os casos em que  $w = -2$  é associado as seguintes energias do fluido completo:  $(C_r = 2599, C_p = 1, C_f = 1)$ ,  $(C_r = 1, C_p = 2599, C_f = 1)$ ,  $(C_r = 1, C_p = 1, C_f = 2599)$ . Comparando os diferentes valores de  $\Delta(0)$  e  $\Delta(t_s)$  obtidos para as diferentes energias relacionadas ao fluido completo, podemos concluir que o modelo se isotropiza quando variamos a condição inicial  $\dot{b}_0$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 64-66 e nas Tabelas 24, 25 e 26.

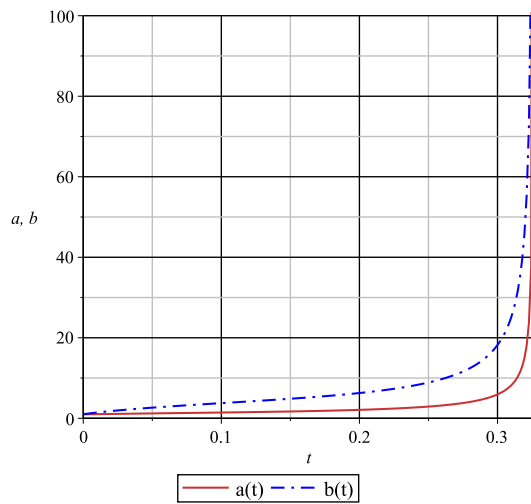


Figura 64 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 2599$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 50$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

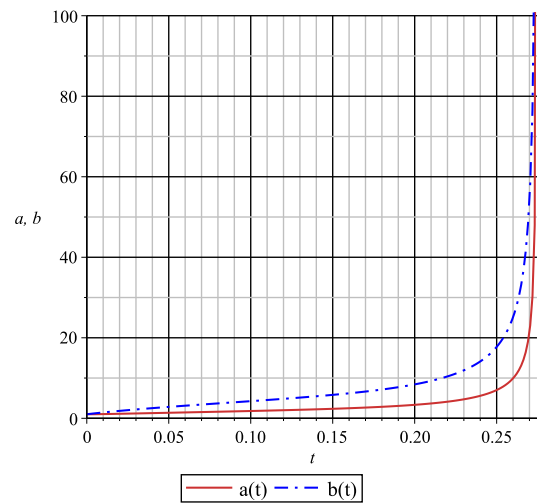


Figura 65 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 2599$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 50$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .



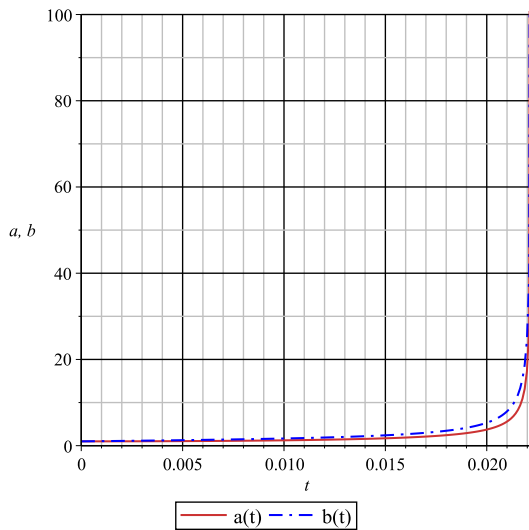


Figura 66 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 2599$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 50$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 24 – Variação da condição inicial  $\dot{b}_0$ , com  $\Delta$  e obtendo  $C_r$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo.

$\dot{b}_0$	$C_r$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$	$\Delta(0)$	$\Delta(t_s)$
1	2	1.0450222	67455.801510834	7.162428829 $10^{11}$	74330.056583229	7.892333356 $10^{11}$	0	3.592303612 $10^{-15}$
2	7	0.91630935	6.479220579 $10^5$	1.790835901 $10^{14}$	5.459360077 $10^5$	1.508949614 $10^{14}$	0.080000000	9.320394405 $10^{-16}$
10	119	0.58505558	4.278133897 $10^5$	4.746034138 $10^{13}$	2.017275968 $10^5$	2.237906124 $10^{13}$	0.367346939	5.035878013 $10^{-15}$
20	439	0.46008396	4.423245968 $10^5$	4.703445012 $10^{13}$	1.733759670 $10^5$	1.843588424 $10^{13}$	0.429506246	1.076140995 $10^{-14}$
25	674	0.42407100	4.240997422 $10^5$	4.127993346 $10^{13}$	1.580255220 $10^5$	1.538148724 $10^{13}$	0.442906574	1.581938067 $10^{-14}$
50	2599	0.32602474	4.576853689 $10^5$	4.672017901 $10^{13}$	1.492320923 $10^5$	1.523350506 $10^{13}$	0.470738163	2.450822444 $10^{-14}$
60	3719	0.30363125	4.513286474 $10^5$	4.444647648 $10^{13}$	1.428316055 $10^5$	1.406594420 $10^{13}$	0.475513968	2.155391158 $10^{-14}$
70	5039	0.28574979	4.090442264 $10^5$	3.434586802 $10^{13}$	1.264122682 $10^5$	1.061435474 $10^{13}$	0.478949751	2.457026193 $10^{-14}$
80	6559	0.27101581	9.977920870 $10^5$	3.160876985 $10^{14}$	3.023960155 $10^5$	9.579519724 $10^{13}$	0.481540064	2.074929123 $10^{-14}$
90	8279	0.25858486	4.879132820 $10^5$	5.241881982 $10^{13}$	1.454538656 $10^5$	1.562679892 $10^{13}$	0.483562773	1.967299396 $10^{-14}$
100	10199	0.24790159	5.853811066 $10^5$	8.206388251 $10^{13}$	1.720562520 $10^5$	2.412036962 $10^{13}$	0.485186010	2.382242924 $10^{-14}$

Tabela 25 – Variação da condição inicial  $\dot{b}_0$ , com  $\Delta$  e obtendo  $C_p$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo.

$\dot{b}_0$	$C_p$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$	$\Delta(0)$	$\Delta(t_s)$
1	2	1.0367679	84172.741265240	1.244366462 $10^{12}$	92540.484491861	1.368070694 $10^{12}$	0	3.632097336 $10^{-15}$
2	7	0.89138888	8.154562421 $10^5$	3.189911092 $10^{14}$	6.903601913 $10^5$	2.700558743 $10^{14}$	0.080000000	1.012137520 $10^{-15}$
10	119	0.53622878	3.596768015 $10^5$	3.200265557 $10^{13}$	1.835876297 $10^5$	1.633492177 $10^{13}$	0.367346939	3.477207429 $10^{-15}$
20	439	0.40777052	3.855587134 $10^5$	3.554746054 $10^{13}$	1.715442670 $10^5$	1.581591590 $10^{13}$	0.429506246	7.537488940 $10^{-15}$
25	674	0.37144708	5.800356636 $10^5$	9.698553357 $10^{13}$	2.492965962 $10^5$	4.168393380 $10^{13}$	0.442906574	8.761148488 $10^{-15}$
50	2599	0.27458718	5.375692572 $10^6$	2.432468307 $10^{16}$	2.125581697 $10^6$	9.61813043 $10^{15}$	0.470738163	1.046610510 $10^{-14}$
60	3719	0.25296176	1.251237581 $10^6$	6.30436231 $10^{14}$	4.864570895 $10^5$	2.451015375 $10^{14}$	0.475513968	1.539117194 $10^{-14}$
70	5039	0.23584992	3.611033171 $10^5$	2.802603812 $10^{13}$	1.385857527 $10^5$	1.075595347 $10^{13}$	0.478949751	1.162314733 $10^{-14}$
80	6559	0.22186204	3.651479018 $10^5$	2.866951405 $10^{13}$	1.387032234 $10^5$	1.089025831 $10^{13}$	0.481540064	1.294502944 $10^{-14}$
90	8279	0.21014411	2.499640204 $10^6$	3.500353096 $10^{15}$	9.415318438 $10^5$	1.318467669 $10^{15}$	0.483562773	1.079471150 $10^{-14}$
100	10199	0.20013794	7.448116205 $10^5$	1.690450345 $10^{14}$	2.785737871 $10^5$	6.322609128 $10^{13}$	0.485186010	1.456231098 $10^{-14}$

Tabela 26 – Variação da condição inicial  $\dot{b}_0$ , com  $\Delta$  e obtendo  $C_f$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo.

$\dot{b}_0$	$C_f$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$	$\Delta(0)$	$\Delta(t_s)$
1	2	0.79183835	4.160928928 10 <sup>5</sup>	9.399494447 10 <sup>13</sup>	4.421186816 10 <sup>5</sup>	9.987413014 10 <sup>13</sup>	0	3.487664566 10 <sup>-15</sup>
2	7	0.43075378	1.329006726 10 <sup>5</sup>	9.246385603 10 <sup>12</sup>	1.174514576 10 <sup>5</sup>	8.171526602 10 <sup>12</sup>	0.080000000	1.363614468 10 <sup>-15</sup>
10	119	0.10421790	54820.139458813	3.804305535 10 <sup>12</sup>	40398.410985954	2.803493349 10 <sup>12</sup>	0.367346939	4.431918292 10 <sup>-17</sup>
20	439	0.054127567	1.356479479 10 <sup>6</sup>	2.193247685 10 <sup>16</sup>	9.709101607 10 <sup>5</sup>	1.569833150 10 <sup>16</sup>	0.429506246	3.060138518 10 <sup>-18</sup>
25	674	0.043658144	1.670433364 10 <sup>5</sup>	1.441766087 10 <sup>14</sup>	1.188322112 10 <sup>5</sup>	1.025651518 10 <sup>14</sup>	0.442906574	1.583983698 10 <sup>-18</sup>
50	2599	0.022204070	1.257149357 10 <sup>5</sup>	1.382383505 10 <sup>14</sup>	88312.974249003	9.711049728 10 <sup>13</sup>	0.470738163	1.654042499 10 <sup>-18</sup>
60	3719	0.018557640	1.111243065 10 <sup>5</sup>	1.213468306 10 <sup>14</sup>	77896.067632278	8.506186671 10 <sup>13</sup>	0.475513968	1.677224690 10 <sup>-18</sup>
70	5039	0.015940102	1.581853740 10 <sup>5</sup>	3.412293160 10 <sup>14</sup>	1.107143826 10 <sup>5</sup>	2.388273470 10 <sup>14</sup>	0.478949751	3.080258605 10 <sup>-18</sup>
80	6559	0.013969773	84296.293191422	8.065783049 10 <sup>13</sup>	58930.838798973	5.638721995 10 <sup>13</sup>	0.481540064	3.506137258 10 <sup>-18</sup>
90	8279	0.012433001	89547.842435803	1.053505430 10 <sup>14</sup>	62545.547406411	7.358309519 10 <sup>13</sup>	0.483562773	3.853323070 10 <sup>-18</sup>
100	10199	0.011200857	89144.116945546	1.155747648 10 <sup>14</sup>	62218.408328379	8.066576005 10 <sup>13</sup>	0.485186010	6.544131564 10 <sup>-18</sup>

### 6.2.7 Variação da Condição Inicial $a_0$

Nesta subseção, vamos variar a condição inicial  $a_0$  para diversos valores de  $\dot{b}_0$  obtidos através da equação (6.1). Para isso, vamos manter as condições iniciais fixadas em  $b_0 = \dot{a}_0 = 1$  e os parâmetros em  $C_r = C_p = C_f = 1$  e  $w = -2$ .

Depois de resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (6.1)-(6.2) para um grande número de valores da condição inicial  $a_0$ , aumentando seu valor obtemos valores maiores para a velocidade inicial  $\dot{b}_0$ . Após estudarmos vários valores de  $a_0$  chegamos a conclusão que quanto maior o valor inicial do fator de escala  $a(t)$ , menor é o intervalo de tempo que os fatores de escala levam para chegar à singularidade do tipo *Big Rip*. Com o aumento de  $a_0$  e a diminuição do tempo para ocorrer a singularidade, os valores máximos de  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$  não tem um comportamento bem definido. Podendo aumentar ou diminuir a medida que aumentamos a condição inicial  $a_0$ . Como exemplo para esses resultados, vamos considerar os casos em que  $w = -2$  é associado a seguinte energia do fluido completo: ( $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ). Para os diferentes valores de  $\Delta(0)$  e  $\Delta(t_s)$  obtidos para a respectiva energia do fluido completo estudado, podemos concluir que o modelo se isotropiza quando variamos a condição inicial  $a_0$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 67-69 e na Tabela 27.

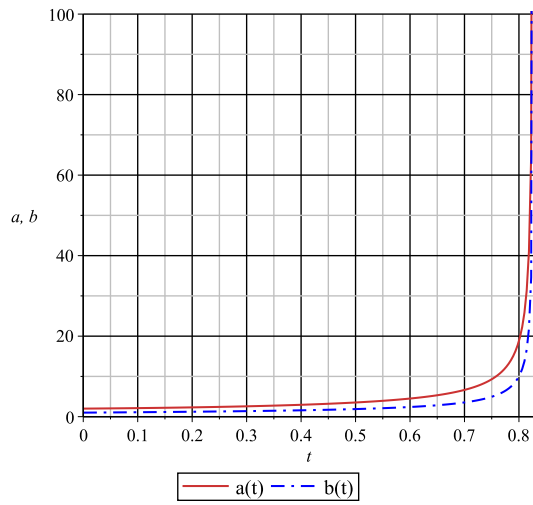


Figura 67 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 0.965213385$ ,  $a_0 = 2$  e  $b_0 = 1$ .

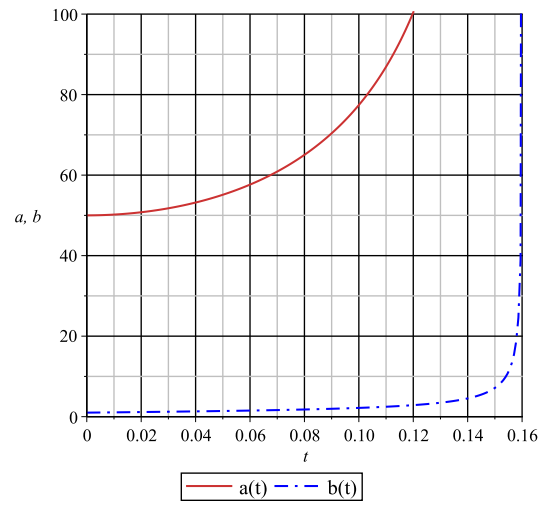


Figura 68 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 6.981844674$ ,  $a_0 = 50$  e  $b_0 = 1$ .

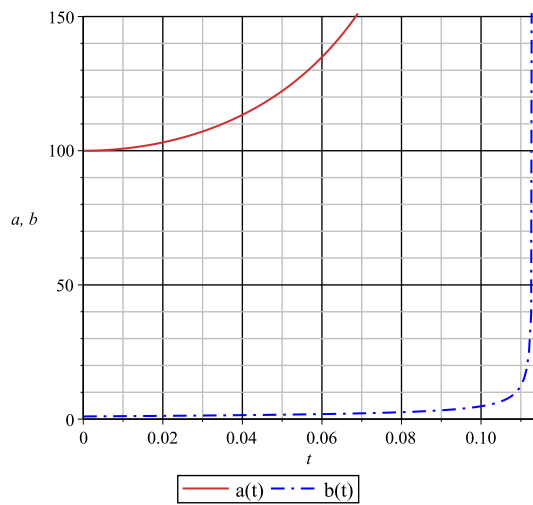


Figura 69 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 9.940490160$ ,  $a_0 = 100$  e  $b_0 = 1$ .

Tabela 27 – Variação da condição inicial  $a_0$ , com  $C_r = C_p = C_f = 1$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo.

$a_0$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$	$\Delta(0)$	$\Delta(t_s)$
1	0.732050808	1.0943921	47973.699646039	$3.227713573 \cdot 10^{11}$	59006.262301422	$3.969993700 \cdot 10^{11}$	0.023649266	$4.928779834 \cdot 10^{-15}$
2	0.965213385	0.82661855	$2.313726468 \cdot 10^5$	$2.038276159 \cdot 10^{13}$	$4.349096056 \cdot 10^5$	$3.831333136 \cdot 10^{13}$	0.073277276	$1.041326630 \cdot 10^{-14}$
10	2.925957020	0.36201793	$2.720012308 \cdot 10^5$	$5.989427607 \cdot 10^{13}$	$1.966111496 \cdot 10^6$	$4.329347829 \cdot 10^{14}$	0.450866326	$1.541754743 \cdot 10^{-14}$
20	4.317026466	0.25434950	$2.649264231 \cdot 10^5$	$7.836178109 \cdot 10^{13}$	$3.739628237 \cdot 10^6$	$1.106132982 \cdot 10^{15}$	0.482876138	$1.451687395 \cdot 10^{-14}$
25	4.864618212	0.22720335	$1.808015736 \cdot 10^5$	$3.363912033 \cdot 10^{13}$	$3.176884224 \cdot 10^6$	$5.910765083 \cdot 10^{14}$	0.487791984	$1.510035347 \cdot 10^{-14}$
50	6.981844674	0.16024630	96968.042581320	$9.983502316 \cdot 10^{12}$	$3.381989693 \cdot 10^6$	$3.481981535 \cdot 10^{14}$	0.495718492	$1.428104493 \cdot 10^{-14}$
60	7.665859072	0.14622271	$1.123234084 \cdot 10^5$	$1.578449192 \cdot 10^{13}$	$4.695707862 \cdot 10^6$	$6.598744160 \cdot 10^{14}$	0.496747634	$1.515655970 \cdot 10^{-14}$
70	8.293418910	0.13533551	65039.055201063	$4.348033615 \cdot 10^{12}$	$3.169639944 \cdot 10^6$	$2.118987914 \cdot 10^{14}$	0.497421752	$1.720188804 \cdot 10^{-14}$
80	8.876569538	0.12656658	$1.064696540 \cdot 10^5$	$1.593284034 \cdot 10^{13}$	$5.926579933 \cdot 10^6$	$8.868933243 \cdot 10^{16}$	0.497891411	$1.74213629010 \cdot 10^{-14}$
90	9.423596831	0.11930753	$2.755129718 \cdot 10^5$	$1.819974441 \cdot 10^{14}$	$1.724580254 \cdot 10^7$	$1.139217197 \cdot 10^{16}$	0.498233994	$1.038554872 \cdot 10^{-14}$
100	9.940490160	0.11316949	80034.130308218	$8.723730341 \cdot 10^{12}$	$5.564479315 \cdot 10^6$	$6.065287943 \cdot 10^{14}$	0.498492916	$1.466399782 \cdot 10^{-14}$

### 6.2.8 Variação da Condição Inicial $b_0$

Por fim, nesta última subseção do modelo cosmológico do tipo KS com o fluido completo como conteúdo material, vamos variar a condição inicial  $b_0$  a fim de obtermos informações sobre os fatores de escala do modelo. Para isso, vamos fixar as condições iniciais em  $a_0 = \dot{a}_0 = 1$  e os parâmetros em  $C_r = C_p = C_f = 1$  e  $w = -2$ . Os valores de  $\dot{b}_0$  serão obtidos resolvendo a equação (6.1).

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (6.1)-(6.2) para um grande número de valores da condição inicial  $b_0$ , aumentando seu valor temos que o valor de  $\dot{b}_0$  aumenta rapidamente. Depois de estudarmos vários valores de  $b_0$  chegamos a conclusão que quanto maior o valor inicial do fator de escala  $b(t)$ , menor é o tempo dos fatores de escala para chegar à singularidade do tipo *Big Rip*. Embora os fatores de escala tenham um tempo menor para suas expansões, com o aumento da condição inicial  $b_0$ ,  $a(t_s)$  e  $b(t_s)$  não apresentam um comportamento definido, podendo aumentar ou diminuir seus valores máximos. Exemplificando esses resultados, vamos considerar os casos em que  $w = -2$  é associado a seguinte energia do fluido completo: ( $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ). Para o parâmetro de anisotropia, estudando os diferentes valores de  $\Delta(0)$  e  $\Delta(t_s)$  obtidos para a respectiva energia do fluido completo, podemos concluir que o modelo se isotropiza quando variamos a condição inicial  $b_0$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 70-72 e na Tabela 28.

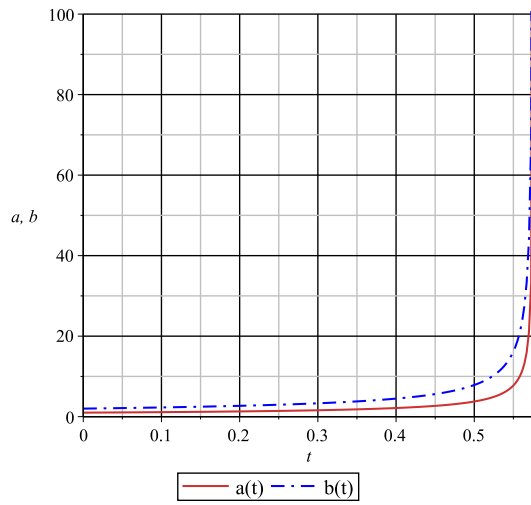


Figura 70 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 2.542021634$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 2$ .

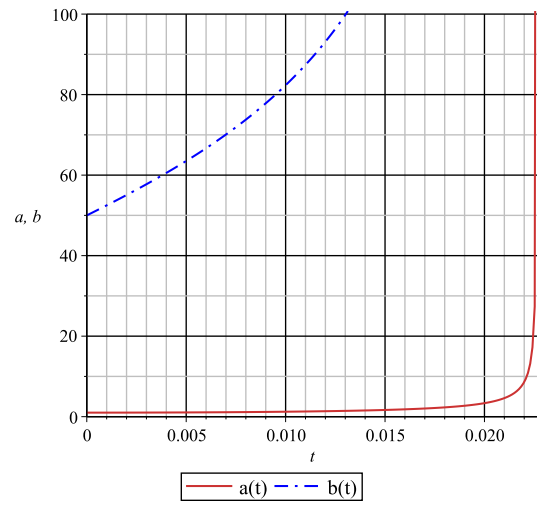


Figura 71 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 2450.499964743$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 50$ .

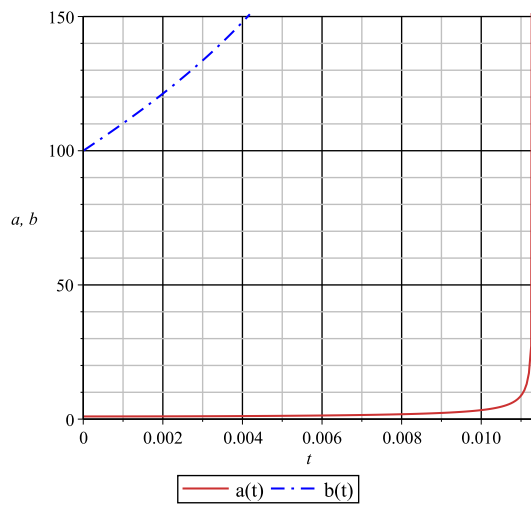


Figura 72 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 9900.499989821$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 100$ .

Tabela 28 – Variação da condição inicial  $b_0$ , com  $C_r = C_p = C_f = 1$ , para o modelo cosmológico do tipo KS com fluido completo.

$b_0$	$\dot{b}_0$	$t_s$	$b(t_s)$	$\dot{b}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$	$\Delta(0)$	$\Delta(t_s)$
1	0.732050807	1.0943921	47973.699646039	3.227713573 10 <sup>11</sup>	59006.262301422	3.969993699 10 <sup>11</sup>	0.023649266	4.928779834 10 <sup>-15</sup>
2	2.542021634	0.57566049	1.314053301 10 <sup>6</sup>	7.906352729 10 <sup>14</sup>	6.289577835 10 <sup>5</sup>	3.784293070 10 <sup>14</sup>	0.011708488	4.614229928 10 <sup>-15</sup>
10	90.499828076	0.11382710	1.025450560 10 <sup>6</sup>	1.673615570 10 <sup>14</sup>	75993.049450878	1.240266739 10 <sup>13</sup>	0.355266887	7.045902707 10 <sup>-14</sup>
20	380.499857329	0.056724577	4.923834335 10 <sup>6</sup>	5.880213173 10 <sup>15</sup>	1.764793112 10 <sup>5</sup>	2.107578151 10 <sup>14</sup>	0.426126399	7.332578749 10 <sup>-14</sup>
25	600.499893653	0.045347577	4.991517102 10 <sup>6</sup>	5.423937646 10 <sup>15</sup>	1.421741209 10 <sup>5</sup>	1.544909126 10 <sup>14</sup>	0.440696602	8.123698579 10 <sup>-14</sup>
50	2450.499964743	0.022640802	1.224113523 10 <sup>7</sup>	3.588216062 10 <sup>16</sup>	1.720249920 10 <sup>5</sup>	5.042531951 10 <sup>14</sup>	0.470162041	5.819103425 10 <sup>-14</sup>
60	3540.499974343	0.018862657	1.206157682 10 <sup>7</sup>	3.153271901 10 <sup>16</sup>	1.409379285 10 <sup>5</sup>	3.684558611 10 <sup>14</sup>	0.475111131	7.482456332 10 <sup>-14</sup>
70	4830.499980499	0.016165113	7.616747529 10 <sup>6</sup>	9.243947064 10 <sup>15</sup>	76165.416183812	9.243701914 10 <sup>13</sup>	0.478652344	5.874632969 10 <sup>-14</sup>
80	6320.499984677	0.014142578	7.780831361 10 <sup>6</sup>	9.114736903 10 <sup>15</sup>	67999.455175705	7.965697183 10 <sup>13</sup>	0.481311530	5.966629059 10 <sup>-14</sup>
90	8010.499987642	0.012569866	7.165408606 10 <sup>6</sup>	6.990435607 10 <sup>15</sup>	55611.668845733	5.425370977 10 <sup>13</sup>	0.483381691	4.273160487 10 <sup>-14</sup>
100	9900.499989821	0.011311931	7.271623381 10 <sup>6</sup>	6.877659187 10 <sup>15</sup>	50754.811495460	4.800503093 10 <sup>13</sup>	0.485039003	8.025588904 10 <sup>-14</sup>

### 6.3 PARAMETRIZAÇÃO DE MISNER

C. W. Misner, L. Fishbone e Y. Nutku, estudando alguns modelos cosmológicos com a métrica do tipo KS, propõem uma parametrização na métrica (4.1) onde é possível verificar a isotropização do modelo cosmológico de uma forma mais direta. Assim, utilizando [9], temos então:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{-2\Omega+4\beta} dr^2 + e^{-2\Omega-2\beta} d\omega^2, \quad (6.9)$$

onde  $\Omega$  e  $\beta$  são funções dependentes do tempo e  $d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ . Motivados pela parametrização de Misner vamos escrever a métrica de KS (4.1) da seguinte forma,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 e^{-\beta} dr^2 + a^2 e^{\beta} d\theta^2 + a^2 e^{\beta} \sin^2\theta d\phi^2. \quad (6.10)$$

Agora, a partir da métrica do modelo escrita nessa parametrização é possível verificar a isotropização do modelo de uma forma mais direta. Se em algum limite temporal a função  $\beta(t)$  tender a zero ou a um valor constante, a métrica (6.10) poderá ser reescrita em termos de uma métrica do tipo FRW aonde o fator de escala será dado pela função  $a(t)$ . Dessa forma, fica evidente que  $\beta(t)$ , na métrica (6.10), descreve as anisotropias do modelo. Vamos, agora estudar o modelo do fluido completo nessa nova parametrização e comprovar a isotropização das soluções do modelo.

#### 6.3.1 Modelo Cosmológico do Tipo KS com Parametrização e Fluido Completo

Semelhantemente como foi feito o tratamento da métrica (4.1), no Capítulo 4, as equações de campo de Einstein para a métrica do tipo KS com a parametrização dada pela equação (6.10) e o fluido completo como conteúdo material tem as seguintes formas:

$$-\frac{\dot{\beta}^2}{4} + \frac{e^{-\beta}}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{\beta}}{a} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = C_r a^{-4} e^{-\frac{2\beta}{3}} + C_p a^{-3} e^{-\frac{\beta}{2}} + C_f a^{-3(1+w)} e^{-\frac{\beta(1+w)}{2}} \quad (6.11)$$

$$\frac{-3a^2\dot{\beta}^2}{4} - 3a\dot{a}\dot{\beta} - a^2\ddot{\beta} - \dot{a}^2 - 2a\ddot{a} - e^{-\beta} = pa^2 \quad (6.12)$$

$$\frac{-a^2\dot{\beta}^2}{4} - \dot{a}^2 - 2a\ddot{a} = pa^2. \quad (6.13)$$

Para mais informações sobre a obtenção dessas equações veja o Apêndice B. Como estamos interessados em estudar o comportamento das funções  $a(t)$  e  $\beta(t)$ , e essas são as únicas ingógnitas do nosso sistema, pois as outras variáveis (densidade e pressão) podem ser reescritas em termos dessas, precisamos apenas de duas equações. Assim, sem perder a generalidade, vamos utilizar a equação (6.11) e uma segunda equação obtida pela diferença entre (6.13) e (6.12). Logo,

$$\frac{a^2\dot{\beta}^2}{2} + 3a\dot{a}\dot{\beta} + a^2\ddot{\beta} + e^{-b} = 0 \quad (6.14)$$

Após calcularmos numericamente as soluções do sistema de equações diferenciais ordinárias (6.11)-(6.14) para um grande número de condições iniciais, das constantes positivas  $C_r$ ,  $C_p$  e  $C_f$ , que estão relacionadas respectivamente com a energia do fluido de radiação, de poeira e do fluido fantasma, e da constante  $w$  do fluido fantasma, obtemos que o fator de escala  $a(t)$  é expansivo e  $\beta(t)$  tende assintoticamente para uma constante. Assim,  $a(t)$  parte de um valor inicial finito e vai para um valor infinito em um tempo finito, enquanto  $\beta(t)$ , que também parte de um valor inicial finito, vai para um valor finito constante, em um tempo finito. Este comportamento de  $a(t)$  dá origem a singularidade do tipo *Big Rip* devido a métrica do tipo KS com a nova parametrização garantir a expansão do Universo através do fator de escala  $a(t)$ , na parte radial e angular da métrica. Já o comportamento de  $\beta(t)$  garante que a métrica (6.10) tende a uma métrica do tipo FRW com o fator de escala descrito por  $a(t)$ . Aqui é importante mencionar que para todo o estudo, as condições iniciais e parâmetros fixados são iguais aos que foram fixados anteriormente na Seção (6.2). A condição inicial  $\dot{\beta}_0$  será obtida resolvendo a equação (6.11) para as condições iniciais e parâmetros fixados em cada estudo numérico. Quando estivermos variando  $\dot{\beta}_0$ , iremos obter  $C_r$ ,  $C_p$  ou  $C_f$ , através da equação (6.11).

Calculando as soluções numéricas para o modelo do tipo KS com a nova parametrização e fluido completo, obtemos o instante de tempo logo antes da solução atingir a singularidade do *Big Rip*. Chamaremos esse instante de tempo de  $t_s$ , o valor do fator de escala  $a(t)$  e da função  $\beta(t)$ , no instante  $t_s$ , chamaremos de  $a(t_s)$  e  $\beta(t_s)$ , respectivamente.

### 6.3.1.1 Variação do Parâmetro $w$

Resolvendo numericamente o sistema composto pelas equações (6.11) e (6.14), para um grande número de valores do parâmetro  $w$ , mantendo fixados os demais parâmetros e condições iniciais, concluímos que o intervalo de tempo em que os fatores de escala levam para chegar a singularidade do tipo *Big Rip* é cada vez menor a medida em que diminuimos  $w$ .

Com o intervalo de tempo cada vez menor com a diminuição de  $w$ , para ocorrer a singularidade do Universo,  $a(t_s)$  tem seus valores máximos cada vez menores, pois tem menos tempo para evoluir da posição inicial até o *Big Rip*. Por outro lado,  $\beta(t_s)$  tende a valores constantes, o que pode ser confirmado pelo fato dos valores de  $\dot{\beta}(t_s)$  serem muito pequenos. Isso confirma que o modelo é isotropizado. Alguns exemplos desses comportamentos podem ser observados nas Figuras 73-75 e na Tabela 29, onde foi considerado os casos em que  $w = -2, -2.4$  e  $-3$ .

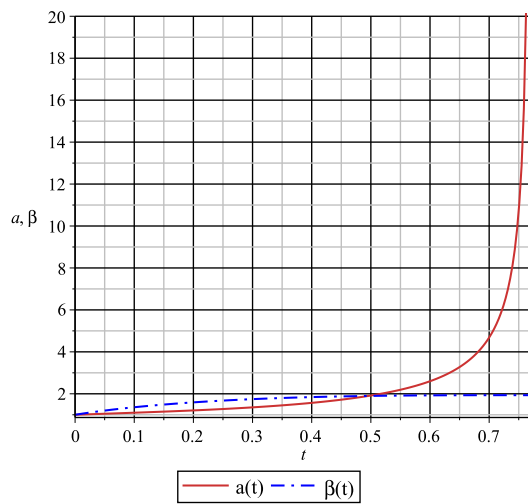


Figura 73 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 4.529197810$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

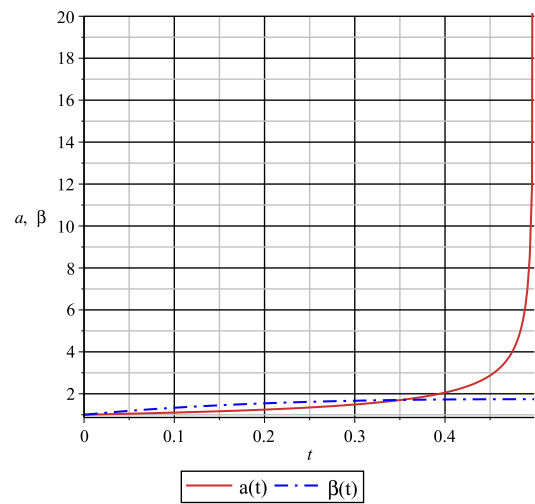


Figura 74 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2.4$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 4.221872143$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

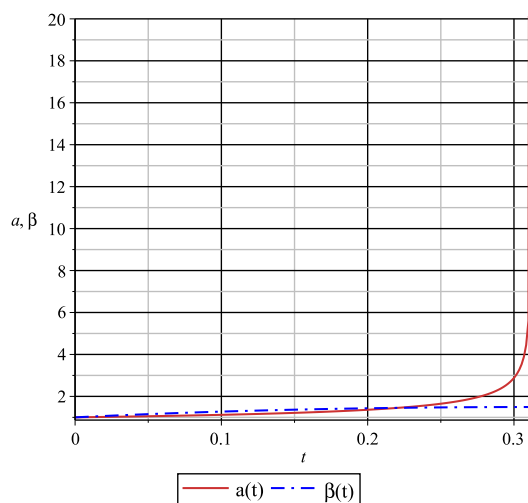


Figura 75 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -3$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 3.455540908$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .



Tabela 29 – Variação do parâmetro  $w$  para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo.

$w$	$\dot{\beta}_0$	$t_s$	$\beta(t_s)$	$\dot{\beta}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
-2	4.529197810	0.77024456	1.934103851	3.410560947 $10^{-14}$	2.112249400 $10^5$	1.919972570 $10^{13}$
-2.4	4.221872143	0.49888534	1.741964052	8.440752401 $10^{-13}$	14840.184040748	9.071624934 $10^{12}$
-2.8	3.775757361	0.35804923	1.574557592	1.611363468 $10^{-9}$	1189.327921454	2.803981696 $10^{11}$
-3	3.455540908	0.31144768	1.492711240	2.071223813 $10^{-8}$	500.208925620	7.624009214 $10^{10}$

### 6.3.1.2 Variação do Parâmetro $C_r$

Nesse caso, o estudo da variação do parâmetro  $C_r$  se torna limitado, pois resolvendo numericamente o sistema composto pelas equações (6.11) e (6.14) para um grande número de valores do parâmetro  $C_r$ , temos que ao aumentá-lo menores são os valores obtidos para  $\dot{\beta}_0$  até o mesmo vir a se tornar um número complexo. Depois de estudarmos diversos valores de  $C_r$ , chegamos a conclusão que a medida em que aumentamos seu valor, maiores são os intervalos de tempo em que  $a(t)$  e  $\beta(t)$  levam para atingir a singularidade. O fator de escala  $a(t)$  parte de um valor inicial e vai para o infinito em um tempo finito, originando a singularidade do tipo *Big Rip*, enquanto a função  $\beta(t)$  parte de um valor inicial e vai para uma constante quando  $t \rightarrow t_s$ , resultando na isotropização do modelo.

Apesar de o intervalo de tempo para a solução atingir a singularidade ser cada vez maior ao aumentarmos  $C_r$ , com a diminuição da condição inicial  $\dot{\beta}_0$ , o valor do fator de escala  $a(t_s)$  não tem um comportamento bem definido, podendo aumentar ou diminuir quando aumentamos  $C_r$ . Por outro lado, a função  $\beta(t)$  sempre tem seu valor constante final menor no tempo  $t_s$ .

Aqui é importante relembrar o nosso estudo feito na Seção (6.2). Desse estudo nós concluímos que as constantes relacionadas as energias do fluido de radiação e pressão,  $C_r$  e  $C_p$  respectivamente, são menos decisivas para a expansão se comparadas a constante relacionada a energia do fluido fantasma,  $C_f$ , e a constante  $w$ . Assim, o aumento do intervalo de tempo para ocorrer a singularidade pode ser interpretado devido a função  $\beta(t)$  dominar sobre o fator de escala  $a(t)$  na expansão. Quando aumentamos  $C_r$ , estamos consequentemente diminuindo  $\dot{\beta}_0$ , logo o tempo para que a função  $\beta(t)$  chegue no seu valor constante final é maior e consequentemente demora mais para ocorrer a singularidade.

Como exemplo desses resultados vamos considerar os casos em que  $w = -2$  é associado as seguintes energias do fluido completo:  $(C_r = 1, C_p = 1, C_f = 1)$ ,  $(C_r = 1.8, C_p = 1, C_f = 1)$ ,  $(C_r = 2.6, C_p = 1, C_f = 1)$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 76-78 e na Tabela 30.

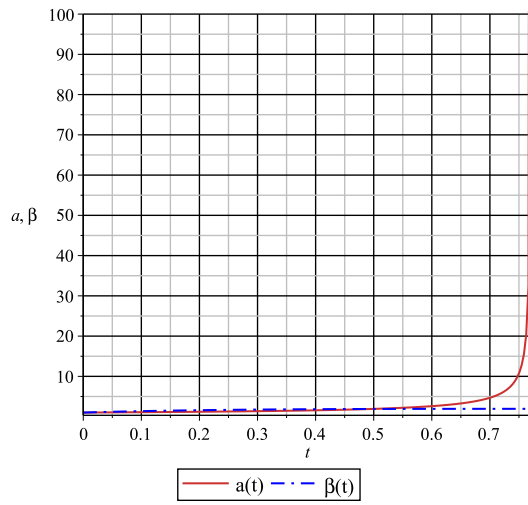


Figura 76 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 4.529197810$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

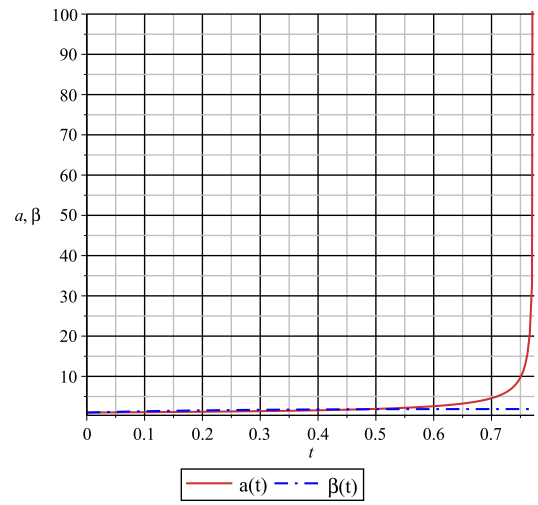


Figura 77 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $b$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1.8$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{b}_0 = 4.180345566$ ,  $a_0 = 1$  e  $b_0 = 1$ .

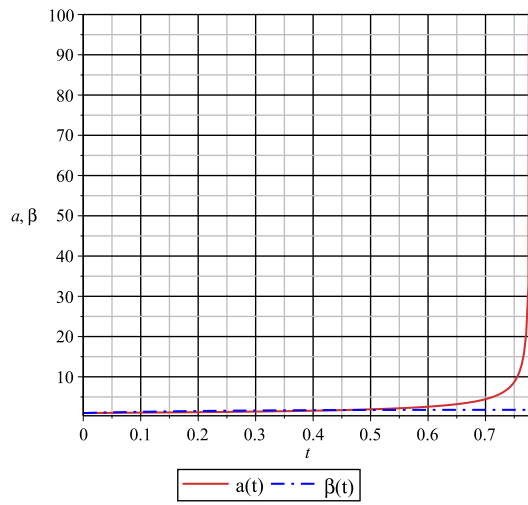


Figura 78 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 2.6$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 3.763794774$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

Tabela 30 – Variação do parâmetro  $C_r$  para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo.

$C_r$	$\dot{\beta}_0$	$t_s$	$\beta(t_s)$	$\dot{\beta}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
1	4.529197810	0.77024456	1.934103851	$3.410560947 \cdot 10^{-14}$	$2.112249400 \cdot 10^{15}$	$1.919972570 \cdot 10^{13}$
1.4	4.361223026	0.77196314	1.904195417	$2.826400835 \cdot 10^{-14}$	$2.381413577 \cdot 10^{15}$	$2.572005255 \cdot 10^{13}$
1.8	4.180345566	0.77388985	1.871703865	$4.615789516 \cdot 10^{-14}$	$1.744654324 \cdot 10^{15}$	$1.172007877 \cdot 10^{13}$
2.2	3.983037921	0.77608473	1.835894446	$2.909975378 \cdot 10^{-14}$	$2.359406510 \cdot 10^5$	$2.470450044 \cdot 10^{13}$
2.6	3.763794774	0.77864213	1.795633987	$3.463398147 \cdot 10^{-14}$	$2.064533935 \cdot 10^5$	$1.751673093 \cdot 10^{13}$

### 6.3.1.3 Variação do Parâmetro $C_p$

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (6.11) e (6.14) para um grande número de valores do parâmetro  $C_p$ , aumentando a constante relacionada com a energia de expansão do fluido de poeira, obtemos menores valores para  $\dot{\beta}_0$ . Como ocorrido no estudo da variação do parâmetro anterior, este comportamento também limitará o estudo aqui nessa subseção. Estudando diversos valores de  $C_p$ , chegamos a conclusão que a medida em que aumentamos seu valor, maiores são os intervalos de tempo em que  $a(t)$  e  $\beta(t)$  levam para atingir a singularidade. A função  $\beta(t)$  parte de um valor inicial e vai para uma constante quando o tempo tende a  $t_s$ . Esse comportamento resulta na isotropização do modelo. Por outro lado, o fator de escala  $a(t)$  parte de um valor inicial e vai para o infinito em um tempo finito, originando a singularidade do tipo *Big Rip*.

Com o intervalo de tempo para a solução atingir a singularidade cada vez maior ao aumentarmos  $C_p$ , mantendo a diminuição da condição inicial  $\dot{\beta}_0$ , temos que a função  $\beta(t_s)$  sempre tem seu valor constante final menor quando aumentamos  $C_p$ . Já o fator de escala  $a(t_s)$  não tem um comportamento bem definido, podendo aumentar ou diminuir. Para exemplificar esses resultados vamos considerar os casos em que  $w = -2$  é associado as seguintes energias do fluido completo:  $(C_r = 1, C_p = 1, C_f = 1)$ ,  $(C_r = 1, C_p = 1.8, C_f = 1)$ ,  $(C_r = 1, C_p = 2.6, C_f = 1)$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 79-81 e na Tabela 31.

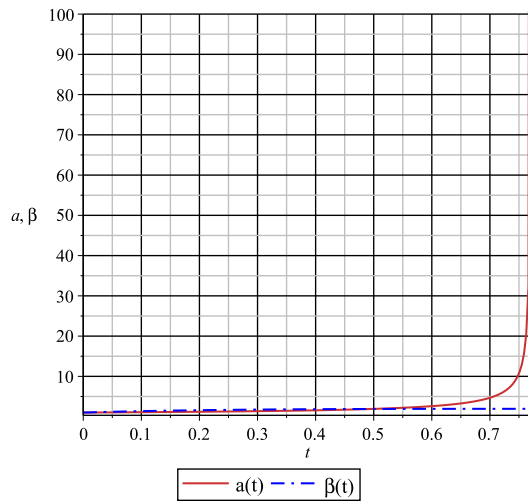


Figura 79 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 4.529197810$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

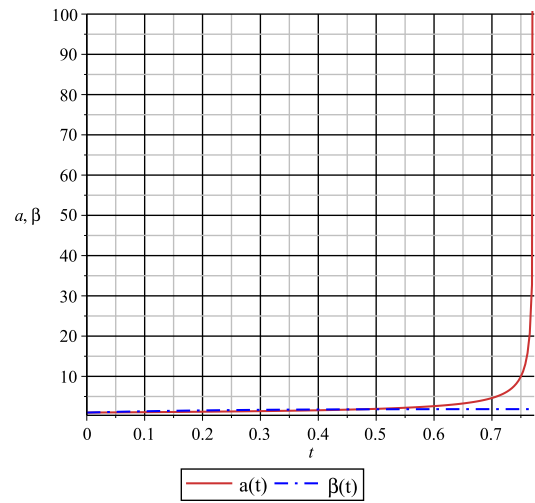


Figura 80 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1.8$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 4.110910575$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

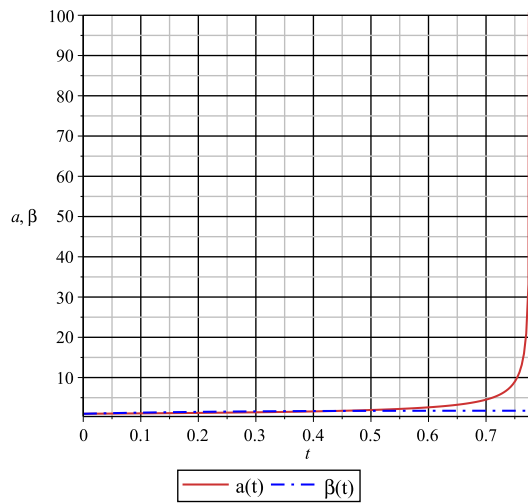


Figura 81 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 2.6$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 3.585889449$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

Tabela 31 – Variação do parâmetro  $C_p$  para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo.

$C_p$	$\dot{\beta}_0$	$t_s$	$\beta(t_s)$	$\dot{\beta}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
1	4.529197810	0.77024456	1.934103851	$3.410560947 \cdot 10^{-14}$	$2.112249399 \cdot 10^5$	$1.919972570 \cdot 10^{13}$
1.4	4.329461850	0.77153379	1.897197231	$2.772545834 \cdot 10^{-14}$	$2.354117134 \cdot 10^5$	$2.494567460 \cdot 10^{13}$
1.8	4.110910575	0.77311172	1.856613179	$4.200877951 \cdot 10^{-14}$	$1.798144246 \cdot 10^5$	$1.259157510 \cdot 10^{13}$
2.2	3.866947884	0.77508516	1.810998228	$1.312808471 \cdot 10^{-14}$	$3.991563670 \cdot 10^5$	$9.139527817 \cdot 10^{13}$
2.6	3.585889449	0.77764558	1.757976662	$3.121861653 \cdot 10^{-14}$	$2.223245086 \cdot 10^5$	$2.088227275 \cdot 10^{13}$

### 6.3.1.4 Variação do Parâmetro $C_f$

Depois de resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (6.11) e (6.14) para um grande número de valores do parâmetro  $C_f$ , a medida em que aumentamos seu valor, menores são os resultados obtidos para  $\dot{\beta}_0$ . Semelhantemente aos estudos da variação do parâmetro relacionados as energias anteriormente, este comportamento também limitará o estudo aqui nessa subseção. Após estudarmos diversos valores de  $C_f$ , chegamos a conclusão que a medida em que aumentamos seu valor, menores são os intervalos de tempo obtidos para ocorrer a singularidade. Assim, o fator de escala  $a(t)$  vai para o infinito em um tempo finito, gerando a singularidade do tipo *Big Rip*. Por outro lado, a função  $\beta(t)$  vai para um valor constante quando o tempo tende a  $t_s$ , resultando na isotropização do modelo.

Embora o intervalo de tempo para a solução atingir a singularidade ser cada vez menor ao aumentarmos  $C_f$ , o valor de  $a(t_s)$  não tem um comportamento bem definido, podendo aumentar ou diminuir quando aumentamos  $C_f$ . Já o valor constante final  $\beta(t_s)$  tem um comportamento definido, aumentando seu valor quando aumentamos  $C_f$ . Como exemplo para esses resultados, vamos considerar os casos em que  $w = -2$  é associado as seguintes energias do fluido completo:  $(C_r = 1, C_p = 1, C_f = 1)$ ,  $(C_r = 1, C_p = 1, C_f = 1.4)$ ,  $(C_r = 1, C_p = 1, C_f = 1.8)$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 82-84 e na Tabela 32.

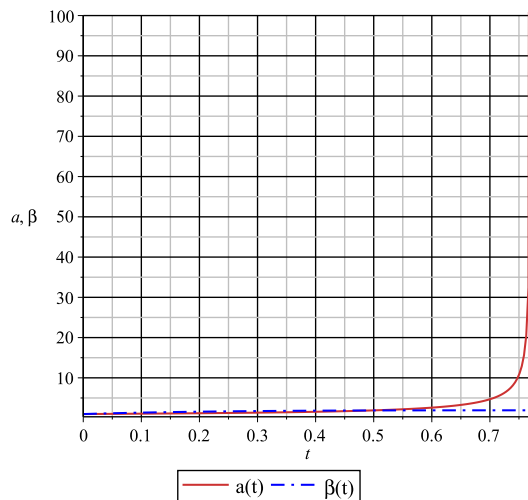


Figura 82 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 4.529197810$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

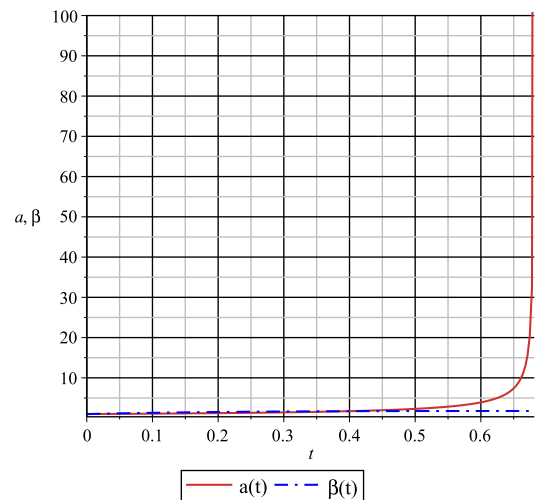


Figura 83 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1.4$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 3.938785066$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

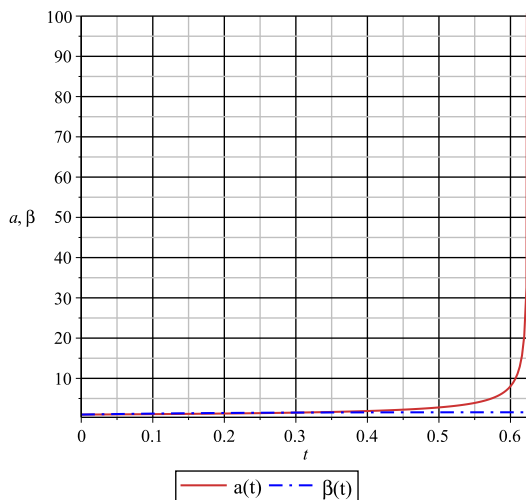


Figura 84 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1.8$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 3.058741470$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

Tabela 32 – Variação do parâmetro  $C_f$  para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo.

$C_f$	$\dot{\beta}_0$	$t_s$	$\beta(t_s)$	$\dot{\beta}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
1	4.529197810	0.77024456	1.934103851	$3.410560947 \cdot 10^{-14}$	$2.112249400 \cdot 10^5$	$1.919972570 \cdot 10^{13}$
1.4	3.938785066	0.68127581	1.762660647	$2.825955824 \cdot 10^{-14}$	$2.182490800 \cdot 10^5$	$2.361907853 \cdot 10^{13}$
1.8	3.058741470	0.62549348	1.571472071	$1.669289872 \cdot 10^{-14}$	$2.958008189 \cdot 10^5$	$5.460023175 \cdot 10^{13}$
1.9	2.679297426	0.61619307	1.499675568	$4.066847825 \cdot 10^{-14}$	$1.575966306 \cdot 10^5$	$1.141586591 \cdot 10^{13}$

### 6.3.1.5 Variação da Condição Inicial $\dot{a}_0$

Resolvendo numericamente o sistema composto pelas equações (6.11) e (6.14) para um grande número de valores da condição inicial  $\dot{a}_0$ , a medida em que aumentamos seu valor maiores são os valores obtidos de  $\dot{\beta}_0$ , mantendo os demais parâmetros e condições iniciais fixadas. Depois de estudarmos diversos valores de  $\dot{a}_0$ , chegamos a conclusão de que aumentando-o, menor é o intervalo de tempo em que o fator de escala  $a(t)$  sai da sua posição inicial para chegar a singularidade do tipo *Big Rip*. Já a função  $\beta(t)$  tende a um valor constante quando o tempo tende a  $t_s$ , confirmando a isotropização do modelo. Esses resultados são obtidos ao considerarmos os mesmos valores dos parâmetros  $C_r$ ,  $C_p$  e  $C_f$ . Aqui, também, observamos que o fator de escala  $a(t_s)$  não apresenta um comportamento bem definido, diferentemente da função  $\beta(t)$  que, no instante  $t_s$ , tem seu valor constante cada vez maior, a medida em que aumentamos  $\dot{a}_0$ .

Esses resultados podem ser verificados nas Figuras 85-87 e na Tabela 33 onde foi considerados o caso em que  $w = -2$  é associados as seguintes energias do fluido completo: ( $C_r = 1.4$ ,  $C_p = 1.4$ ,  $C_f = 1.4$ ).

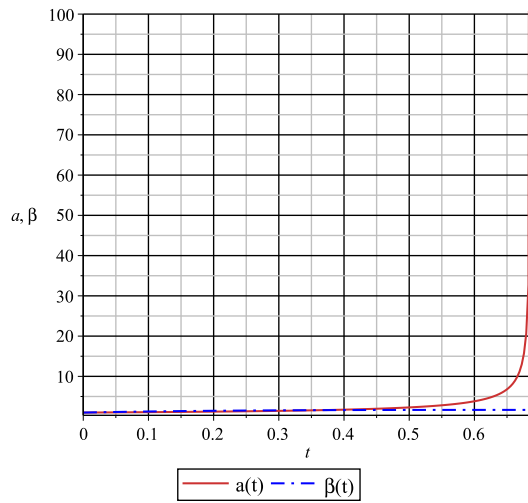


Figura 85 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1.4$ ,  $C_p = 1.4$ ,  $C_f = 1.4$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 3.402487464$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

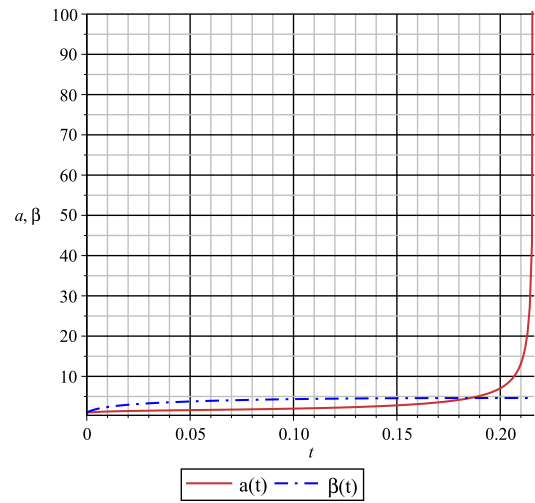


Figura 86 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1.4$ ,  $C_p = 1.4$ ,  $C_f = 1.4$ ,  $\dot{a}_0 = 50$ ,  $\dot{\beta}_0 = 299.964914400$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

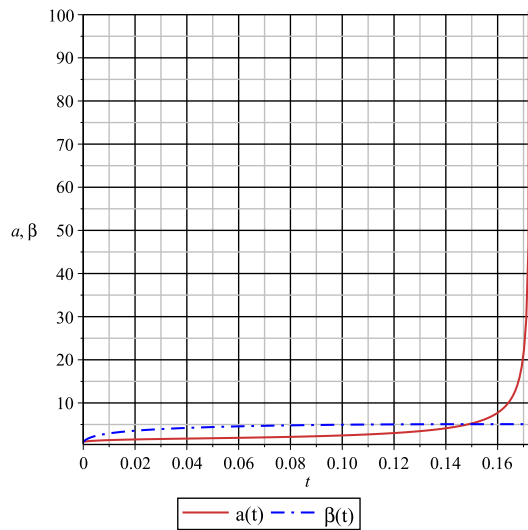


Figura 87 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1.4$ ,  $C_p = 1.4$ ,  $C_f = 1.4$ ,  $\dot{a}_0 = 100$ ,  $\dot{\beta}_0 = 599.982458300$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

Tabela 33 – Variação da condição inicial  $\dot{a}_0$ , com  $C_r = C_p = C_f = 1.4$ , para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo.

$\dot{a}_0$	$\dot{\beta}_0$	$t_s$	$\beta(t_s)$	$\dot{\beta}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
1	3.402487464	0.68637653	1.669774944	$1.590906866 \cdot 10^{-14}$	$3.201854725 \cdot 10^5$	$6.015906540 \cdot 10^{13}$
2	11.068731930	0.56685504	2.406062272	$4.730760533 \cdot 10^{-14}$	$1.425533726 \cdot 10^5$	$9.564935371 \cdot 10^{12}$
10	59.824200820	0.35925246	3.541671954	$1.322591513 \cdot 10^{-14}$	$2.783623428 \cdot 10^5$	$6.769581320 \cdot 10^{13}$
50	299.964914400	0.21644327	4.619077535	$8.683199584 \cdot 10^{-14}$	$1.029434325 \cdot 10^5$	$7.370721896 \cdot 10^{12}$
100	599.982458300	0.17277255	5.081461326	$1.463614284 \cdot 10^{-13}$	91174.221094299	$6.107962259 \cdot 10^{12}$

### 6.3.1.6 Variação da Condição Inicial $\dot{\beta}_0$

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (6.11) e (6.14) para diferentes valores da condição inicial  $\dot{\beta}_0$ , notamos que ao aumentarmos os seus valores a constante  $C_r$ ,  $C_p$  ou  $C_f$ , obtida na equação (6.11) diminui seu valor. Esse comportamento limita o estudo numérico da equações, pois a constante relacionada a energia do fluido diminui rapidamente, ao aumentarmos  $\dot{\beta}_0$ , indo assim para um valor negativo. Ao estudarmos diversos valores de  $\dot{\beta}_0$ , chegamos a conclusão que a medida em que aumentamos seu valor, menor é o intervalo de tempo para que o fator de escala  $a(t)$  e a função  $\beta(t)$  cheguem na singularidade, quando analisamos a variação da condição inicial associada aos parâmetros  $C_r$  ou  $C_p$ . Por outro lado, quando analisamos com relação ao parâmetro  $C_f$ , o intervalo de tempo  $t_s$  aumenta a medida em que  $\dot{\beta}_0$  aumenta. Nas duas situações, temos que o fator de escala  $a(t)$  tende ao infinito em um tempo finito, originando a singularidade do tipo *Big Rip*, e  $\beta(t)$  tende a uma constante quando o tempo vai para  $t_s$ , gerando a isotropização do modelo.

O comportamento do fator de escala  $a(t)$  não é bem definido, para os casos estudados, podendo aumentar ou diminuir seu valor no instante  $t_s$ . Por outro lado, a função  $\beta(t)$  apresenta um padrão definido associado a qualquer energia de fluido, onde o valor constante final de  $\beta(t_s)$  aumenta a medida em que aumentamos  $\dot{\beta}_0$ .

Para exemplificar esses resultados, vamos considerar os casos em que  $w = -2$  é associado as seguintes energias do fluido completo: ( $C_r = 4.114836518$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ), ( $C_r = 1$ ,  $C_p = 3.636652189$ ,  $C_f = 1$ ), ( $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1.969970133$ ). Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 88-90 e nas Tabelas 34-36.



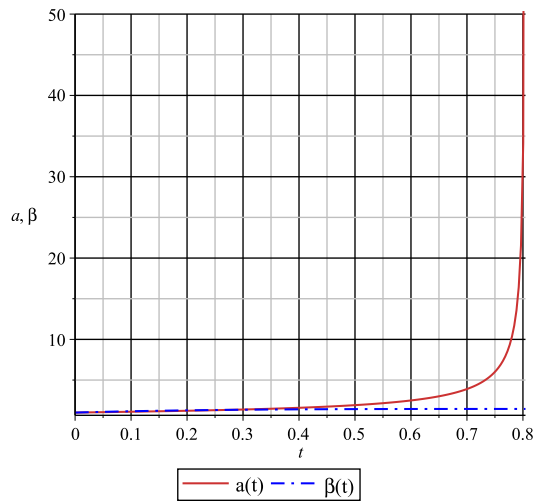


Figura 88 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 4.114836518$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 2$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

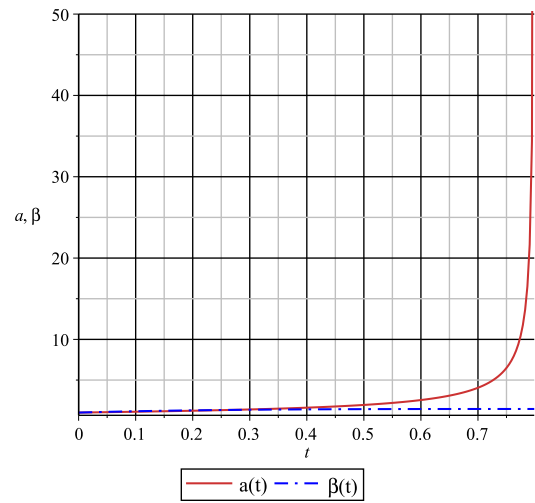


Figura 89 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 3.636652189$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 2$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

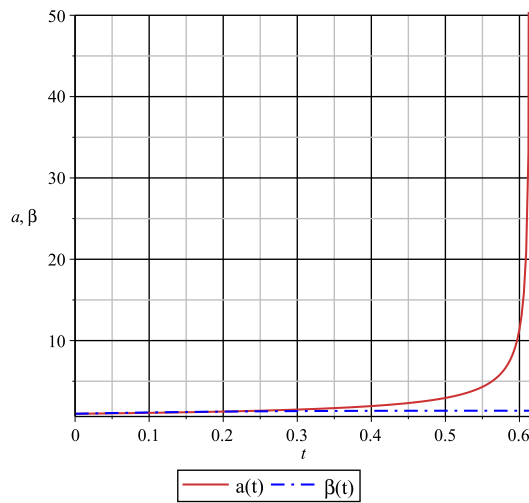


Figura 90 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1.969970133$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 2$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

Tabela 34 – Variação da condição inicial  $\dot{\beta}_0$ , obtendo  $C_r$ , para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo e  $C_p = C_f = 1$ .

$\dot{\beta}_0$	$C_r$	$t_s$	$\beta(t_s)$	$\dot{\beta}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
1	3.627903008	0.82473491	1.226192342	$2.574949911 \cdot 10^{-14}$	$2.824579821 \cdot 10^5$	$3.326260093 \cdot 10^{13}$
2	4.114836518	0.80456424	1.448574556	$4.407511232 \cdot 10^{-14}$	$1.865443475 \cdot 10^5$	$1.246441067 \cdot 10^{13}$
3	3.627903008	0.78860992	1.650946069	$4.351675376 \cdot 10^{-14}$	$1.882818923 \cdot 10^5$	$1.341868489 \cdot 10^{13}$
4	2.167102476	0.77589214	1.838970869	$5.473917227 \cdot 10^{-16}$	$3.238973791 \cdot 10^6$	$1.726322155 \cdot 10^{16}$

Tabela 35 – Variação da condição inicial  $\dot{\beta}_0$ , obtendo  $C_p$ , para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo e  $C_r = C_f = 1$ .

$\dot{\beta}_0$	$C_p$	$t_s$	$\beta(t_s)$	$\dot{\beta}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
1	3.224471870	0.81912594	1.224007098	$3.040489445 \cdot 10^{-14}$	$2.544545176 \cdot 10^5$	$2.560705874 \cdot 10^{13}$
2	3.636652189	0.79864871	1.443698148	$2.338340112 \cdot 10^{-14}$	$2.840221593 \cdot 10^5$	$3.560964080 \cdot 10^{13}$
3	3.224471870	0.78403189	1.645324796	$1.284956784 \cdot 10^{-14}$	$4.156161156 \cdot 10^8$	$9.700837755 \cdot 10^{13}$
4	1.987930918	0.77398076	1.835919618	$2.716188866 \cdot 10^{-14}$	$2.407413503 \cdot 10^5$	$2.598057132 \cdot 10^{13}$

Tabela 36 – Variação da condição inicial  $\dot{\beta}_0$ , obtendo  $C_f$ , para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo e  $C_r = C_p = 1$ .

$\dot{\beta}_0$	$C_f$	$t_s$	$\beta(t_s)$	$\dot{\beta}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
1	1.818337469	0.64970610	1.195366603	$2.038849771 \cdot 10^{-14}$	$2.658535175 \cdot 10^5$	$3.825321815 \cdot 10^{13}$
2	1.969970133	0.61519873	1.37736054	$2.519812028 \cdot 10^{-14}$	$2.247294057 \cdot 10^5$	$2.737562141 \cdot 10^{13}$
3	1.818337469	0.62359347	1.56008679	$1.237591340 \cdot 10^{-14}$	$3.548240822 \cdot 10^5$	$8.623701352 \cdot 10^{13}$
4	1.363439474	0.68776621	1.77812042	$1.905737454 \cdot 10^{-14}$	$2.780785786 \cdot 10^5$	$4.287787411 \cdot 10^{13}$
5	0.6052761495	0.92780106	2.13854677	$2.806332647 \cdot 10^{-14}$	$2.646490590 \cdot 10^5$	$2.762370737 \cdot 10^{13}$

### 6.3.1.7 Variação da Condição Inicial $a_0$

Depois de resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (6.11) e (6.14) para diferentes valores da condição inicial  $a_0$ , aumentando seu valor obtemos valores menores para a velocidade inicial  $\dot{\beta}_0$  até se tornar um número complexo. Esse resultado limita a resolução do sistema pelo método numérico, pois os fatores de escala são valores reais. Após estudarmos vários valores de  $a_0$  chegamos a conclusão que aumentando o valor inicial do fator de escala  $a(t)$ , menor é o intervalo de tempo que o fator de escala leva para chegar à singularidade. Assim, o  $a(t)$  inicia sua evolução a partir da sua condição inicial e vai para o valor infinito em um tempo finito, dando origem a uma singularidade do tipo *Big Rip*. Já a função  $\beta(t)$  parte do valor inicial, fixado pela condição inicial, e vai para uma constante quando o tempo tende a  $t_s$ , ocorrendo a isotropização do modelo.

Verificando os resultados, os valores de  $a(t_s)$  podem aumentar ou diminuir quando aumentamos  $a_0$ , não apresentando um comportamento bem definido. Já  $\beta(t_s)$  tem seus valores finais constantes menores a medida em que aumentamos a condição inicial  $a_0$ . Como exemplo para esses resultados, vamos considerar o caso em que  $w = -2$  e temos as seguintes energias do fluido completo:  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 91-93 e na Tabela 37.

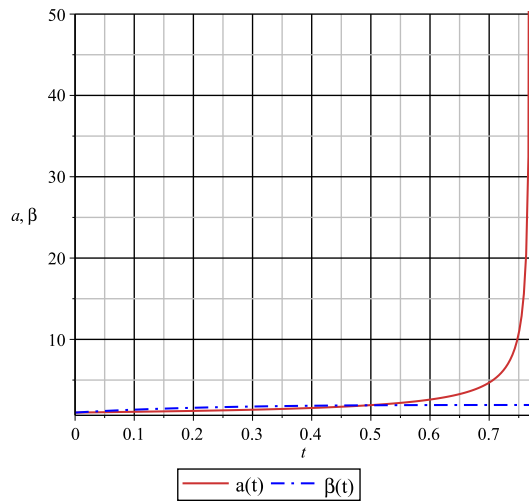


Figura 91 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 4.529197810$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1$ .

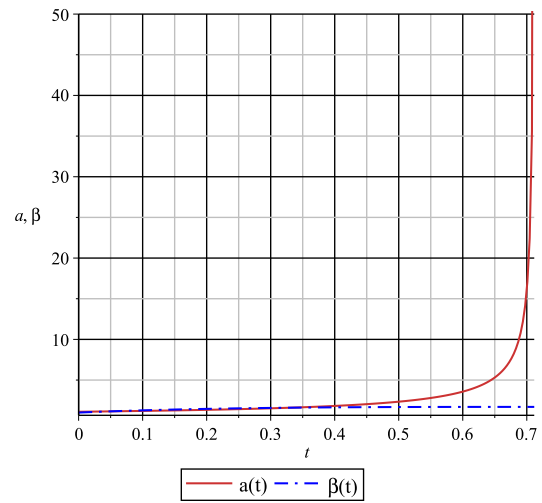


Figura 92 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 3.378955276$ ,  $a_0 = 1.1$  e  $\beta_0 = 1$ .

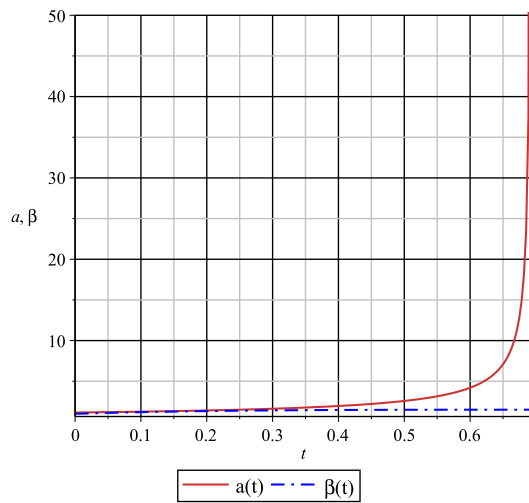


Figura 93 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 2.380671575$ ,  $a_0 = 1.15$  e  $\beta_0 = 1$ .

Tabela 37 – Variação da condição inicial  $a_0$ , com  $C_r = C_p = C_f = 1$ , para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo.

$a_0$	$\dot{\beta}_0$	$t_s$	$\beta(t_s)$	$\dot{\beta}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
0.5	8.098052427	1.3235830	2.500068742	$4.371969148 \cdot 10^{-13}$	34064.584352843	$2.310142449 \cdot 10^{11}$
1	4.529197810	0.77024456	1.934103851	$3.410560947 \cdot 10^{-14}$	$2.112249400 \cdot 10^5$	$1.919972570 \cdot 10^{13}$
1.1	3.378955276	0.71165669	1.699680214	$1.232656249 \cdot 10^{-14}$	$4.276466800 \cdot 10^5$	$1.056069726 \cdot 10^{14}$
1.15	2.380671575	0.69205353	1.501954547	$5.458635670 \cdot 10^{-16}$	$3.572314450 \cdot 10^6$	$2.027151543 \cdot 10^{16}$

### 6.3.1.8 Variação da Condição Inicial $\beta_0$

Após resolvermos numericamente o sistema composto pelas equações (6.11)-(6.14) para diferentes valores da condição inicial  $\beta_0$ , vemos que aumentando seu valor o valor obtido para  $\dot{\beta}_0$  diminui. Novamente, como ocorrido quando resolvemos o sistema variando a condição inicial  $a_0$ , o estudo é limitado devido ao valor de  $\dot{\beta}_0$  ir para um número complexo. Depois de estudarmos vários valores de  $\beta_0$  chegamos a conclusão que quanto maior o seu valor, menor é o tempo para o fator de escala  $a(t)$  e a função  $\beta(t)$  chegarem à singularidade. Com isso, temos que  $a(t)$  parte de um valor inicial e vai para o infinito, em um tempo finito, ocasionando o *Big Rip*, e  $\beta(t)$  parte do valor inicial e vai para uma constante a medida que o tempo tende a  $t_s$ , resultando na isotropização do modelo.

Para os resultados obtidos,  $a(t_s)$  não apresenta um padrão definido podendo aumentar ou diminuir seu valor. Já  $\beta(t_s)$  tem seu valor constante final maior a medida que aumentamos a condição inicial  $\beta_0$ , mantendo os outros parâmetros e condições iniciais fixados. Exemplificando esses resultados, vamos considerar o caso em que  $w = -2$  e  $C_r = C_p = C_f = 1$ . Esses exemplos podem ser observados nas Figuras 94-96 e na Tabela 38.

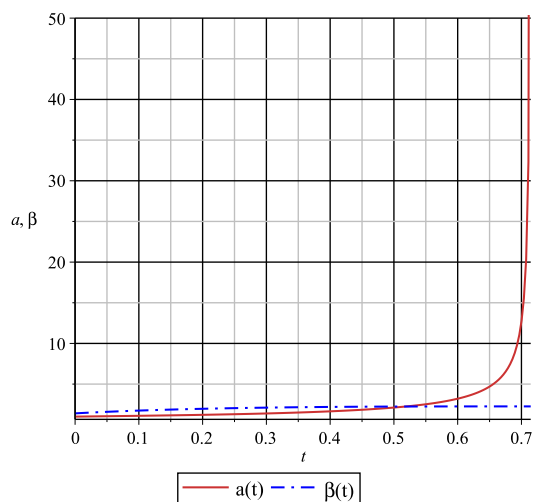


Figura 94 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 4.317773269$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1.4$ .

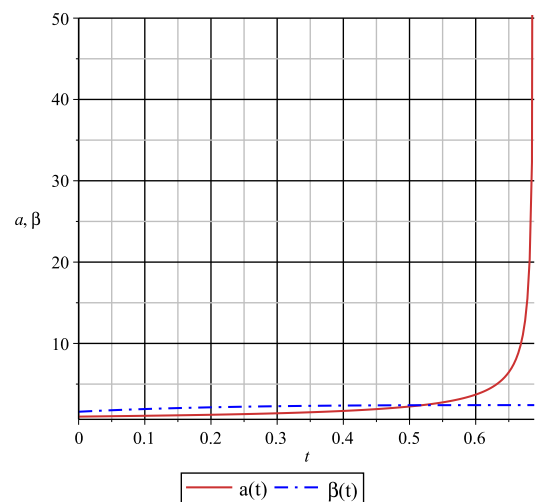


Figura 95 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 4.175199153$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1.6$ .

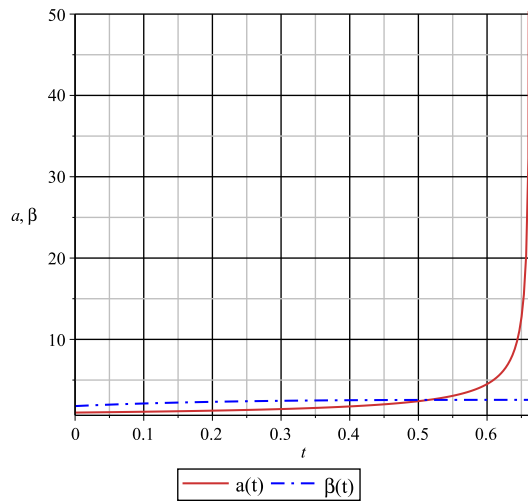


Figura 96 – Evolução temporal dos fatores de escala  $a$  e  $\beta$  para  $w = -2$ ,  $C_r = 1$ ,  $C_p = 1$ ,  $C_f = 1$ ,  $\dot{a}_0 = 1$ ,  $\dot{\beta}_0 = 3.997930835$ ,  $a_0 = 1$  e  $\beta_0 = 1.8$ .

Tabela 38 – Variação da condição inicial  $\beta_0$ , com  $C_r = C_p = C_f = 1$ , para o modelo cosmológico com parametrização e fluido completo.

$\beta_0$	$\dot{\beta}_0$	$t_s$	$\beta(t_s)$	$\dot{\beta}(t_s)$	$a(t_s)$	$\dot{a}(t_s)$
1	4.529197810	0.77024456	1.934103850	$3.410560947 \cdot 10^{-14}$	$2.112249400 \cdot 10^5$	$1.919972570 \cdot 10^{13}$
1.1	4.483838122	0.75587169	2.016225469	$4.434519041 \cdot 10^{-15}$	$7.974681520 \cdot 10^5$	$5.427898541 \cdot 10^{14}$
1.2	4.433873301	0.74179741	2.097621628	$1.888834248 \cdot 10^{-14}$	$2.938972577 \cdot 10^5$	$4.567459909 \cdot 10^{13}$
1.4	4.317773269	0.71453687	2.257919418	$2.260407590 \cdot 10^{-15}$	$1.175803264 \cdot 10^6$	$1.522042009 \cdot 10^{15}$
1.6	4.175199153	0.68845991	2.414371803	$3.698186329 \cdot 10^{-14}$	$1.816358942 \cdot 10^5$	$1.484501915 \cdot 10^{13}$
1.8	3.997930835	0.66359162	2.565889499	$1.450467342 \cdot 10^{-14}$	$3.277142285 \cdot 10^5$	$6.741641580 \cdot 10^{13}$
2	3.772655495	0.64000938	2.710640583	$2.599646452 \cdot 10^{-14}$	$2.151204822 \cdot 10^5$	$2.440326880 \cdot 10^{13}$
2.5	2.682236444	0.58959738	2.993230369	$3.613500710 \cdot 10^{-14}$	$1.668182921 \cdot 10^5$	$1.386866116 \cdot 10^{13}$

## 7 CONCLUSÃO

Após o estudo do modelo cosmológico para a métrica do tipo Kantowski-Sachs (KS), homogênea e anisotrópica, onde o conteúdo material é o fluido completo (radiação, poeira e fantasma), concluímos que o modelo apresenta a singularidade do tipo *Big Rip* para os fatores de escala  $a(t)$  e  $b(t)$ . Ou seja, eles vão para valores infinitos em um tempo finito. Através desse estudo, concluímos que durante a expansão do modelo o fluido fantasma domina sobre os fluidos de radiação e poeira.

Para chegar a essa conclusão, estudamos os modelos cosmológicos do tipo KS separadamente para cada fluido que constitui o fluido completo. A partir dessas análises, concluímos que os modelos com fluidos de radiação, Seção (5.1), e poeira, Seção (5.2), não podem realizar a expansão do Universo para este modelo, pois, sendo eles não repulsivos, um fator de escala expande até um valor máximo e depois tende a zero em um tempo finito. Esse comportamento limita a expansão do outro fator de escala, que vai para um valor finito em um tempo finito. Estes modelos não apresentam a singularidade do tipo *Big Rip*. Diferentemente dos outros modelos, o modelo cosmológico do tipo KS com fluido fantasma, estudado na Seção (5.3), apresenta solução expansiva devido a este fluido apresentar características de pressão negativa e densidade de energia positiva. Aqui é importante lembrar que o fluido fantasma representa a energia escura do modelo. Com a análise dos dados apresentados é possível concluir que o modelo apresenta uma singularidade do tipo *Big Rip* e seus fatores de escala vão para o infinito em um tempo finito.

Outra importante conclusão que chegamos foi sobre a isotropização do modelo. O estudo foi feito de duas formas: a primeira com o parâmetro de anisotropia de expansão ( $\Delta$ ), Seção (6.1), e a segunda com uma nova parametrização na métrica do tipo KS. Esta última foi motivada pela parametrização de Misner, Seção (6.3). No primeiro caso, após estudarmos diversos valores dos parâmetros e condições iniciais, foi possível concluir que o modelo cosmológico do tipo KS com o fluido completo inicia sua expansão apresentando a anisotropia presente na parte geométrica da métrica. A partir do momento em que o modelo começa a evoluir e o tempo tende a  $t_s$ , obtemos  $\Delta \rightarrow 0$ . Esse é o valor mínimo do parâmetro de anisotropia e significa que o Universo é isotrópico. No segundo caso, reescrevemos a métrica do tipo KS de forma a ter um fator de escala, na parte espacial, e uma outra função do tempo,  $\beta(t)$ , que descreve a anisotropia do modelo. Analisando diversos valores das condições iniciais e dos parâmetros do modelo, concluímos que a função  $\beta(t)$  tende a uma constante quando  $t \rightarrow t_s$ , confirmando a isotropização do modelo. Assim, a métrica (6.10) pode ser reescrita em termos da métrica do tipo FRW, ou seja, sendo descrita por apenas um fator de escala.

## REFERÊNCIAS

- [1] GRON, O.; HERVIK, S. *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology*: Springer, New York, 2007.
- [2] WALD, R. M. *General Relativity*. 1 ed. [S.l.]: The University of Chicago Press, 1984.
- [3] D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. 1 ed. [S.l.]: Clarendon Press, 1992.
- [4] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. 1 ed. [S.l.]: Jhon Wiley & Sons, 1972.
- [5] SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. 2 ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009.
- [6] MISNER, C. D.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. 1 ed. [S.l.]: W. H. Freeman and Company, 1973.
- [7] CALDWELL, R.R. A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. *Physics Letters B*, v.545, p.23–29, 2002.
- [8] COLLINS, C.B. Global structure of the "Kantowski-Sachs" cosmological models. *Journal of Mathematical Physics*, vol.18, no.2116, 1977.
- [9] Klauder, J. R. (ed.). *Magic Without Magic: John Archibald Wheeler*: W.H.Freeman, San Francisco, 1972.
- [10] RIESS, A.G. et al. Observational Evidence From Supernovae For An Accelerating Universe And A Cosmological Constant. *The Astronomical Journal*, v.116, p.1009-1038, 1998.
- [11] KANTOWSKI, R.; SACHS, R.K. Some Spatially Homogeneous Anisotropic Relativistic Models. *Journal of Mathematical Physics*, v.7, n.443, 1966.
- [12] Weber, E. Kantowski-Sachs cosmological models approaching isotropy. *Journal of Mathematical Physics*, v.25, n.3279, 1984.
- [13] Barrow, J. D. Kantowski-Sachs string cosmologies. *Physical Review D*, v.55, n.2, 1997.
- [14] Adhav, K.S.; Bansod, A. S.; Wankhade, R. P.; Ajmire, H. G. Kantowski-Sachs cosmological models with anisotropic dark energy. *Central European Journal of Physics*, v.9, n.4, p. 919-925, 2011.
- [15] O. Gron. Transition of a Kantowski-Sachs cosmological model into an inflationary era. *Journal of Mathematical Physics*, v.27, n.1490, 1986.
- [16] Bastos, C.; Bertolami, O.; Dias, N; Prata, J. Noncanonical phase-space noncommutativity and the Kantowski-Sachs singularity for black holes. *Physical Review D*, v.84, n.024005, 2011.
- [17] Campbell, L.M; Garay, L.J. Quantum wormholes in Kantowski-Sachs spacetime. *Physical Letters B*, v.254, n.1,2, 1991.

## A Cálculo das equações de campo de Einstein para o modelo com métrica do tipo Kantowski-Sachs

### A.1 Componentes da métrica

De posse da representação padrão do elemento de linha do espaço-tempo de Kantowski-Sachs podemos obter as componentes covariantes e contravariantes da métrica. Reescrevendo a métrica usando  $a(t) = a$  e  $b(t) = b$  (4.1),

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 dr^2 + b^2 d\theta^2 + b^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (\text{A.1})$$

as componentes covariante da métrica são definidas como:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 \\ g_{11} &= a^2 \\ g_{22} &= b^2 \\ g_{33} &= b^2 \sin^2(\theta) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e as componentes contravariante da métrica são representadas por:

$$\begin{aligned} g^{00} &= -1 \\ g^{11} &= a^{-2} \\ g^{22} &= b^{-2} \\ g^{33} &= b^{-2} \sin^{-2}(\theta). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

### A.2 Símbolo de Christoffel

Como estamos em um espaço-tempo sem torção, vamos utilizar a equação (2.5)

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\beta} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\beta\mu,\alpha}) \quad (\text{A.4})$$

e sua simetria para calcular os símbolos de Christoffel.

As componentes não nulas dos símbolos de Christoffel para o a métrica do tipo KS são:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} &= a\dot{a} \\ \Gamma^0_{22} &= b\dot{b} \\ \Gamma^0_{33} &= b\dot{b} \sin^2(\theta) \\ \Gamma^1_{10} &= \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma^2_{20} &= \frac{\dot{b}}{b} \\ \Gamma^3_{30} &= \frac{\dot{b}}{b} \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin\theta \cos\theta \\ \Gamma^3_{32} &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$



### A.3 Tensor de Ricci

O próximo passo para calcular as equações de Einsteins é calcular o tensor de Ricci que contem informações sobre a curvatura do modelo. Utilizando as equações (2.10),

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} R^{\lambda}_{\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} [\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha} \Gamma^{\rho}_{\nu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\beta} \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}] \quad (\text{A.6})$$

podemos reescrever a equação (2.11)

$$R_{\mu\alpha} = g^{\nu\beta} R_{\nu\mu\beta\alpha} = R_{\alpha\mu} \quad (\text{A.7})$$

resultado em:

$$\begin{aligned} R_{\mu\alpha} &= g^{\nu\beta} R_{\nu\mu\beta\alpha} \\ R_{\mu\alpha} &= g^{\nu\beta} g_{\mu\lambda} R^{\lambda}_{\nu\alpha\beta} \\ R_{\mu\alpha} &= g^{\nu\beta} g_{\mu\lambda} [\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha} \Gamma^{\rho}_{\nu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\beta} \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A componente temporal do tensor de Ricci é dado por:

$$R_{00} = g^{\nu\beta} g_{0\lambda} [\Gamma^{\lambda}_{\nu\beta,0} - \Gamma^{\lambda}_{\nu 0,\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\rho 0} \Gamma^{\rho}_{\nu\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\beta} \Gamma^{\rho}_{\nu 0}]. \quad (\text{A.9})$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci terão os índices  $\nu = \beta$  e  $\mu = \lambda$ . Para valores diferentes nos índices as componentes da métrica do tipo KS são nulas, veja (A.2) (A.3), de acordo com o elemento de linha (A.1). Logo,

$$R_{00} = g^{\nu\beta} g_{00} [\Gamma^0_{\nu\beta,0} - \Gamma^0_{\nu 0,\beta} + \Gamma^0_{\rho 0} \Gamma^{\rho}_{\nu\beta} - \Gamma^0_{\rho\beta} \Gamma^{\rho}_{\nu 0}]. \quad (\text{A.10})$$

Sendo  $\nu = \beta$  e  $\mu = \lambda$ , a equação anterior resulta em:

$$\begin{aligned} R_{00} &= g^{00} g_{00} [\Gamma^0_{00,0} - \Gamma^0_{00,0} + \Gamma^0_{\rho 0} \Gamma^{\rho}_{00} - \Gamma^0_{\rho 0} \Gamma^{\rho}_{00}] \\ &+ g^{11} g_{00} [\Gamma^0_{11,0} - \Gamma^0_{10,1} + \Gamma^0_{\rho 0} \Gamma^{\rho}_{11} - \Gamma^0_{\rho 1} \Gamma^{\rho}_{10}] \\ &+ g^{22} g_{00} [\Gamma^0_{22,0} - \Gamma^0_{20,2} + \Gamma^0_{\rho 0} \Gamma^{\rho}_{22} - \Gamma^0_{\rho 2} \Gamma^{\rho}_{20}] \\ &+ g^{33} g_{00} [\Gamma^0_{33,0} - \Gamma^0_{30,3} + \Gamma^0_{\rho 0} \Gamma^{\rho}_{33} - \Gamma^0_{\rho 3} \Gamma^{\rho}_{30}]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Fazendo a soma em  $\rho$ , onde  $\rho$  tem sua variação de 0 à 3, temos:

$$\begin{aligned} R_{00} &= g^{00} g_{00} [\Gamma^0_{00,0} - \Gamma^0_{00,0} + \Gamma^0_{00} \Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{10} \Gamma^1_{00} + \Gamma^0_{20} \Gamma^2_{00} + \Gamma^0_{30} \Gamma^3_{00} \\ &\quad - \Gamma^0_{00} \Gamma^0_{00} - \Gamma^0_{10} \Gamma^1_{00} - \Gamma^0_{20} \Gamma^2_{00} - \Gamma^0_{30} \Gamma^3_{00}] \\ &+ g^{11} g_{00} [\Gamma^0_{11,0} - \Gamma^0_{10,1} + \Gamma^0_{00} \Gamma^0_{11} + \Gamma^0_{10} \Gamma^1_{11} + \Gamma^0_{20} \Gamma^2_{11} + \Gamma^0_{30} \Gamma^3_{11} \\ &\quad - \Gamma^0_{01} \Gamma^0_{10} - \Gamma^0_{11} \Gamma^1_{10} - \Gamma^0_{21} \Gamma^2_{10} - \Gamma^0_{31} \Gamma^3_{10}] \\ &+ g^{22} g_{00} [\Gamma^0_{22,0} - \Gamma^0_{20,2} + \Gamma^0_{00} \Gamma^0_{22} + \Gamma^0_{10} \Gamma^1_{22} + \Gamma^0_{20} \Gamma^2_{22} + \Gamma^0_{30} \Gamma^3_{22} \\ &\quad - \Gamma^0_{02} \Gamma^0_{20} - \Gamma^0_{12} \Gamma^1_{20} - \Gamma^0_{22} \Gamma^2_{20} - \Gamma^0_{32} \Gamma^3_{20}] \\ &+ g^{33} g_{00} [\Gamma^0_{33,0} - \Gamma^0_{30,3} + \Gamma^0_{00} \Gamma^0_{33} + \Gamma^0_{10} \Gamma^1_{33} + \Gamma^0_{20} \Gamma^2_{33} + \Gamma^0_{30} \Gamma^3_{33} \\ &\quad - \Gamma^0_{03} \Gamma^0_{30} - \Gamma^0_{13} \Gamma^1_{30} - \Gamma^0_{23} \Gamma^2_{30} - \Gamma^0_{33} \Gamma^3_{30}]. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Substituindo na componente temporal do tensor de Ricci (A.12) as componentes da métrica (A.2) e (A.3), os símbolos de Christoffel (A.4) e suas derivadas, temos o resultado em função dos fatores de escala  $a$  e  $b$  dado por:

$$R_{00} = -\frac{1}{ab}[\ddot{a}b + 2\dot{b}\dot{a}]. \quad (\text{A.13})$$

As componentes com coordenadas espaciais do tensor de Ricci podem ser encontradas de semelhante forma na qual foi tratada a coordenada temporal, resultando em:

$$R_{11} = \frac{1}{b}[a\ddot{a}b + 2a\dot{a}\dot{b}] \quad (\text{A.14})$$

$$R_{22} = \frac{1}{a}[b\ddot{b}a + b\dot{b}\dot{a} + \dot{b}^2a + a] \quad (\text{A.15})$$

$$R_{33} = \frac{1}{a}[b\sin^2\theta\ddot{b}a + b\sin^2\theta\dot{b}\dot{a} + \dot{b}^2a\sin^2\theta + a\sin^2\theta]. \quad (\text{A.16})$$

#### A.4 Escalar de Ricci

Para calcular o escalar de Ricci vamos utilizar a equação (2.12),

$$R = g^{\mu\alpha}R_{\mu\alpha} = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (\text{A.17})$$

Aqui precisamos fazer as somas nos índices variando de 0 à 3 da mesma forma que fizemos no Subseção (A.3) para o tensor de Ricci. De acordo com as componentes da métrica e as componentes do tensor de Ricci, pode-se notar que  $\mu = \alpha$ . Assim, utilizando a primeira igualdade da equação (A.17), por já termos calculado as componentes do tensor de Ricci, temos:

$$R = g^{\mu\alpha}R_{\mu\alpha} = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33}. \quad (\text{A.18})$$

Substituindo as componentes contravariante da métrica (A.3) e as componentes do tensor de Ricci (A.13)-(A.16), obtemos:

$$R = \frac{2}{ab^2}[\ddot{a}b^2 + 2b\dot{b}\dot{a} + a + \dot{b}^2a + 2b\dot{b}\dot{a}]. \quad (\text{A.19})$$

#### A.5 Tensor momento energia

Vamos relembrar que o modelo que estamos construindo é um modelo anisotrópico com o fluido perfeito isotrópico. Assim, anisotropia presente no modelo é proveniente da geometria e não do fluido. Esse fluido perfeito pode ser representado pelo tensor momento energia covariante (3.1)

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}. \quad (\text{A.20})$$

Para calcular as componentes do tensor momento energia vamos utilizar um fluido que tem sua quadri-velocidade, em um referencial comóvel, dado por  $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$  como foi descrito no Subseção (3). Fazendo a soma nos índices  $\mu$  e  $\nu$  as componentes do tensor momento energia se dão da seguinte forma (haja vista que  $\mu = \nu$  devido a restrição imposta pelas componentes da métrica na equação (A.20)): (i) componente temporal:

$$T^{00} = (\rho + p)U^0U^0 + pg^{00}T^{00} = \rho. \quad (\text{A.21})$$

Onde  $U^0 = 1$ .

(ii) componentes espaciais:

$$T^{11} = (\rho + p)U^1U^1 + pg^{11}T^{11} = pa^{-2} \quad (\text{A.22})$$

$$T^{22} = (\rho + p)U^2U^2 + pg^{22}T^{22} = pb^{-2} \quad (\text{A.23})$$

$$T^{33} = (\rho + p)U^3U^3 + pg^{33}T^{33} = pb^{-2} \sin^{-2} \theta. \quad (\text{A.24})$$

Onde foi usado  $U^1 = U^2 = U^3 = 0$ .

## A.6 Conservação do tensor momento energia

Afim de resolvermos as equações de Einstein em função dos fatores de escala, dos parâmetros do fluido e das condições iniciais, precisamos reescrever a densidade do fluido em função dos fatores de escala. Para isso, vamos aplicar a conservação no tensor momento energia  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ . Utilizando a definição de derivada covariante (2.2), temos:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = T^{\mu\nu}_{,\nu} + T^{\alpha\nu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} + T^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\alpha\nu} = 0. \quad (\text{A.25})$$

A única componente da conservação do tensor momento energia que não resulta na identidade  $0 = 0$  é a componente temporal. Assim, fazendo  $\mu = 0$ :

$$T^{0\nu}_{;\nu} = T^{0\nu}_{,\nu} + T^{\alpha\nu}\Gamma^0_{\alpha\nu} + T^{0\alpha}\Gamma^{\nu}_{\alpha\nu} = 0. \quad (\text{A.26})$$

Sendo  $\mu = 0$ , as equações (A.21)-(A.24) nos impõem  $\nu = 0$  no primeiro termo após a igualdade da equação (A.26),  $\alpha = \nu$  no segundo termo e  $\alpha = 0$  no terceiro termo. Logo, a equação (A.26) fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T^{0\nu}_{;\nu} &= \overbrace{T^{00}_{,0}}^{\nu=0} + \overbrace{T^{00}\Gamma^0_{00} + T^{11}\Gamma^0_{11} + T^{22}\Gamma^0_{22} + T^{33}\Gamma^0_{33}}^{\alpha=\nu} \\ &\quad + \overbrace{T^{00}\Gamma^0_{00} + T^{00}\Gamma^1_{01} + T^{00}\Gamma^2_{02} + T^{00}\Gamma^3_{03}}^{\alpha=0} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Substituindo os símbolos de Christoffel (A.5) e as componentes contravariantes do tensor momento energia (A.21)-(A.24), após uma pequena álgebra obtemos:

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = \dot{\rho} + \frac{\dot{a}}{a}[\rho + p] + 2\frac{\dot{b}}{b}[\rho + p] = 0 \quad (\text{A.28})$$

Aplicando a equação de estado (3.10) e usando o método de separação de variáveis para resolver a integral temos:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\rho \left[ \frac{\dot{a}}{a} + w \frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{b}}{b} + 2w \frac{\dot{b}}{b} \right] \\ \int \frac{d\rho}{\rho} &= - \int [1 + w] \left[ \frac{da}{a} + \frac{2db}{b} \right] \\ \rho &= C[ab^2]^{-(1+w)}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Onde  $C$  é uma constante de entregação positiva relacionada com a energia de expansão do fluido.

## A.7 Equações de Einstein

De posse dos resultados obtidos até aqui neste apêndice podemos, enfim, chegar nas componentes da equação de Einstein. Para isso vamos utilizar a equação (2.19)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.30})$$

e substitui as componentes covariantes da métrica (A.2), as componentes do tensor de Ricci (A.13)-(A.16), o escalar de Ricci (A.19) e as componentes do tensor momento energia (A.21)-(A.24). Para o estudo das equações vamos usar  $\Lambda = 0$  e adotaremos as constantes  $8\pi G = 1 = c$  para simplificar as contas [11].

Assim, a componente temporal covariante das equações de campo de Einstein é dado por:

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R &= T_{00} \\ 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{1}{b^2} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} &= C[ab^2]^{-(1+w)} \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Já as componentes espaciais covariante das equações de campo Einstein são:

$$\begin{aligned} R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R &= T_{11} \\ 2\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} &= -p \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R &= T_{22} \\ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} &= -p \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R = T_{33}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = -p. \quad (\text{A.34})$$

As equações (A.33) e (A.34) são iguais devido o fator de escala  $b$  estar presente na expansão, ou contração, da métrica (A.1) mantendo a proporção na distância entre pontos nas coordenadas  $\theta$  e  $\phi$ .

## B Cálculo das equações de campo de Einstein para o modelo com métrica do tipo Kantowski-Sachs com uma nova parametrização

### B.1 Componentes da métrica

Para o elemento de linha do espaço-tempo de Kantowski-Sachs com parametrização dada pela equação (6.10), as componentes covariante da métrica são definidas como:

$$\begin{aligned}
 g_{00} &= -1 \\
 g_{11} &= a^2 e^{-\beta} \\
 g_{22} &= a^2 e^{\beta} \\
 g_{33} &= a^2 e^{\beta} \sin^2(\theta)
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

e as componentes contravariante da métrica são representadas por:

$$\begin{aligned}
 g^{00} &= -1 \\
 g^{11} &= a^{-2} e^{\beta} \\
 g^{22} &= a^{-2} e^{-\beta} \\
 g^{33} &= a^{-2} e^{-\beta} \sin^{-2}(\theta).
 \end{aligned}
 \tag{B.2}$$

### B.2 Símbolo de Christoffel

Usando a equação (A.4), as componentes não nulas dos símbolos de Christoffel para a métrica cujas componentes são dadas acima, são,

$$\begin{aligned}
 \Gamma^0_{11} &= \frac{2a\dot{a}e^{-\beta} - a^2(\dot{\beta})e^{-\beta}}{2} \\
 \Gamma^0_{22} &= \frac{2a\dot{a}e^{-\beta} + a^2(\dot{\beta})e^{\beta}}{2} \\
 \Gamma^0_{33} &= \frac{2a\dot{a}e^{-\beta} \sin^2 \theta + a^2\dot{b}e^{\beta} \sin^2 \theta}{2} \\
 \Gamma^1_{10} &= \frac{2a\dot{a} - a^2\dot{\beta}}{2a^2} \\
 \Gamma^2_{20} &= \frac{2a\dot{a} + a^2\dot{\beta}}{2a^2} \\
 \Gamma^3_{30} &= \frac{2a\dot{a} + a^2\dot{\beta}}{2a^2} \\
 \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta \\
 \Gamma^3_{32} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.
 \end{aligned}
 \tag{B.3}$$

### B.3 Tensor de Ricci

Utilizando a equação (A.8), as componentes não nulas do tensor de Ricci são:

$$R_{00} = -\frac{1}{4a}[3a\dot{\beta}^2 + 2a\ddot{\beta} + 12\ddot{a} + 4\dot{a}\dot{\beta}] \quad (\text{B.4})$$

$$R_{11} = -\frac{e^{-\beta}}{4a}[a^2\dot{\beta}^2 + 2a^2\ddot{\beta} - 8\dot{a}^2 - 4a\ddot{a} + 4a\dot{a}\dot{\beta}^2] \quad (\text{B.5})$$

$$R_{22} = \frac{1}{4a}[a^2e^{-\beta}\dot{\beta}^2 + 2a^2e^{-\beta}\ddot{\beta} + 8e^{-\beta}\dot{a}^2 + 4e^{-\beta}a\ddot{a} + 4 - 8a\dot{a}\dot{\beta}e^{-\beta}] \quad (\text{B.6})$$

$$R_{33} = \frac{\sin^2\theta}{4a}[a^2e^{-\beta}\dot{\beta}^2 + 2a^2e^{-\beta}\ddot{\beta} + 8e^{-\beta}\dot{a}^2 + 4e^{-\beta}a\ddot{a} + 4 - 8a\dot{a}\dot{\beta}e^{-\beta}]. \quad (\text{B.7})$$

### B.4 Escalar de Ricci

Usando a equação (A.18) para obter o escalar de Ricci, temos:

$$R = \dot{\beta}^2 + \ddot{\beta} + \frac{6\dot{a}^2}{a^2} + \frac{6\ddot{a}}{a} - \frac{2}{a^2e^{\beta}} + \frac{4\dot{a}\dot{\beta}}{a}. \quad (\text{B.8})$$

### B.5 Tensor momento energia

Para calcular as componentes do tensor momento energia, vamos usar a equação (A.20). Temos então: (i) componente temporal:

$$T^{00} = (\rho + p)U^0U^0 + pg^{00}T^{00} = \rho \quad (\text{B.9})$$

Onde  $U^0 = 1$ .

(ii) componentes espaciais:

$$T^{11} = (\rho + p)U^1U^1 + pg^{11}T^{11} = pa^{-2}e^{\beta} \quad (\text{B.10})$$

$$T^{22} = (\rho + p)U^2U^2 + pg^{22}T^{22} = pa^{-2}e^{-\beta} \quad (\text{B.11})$$

$$T^{33} = (\rho + p)U^3U^3 + pg^{33}T^{33} = pa^{-2}e^{-\beta}\sin^{-2}\theta. \quad (\text{B.12})$$

Onde foi usado  $U^1 = U^2 = U^3 = 0$ .

## B.6 Conservação do tensor momento energia

A única componente da conservação do tensor momento energia que não resulta na identidade  $0 = 0$  é a componente temporal. Com isso, usaremos a equação (A.26) para escrever a densidade do fluido como função dos fatores de escala. Assim temos:

$$\begin{aligned} T^{0\nu}{}_{;\nu} &= \dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}[\rho + wp] + \frac{\dot{\beta}}{2}[\rho + wp] = 0 \\ \dot{\rho} &= -\rho \left[ \frac{3\dot{a}}{a} + \frac{3w\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\beta}}{2} + \frac{2\dot{\beta}}{2} \right] \\ \rho &= C a^{(-3-w)} e^{\frac{-\beta}{2}(1+w)}. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Onde  $C$  é uma constante de integração positiva. Aqui é importante lembrar que o fluido fantasma é caracterizado por ter a pressão negativa, ou seja,  $w < -1$ , o fluido de radiação tem  $w = \frac{1}{3}$  e a pressão positiva; e o fluido de poeira tem  $w = 0$  e a pressão nula.

O fluido completo tem densidade dado por  $\rho_c = \rho_r + \rho_p + \rho_f$ , onde  $\rho_r$  é a densidade do fluido de radiação,  $\rho_p$  é a densidade do fluido de poeira e  $\rho_f$  é a densidade do fluido fantasma. Logo,

$$\rho_c = C_r a^{-4} e^{-\frac{2\beta}{3}} + C_p a^{-3} e^{-\frac{\beta}{2}} + C_f a^{-3(1+w)} e^{-\frac{\beta(1+w)}{2}}. \quad (\text{B.14})$$

Onde  $C_r$  é a constante de integração do fluido de radiação,  $C_p$  é a constante de integração do fluido de poeira e  $C_f$  é a constante de integração do fluido fantasma.

## B.7 Equações de Einstein

Por fim, vamos utilizar a equação de campo de Einstein, equação (A.30), onde adotaremos  $\Lambda = 0$  e as constantes como  $8\pi G = 1 = c$  para simplificar as contas. Assim, a componente temporal covariante das equações de campo de Einstein para a métrica do tipo KS com parametrização (6.10) e com o fluido completo como componente material, é dada por:

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R &= T_{00} \\ -\frac{\dot{\beta}^2}{4} + \frac{e^{-\beta}}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{\beta}}{a} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} &= C_r a^{-4} e^{-\frac{2\beta}{3}} + C_p a^{-3} e^{-\frac{\beta}{2}} + C_f a^{-3(1+w)} e^{-\frac{\beta(1+w)}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Já as componentes espaciais covariante das equações de campo Einstein deste modelo são:

$$\begin{aligned} R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R &= T_{11} \\ \frac{-3a^2\dot{\beta}^2}{4} - 3a\dot{a}\dot{\beta} - a^2\ddot{\beta} - \dot{a}^2 - 2a\ddot{a} - e^{-\beta} &= pa^2 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} R_{22} - \frac{1}{2}g_{22}R &= T_{22} \\ \frac{-a^2\dot{\beta}^2}{4} - \dot{a}^2 - 2a\ddot{a} &= pa^2 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$



$$\begin{aligned} R_{33} - \frac{1}{2}g_{33}R &= T_{33} \\ \frac{-a^2\dot{\beta}^2}{4} - \dot{a}^2 - 2a\ddot{a} &= pa^2. \end{aligned} \tag{B.18}$$

Como podemos ver, devido as simetrias da métrica (6.10), as equações (B.17) e (B.18) são iguais.