UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

Artur Assis Amorim

Métodos da média periódico e não-periódico para equações diferenciais funcionais em medida com impulsos e equações dinâmicas funcionais com impulsos

Juiz de Fora

2022

Artur Assis Amorim

Métodos da média periódico e não-periódico para equações diferenciais funcionais em medida com impulsos e equações dinâmicas funcionais com impulsos

Dissertação apresentada ao Mestrado Acadêmico em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Eduard Toon

Juiz de Fora

2022

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Amorim, Artur Assis.
Métodos da média periódico e não-periódico para equações diferenciais funcionais em medida com impulsos e equações dinâmicas funcionais com impulsos / Artur Assis Amorim. – 2022.
151 f.

Orientador: Eduard Toon
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Acadêmico em Matemática, 2022.

1. Método da média. 2. Equações diferenciais funcionais em medida. 3. Equações dinâmicas funcionais em escalas temporais. I. Toon, Eduard, orient. II. Título.

Artur Assis Amorim

Métodos da média periódico e não-periódico para equações diferenciais funcionais em medida com impulsos e equações dinâmicas funcionais com impulsos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Análise

Aprovada em 09 de março de 2022.

BANCA EXAMINADORA

Eduard Toon - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Fernanda Andrade da Silva

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

Suzete Maria Silva Afonso

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Rio Claro

Juiz de Fora, 15/03/2022.

Documento assinado eletronicamente por **Eduard Toon**, **Professor(a)**, em 15/03/2022, às 19:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Fernanda Andrade da Silva**, **Usuário Externo**, em 15/03/2022, às 21:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Suzete Maria Silva Afonso**, **Usuário Externo**, em 16/03/2022, às 08:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **0710518** e o código CRC **6C6D699D**.

Dedico este trabalho aos meus pais e à Regina.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu pai, Glauker, por ter alimentado minha curiosidade e meu pensamento ao longo da vida, e a minha mãe, Gioconda, por sempre ter me incentivado a me dedicar e ter me ensinado coisas que fogem a razão.

Agradeço ao professor Eduard, por ter aceitado me orientar mesmo com um prazo curto. Suas aulas e sua constante disponibilidade tornaram possível não apenas a realização desse trabalho, mas também o meu desenvolvimento acadêmico durante a graduação e o mestrado.

Agradeço à minha namorada de muitos anos, Isadora, que sempre serviu de inspiração e guia e por sempre ter me apoiado em meus estudos.

Agradeço a todos os professores e servidores que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação. Não há presente mais duradouro e útil que o conhecimento, o qual, graças a vocês, pude obter.

Agradeço à UFJF pela estrutura e pela excelência do ensino público, gratuito e inclusivo.

Agradeço a banca, pela atenção e pela disponibilidade.

Por fim, agradeço a Regina. Seu impacto no mundo não pode ser medido pelo número de teoremas feitos, mas nenhum teorema, feito ou não, será capaz de medir o impacto que teve, no mundo e em mim. Foi extraordinária em vida, maior que o conjunto de suas partes e, mais ainda, foi minha segunda mãe. Viverá sempre em minha memória e meu coração.

"Wir müssen wissen. Wir werden wissen." - David Hilbert.

RESUMO

A área de equações diferenciais ocupa um papel central na matemática. De um ponto de vista teórico, é um campo que intersecta diversas outras áreas distintas e as conecta. Do ponto de vista aplicado, é uma área com inúmeras aplicações nas ciências naturais e na modelagem computacional. Devido a isso, essa área atrai muitos pesquisadores e há grande produção acadêmica nesse campo.

O objetivo desse trabalho é estudar certos tipos de equações diferenciais funcionais em medida e de equações dinâmicas funcionais em escalas temporais, além de métodos da média para estas equações. Para isso, estudamos a integral de Kurzweil e suas propriedades, as quais foram desenvolvidas na década de 50 para a resolução de problemas dentro da área de EDO, e as escalas temporais, que foram introduzidas em 1988, na tese de doutorado de Stefan Hilger, com o intuito de unificar as análises discreta e contínua. Usamos dessas teorias para relacionar equações diferenciais funcionais com equações dinâmicas e para provarmos resultados sobre ambas. Por fim, usamos desses resultados e relações para o estudo do método da média, o qual nos permite aproximar as soluções dessas equações por soluções de equações mais simples.

Palavras-chave: Método da média. Equações diferenciais funcionais em medida. Equações dinâmicas funcionais em escalas temporais.

ABSTRACT

The area of differential equations occupies a central role in mathematics. From a theoretical point of view, it is a field that intersects several other distinct areas and connects them. From an applied mathematics point of view, it is an area with numerous applications in the natural sciences and in computational modeling. Due to this, it is an area that attracts many researchers and in which there is great academic production.

The objective of this work is to study certain types of measure functional differential equations and functional dynamic equations on time scales, as well as averaging methods for these equations. For this, we studied the Kurzweil integral and its properties, which were developed in the 1950s for solving problems within the ODE area, and the time scales, which were introduced in 1988, in Stefan Hilger's doctoral thesis, in order to unify discrete and continuous analysis. We use these theories to relate functional differential equations to dynamic equations and to prove results on both. Finally, we use these results and relationships to study the averaging method, which allows us to approximate the solutions of these equations by solutions of simpler equations.

Keywords: Averaging method. Measure functional differential equations. Functional dynamic equations on time scales.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Rightarrow$	Implica em
$\in$	Pertence
$\Leftrightarrow$	Se, e somente se
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais: $\{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\int_a^b DU(\tau, t)$	Integral de Kurzweil de U em $[a, b]$
$\int_a^b f(s)dg(s)$	Integral de Perron-Stieltjes de f com respeito a g em $[a, b]$
$\int_a^b f(s)\Delta g(s)$	Δ-integral de Perron-Stieltjes de f com respeito a g em $[a, b]_{\mathbb{T}}$
σ	Operador avanço
ρ	Operador recuo
μ	Função granulosidade
f^{Δ}	Δ-derivada de f
$\rightarrow$	Converge para
$B(a, r)$	Bola aberta em um espaço de Banach X de centro a e raio r, dada pelo conjunto $\{x \in X \mid \|x - a\| < r\}$
$B[a, r]$	Bola fechada em um espaço de Banach X de centro a e raio r, dada pelo conjunto $\{x \in X \mid \|x - a\| \leq r\}$
$G(X, Y)$	Conjunto das funções $f : X \rightarrow Y$ regradas
$\mathbb{R}_+$	Conjunto dos números reais não-negativos
C_A	Complementar do conjunto A
$C_{rd}(\mathbb{T}, X)$	Conjunto das funções $f : \mathbb{T} \rightarrow X$ rd-contínuas
$\Delta^+ g(t)$	Valor do limite $\lim\limits_{s \to t^+} g(s) - g(t)$
$\Delta^- g(t)$	Valor do limite $\lim\limits_{s \to t^-} g(t) - g(s)$
$f(t^+)$	Valor do limite $\lim\limits_{s \to t^+} f(s)$
$f(t^-)$	Valor do limite $\lim\limits_{s \to t^-} f(s)$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Desde sua concepção, as equações diferenciais tiveram um papel destaque na matemática: por um lado, mais teórico, essa área reunia diversos assuntos centrais na pesquisa matemática da época, como a análise, a geometria e a topologia, conectando essas áreas e fornecendo resultados importantes dentro delas; por outro lado, mais aplicado, essa área se mostrou extremamente eficiente na modelagem e estudo de fenômenos naturais, tendo se tornado linguagem e ferramenta imprescindível para as ciências naturais. Tal fato motivou o desenvolvimento dessa área por inúmeros matemáticos ao longo dos séculos, e vários dos "problemas" encontrados durante esse processo serviram para trazer a luz novas ideias, que serviram de base para continuar o progresso no estudo de equações diferenciais.

Dentro desses problemas, um que se destaca está relacionado com a integrabilidade de certas funções. A integral de Riemann não é capaz de integrar muitas funções que são "interessantes", de um ponto de vista teórico, dentre as quais se destacam funções de grande oscilação ou com muitas descontinuidades. Para tratar esse problema, muitas outras integrais foram desenvolvidas. Nesse texto, estudaremos, no segundo capítulo, as integrais de Kurzweil e de Perron-Stieltjes e suas propriedades, sendo esta última integral um caso particular da primeira. Neste capítulo, apresentamos um resultado inédito, que nos permite dar novas demonstrações de ambas as versões do Lema de Cousin, além de apresentarmos demonstrações próprias de diversas propriedades da integral de Kurzweil. Um dos motivos de interesse no estudo dessa integral se dá pelo fato de ela generalizar a integral de Riemann generalizada, sendo capaz de integrar funções de grande oscilação, com muitas descontinuidades, que tenham como contradomínio espaços de Banach. Outro motivo importante se dá pelo fato dessas integrais englobarem muitas outras integrais importantes, como a integral de Riemann, a integral de Lesbegue e a integral de Riemann generalizada.

Outro problema que surge ao longo do desenvolvimento das equações diferenciais se dá no contexto da modelagem de certos fenômenos naturais. Por exemplo, em alguns casos, populações de organismos podem sofrer grandes reduções periódicas em seu volume populacional, começando este a se comportar de maneira discreta ou até mesmo desaparecendo durante certos períodos, para depois retornarem ao seu crescimento usual. Isso se torna um problema na modelagem uma vez que uma função que descrevesse essa população ao longo do tempo necessitaria ter "buracos" em seu domínio, o que vai de encontro às ferramentas do cálculo, que muitas vezes supõe um domínio conexo. Uma das soluções para esse problema foi proposta por Stefan Hilger, em sua tese de doutorado, por meio das escalas temporais. Nesse texto, estudaremos no terceiro capítulo este conceito e suas propriedades, além de um tipo de integral definido para que possamos integrar sobre conjuntos fechados não-conexos: a Δ-integral de Perron-Stieltjes. Em particular, daremos uma definição um pouco mais geral que aquela encontrada em grande parte da literatura (a saber, a Δ-integral de Perron), que nos permitirá, sem esforço adicional, generalizar quase todos os resultados referentes à escalas presentes nesse texto. Ainda no terceiro capítulo, veremos que a Δ-integral de Perron-Stieltjes e a integral de Perron-Stieltjes estão fortemente relacionadas.

Em seguida, no capítulo 4, usaremos da teoria desenvolvida nos dois capítulos anteriores para estudarmos equações diferenciais funcionais em medida, com e sem impulso, e equações dinâmicas funcionais em escalas temporais, com e sem impulso. Durante esse estudo, além de analisarmos as propriedades dessas equações, usaremos da relação entre a Δ-integral de Perron-Stieltjes e a integral de Perron-Stieltjes para mostrar que existe uma correspondência biunívoca entre as soluções de certas equações diferenciais em medida e as soluções de certas equações dinâmicas em escalas temporais, o que nos permitirá provar resultados para equações dinâmicas utilizando a integral de Perron-Stieltjes e domínios conexos, ambos os quais possuem propriedades bastante úteis. Ainda, a definição da Δ-integral que apresentaremos, e os resultados que dela seguem, nos permitirão generalizar muitos dos resultados referentes à equações dinâmicas em escalas temporais.

Por fim, no capítulo 5, estudaremos métodos da média, periódico e não-periódico, para a análise de equações funcionais em medida e equações dinâmicas em escalas temporais. Esses métodos consistem em aproximar as soluções de certas equações por soluções de equações mais simples. Novamente, nesse capítulo, usaremos dos resultados mais gerais da Δ-integral apresentados nesse texto para generalizar alguns dos resultados dos métodos da média referentes à equações dinâmicas.

2 INTEGRAL DE KURZWEIL

Neste capítulo, estudaremos a integral de Kurzweil, a qual pode ser entendida como uma generalização da integral de Riemann generalizada. O motivo de estudar tal integral é que esta nos permite integrar funções de grande oscilação, além de podermos tomar contradomínios fora dos reais. Em particular, essa integral engloba outras integrais bastante úteis, como a integral de Perron-Stieltjes, a qual será explorada na parte de equações funcionais em medida.

2.1 Definição

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$.

Definição 1 (Partição)**.** *Dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que $d = \{t_i \in [a,b] \ \mid \ i \in \{0, 1, ..., n\}\}$ é uma partição de $[a,b]$ se $t_0 = a$, $t_n = b$ e $t_{i-1} < t_i$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Nesse caso, diremos que $n = |d|$ e que $d = (t_i)$. O conjunto das partições de $[a,b]$ será denotado por $D_{[a,b]}$.*

Seja $\mathbb{I} = \{A \subset \mathbb{R} \ \mid \ A$ é um intervalo$\}$.

Definição 2 (Partição marcada)**.** *Seja $d = (t_i) \in D_{[a,b]}$. Dado $i \in \{1, ..., |d|\}$, seja $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. O conjunto $\{(\xi_i, [t_{i-1}, t_i]) \in \mathbb{R} \times \mathbb{I} \ \mid \ i \in \{1, ..., |d|\}\}$ é dito ser uma partição marcada de $[a,b]$. Denotaremos uma partição marcada d como sendo $d = (\xi_i, [t_{i-1}, t_i])$. O conjunto das partições marcadas de $[a,b]$ será denotado por $TD_{[a,b]}$.*

Definição 3 (Partição marcada parcial)**.** *Se $d \in TD_{[a,b]}$ e $d' \subset d$, dizemos que d' é uma partição marcada parcial de $[a,b]$. O conjunto das partições marcadas parciais de $[a,b]$ é chamado de $TPD_{[a,b]}$.*

Definição 4 (Calibre)**.** *Um calibre em $A \subset [a,b]$ é uma função $\delta : A \to (0, +\infty)$. Dado um calibre δ em $[a,b]$, dizemos que $d = (\xi_i, [t_{i-1}, t_i]) \in TPD_{[a,b]}$ é uma partição marcada parcial δ-fina quando $[t_{i-1}, t_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i)) = B(\xi_i, \delta(\xi_i))$ para todo $i \in \{1, ..., |d|\}$.*

Definiremos agora a integral de Kurzweil, conforme feito em (1, Definição 2.1).

Definição 5 (Integral de Kurzweil)**.** *Seja X um espaço de Banach. Uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ é chamada de Kurzweil integrável em $[a,b]$ se existe $I \in X$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ tal que:*

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] - I \right\| < \epsilon$$

para toda partição marcada $d = (\tau_i, [t_{i-1,t_i}])$ δ-fina de $[a,b]$. Nesse caso, I é chamado de integral de Kurzweil de U sobre $[a,b]$ e será denotado por $\displaystyle\int_a^b DU(\tau, t)$.

Note que a definição acima apresenta dois possíveis "problemas": primeiramente, para que a definição não seja trivial, é necessário que, para todo calibre δ em $[a,b]$, exista uma partição marcada d de $[a,b]$ δ-fina. De fato, sem isso, pode-se tomar um calibre δ que não possui uma partição marcada δ-fina, donde teríamos que todo $I \in X$ seria a integral de Kurzweil de U sobre $[a,b]$. Em segundo lugar, mesmo com esse resultado, ainda não teríamos garantido a unicidade dessa integral, quando a mesma existisse. Para resolver o primeiro dos problemas, provaremos um lema de análise na reta que, até onde sabemos, se trata de um resultado inédito.

Lema 1. *Seja $K \subset \mathbb{R}$ um compacto da reta, Λ um conjunto de índices, $\{x_i \in K \mid i \in \Lambda\}$ um conjunto de pontos de K e $\bigcup_{i\in\Lambda} B(x_i,\epsilon_i)$ uma cobertura aberta de K com $\epsilon_i > 0$ para todo $i \in \Lambda$. Então, existe uma subcobertura aberta $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\epsilon_i)$ de K tal que:*

1. *$x_i < x_{i+1}$ para todo $i \in \{1,...,n-1\}$.*
2. *Se $i,j \in \{1,...,n\}$ com $i < j-1$, então $B(x_i,\epsilon_i) \cap B(x_j,\epsilon_j) = \emptyset$.*
3. *Para todo $i \in \{1,...,n\}$, vale $B(x_i,\epsilon_i) \cap K \not\subset \bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} B(x_j,\epsilon_j) \cap K$.*
4. *Se $i \in \{1,...,n-1\}$ e $B(x_i,\epsilon_i), B(x_{i+1},\epsilon_{i+1})$ possuem pontos na mesma componente conexa $\mathcal{C}$ de K, então existe $a_i \in B(x_i,\epsilon_i) \cap B(x_{i+1},\epsilon_{i+1}) \cap \mathcal{C}$. Se $\mathcal{C} \cap [x_i,x_{i+1}] \neq \emptyset$, então podemos exigir que $x_i \le a_i \le x_{i+1}$. Ainda, se $\mathcal{C} \cap (x_i,x_{i+1}) \neq \emptyset$, então podemos exigir que $x_i < a_i < x_{i+1}$.*
5. *Dados $i,j \in \{1,...,n\}$ com $i < j$, temos:*

   $$\inf B(x_i,\epsilon_i) \cap K \le \inf B(x_j,\epsilon_j) \cap K \ \text{ e } \ \sup B(x_i,\epsilon_i) \cap K \le \sup B(x_j,\epsilon_j) \cap K.$$

   Ainda, se $j \neq i+1$, vale que:

   $$\inf B(x_i,\epsilon_i) \cap K < \inf B(x_j,\epsilon_j) \cap K \ \text{ e } \ \sup B(x_i,\epsilon_i) \cap K < \sup B(x_j,\epsilon_j) \cap K.$$

6. *$\inf K \in B(x_j,\epsilon_j)$ se, e somente se, $j = 1$ e $\sup K \in B(x_j,\epsilon_j)$ se, e somente se, $j = n$.*

Demonstração. Como K é compacto, existe uma subcobertura finita $\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\epsilon_i)$ de K. Suponha que exista $i \in \{1,...,m\}$ tal que $B(x_i,\epsilon_i) \cap K \subset \bigcup_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m} B(x_j,\epsilon_j) \cap K$. Então, $\bigcup_{k=1}^{m-1} B(x_{k'},\epsilon_{k'})$ dada por $B(x_{k'},\epsilon_{k'}) = B(x_k,\epsilon_k)$ para $k < i$ e $B(x_{k'},\epsilon_{k'}) = B(x_{k+1},\epsilon_{k+1})$ para $k \ge i$, é uma cobertura aberta de K. De fato, se $x \in K$, existe $k \in \{1,...,n\}$ tal que $x \in B(x_k,\epsilon_k)$. Se $k \neq i$, existe $k' \in \{1,...,m-1\}$ tal que $x \in B(x_k,\epsilon_k) = B(x_{k'},\epsilon_{k'}) \subset \bigcup_{k=1}^{m-1} B(x_{k'},\epsilon_{k'})$. Se $k = i$, então $x \in B(x_i,\epsilon_i) \cap K \subset \bigcup_{k=1}^{m-1} B(x_{k'},\epsilon_{k'}) \cap K =$

$\bigcup\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m} B(x_k,\epsilon_k)\cap K$. Logo, $\bigcup\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m} B(x_j,\epsilon_j)$ é uma cobertura aberta de K. Repetindo esse processo até no máximo $m-1$ vezes, obtemos uma cobertura aberta $\bigcup\limits_{i=i}^{n} B(x_i,\epsilon_i)$ tal que $B(x_i,\epsilon_i)\cap K \not\subset \bigcup\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} B(x_j,\epsilon_j)\cap K$ para todo $i\in\{1,...,n\}$. Com isso, concluímos o item 3.

Sendo x_i o elemento de K que é o centro de $B(x_i,\epsilon_i)$ para cada $i\in\{1,...,n\}$, podemos supor $x_i<x_{i+1}$ para todo $i\in\{1,...,n-1\}$. Do contrário, basta reordenarmos os índices. Portanto, concluímos o item 1.

Seja $i\in\{1,...,n\}$ e $J\subset\{1,...,n\}\setminus\{i\}$ tal que $J\neq\emptyset$. Notemos que se $B(x_i,\epsilon_i)\subset \bigcup\limits_{j\in J} B(x_j,\epsilon_j)$, então $B(x_i,\epsilon_i)\cap K\subset \bigcup\limits_{j\in J} B(x_j,\epsilon_j)\cap K\subset \bigcup\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} B(x_j,\epsilon_j)\cap K$, o que é um absurdo. Portanto, devemos ter $B(x_i,\epsilon_i)\not\subset \bigcup\limits_{j\in J} B(x_j,\epsilon_j)$.

Sejam $i,j\in\{1,...,n\}$ com $i<j-1$. Então, como $i<j-1$, segue que $i<i+1<j$, donde $x_i<x_{i+1}<x_j$. Sejam:

$$a=\max\{\sup B(x_i,\epsilon_i),\sup B(x_{i+1},\epsilon_{i+1}),\sup B(x_j,\epsilon_j)\}\text{ e}$$
$$b=\min\{\inf B(x_i,\epsilon_i),\inf B(x_{i+1},\epsilon_{i+1}),\inf B(x_j,\epsilon_j)\}.$$

Se existe $k\in\{i+1,j\}$ tal que $b=\inf B(x_k,\epsilon_k)$, então:

$$x_k-\epsilon_k\le x_i-\epsilon_i\Rightarrow 0<x_k-x_i\le\epsilon_k-\epsilon_i\Rightarrow\epsilon_i<\epsilon_k.$$

Assim:

$$x_k-\epsilon_k<x_i-\epsilon_i<x_i+\epsilon_i<x_k+\epsilon_k,$$

donde $B(x_i,\epsilon_i)\subset B(x_k,\epsilon_k)\subset\bigcup\limits_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{n} B(x_l,\epsilon_l)$, um absurdo. Analogamente, se existe $k\in\{i,i+1\}$ tal que $a=\sup B(x_k,\epsilon_k)$, então:

$$x_j+\epsilon_j\le x_k+\epsilon_k\Rightarrow 0<x_j-x_k\le\epsilon_k-\epsilon_j\Rightarrow\epsilon_j<\epsilon_k.$$

Assim:

$$x_k-\epsilon_k<x_j-\epsilon_j<x_j+\epsilon_j<x_k+\epsilon_k,$$

donde $B(x_j,\epsilon_j)\subset B(x_k,\epsilon_k)\subset\bigcup\limits_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{n} B(x_l,\epsilon_l)$, um absurdo.

Portanto, devemos ter $a=\sup B(x_j,\epsilon_j)$ e $b=\inf B(x_i,\epsilon_i)$. Suponha que $B(x_i,\epsilon_i)\cap B(x_j,\epsilon_j)\neq\emptyset$. Então, como $B(x_i,\epsilon_i)$ e $B(x_j,\epsilon_j)$ são conexos abertos com um ponto em comum, $B(x_i,\epsilon_i)\cup B(x_j,\epsilon_j)$ é conexo e:

$$\inf B(x_i,\epsilon_i)\cup B(x_j,\epsilon_j)=x_i-\epsilon_i=b\le x_{i+1}-\epsilon_{i+1}\text{ e}$$
$$x_{i+1}+\epsilon_{i+1}\le a=x_j+\epsilon_j=\sup B(x_i,\epsilon_i)\cup B(x_j,\epsilon_j).$$

Logo, $B(x_{i+1},\epsilon_{i+1})\subset B(x_i,\epsilon_i)\cup B(x_j,\epsilon_j)\subset\bigcup\limits_{\substack{l=1\\l\neq i+1}}^{n} B(x_l,\epsilon_l)$, um absurdo. Dessa forma, temos $B(x_i,\epsilon_i)\cap B(x_j,\epsilon_j)=\emptyset$ e, assim, vale o item 2.

Mostremos então a quarta afirmação do lema. Dado $i \in \{1, ..., n-1\}$, suponha que exista uma componente conexa $\mathcal{C}$ de K tal que $B(x_i, \epsilon_i) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ e $B(x_{i+1}, \epsilon_{i+1}) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Sejam $b_i = \sup B(x_i, \epsilon_i) \cap \mathcal{C}$ e $c_i = \inf B(x_{i+1}, \epsilon_{i+1}) \cap \mathcal{C}$. Sabemos que $B(x_i, \epsilon_i) \cap \mathcal{C}, B(x_{i+1}, \epsilon_{i+1}) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ e que $B(x_i, \epsilon_i) \cap \mathcal{C} \subset B(x_i, \epsilon_i)$ (limitado) e $B(x_{i+1}, \epsilon_{i+1}) \cap \mathcal{C} \subset B(x_{i+1}, \epsilon_{i+1})$ (limitado), donde b_i e c_i estão bem definidos. Ainda, note que, como K é compacto, cada uma de suas componentes conexas é compacta, donde $b_i, c_i \in \mathcal{C}$. Analisemos os possíveis casos.

- Caso $b_i < c_i$: Nesse caso, seja $a_i = \dfrac{b_i + c_i}{2}$. Como $b_i, c_i \in \mathcal{C}$ e $b_i < a_i < c_i$, temos $a_i \in \mathcal{C} \subset K$. Portanto, devemos ter $a_i \in B(x_j, \epsilon_j)$ para algum $j \in \{1, ..., n\}$ com $j \neq i, i+1$. Notemos que, nesse caso, devemos ter $b_i = \sup B(x_i, \epsilon_i) = x_i + \epsilon_i$. De fato, caso contrário, existiria $\epsilon > 0$ tal que $b_i + \delta \in B(x_i, \epsilon_i)$ para todo $0 \leq \delta < \epsilon$. Em particular, como $\lim \dfrac{c_i - b_i}{n} = 0$ e $\dfrac{c_i - b_i}{n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 1$ e $\dfrac{c_i - b_i}{n_0} < \epsilon$. Então, $b_i < b_i + \dfrac{c_i - b_i}{n_0} < c_i$, donde teríamos $b_i + \dfrac{c_i - b_i}{n_0} \in B(x_i, \epsilon_i) \cap \mathcal{C}$ e $b_i + \dfrac{c_i - b_i}{n_0} > b_i = \sup B(x_i, \epsilon_i) \cap \mathcal{C}$, o que é um absurdo. Analogamente, devemos ter $c_i = \inf B(x_{i+1}, \epsilon_{i+1}) = x_{i+1} - \epsilon_{i+1}$. Suponha então que $j < i$. Temos:

  $$b_i = x_i + \epsilon_i < a_i < x_j + \epsilon_j \Rightarrow \epsilon_j - \epsilon_i > x_i - x_j > 0 \Rightarrow \epsilon_j > \epsilon_i.$$

  Assim:

  $$x_j - \epsilon_j < x_i - \epsilon_i < x_i + \epsilon_i < x_j + \epsilon_j \Rightarrow B(x_i, \epsilon_i) \subset B(x_j, \epsilon_j),$$

  o que é um absurdo. Logo, $j > i + 1$. Então, devemos ter:

  $$x_j - \epsilon_j < a_i < c_i = x_{i+1} - \epsilon_{i+1} \Rightarrow 0 < x_j - x_{i+1} < \epsilon_j - \epsilon_{i+1} \Rightarrow \epsilon_j > \epsilon_{i+1}.$$

  Entretanto, isso implica em:

  $$x_j - \epsilon_j < x_{i+1} - \epsilon_{i+1} < x_{i+1} + \epsilon_{i+1} < x_j + \epsilon_j \Rightarrow B(x_{i+1}, \epsilon_{i+1}) \subset B(x_j, \epsilon_j),$$

  o que é um absurdo.

- Caso $b_i = c_i$: Nesse caso, façamos $a_i = b_i = c_i$ e suponhamos primeiramente que $a_i \notin B(x_i, \epsilon_i)$ e $a_i \notin B(x_{i+1}, \epsilon_{i+1})$. Como $a_i \in K$, existe $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i, i+1\}$ tal que $a_i \in B(x_j, \epsilon_j)$. Portanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a_i, \epsilon) \subset B(x_j, \epsilon_j)$. Como $a_i = b_i = \sup B(x_i, \epsilon_i) \cap \mathcal{C}$, temos que $B(a_i, \epsilon) \cap B(x_i, \epsilon_i) \neq \emptyset$ (uma vez que $B(x_i, \epsilon_i) \cap \mathcal{C}$ é um intervalo por ser a interseção de dois intervalos). Logo, $B(x_j, \epsilon_j) \cap B(x_i, \epsilon_i) \neq \emptyset$, donde $j \in \{i-1, i+1\}$. Analogamente, como $a_i = c_i = \inf B(x_{i+1}, \epsilon_{i+1}) \cap \mathcal{C}$, temos que $B(a_i, \epsilon) \cap B(x_{i+1}, \epsilon_{i+1}) \neq \emptyset$ (uma vez que $B(x_{i+1}, \epsilon_{i+1}) \cap \mathcal{C}$ é um intervalo por ser a interseção de dois intervalos). Logo, $B(x_j, \epsilon_j) \cap B(x_{i+1}, \epsilon_{i+1}) \neq \emptyset$, donde $j \in \{i, i+2\}$. Assim, $j \in \{i, i+2\} \cap \{i-1, i+1\} = \emptyset$, um absurdo. Portanto, devemos ter $a_i \in B(x_i,\epsilon_i)$ ou $a_i \in B(x_{i+1},\epsilon_{i+1})$. Sem perda de generalidade, suponha que $a_i \in B(x_i,\epsilon_i)$. Nesse caso, como $\sup B(x_i,\epsilon_i) \notin B(x_i,\epsilon_i)$, devemos ter $a_i = \sup \mathcal{C}$. Mas $a_i = c_i = \inf B(x_{i+1},\epsilon_{i+1}) \cap \mathcal{C}$. Se $a_i = \inf B(x_{i+1},\epsilon_{i+1})$, então para todo $y \in B(x_{i+1},\epsilon_{i+1})$, temos $y > a_i = \sup \mathcal{C}$, donde $B(x_{i+1},\epsilon_{i+1}) \cap \mathcal{C} = \emptyset$, um absurdo. Assim, $a_i = c_i = \inf \mathcal{C}$ (em particular, $a_i \in B(x_{i+1},\epsilon_{i+1})$). Então $\mathcal{C} = \{a_i\}$ e $a_i \in B(x_i,\epsilon_i) \cap B(x_{i+1},\epsilon_{i+1}) \cap \mathcal{C}$. Caso $\mathcal{C} \cap [x_i,x_{i+1}] \neq \emptyset$, então $a_i \in [x_i,x_{i+1}]$, donde $x_i \leq a_i \leq x_{i+1}$. Por fim, caso $\mathcal{C} \cap (x_i,x_{i+1}) \neq \emptyset$, então $a_i \in (x_i,x_{i+1})$, donde $x_i < a_i < x_{i+1}$.

- Caso $b_i > c_i$: Nesse caso, seja $a_i = \dfrac{b_i + c_i}{2}$. Como $b_i, c_i \in \mathcal{C}$ e $c_i < a_i < b_i$, temos $a_i \in \mathcal{C}$. Suponha que $c_i \leq x_i - \epsilon_i$. Então:

$$x_{i+1} - \epsilon_{i+1} = \inf B(x_{i+1},\epsilon_{i+1}) \leq c_i \leq x_i - \epsilon_i \Rightarrow 0 < x_{i+1} - x_i \leq \epsilon_{i+1} - \epsilon_i \Rightarrow \epsilon_{i+1} > \epsilon_i.$$

Com isso, temos:

$$x_{i+1} - \epsilon_{i+1} \leq x_i - \epsilon_i < x_i + \epsilon_i < x_{i+1} + \epsilon_{i+1} \Rightarrow B(x_i,\epsilon_i) \subset B(x_{i+1},\epsilon_{i+1}),$$

o que é um absurdo. Logo, $c_i > x_i - \epsilon_i$. Analogamente, temos $b_i < x_{i+1} + \epsilon_{i+1}$. Dessa forma, $x_i - \epsilon_i < c_i < a_i < b_i \leq \sup B(x_i,\epsilon_i) = x_i + \epsilon_i$, donde $a_i \in B(x_i,\epsilon_i)$. Similarmente, $x_{i+1} - \epsilon_{i+1} = \inf B(x_{i+1},\epsilon_{i+1}) \leq c_i < a_i < b_i < x_{i+1} + \epsilon_{i+1}$, donde $a_i \in B(x_{i+1},\epsilon_{i+1})$. Assim, $a_i \in B(x_i,\epsilon_i) \cap B(x_{i+1},\epsilon_{i+1}) \cap \mathcal{C}$. Caso $\mathcal{C} \cap [x_i,x_{i+1}] \neq \emptyset$, sejam $u_i = \max\{x_i, c_i\}$ e $v_i = \min\{x_{i+1}, b_i\}$. Sabemos que $x_i < x_{i+1}$ e que $b_i = \sup B(x_i,\epsilon_i) \cap \mathcal{C}$. Suponha que $b_i < x_i$. Como existe $k \in \mathcal{C} \cap [x_i,x_{i+1}] \subset \mathcal{C}$ tal que $b_i < x_i \leq k$ e $b_i \in \mathcal{C}$, temos pela conexidade de $\mathcal{C}$ que $x_i \in \mathcal{C}$, donde $x_i \in B(x_i,\epsilon_i) \cap \mathcal{C}$. Assim, $b_i \geq x_i$, o que é um absurdo. Logo, $x_i \leq b_i$. Analogamente, $c_i \leq x_{i+1}$. Como $c_i < b_i$ e $x_i < x_{i+1}$, segue que $u_i \leq v_i$. Seja $a_i = \dfrac{u_i + v_i}{2}$. Vimos que:

$$\max\{x_i - \epsilon_i, x_{i+1} - \epsilon_{i+1}\} \leq c_i < b_i \leq \min\{x_i + \epsilon_i, x_{i+1} + \epsilon_{i+1}\}.$$

Como $c_i \leq u_i \leq a_i \leq v_i \leq b_i$, segue que $a_i \in B(x_i,\epsilon_i) \cap B(x_{i+1},\epsilon_{i+1})$. Ainda, $c_i, b_i \in \mathcal{C}$, temos $a_i \in \mathcal{C}$. Por fim, $x_i \leq u_i \leq a_i \leq v_i \leq x_{i+1}$. Caso $\mathcal{C} \cap (x_i,x_{i+1}) \neq \emptyset$, suponha que $x_i = b_i$. Sabemos que existe $k \in \mathcal{C} \cap (x_i,x_{i+1})$. Como $b_i, k \in \mathcal{C}$, temos que $[x_i,k] = [b_i,k] \subset \mathcal{C}$. Seja $\delta = \dfrac{1}{2}\min\{\epsilon_i, k - x_i\} > 0$, de forma que $k, x_i + \epsilon_i > x_i + \delta > x_i$. Então $x_i + \delta \in [x_i,k] \subset \mathcal{C}$ e $x_i + \delta \in B(x_i,\epsilon_i)$, donde $x_i + \delta \in B(x_i,\epsilon_i) \cap \mathcal{C}$. Mas isso implica em $b_i = x_i \geq x_i + \delta$, o que é um absurdo. Logo, $x_i < b_i$. Analogamente, $c_i < x_{i+1}$. Como $c_i < b_i$, temos $c_i < v_i$. Da mesma forma, como $x_i < x_{i+1}$, temos $x_i < v_i$. Assim, $u_i < v_i$ e $x_i \leq u_i < a_i < v_i \leq x_{i+1}$.

Com isso, provamos o item 4.

Mostremos agora a quinta afirmação do lema. Primeiramente, notemos que $x_i \in B(x_i,\epsilon_i) \cap K$ para todo $i \in \{1,...,n\}$, donde $B(x_i,\epsilon_i) \cap K$ é não-vazio e limitado para todo

$i \in \{1, ..., n\}$ e, portanto, existe seu supremo e ínfimo. Sejam $i, j \in \{1, ..., n\}$ com $i < j$. Suponha que $\inf B(x_i, \epsilon_i) \cap K > \inf B(x_j, \epsilon_j) \cap K$. Então existe $y \in B(x_j, \epsilon_j) \cap K$ tal que $y < \inf B(x_i, \epsilon_i) \cap K \leq x_i$, donde $y \notin B(x_i, \epsilon_i)$ (pois $y \in K$) e assim:

$$y \leq x_i - \epsilon_i \text{ ou } y \geq x_i + \epsilon_i.$$

Como $y < x_i$, devemos ter $x_j - \epsilon_j \leq \inf B(x_j, \epsilon_j) \cap K \leq y \leq x_i - \epsilon_i$, donde $\epsilon_j - \epsilon_i \geq x_j - x_i > 0$ e, consequentemente, $\epsilon_j > \epsilon_i$. Daí:

$$x_j - \epsilon_j \leq x_i - \epsilon_i < x_i + \epsilon_i < x_j + \epsilon_j$$

e, portanto, $B(x_i, \epsilon_i) \subset B(x_j, \epsilon_j)$, o que é um absurdo. Logo, $\inf B(x_i, \epsilon_i) \cap K \leq \inf B(x_j, \epsilon_j) \cap K$. Analogamente, suponha que $\sup B(x_i, \epsilon_i) \cap K > \sup B(x_j, \epsilon_j) \cap K$. Então existe $y \in B(x_i, \epsilon_i) \cap K$ tal que $y > \sup B(x_j, \epsilon_j) \cap K \geq x_j$, donde $y \notin B(x_j, \epsilon_j)$ (pois $y \in K$) e assim:

$$y \leq x_j - \epsilon_j \text{ ou } y \geq x_j + \epsilon_j.$$

Como $y > x_j$, devemos ter $x_i + \epsilon_i \geq \sup B(x_i, \epsilon_i) \cap K \geq y \geq x_j + \epsilon_j$, donde $\epsilon_i - \epsilon_j \geq x_j - x_i > 0$ e, consequentemente, $\epsilon_i > \epsilon_j$. Daí:

$$x_i - \epsilon_i < x_j - \epsilon_j < x_j + \epsilon_j \leq x_i + \epsilon_i$$

e, portanto, $B(x_j, \epsilon_j) \subset B(x_i, \epsilon_i)$, o que é um absurdo. Logo, $\sup B(x_i, \epsilon_i) \cap K \leq \sup B(x_j, \epsilon_j) \cap K$. Se $j \neq i + 1$, então $j > i + 1$, donde $i < j - 1$ e, pelo item 2 do lema, temos $B(x_i, \epsilon_i) \cap B(x_j, \epsilon_j) = \emptyset$. Então:

$$\inf B(x_i, \epsilon_i) \cap K \leq x_i < x_i + \epsilon_i \leq x_j - \epsilon_j \leq \inf B(x_j, \epsilon_j) \cap K,$$

e:

$$\sup B(x_i, \epsilon_i) \cap K \leq x_i + \epsilon_i \leq x_j - \epsilon_j < x_j \leq \sup B(x_j, \epsilon_j) \cap K,$$

donde o item 5 segue.

Por fim, mostremos que $\inf K \in B(x_1, \epsilon_1)$. De fato, existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $\inf K \in B(x_j, \epsilon_j)$. Se $\inf K \notin B(x_1, \epsilon_1)$, então:

$$x_j - \epsilon_j < \inf K < x_1 - \epsilon_1 \Rightarrow 0 < x_j - x_1 < \epsilon_j - \epsilon_1 \Rightarrow \epsilon_1 < \epsilon_j.$$

Assim:

$$x_j - \epsilon_j < x_1 - \epsilon_1 < x_1 + \epsilon_1 < x_j + \epsilon_j,$$

donde $B(x_1, \epsilon_1) \subset B(x_j, \epsilon_j)$, o que é um absurdo. Logo, $\inf K \in B(x_1, \epsilon_1)$. Analogamente, $\sup K \in B(x_n, \epsilon_n)$. Suponha então que $\inf K \in B(x_j, \epsilon_j)$, com $j \neq 1$. Temos duas possibilidades:

- Caso $x_1 + \epsilon_1 \geq x_j + \epsilon_j$: Nesse caso, dado $y \in B(x_j, \epsilon_j) \cap K$, temos:

$$x_1 - \epsilon_1 < \inf K \leq y < x_j + \epsilon_j \leq x_1 + \epsilon_1,$$

  donde $y \in B(x_1, \epsilon_1)$. Como $y \in K$, temos $y \in B(x_1, \epsilon_1) \cap K$. Logo, $B(x_j, \epsilon_j) \cap K \subset B(x_1, \epsilon_1) \cap K$, o que é um absurdo.

- Caso $x_1 + \epsilon_1 < x_j + \epsilon_j$: Nesse caso, dado $y \in B(x_1, \epsilon_1) \cap K$, temos:

$$x_j - \epsilon_j < \inf K \leq y < x_1 + \epsilon_1 < x_j + \epsilon_j,$$

  donde $y \in B(x_j, \epsilon_j)$. Como $y \in K$, temos $y \in B(x_j, \epsilon_j) \cap K$. Assim, $B(x_1, \epsilon_1) \cap K \subset B(x_j, \epsilon_j) \cap K$, o que é um absurdo.

Portanto, não existe $j \in \{2, ..., n\}$ tal que $\inf K \in B(x_j, \epsilon_j)$. Analogamente, não existe $j \in \{1, ..., n-1\}$ tal que $\sup K \in B(x_j, \epsilon_j)$, donde o item 6 segue. $\square$

Usaremos o lema anterior para dar uma nova demonstração do Lema de Cousin. Outra demonstração desse lema pode ser encontrada em (2, Seção S1.8).

Lema 2. *[Lema de Cousin] Dado um calibre δ de $[a, b]$, existe uma partição marcada δ-fina de $[a, b]$.*

Demonstração. Caso $a = b$, qualquer partição marcada de $[a, b]$ é δ-fina, para todo calibre δ. Suponha então que $a < b$. Como $\delta(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, temos $B(x, \delta(x)) \neq \emptyset$ para todo $x \in [a, b]$. Considere a cobertura aberta $\bigcup_{\tau \in [a,b]} B(\tau, \delta(\tau))$ de $[a, b]$. Pelo Lema 1, existem $\{\tau_1, ..., \tau_n\} \in [a, b]$ tais que valem as condições do Lema. Dado $i \in \{1, ..., n-1\}$, pelo item 4 do Lema 1, existe $x_{i+1} \in [a, b] \cap B(\tau_i, \delta(\tau_i)) \cap B(\tau_{i+1}, \delta(\tau_{i+1}))$ tal que $\tau_i < x_{i+1} < \tau_{i+1}$ (pois $[a, b]$ é conexo). Sabemos ainda que $a \in B(\tau_1, \delta(\tau_1))$ e $b \in B(\tau_n, \delta(\tau_n))$. Fazendo $a = x_1$ e $b = x_{n+1}$, temos que $d = (\tau_i, [x_i, x_{i+1}])$ é uma partição marcada de $[a, b]$ que satisfaz:

$$x_i, x_{i+1} \in B(\tau_i, \delta(\tau_i)), x_i \leq \tau_i \leq x_{i+1} \text{ e } x_i \neq x_{i+1}.$$

Pela conexidade de $B(\tau_i, \delta(\tau_i))$, segue que:

$$[x_i, x_{i+1}] \subset B(\tau_i, \delta(\tau_i)).$$

Portanto, d é uma partição marcada δ-fina de $[a, b]$. $\square$

Com isso, resolvemos o primeiro problema. Ainda resta mostrar que a integral de Kurzweil, quando existe, é única. Considere X um espaço de Banach e $U : [a, b] \times [a, b] \to X$. Usaremos da seguinte proposição para mostrar a unicidade:

Proposição 1. *Sejam δ_1 e δ_2 calibres sobre $[a, b]$. Então a função $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} : [a, b] \to (0, +\infty)$, dada por $\delta(t) = \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\}$ para todo $t \in [a, b]$ é um calibre sobre $[a, b]$. Ainda, se $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$ é uma partição δ-fina de $[a, b]$, então d é δ_1-fina e δ_2-fina.*

Demonstração. Dado $t \in [a,b]$, temos $\delta_1(t), \delta_2(t) > 0$, donde $\delta(t) = \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\} > 0$, donde δ está bem definido e é um calibre em $[a,b]$. Ainda, seja $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$ uma partição δ-fina. Então, dado $i \in \{1, ..., |d|\}$, temos:

$$[t_{i-1}, t_i] \subset B(\tau_i, \delta(\tau_i)) \subset B(\tau_i, \delta_1(\tau_i)), B(\tau_i, \delta_2(\tau_i)),$$

donde d é δ_1-fina e δ_2-fina. $\square$

Afirmação 1. *A integral de Kurzweil de uma função, quando existe, é única.*

Demonstração. Sejam $I, I' \in X$ tais que, para todo $\gamma > 0$, existam δ_1, δ_2 calibres tais que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] - I \right\| < \gamma \text{ para toda } d \in TD_{[a,b]} \ \delta_1\text{-fina.}$$
$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] - I' \right\| < \gamma \text{ para toda } d \in TD_{[a,b]} \ \delta_2\text{-fina.}$$

Dado $\epsilon > 0$, tome δ_1, δ_2 como acima para $\gamma = \frac{\epsilon}{2}$. Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pela proposição anterior, sabemos que δ é calibre. Utilizando o Lema de Cousin, podemos tomar d uma partição δ-fina, donde d é também δ_1 e δ_2 fina pelo resultado anterior. Assim:

$$\|I - I'\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] - I \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] - I' \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, $I = I'$ e a integral é única. $\square$

Por fim, definiremos $\int_b^a DU(\tau, t) = -\int_a^b DU(\tau, t)$ e $\int_a^a DU(\tau, t) = 0$.

Para simplificar a escrita, dados X um espaço de Banach, $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ uma função e $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$ uma partição marcada de $[a,b]$, diremos que:

$$S(U, d) = \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})]$$

é uma soma de Riemann de U com respeito a d.

2.2 Propriedades Básicas

A integral de Kurzweil satisfaz várias das propriedades usuais da integral de Riemann. Nessa seção, provaremos algumas delas. É possível encontrar a demonstração desses resultados restritos ao $\mathbb{R}^n$ no capítulo 1 de (3). Em particular, o caso restrito ao $\mathbb{R}^n$ do próximo resultado é o Teorema 1.9 de (3). A demonstração que apresentaremos, entretanto, é distinta daquela em (3).

Teorema 1 (Linearidade)**.** *Se $U, V : [a,b]\times[a,b] \to X$ são funções Kurzweil integráveis e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, então $\alpha U + \beta V$ é Kurzweil integrável e:*

$$\int_a^b D\left[\alpha U + \beta V\right](\tau, t) = \alpha \int_a^b DU(\tau,t) + \beta \int_a^b DV(\tau,t).$$

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $d \in TD_{[a,b]}$ dada por $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$. Então:

$$\begin{aligned}
S(\alpha U + \beta V, d) &= \sum_{i=1}^{|d|}\left[(\alpha U + \beta V)(\tau_i, t_i) - (\alpha U + \beta V)(\tau_i, t_{i-1})\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{|d|}\left[(\alpha U)(\tau_i, t_i) + (\beta V)(\tau_i, t_i) - (\alpha U)(\tau_i, t_{i-1}) - (\beta V)(\tau_i, t_{i-1})\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{|d|}\left[(\alpha U)(\tau_i, t_i) - (\alpha U)(\tau_i, t_{i-1})\right] + \sum_{i=1}^{|d|}\left[(\beta V)(\tau_i, t_i) - (\beta V)(\tau_i, t_{i-1})\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{|d|}\alpha\left[U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})\right] + \sum_{i=1}^{|d|}\beta\left[V(\tau_i, t_i) - V(\tau_i, t_{i-1})\right] = \\
&= \alpha\left(\sum_{i=1}^{|d|}\left[U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})\right]\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^{|d|}\left[V(\tau_i, t_i) - V(\tau_i, t_{i-1})\right]\right) = \\
&= \alpha S(U,d) + \beta S(V,d).
\end{aligned}$$

Analisaremos dois casos:

1. Caso $\alpha, \beta = 0$: Nesse caso, $\alpha U + \beta V = 0$. Assim, dados $\epsilon > 0$ e $d \in TD_{[a,b]}$, temos:

$$\begin{aligned}
\|S(\alpha U + \beta V, d) - 0\| &= \left\|\alpha S(U,d) - 0 \times \int_a^b DU(\tau,t) + \beta S(V,d) - 0 \times \int_a^b DV(\tau,t)\right\| = \\
&= \left\|\alpha S(U,d) - \alpha \times \int_a^b DU(\tau,t) + \beta S(V,d) - \beta \times \int_a^b DV(\tau,t)\right\| = \\
&= 0 < \epsilon.
\end{aligned}$$

   donde $\alpha U + \beta V$ é Kurzweil integrável e $\int_a^b D\left[\alpha U + \beta V\right](\tau,t) = \alpha \int_a^b DU(\tau,t) + \beta \int_a^b DV(\tau,t)$.

2. Caso $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$: Nesse caso, seja $\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\} > 0$. Dado $\epsilon > 0$, existe δ_1 calibre sobre $[a,b]$ tal que se $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$ é uma partição marcada de $[a,b]$ δ_1-fina, então:

$$\left\|S(U,d) - \int_a^b DU(\tau,t)\right\| < \frac{\epsilon}{2\gamma}.$$

   Analogamente, existe δ_2 calibre sobre $[a,b]$ tal que, se $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$ é uma partição marcada de $[a,b]$ δ_2 fina, então:

$$\left\|S(V,d) - \int_a^b DV(\tau,t)\right\| < \frac{\epsilon}{2\gamma}.$$

Pela proposição 1, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ é calibre sobre $[a,b]$. Assim, se d é uma partição δ-fina, então d é δ_1-fina e δ_2-fina, donde temos:

$$\begin{aligned}
&\left\| S(\alpha U + \beta V, d) - \left(\alpha \int_a^b DU(\tau,t) + \beta \int_a^b DV(\tau,t) \right) \right\| = \\
&= \left\| \alpha S(U,d) - \alpha \int_a^b DU(\tau,t) + \beta S(V,d) - \beta \int_a^b DV(\tau,t) \right\| \leq \\
&\leq \left\| \alpha S(U,d) - \alpha \int_a^b DU(\tau,t) \right\| + \left\| \beta S(V,d) - \beta \int_a^b DV(\tau,t) \right\| = \\
&= |\alpha| \left\| S(U,d) - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| + |\beta| \left\| S(V,d) - \int_a^b DV(\tau,t) \right\| < \\
&< |\alpha| \frac{\epsilon}{2\gamma} + |\beta| \frac{\epsilon}{2\gamma} = \frac{|\alpha| + |\beta|}{2\gamma} \epsilon \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha U + \beta V$ é Kurzweil integrável e vale:

$$\int_a^b D\left[\alpha U + \beta V\right](\tau,t) = \alpha \int_a^b DU(\tau,t) + \beta \int_a^b DV(\tau,t).$$

□

Provaremos agora uma versão do Critério de Cauchy para a integral do Kurzweil, o que nos dá uma condição necessária e suficiente para a existência da integral. Uma versão desse resultado com contradomínio igual a $\mathbb{R}^n$ pode ser encontrada em (3, Teorema 1.7), mas a demonstração é distinta daquela que apresentaremos.

Teorema 2 (Critério de Cauchy)**.** *Seja X um espaço de Banach. Uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ é Kurzweil integrável em $[a,b]$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ tal que:*

$$\|S(U,d_1) - S(U,d_2)\| < \epsilon$$

para todas partições δ-finas d_1, d_2 de $[a,b]$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se U é Kurzweil integrável, então dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ tal que:

$$\left\| S(U,d) - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

para toda partição marcada $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$ δ-fina. Então, se d_1, d_2 são partições δ-finas de $[a,b]$, temos:

$$\|S(U,d_1) - S(U,d_2)\| \leq \left\| S(U,d_1) - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| + \left\| S(U,d_2) - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

($\Leftarrow$) Primeiramente, tomemos $\epsilon = 1 > 0$. Existe um calibre δ_1 em $[a,b]$ tal que se d, d' são partições marcadas de $[a,b]$ δ_1-finas, então:

$$\|S(U,d) - S(U,d')\| < 1.$$

Suponha que, para $n \in \mathbb{N}$, existam $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ calibres em $[a, b]$ tais que, se d, d' são partições δ_k-finas para $k \in \{1, ..., n\}$, então:

$$\|S(U, d) - S(U, d')\| < \frac{1}{k}$$

e que se $i, j \in \{1, ..., n\}$ com $i < j$, então toda partição d δ_j-fina é também δ_i-fina. Então, como $\dfrac{1}{n+1} > 0$, existe um calibre δ'_{n+1} em $[a, b]$ tal que, se d, d' é δ'_{n+1}-finas, então:

$$\|S(U, d) - S(U, d')\| < \frac{1}{n+1}.$$

Pela proposição 1, $\delta_{n+1} = \min\{\delta_n, \delta'_{n+1}\}$ é um calibre em $[a, b]$ tal que, se d é δ_{n+1}-fina, então d é δ_n-fina e δ'_{n+1}-fina. Em particular, se d, d' são partições δ_{n+1}-finas, então:

$$\|S(U, d) - S(U, d')\| < \frac{1}{n+1}.$$

Ainda, se $i \in \{1, ..., n\}$, sabemos que se d é uma partição δ_{n+1}-fina então d é δ_n-fina, donde d é δ_i-fina.

Por indução, obtemos uma sequência $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de calibres em $[a, b]$ com as propriedades mencionadas. Dado $n \in \mathbb{N}$, seja d_n uma partição marcada δ_n-fina (a qual existe pelo Lema de Cousin), e seja $x_n = S(U, d_n)$. Então, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ e, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \epsilon$. Assim, $m, n > n_0$ implicam em:

$$\|x_m - x_n\| < \frac{1}{n_0} < \epsilon,$$

donde concluí-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X (Banach). Logo, existe $x = \lim x_n \in X$. Dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{m_0} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Ainda, existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > p_0$ implica em:

$$\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $k = \max\{m_0, p_0\} + 1$. Então existe um calibre δ_{m_0} sobre $[a, b]$ tal que, se d é uma partição de $[a, b]$ δ_{m_0}-fina, vale que:

$$\|S(U, d) - x\| \leq \|S(U, d) - x_k\| + \|x_k - x\| = \|S(U, d) - S(U, d_k)\| + \|x_k - x\| < \frac{1}{m_0} + \frac{\epsilon}{2} <$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

pois d_k é δ_k-fina e $k > m_0$, o que implica em d_k ser δ_{m_0}-fina. Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe um calibre δ sobre $[a, b]$ tal que, se d é uma partição marcada de $[a, b]$ δ-fina, então:

$$\|S(U, d) - x\| < \epsilon.$$

Portanto, U é Kurzweil integrável e vale que $x = \displaystyle\int_a^b DU(\tau, t)$. $\square$

O seguinte lema nos dá algumas ferramentas para realizarmos a composição de partições, e nos facilitará na escrita do próximo teorema:

Lema 3. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \leq b \leq c$, δ_1 um calibre sobre $[a, b]$ e δ_2 um calibre sobre $[b, c]$.*

- *Se d_1 é uma partição de $[a, b]$ e d_2 é uma partição de $[b, c]$, então $d = d_1 \cup d_2$ é uma partição de $[a, c]$.*
- *Se d_1 é uma partição marcada de $[a, b]$ e d_2 é uma partição marcada de $[b, c]$, então $d = d_1 \cup d_2$ é uma partição marcada de $[a, c]$.*
- *Seja $\delta : [a, c] \to \mathbb{R}$ dado por:*

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta_1(x), & se\ x \in [a, b), \\ \max\{\delta_1(b), \delta_2(b)\}, & se\ x = b, \\ \delta_2(x), & se\ x \in (b, c]. \end{cases}$$

  Então δ é calibre sobre $[a, c]$. Ainda, se d_1 é uma partição marcada δ_1-fina de $[a, b]$ e d_2 é uma partição marcada δ_2-fina de $[b, c]$, então $d = d_1 \cup d_2$ é uma partição marcada δ-fina de $[a, c]$. Em particular, se δ' é um calibre sobre um intervalo I com $a, b, c \in I$ e d_1 é $\delta' |_{[a,b]}$-fina e d_2 é $\delta' |_{[b,c]}$-fina, então $d = d_1 \cup d_2$ é $\delta' |_{[a,c]}$-fina.
- *Se $U : [a, c] \times [a, c] \to X$ é uma função, d_1 é uma partição marcada de $[a, b]$ e d_2 é uma partição marcada de $[b, c]$, então:*

$$S(U, d_1 \cup d_2) = S(U |_{[a,b]\times[a,b]}, d_1) + S(U_{[b,c]\times[b,c]}, d_2).$$

Demonstração.

- Sabemos que $d_1 = \{t_i \in [a, b] \mid i \in \{0, 1, ..., n\}\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, com $t_0 = a$, $t_n = b$ e $t_{i-1} < t_i$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e que $d_2 = \{u_i \in [b, c] \mid i \in \{0, 1, ..., m\}\}$ para algum $m \in \mathbb{N}$, com $u_0 = b$, $u_m = c$ e $u_{i-1} < u_i$ para todo $i \in \{1, ..., m\}$. Para cada $i \in \{0, 1, ..., n + m\}$, definamos:

$$s_i = \begin{cases} t_i, & \text{se } i \in \{0, 1, ..., n\}, \\ u_{i-n}, & \text{se } i \in \{n + 1, ..., n + m\}. \end{cases}$$

  Então $s_0 = t_0 = a$, $s_{n+m} = u_{n+m-n} = u_m = c$. Note que $i \in \{n + 1, ..., n + m\}$ implica em $i - n \in \{1, ..., m\}$, donde u_{i-n} e, consequentemente, s_i, está bem definido para $i \in \{n + 1, ..., n + m\}$. Ainda, dado $i \in \{1, ..., n + m\}$, temos:

  1. Caso $i \in \{1, ..., n\}$: Nesse caso, $i-1 \in \{0, ..., n-1\}$, donde $s_{i-1} = t_{i-1} < t_i = s_i$.
  2. Caso $i = n + 1$: Nesse caso, $s_{i-1} = s_n = t_n = b = u_0 < u_1 = s_{n+1} = s_i$.
  3. Caso $i \in \{n + 2, ..., n + m\}$: Nesse caso, $i - 1 \in \{n + 1, ..., n + m - 1\}$, donde $s_{i-1} = u_{i-1-n} < u_{i-n} = s_i$.

Portanto, $s_{i-1} < s_i$ para todo $i \in \{1, ..., n+m\}$. Como consequência disso, $s_i \in [s_0, s_{n+m}] = [a, c]$ para todo $i \in \{0, 1, ..., n+m\}$, donde vemos que $(s_i)_{i \in \{0,...,n+m\}}$ é uma partição de $[a, c]$. Basta agora mostrarmos que $(s_i)_{i \in \{0,...,n+m\}} = d_1 \cup d_2$. Se $x \in d_1 \cup d_2$, então $x \in d_1$ ou $x \in d_2$.

1. Caso $x \in d_1$: Nesse caso, existe $i \in \{0, 1, ..., n\}$ tal que $x = t_i = s_i \in (s_i)_{i \in \{0,...,n+m\}}$.
2. Caso $x \in d_2$: Nesse caso, existe $i \in \{0, 1, ..., m\}$ tal que $x = u_i$. Se $x = u_0 = b$, então $x = b = t_n \in d_1$, donde $x \in (s_i)_{i \in \{0,...,n+m\}}$ pelo caso anterior. Se $x = u_i$ com $i \in \{1, ..., m\}$, então $x = s_{i+n} \in (s_i)_{i \in \{0,...,n+m\}}$.

Com isso, vemos que $d_1 \cup d_2 \subset (s_i)_{i \in \{0,...,n+m\}}$. Por outro lado, se $x \in (s_i)_{i \in \{0,...,n+m\}}$, então $x = s_i$ para algum $i \in \{0, ..., n+m\}$.

1. Caso $i \in \{0, ..., n\}$: Nesse caso, $x = s_i = t_i \in d_1 \subset d_1 \cup d_2$.
2. Caso $i \in \{n+1, ..., n+m\}$: Nesse caso, $x = s_i = u_{i-n} \in d_2 \subset d_1 \cup d_2$.

Assim, concluímos que $(s_i)_{i \in \{0,...,n+m\}} \subset d_1 \cup d_2$, donde segue que $d = d_1 \cup d_2 = (s_i)_{i \in \{0,...,n+m\}}$ é uma partição de $[a, c]$.

- Sejam $d_1 = (\xi_i, [t_{i-1}, t_i])$, com $|d_1| = n$ e $d_2 = (\psi_i, [u_{i-1}, u_i])$, com $|d_2| = m$. Pelo caso anterior, sabemos que, se $d_1' = (t_i)_{i \in \{0,...,n\}}$ e $d_2' = (u_i)_{i \in \{0,...,m\}}$, então $d' = d_1' \cup d_2' = (s_i)_{i \in \{0,...,n+m\}}$ (s_i definido como anteriormente) é uma partição de $[a, c]$. Para cada $i \in \{1, ..., n+m\}$, defina:

$$\tau_i = \begin{cases} \xi_i, & \text{se } i \in \{1, ..., n\}, \\ \psi_{i-n}, & \text{se } i \in \{n+1, ..., n+m\}. \end{cases}$$

Note que $i \in \{n+1, ..., n+m\}$ implica em $i - n \in \{1, ..., m\}$, donde ψ_{i-n} e, consequentemente, τ_i, está bem definido. Dado $i \in \{1, ..., n+m\}$, temos:

1. Caso $i \in \{1, ..., n\}$: Nesse caso, $\tau_i = \xi_i \in [t_{i-1}, t_i] = [s_{i-1}, s_i]$.
2. Caso $i \in \{n+1, ..., n+m\}$: Nesse caso, $\tau_i = \psi_{i-n} \in [u_{i-n-1}, u_{i-n}] = [s_{i-1}, s_i]$ (note que para o caso $i = n+1$, temos $s_{i-1} = s_n = t_n = b = u_0 = u_{i-n-1}$).

Assim, $\tau_i \in [s_{i-1}, s_i]$ para todo $i \in \{1, ..., n+m\}$. Fazendo $d = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]) \in \mathbb{R} \times \mathbb{I} \mid i \in \{1, ..., n+m\}\}$, temos que d é uma partição marcada de $[a, c]$. Mostremos que $d = d_1 \cup d_2$. Dado $x \in d$, temos $x = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ para algum $i \in \{1, ..., n+m\}$.

1. Caso $i \in \{1, ..., n\}$: Nesse caso, $\tau_i = \xi_i$ e $[s_{i-1}, s_i] = [t_{i-1}, t_i]$, donde $x = (\xi_i, [t_{i-1}, t_i]) \in d_1$.
2. Caso $i \in \{n+1, ..., n+m\}$: Nesse caso, $\tau_i = \psi_{i-n}$ e $[s_{i-1}, s_i] = [u_{i-n-1}, u_{i-n}]$, donde $x = (\psi_{i-n}, [u_{i-n-1}, u_{i-n}]) \in d_2$.

Por outro lado, se $x \in d_1 \cup d_2$:

1. Caso $x \in d_1$: Nesse caso, existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $x = (\xi_i, [t_{i-1}, t_i]) = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i]) \in d$.
2. Caso $x \in d_2$: Nesse caso, existe $i \in \{1, ..., m\}$ tal que $x = (\psi_i, [u_{i-1}, u_i]) = (\tau_{n+i}, [s_{n+i-1}, s_{n+i}]) \in d$.

Portanto, $d = d_1 \cup d_2$.

- Primeiramente, notemos que δ é um calibre sobre $[a, c]$. De fato, dado $x \in [a, c]$, temos $\delta(x) \in \{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$, donde $\delta(x) \geq \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\} > 0$, uma vez que $\delta_1(x), \delta_2(x) > 0$. Assim, δ é calibre sobre $[a, c]$.

  Suponha que $d_1 = (\xi_i, [t_{i-1}, t_i])$ é uma partição marcada δ_1-fina de $[a, b]$, com $|d_1| = n$ e que $d_2 = (\psi_i, [u_{i-1}, u_i])$ é uma partição marcada δ_2-fina de $[b, c]$, com $|d_2| = m$. Sabemos pelo item anterior que $d = d_1 \cup d_2 = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]) \in \mathbb{R} \times \mathbb{I} \mid i \in \{1, ..., n+m\}\}$ é uma partição marcada de $[a, c]$, com $(s_i)_{i \in \{0, ..., n+m\}}$ e $(\tau_i)_{i \in \{1, ..., n+m\}}$ definidos como nos itens anteriores. Seja $i \in \{1, ..., n+m\}$.

  1. Caso $i \in \{1, ..., n\}$: Nesse caso, $\tau_i = \xi_i \in [a, b]$, donde $\delta(\tau_i) = \delta_1(\tau_i) = \delta_1(\xi_i)$ ou $\delta(\tau_i) = \max\{\delta_1(\tau_i), \delta_2(\tau_i)\} \geq \delta_1(\tau_i) = \delta_1(\xi_i)$. Como d_1 é δ_1-fina, temos:
  $$[s_{i-1}, s_i] = [t_{i-1}, t_i] \subset B(\xi_i, \delta_1(\xi_i)) = B(\tau_i, \delta_1(\tau_i)) \subset B(\tau_i, \delta(\tau_i)).$$
  2. Caso $i \in \{n+1, ..., n+m\}$: Nesse caso, $\tau_i = \psi_{i-n} \in [b, c]$, donde $\delta(\tau_i) = \delta_2(\tau_i) = \delta_2(\psi_{i-n})$ ou $\delta(\tau_i) = \max\{\delta_1(\tau_i), \delta_2(\tau_i)\} \geq \delta_2(\tau_i) = \delta_2(\psi_{i-n})$. Como d_2 é δ_2-fina, temos:
  $$[s_{i-1}, s_i] = [u_{i-n-1}, u_{i-n}] \subset B(\psi_{i-n}, \delta_2(\psi_{i-n})) = B(\tau_i, \delta_2(\tau_i)) \subset B(\tau_i, \delta(\tau_i)).$$

  Portanto, d é δ-fina. Em particular, se δ' é um calibre sobre um intervalo I e $a, b, c \in I$, então $[a, b], [b, c] \subset I$ (pela conexidade de I). Como $\delta'(x) > 0$ para todo $x \in I$, segue que $\delta' |_{[a,b]}$ e $\delta' |_{[b,c]}$ são calibres sobre $[a, b]$ e $[b, c]$, respectivamente. Se d_1 é $\delta' |_{[a,b]}$-fina e d_2 é $\delta' |_{[b,c]}$-fina, então pelo que acabamos de provar sabemos que $d = d_1 \cup d_2$ é uma partição marcada δ-fina de $[a, c]$, sendo que:
  $$\delta(x) = \begin{cases} \delta'(x), \text{ se } x \in [a, b), \\ \max\{\delta'(b), \delta'(b)\} = \delta'(b), \text{ se } x = b, \\ \delta'(x), \text{ se } x \in (b, c]. \end{cases}$$

  Isto é, $\delta = \delta' |_{[a,c]}$.

- Primeiramente, notemos que a equação do enunciado está bem definida, uma vez que $d_1 \cup d_2$ é uma partição marcada de $[a, c]$ pelo que já mostramos. Usando a notação para d_1, d_2 e $d = d_1 \cup d_2$ já estabelecida nos itens anteriores, temos que:

$$\begin{aligned}
S(U,d) &= \sum_{i=1}^{n+m} [U(\tau_i, s_i) - U(\tau_i, s_{i-1})] = \\
&= \sum_{i=1}^{n} [U(\tau_i, s_i) - U(\tau_i, s_{i-1})] + \sum_{i=n+1}^{n+m} [U(\tau_i, s_i) - U(\tau_i, s_{i-1})] = \\
&= \sum_{i=1}^{n} [U(\xi_i, t_i) - U(\xi_i, i_{i-1})] + \sum_{i=n+1}^{n+m} [U(\psi_{i-n}, u_{i-n}) - U(\psi_{i-n}, u_{i-n-1})] = \\
&= \sum_{i=1}^{n} [U(\xi_i, t_i) - U(\xi_i, i_{i-1})] + \sum_{i=1}^{m} [U(\psi_i, u_i) - U(\psi_i, u_{i-1})] = \\
&= S(U\mid_{[a,b]\times[a,b]}, d_1) + S(U\mid_{[b,c]\times[b,c]}, d_2).
\end{aligned}$$

□

O resultado a seguir pode ser encontrado em (1, Teorema 2.5), e generaliza o resultado em (3, Teorema 1.10). Entretanto, apresentaremos aqui uma demonstração distinta para esse teorema.

Teorema 3 (Integrabilidade em Subintervalos)**.** *Suponha que $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ é Kurzweil integrável sobre $[a,b]$. Se $[c,d] \subset [a,b]$, então U é Kurzweil integrável sobre $[c,d]$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, sabemos pelo Teorema 2 que existe δ calibre em $[a,b]$ tal que:

$$\|S(U,d_1) - S(U,d_2)\| < \epsilon.$$

para todas partições δ-finas d_1, d_2 de $[a,b]$. Temos que $\delta\mid_{[c,d]}$ é calibre sobre $[c,d]$. Pelo Lema de Cousin, existem partições $\delta\mid_{[c,d]}$-finas de $[c,d]$. Sejam d_1' e d_2' partições $\delta\mid_{[c,d]}$ finas de $[c,d]$. Primeiramente, construiremos duas partições d_1'' e d_2'' de $[a,d]$ $\delta\mid_{[a,d]}$-finas tais que:

$$\left\| S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]}, d_1'') - S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]}, d_2'') \right\| = \left\| S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]}, d_1') - S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]}, d_2') \right\|.$$

Caso $a = c$, apenas definiremos $d_1'' = d_1'$ e $d_2'' = d_2'$, donde obtivemos as partições desejadas. Caso $c > a$, seja d_3 uma partição $\delta\mid_{[a,c]}$-fina de $[a,c]$ (a qual existe pelo Lema de Cousin). Pelo Lema 3, sabemos que $d_1'' = d_3 \cup d_1'$ e $d_2'' = d_3 \cup d_2'$ são partições $\delta\mid_{[a,d]}$-finas, e que vale:

$$\begin{aligned}
S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]}, d_1'') &= S(U\mid_{[a,c]\times[a,c]}, d_3) + S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]}, d_1'), \\
S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]}, d_2'') &= S(U\mid_{[a,c]\times[a,c]}, d_3) + S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]}, d_2'),
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
&\left\| S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]}, d_1'') - S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]}, d_2'') \right\| = \\
&= \left\| S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]}, d_1') + S(U\mid_{[a,c]\times[a,c]}, d_3) - S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]}, d_2') - S(U\mid_{[a,c]\times[a,c]}, d_3) \right\| = \\
&= \left\| S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]}, d_1') - S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]}, d_2') \right\|,
\end{aligned}$$

obtendo assim as partições procuradas. Construiremos agora partições marcadas d_1 e d_2 de $[a,b]$ δ-finas tais que:

$$\|S(U,d_1)-S(U,d_2)\| = \left\|S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]},d_1'')-S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]},d_2'')\right\|.$$

Se $d=b$, tomamos $d_1=d_1''$ e $d_2=d_2''$ e obtemos assim as partições procuradas. Caso $d<b$, seja d_4 uma partição marcada $\delta\mid_{[d,b]}$-fina de $[d,b]$ (a qual existe pelo Lema de Cousin). Então $d_1=d_1''\cup d_4$ e $d_2=d_2''\cup d_4$ são partições marcadas δ-finas de $[a,b]$ pelo Lema 3. Ainda, vale que:

$$\begin{aligned}
&\|S(U,d_1)-S(U,d_2)\| = \\
&= \left\|S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]},d_1'')+S(U\mid_{[d,b]\times[d,b]},d_4)-S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]},d_2'')-S(U\mid_{[d,b]\times[d,b]},d_4)\right\| = \\
&= \left\|S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]},d_1'')-S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]},d_2'')\right\|.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\left\|S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]},d_1')-S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]},d_2')\right\| &= \left\|S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]},d_1'')-S(U\mid_{[a,d]\times[a,d]},d_2'')\right\| = \\
&= \|S(U,d_1)-S(U,d_2)\| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Com isso, mostramos que, para todo $\epsilon>0$, existe um calibre $\delta\mid_{[c,d]}$ sobre $[c,d]$ tal que, para quaisquer partições marcadas d_1' e d_2' de $[c,d]$ $\delta\mid_{[c,d]}$-finas, vale que:

$$\left\|S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]},d_1')-S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]},d_2')\right\| < \epsilon.$$

Assim, pelo Teorema 2, $U\mid_{[c,d]\times[c,d]}$ é integrável sobre $[c,d]$ (isto é, U é integrável sobre $[c,d]$). □

Quando não houver risco de confusão, denotaremos $S(U\mid_{[c,d]\times[c,d]},d)$ apenas como $S(U,d)$.

Uma versão com contradomínio igual a $\mathbb{R}^n$ do próximo resultado pode ser encontrada em (3, Teorema 1.11). A demonstração aqui apresentada é análoga.

Teorema 4. *[Aditividade em Intervalos Adjacentes] Sejam $c\in[a,b]$, $U:[a,b]\times[a,b]\to X$ uma função Kurzweil integrável sobre $[a,c]$ e sobre $[c,b]$. Então, U é Kurzweil integrável sobre $[a,b]$ e vale que:*

$$\int_a^b DU(\tau,t) = \int_a^c DU(\tau,t) + \int_c^b DU(\tau,t).$$

Demonstração. Dado $\epsilon>0$, sejam δ_1 e δ_2 calibres sobre $[a,c]$ e $[c,b]$, respectivamente, tais que:

$$\begin{aligned}
&\left\|S(U_{[a,c]\times[a,c]},d_1)-\int_a^c DU(\tau,t)\right\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ para toda partição } d_1\ \delta_1\text{-fina de } [a,c]. \\
&\left\|S(U_{[c,b]\times[c,b]},d_2)-\int_c^b DU(\tau,t)\right\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ para toda partição } d_2\ \delta_2\text{-fina de } [c,b].
\end{aligned}$$

Definamos:

$$\widetilde{\delta}(t) = \begin{cases} \delta_1(t), \text{ para } t \in [a, c), \\ \min\{\delta_1(c), \delta_2(c)\}, \text{ para } t = c, \\ \delta_2(t), \text{ para } t \in (c, b]. \end{cases}$$

Definamos ainda $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ tal que:

$$\delta(t) = \frac{1}{2} \min\left(\widetilde{\delta}(t), |t - c|\right) \text{ se } t \neq c,$$
$$\delta(c) = \widetilde{\delta}(c).$$

Mostremos que δ está bem definido (e, portanto, é calibre). Se $t \neq c$, então $|t - c| > 0$ e $\widetilde{\delta}(t) \geq \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\} > 0$. Logo, $\delta(t) > 0$. Caso $t = c$, temos $\delta(c) = \widetilde{\delta}(c) = \min\{\delta_1(c), \delta_2(c)\} > 0$ (pois δ_1 e δ_2 são calibres). Logo, δ é calibre em $[a, b]$. Seja $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$ uma partição marcada δ-fina de $[a, b]$. Sabemos que existe $m \in \{1, ..., |d|\}$ tal que $c \in [t_{m-1}, t_m]$. Suponha que $c \neq \tau_i$. Então:

$$|\tau_m - c| \leq \delta(\tau_m) < |\tau_m - c|,$$

pois d é δ-fina. Isso, entretanto, é um absurdo. Logo, $c = \tau_m$. Com isso, sejam $d_1 = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])_{i=1,\ldots,m-1} \cup (c, [t_{m-1}, c])$ e $d_2 = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])_{i=m+1,\ldots,|d|} \cup (c, [c, t_m])$. Temos que d_1 é partição marcada δ-fina de $[a, c]$ e d_2 é partição marcada δ-fina de $[c, b]$. Em particular, vale que d_1 é δ_1-fina e que d_2 é δ_2-fina. Ainda:

$$\begin{aligned} S(U, d) &= \sum_{i=1}^{m-1} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] + [U(c, t_m) - U(c, t_{m-1})] + \\ &+ \sum_{i=m+1}^{|d|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] + [U(c, t_m) - U(c, c) + U(c, c) - U(c, t_{m-1})] + \\ &+ \sum_{i=m+1}^{|d|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m-1} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] + [U(c, c) - U(c, t_{m-1})]\right) + \\ &+ \left(\sum_{i=m+1}^{|d|} [U(\tau_i, t_i) - U(\tau_i, t_{i-1})] + [U(c, t_m) - U(c, c)]\right) = \\ &= S(U, d_1) + S(U, d_2). \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} &\left\| S(U, d) - \left(\int_a^c DU(\tau, t) + \int_c^b DU(\tau, t)\right) \right\| = \\ &= \left\| S(U, d_1) + S(U, d_2) - \int_a^c DU(\tau, t) - \int_c^b DU(\tau, t) \right\| \leq \\ &\leq \left\| S(U, d_1) - \int_a^c DU(\tau, t) \right\| + \left\| S(U, d_2) - \int_c^b DU(\tau, t) \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, a integral $\int_a^b DU(\tau,t)$ existe e vale:

$$\int_a^b DU(\tau,t) = \int_a^c DU(\tau,t) + \int_c^b DU(\tau,t).$$

$\square$

O próximo lema, conhecido como Lema de Saks-Henstock, nos permite analisar a soma de Riemann de partições marcadas parciais de um intervalo $[a,b]$. Esse resultado pode ser encontrado em (1, Lema 2.7), e outra versão pode ser encontrada em (3, Lema 1.13).

Lema 4. *[Lema de Saks-Henstock] Seja $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ Kurzweil integrável sobre $[a,b]$. Dado $\epsilon > 0$, seja δ um calibre em $[a,b]$ tal que:*

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} [U(\tau_i,t_i) - U(\tau_i,t_{i-1})] - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| < \epsilon,$$

para cada partição $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$ marcada de $[a,b]$ δ-fina. Se:

$$a \leq \beta_1 \leq \xi_1 \leq \gamma_1 \leq \beta_2 \leq \xi_2 \leq \gamma_2 \leq ... \leq \beta_m \leq \xi_m \leq \gamma_m \leq b$$

é uma partição parcial marcada $\widetilde{d} = (\xi_j, [\beta_j, \gamma_j])$ δ-fina de $[a,b]$, então:

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j,\beta_j) - U(\xi_j,\gamma_j) - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau,t)] \right\| \leq \epsilon.$$

Demonstração. Note que, caso $\beta_j = \gamma_j$, temos $U(\xi_j,\beta_j) - U(\xi_j,\gamma_j) - \displaystyle\int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau,t) = 0$. Assim, podemos supor $\beta_j < \gamma_j$ para todo $j \in \{1,...,m\}$. Definamos ainda $\gamma_0 = a$ e $\beta_{m+1} = b$.

Sabemos que $\gamma_j \leq \beta_{j+1}$ para todo $j \in \{0,1,...,m\}$. Caso $\gamma_j = \beta_{j+1}$, temos $\displaystyle\int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau,t) = 0$ e $S(U,d_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{|d_j|}[U(\tau_i^j,t_i^j) - U(\tau_i^j,t_{i-1}^j)] = 0$ para toda partição marcada $d_j = (\tau_i^j, [t_{i-1}^j, t_i^j])$ de $[\gamma_j, \beta_{j+1}]$. Caso $\gamma_j < \beta_{j+1}$, como U é integrável sobre $[a,b] \supset [\gamma_j, \beta_{j+1}]$, temos U integrável sobre $[\gamma_j, \beta_{j+1}]$. Assim, dado $\kappa > 0$, existe um calibre δ'_j em $[\gamma_j, \beta_{j+1}]$ tal que:

$$\left\| S(U,d_j) - \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau,t) \right\| < \frac{\kappa}{m+1}$$

para toda partição marcada d_j δ'_j-fina de $[\gamma_j, \beta_{j+1}]$. Podemos tomar $\delta_j = \min\{\delta'_j, \delta\}$ em $[\gamma_j, \beta_{j+1}]$, de forma que $\delta_j(\tau) \leq \delta(\tau)$ para todo $\tau \in [\gamma_j, \beta_{j+1}]$. Considere agora $d = \widetilde{d} \cup \left(\bigcup\limits_{j=0}^{m} d_j \right)$ (tomando $d_j = \{(\gamma_j, [\gamma_j, \gamma_j])\}$ caso $\gamma_j = \beta_{j+1}$ e d_j uma partição δ_j-fina de $[\gamma_j, \beta_{j+1}]$ caso contrário). Então d é uma partição marcada de $[a,b]$. Ainda, denotando $d = (\alpha_i, [t_{i-1}, t_i])$, temos $[t_{i-1}, t_i] \subset [\beta_j, \gamma_j]$ para algum $j \in \{1,...,m\}$ ou $[t_{i-1}, t_i] \subset [\gamma_j, \beta_{j+1}]$ para algum $j \in \{0,1,...,m\}$. No primeiro caso, temos $(\alpha_i, [t_{i-1}, t_i]) \in \widetilde{d}$, donde $[t_{i-1}, t_i] \subset B(\alpha_i, \delta(\alpha_i))$ (pois $\tilde{d}$ é δ-fina). No segundo caso, temos $(\alpha_i, [t_{i-1}, t_i]) \in d_j$ para algum $j \in \{0, 1, ..., m\}$, donde $[t_{i-1}, t_i] \subset B(\alpha_i, \delta_j(\alpha_i)) \subset B(\alpha_i, \delta(\alpha_i))$ (pois d_j é δ_j-fina e $\delta_j(\tau) \leq \delta(\tau)$ para todo $\tau \in [\gamma_j, \beta_{j+1}]$). Portanto, d é δ-fina. Assim:

$$\left\| S(U, d) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| < \epsilon.$$

Note que $S(U, d) = \sum_{i=1}^{|d|} [U(\alpha_i, t_i) - U(\alpha_i, t_{i-1})] = \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \gamma_j) - U(\xi_j, \beta_j)] + \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=1}^{|d_j|} [U(\tau_j^i, t_i^j) - U(\tau_j^i, t_{i-1}^j)] = \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \gamma_j) - U(\xi_j, \beta_j)] + \sum_{j=0}^{m} S(U, d_j)$.

Note ainda que $\int_a^b DU(\tau, t) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau, t) + \sum_{j=0}^{m} \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t)$. Portanto:

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \beta_j) - U(\xi_j, \gamma_j) - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau, t)] \right\| = \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \beta_j) - U(\xi_j, \gamma_j)] + \sum_{j=0}^{m} \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| \leq \\
&\leq \left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \beta_j) - U(\xi_j, \gamma_j)] + \sum_{j=0}^{m} S(U, d_j) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| + \\
&+ \left\| \sum_{j=0}^{m} S(U, d_j) - \sum_{j=0}^{m} \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t) \right\| \leq \\
&\leq \left\| S(U, d) - \int_a^b DU(\tau, t) \right\| + \sum_{j=0}^{m} \left\| S(U, d_j) - \int_{\gamma_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t) \right\| < \\
&< \epsilon + \sum_{j=0}^{m} \frac{\kappa}{m+1} = \epsilon + \frac{(m+1)\kappa}{m+1} = \epsilon + \kappa.
\end{aligned}$$

Portanto, $\left\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \beta_j) - U(\xi_j, \gamma_j) - \int_{\beta_j}^{\gamma_j} DU(\tau, t)] \right\| < \epsilon + \kappa$ para todo $\kappa > 0$, donde o resultado segue. $\square$

Usaremos do Lema de Saks-Henstock para provar o próximo teorema, retirado de (1, Teorema 2.12) e (3, Teorema 1.16), o qual nos permite reescrever a integral de Kurzweil de uma função sobre um subintervalo de seu domínio através de um limite. Esse resultado é particularmente útil para analisar funções com descontinuidades ou saltos discretos, pois permite que reescrevamos a integral sobre um intervalo que contém tais descontinuidades como a soma das integrais nas regiões sem saltos mais um termo de correção (o qual conseguimos escrever explicitamente). Esse fato será particularmente útil no capítulo 4, quando estudarmos EDFs em medida com impulso.

Teorema 5. *Sejam* $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ *Kurzweil integrável sobre* $[a,b]$ *e* $c \in [a,b]$. *Então:*

$$\lim_{s \to c}[\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c)] = \int_a^c DU(\tau,t)$$
$$e \ \lim_{s \to c}[\int_s^b DU(\tau,t) + U(c,s) - U(c,c)] = \int_c^b DU(\tau,t).$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado. Como U é integrável sobre $[a,b]$, existe um calibre δ sobre $[a,b]$ tal que $\left\|S(U,d) - \int_a^b DU(\tau,t)\right\| < \epsilon$ para toda divisão marcada d δ-fina de $[a,b]$. Provaremos a primeira igualdade, pois a segunda segue de maneira análoga.

Seja $c \in [a,b]$ e suponha $s \in [a,b] \cap B(c,\delta(c))$. Considere agora $d' = (\xi_i, [t_{i-1}, t_i])$ uma partição marcada δ-fina de $[a, \min\{s,c\}]$ (caso $\min\{s,c\} \neq a$) e $d'' = (\alpha_i, [t_{i-1}, t_i])$ uma partição marcada δ-fina de $[\max\{s,c\}, b]$ (caso $\max\{s,c\} \neq b$), ambas existentes pelo Lema de Cousin. Então, $d = d' \cup d'' \cup \{(c, [\min\{s,c\}, \max\{s,c\}])\}$ é uma partição marcada δ-fina de $[a,b]$, donde $(c, [\min\{s,c\}, \max\{s,c\}])$ é uma partição marcada parcial δ-fina de $[a,b]$. Pelo Lema de Saks-Henstock, temos:

$$\left\|U(c,s) - U(c,c) - \int_c^s DU(\tau,t)\right\| \leq \epsilon \text{ (caso } s \geq c) \text{ e}$$
$$\left\|U(c,c) - U(c,s) - \int_s^c DU(\tau,t)\right\| = \left\|U(c,s) - U(c,c) - \int_c^s DU(\tau,t)\right\| \leq \epsilon \text{ (caso } c > s).$$

Portanto:

$$\left\|\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c) - \int_a^c DU(\tau,t)\right\| =$$
$$= \left\|\int_c^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c)\right\| \leq \epsilon.$$

Logo, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(c,\epsilon) > 0$ tal que se $s \in B(c,\delta) \cap [a,b]$, então:

$$\left\|[\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c)] - \int_a^c DU(\tau,t)\right\| \leq \epsilon.$$

Portanto:

$$\lim_{s \to c} \int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c) = \int_a^c DU(\tau,t).$$

□

Por fim, provaremos um teorema que generaliza o resultado de mudança de variáveis. Uma versão com contradomínio igual a $\mathbb{R}^n$ pode ser encontrada em (3, Teorema 1.18), e a demonstração que apresentaremos aqui é análoga.

Teorema 6. *Sejam* $c, d \in \mathbb{R}$ *com* $c \leq d$, $\phi : [c,d] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e crescente e* $U : [\phi(c), \phi(d)] \times [\phi(c), \phi(d)] \to X$. *Se uma das integrais:*

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} DU(\tau,t), \int_c^d DU(\phi(\gamma), \phi(s))$$

existe, então a outra integral existe e vale a igualdade:

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} DU(\tau, t) = \int_c^d DU(\phi(\gamma), \phi(s)).$$

Demonstração. Se $c = d$, ambas as integrais existem e são iguais a 0. Se $c < d$, suponha que $\int_c^d DU(\phi(\gamma), \phi(s))$ existe e seja $\epsilon > 0$ dado. Então existe um calibre δ em $[c, d]$ tal que para toda partição marcada $\widetilde{d} = ([\gamma_i, [\beta_{i-1}, \beta_i]])$ de $[c, d]$ δ-fina, vale que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|\widetilde{d}|} [U(\phi(\gamma_i), \phi(\beta_i)) - U(\phi(\gamma_i), \phi(\beta_{i-1}))] - \int_c^d DU(\phi(\gamma), \phi(s)) \right\| < \epsilon.$$

Como ϕ é crescente, $\phi([c, d]) = [\phi(c), \phi(d)]$ e ϕ é uma bijeção de $[c, d]$ em $[\phi(c), \phi(d)]$. Então, a inversa $\phi^{-1} : [\phi(c), \phi(d)] \to [c, d]$ existe e é contínua e crescente em $[\phi(c), \phi(d)]$. Então, para cada $\tau \in [\phi(c), \phi(d)]$, existe único $\gamma = \phi^{-1}(\tau) \in [c, d]$. Para cada $\tau \in [\phi(c), \phi(d)]$, definamos $\delta(\tau) > 0$ tal que:

$$[\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)] \cap [\phi(c), \phi(d)] \subset \phi([\gamma - \omega(\gamma), \gamma + \omega(\gamma)] \cap [c, d]). \tag{2.1}$$

Com $\gamma = \phi^{-1}(\tau)$. Essa escolha é possível, pois ϕ, ϕ^{-1} são contínuas e $\omega(\gamma) > 0$ para todo $\gamma \in [c, d]$.

Seja $d' = (\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i])$ uma partição marcada δ-fina de $[\phi(c), \phi(d)]$. Definindo $\beta_i = \phi^{-1}(\alpha_i)$ para todo $i \in \{0, 1, ..., |d'|\}$ e $\gamma_i = \phi^{-1}(\tau_i)$ para todo $i \in \{1, ..., |d'|\}$, temos pelo fato de ϕ^{-1} ser crescente que:

$$\beta_0 = \phi^{-1}(\alpha_0) = c < \beta_1 < \beta_2 < ... < \beta_{|d'|-1} < \beta_{|d'|} = \phi^{-1}(\alpha_k) = d$$

e:

$$\beta_{i-1} \leq \gamma_i \leq \beta_i \text{ para } i \in \{1, ..., |d'|\}.$$

Portanto, $\widetilde{d} = (\gamma_i, [\beta_{i-1}, \beta_i])$ é uma partição marcada de $[c, d]$. Como d' é partição δ-fina de $[\phi(c), \phi(d)]$, temos:

$$\tau_i - \delta(\tau_i) \leq \alpha_{i-1} \leq \tau_i \leq \alpha_i \leq \tau_i + \delta(\tau_i) \text{ para } i \in \{1, ..., |d'|\}.$$

Então (2.1) implica em:

$$\phi(\gamma_i - \omega(\gamma_i)) \leq \alpha_{i-1} \leq \alpha_i \leq \phi(\gamma_i + \omega(\gamma_i)) \text{ para } i \in \{1, ..., |d'|\}.$$

Portanto, para $i \in \{1, ..., |d'|\}$:

$$\gamma_i - \omega(\gamma_i) = \phi^{-1}(\phi(\gamma_i - \omega(\gamma_i))) \leq \phi^{-1}(\alpha_{i-1}) = \beta_{i-1} < \beta_i \leq \phi^{-1}(\alpha_i) \leq \gamma_i + \omega(\gamma_i),$$

donde $\widetilde{d}$ é uma partição ω-fina. Com isso:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\left|\widetilde{d}\right|} [U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1}))] - \int_c^d DU(\phi(\gamma), \phi(s)) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{\left|\widetilde{d}\right|} [U(\phi(\gamma_i), \phi(\beta_i)) - U(\phi(\gamma_i), \phi(\beta_{i-1}))] - \int_c^d DU(\phi(\gamma), \phi(s)) \right\| < \epsilon.$$

Logo, a integral $\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} DU(\tau, t)$ existe e vale que:

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} DU(\tau, t) = \int_c^d DU(\phi(\gamma), \phi(s)).$$

Reciprocamente, suponha que a integral $\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} DU(\tau, t)$ existe e seja $\epsilon > 0$. Então existe um calibre δ em $[\phi(c), \phi(d)]$ tal que para toda partição marcada $d' = (\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i])$ de $[\phi(c), \phi(d)]$ δ-fina, vale que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d'|} [U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1}))] - \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} DU(\tau, t) \right\| < \epsilon.$$

Seja $d' = (\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i])$ uma partição marcada de $[\phi(c), \phi(d)]$. Pela continuidade de ϕ e ϕ^{-1} e pelo fato δ ser calibre, para $\gamma \in [c, d]$ existe um valor $\omega(\gamma) > 0$ tal que:

$$|\phi(s) - \phi(\gamma)| < \delta(\phi(\gamma)) \tag{2.2}$$

se $s \in [\gamma - \omega(\gamma), \gamma + \omega(\gamma)] \cap [c, d]$.

Se $\widetilde{d} = (\gamma_i, [\beta_{i-1}, \beta_i])$ é uma partição ω-fina de $[c, d]$, definamos $\tau_i = \phi(\gamma_i)$ para $i \in \left\{1, ..., \left|\widetilde{d}\right|\right\}$ e $\alpha_i = \phi(\beta_i)$ para $i \in \left\{0, 1, ..., \left|\widetilde{d}\right|\right\}$. Como ϕ é crescente, a desigualdade (2.2) implica que d' é uma partição δ-fina de $[\phi(c), \phi(d)]$. Então:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\left|\widetilde{d}\right|} [U(\phi(\gamma_i), \phi(\beta_i)) - U(\phi(\gamma_i), \phi(\beta_{i-1}))] - \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} DU(\tau, t) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{\left|\widetilde{d}\right|} [U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1}))] - \int_{\phi(c)}^{\phi(d)} DU(\tau, t) \right\| < \epsilon.$$

Portanto, a integral $\int_c^d DU(\phi(\gamma), \phi(s))$ existe e vale a igualdade:

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(d)} DU(\tau, t) = \int_c^d DU(\phi(\gamma), \phi(s)).$$

$\square$

Note ainda que vale um resultado análogo para ϕ contínua e decrescente.

2.3 A Integral de Perron-Stieltjes

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$, X um espaço de Banach, $f : [a,b] \to X$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Definiremos a integral de Perron-Stieltjes conforme feito em (1).

Definição 6 (Integral de Perron-Stieltjes)**.** *Seja $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ dada por $U(\tau, t) = f(\tau)g(t)$. Então, caso U seja Kurzweil integrável, denotamos $\int_a^b DU(\tau,t)$ como sendo $\int_a^b f(s)dg(s)$, e dizemos que $\int_a^b f(s)dg(s)$ é a integral de Perron-Stieltjes de f em função de g.*

O motivo de especificarmos essa integral se dá devido à sua relação com a Δ-integral, que definiremos mais a frente, e ao fato de que muitos dos problemas de equações funcionais em medida são modelados usando essa integral.

Vale notar que, como a integral de Perron-Stieltjes é um caso particular da integral de Kurzweil, os resultados da seção anterior, como linearidade e aditividade em intervalos adjacentes, ainda valem.

Estabeleceremos aqui uma notação, que será usada ao longo do texto. Dadas funções $f : [a,b] \to X$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i]) \in TD_{[a,b]}$, definamos:

$$S(f,g,d) = \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})).$$

Provaremos agora uma proposição que nos permite comparar o valor de integrais de Perron-Stieltjes quando $X = \mathbb{R}$. Esse resultado nos será útil no capítulo 4.

Proposição 2. *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções com $f(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$ e g não-decrescente. Seja ainda $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente tal que, dados $u, v \in [a,b]$ com $u \leq v$, temos:*

$$g(v) - g(u) \leq h(v) - h(u).$$

Então, se as integrais de Perron-Stieltjes $\int_a^b f(s)dg(s)$ e $\int_a^b f(s)dh(s)$ existem, vale que:

$$\int_a^b f(s)dg(s) \leq \int_a^b f(s)dh(s).$$

Demonstração. Suponha que:

$$\int_a^b f(s)dg(s) > \int_a^b f(s)dh(s).$$

Dado $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i]) \in TD_{[a,b]}$, seja $i \in \{1, ..., |d|\}$. Como $f(\tau_i) \geq 0$ e $0 \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq h(t_i) - h(t_{i-1})$ (sendo a primeira desigualdade válida devido ao fato de g e h serem não-decrescentes), vale que $f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) \leq f(\tau_i)(h(t_i) - h(t_{i-1}))$. Assim, temos:

$$S(f,g,d) = \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(h(t_i) - h(t_{i-1})) = S(f,h,d).$$

Seja $\epsilon = \dfrac{1}{4}\left(\int_a^b f(s)dg(s) - \int_a^b f(s)dh(s)\right) > 0$. Então, existem calibres δ_1, δ_2 sobre $[a,b]$ tais que:

$$\left|\int_a^b f(s)dg(s) - S(f,g,d)\right| < \epsilon \text{ para } d \text{ partição } \delta_1\text{-fina de } [a,b]\,,$$
$$\left|\int_a^b f(s)dh(s) - S(f,h,d)\right| < \epsilon \text{ para } d \text{ partição } \delta_2\text{-fina de } [a,b]\,.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos pela Proposição 1 que δ é um calibre sobre $[a,b]$ e que, se d é uma partição δ-fina, então d é δ_1-fina e δ_2-fina. Pelo Lema de Cousin, existe $d \in TD_{[a,b]}$ tal que d é δ-fina. Assim:

$$\begin{aligned}
&0 < \int_a^b f(s)dg(s) - \int_a^b f(s)dh(s) = \int_a^b f(s)dg(s) - \int_a^b f(s)dh(s) + S(f,h,d) - S(f,g,d) = \\
&= \left(\int_a^b f(s)dg(s) - S(f,g,d)\right) - \left(\int_a^b f(s)dh(s) - S(f,h,d)\right) \leq \\
&\leq \left|\int_a^b f(s)dg(s) - S(f,g,d)\right| - \left|\int_a^b f(s)dh(s) - S(f,h,d)\right| < \\
&< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = \frac{1}{2}\left(\int_a^b f(s)dg(s) - \int_a^b f(s)dh(s)\right),
\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Logo:

$$\int_a^b f(s)dg(s) \leq \int_a^b f(s)dh(s).$$

□

Explicitaremos agora um corolário do Teorema 6, o qual é uma aplicação direta desse resultado para a integral de Perron-Stieltjes.

Corolário 1. *Sejam $\phi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ uma bijeção contínua e crescente, $f : [\alpha,\beta] \to X$ e $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Então, se uma das integrais:*

$$\int_\alpha^\beta g(\tau)dh(\tau), \int_a^b g(\phi(s))dh(\phi(s))$$

existe, a outra integral existe e vale que:

$$\int_\alpha^\beta g(\tau)dh(\tau) = \int_a^b g(\phi(s))dh(\phi(s)).$$

Faremos agora algumas considerações sobre a integral de Perron-Stieljes. Primeiramente, note que, se uma função f é Riemann integrável em um intervalo $[a,b]$, então f é Perron-Stieltjes integrável com relação à função identidade e ambas as integrais coincidem. De fato, a definição de uma função ser Riemann integrável é semelhante ao dessa função ser Perron-Stieltjes integrável com relação à identidade. A diferença está no fato de que, na integral de Riemann, limitamos nosso calibre a ser uma função constante. Portanto, podemos considerar a integral de Perron-Stieltjes como uma "extensão" da integral de Riemann. Podemos então questionar se a recíproca da afirmação acima é válida. Isto é: toda função f Perron-Stieltjes integrável com relação à identidade é também Riemann integrável?

Mostremos, por meio de um exemplo, retirado de (1, Exemplo 2.11) e (5), que essa afirmação é falsa.

Exemplo 1. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função dada por $f(t) = 2t \operatorname{sen}\left(\frac{2}{t^2}\right) - \frac{2}{t}\cos\left(\frac{2}{t^2}\right)$ para $t \in (0, 1]$ e $f(0) = 0$. Então f é uma função de grande oscilação que não é absolutamente integrável sobre $[0, 1]$. Com isso, temos da análise que f é de variação ilimitada e, portanto, não é Lebesgue integrável sobre $[0, 1]$. Entretanto, como a integral imprópria de f existe, segue por um teorema (que foge do escopo desse texto) que a integral de Perron-Stieltjes de f também existe e tem o mesmo valor da integral imprópria de Riemann de f. Em particular, como f ser Riemann integrável implica em f ser Lebesgue integrável, segue que f não é Riemann integrável. Portanto, a recíproca da afirmação acima não é verdadeira.

2.4 Funções Regradas

Ao estudarmos a integral de Riemann, é natural considerar as funções contínuas como um dos principais grupos de funções ligados à essa integral, uma vez que a continuidade dá fruto à muitos resultados importantes relacionados a esse tipo de integração. De maneira análoga, um espaço natural de se estudar em conjunto com a integral de Kurzweil é o espaço das funções regradas, as quais englobam as funções contínuas.

Sejam X um espaço de Banach com a norma $\|.\|$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$. Definiremos uma função regrada como feito em (1, Definição 1.1).

Definição 7 (Função regrada)**.** *Uma função* $f : [a, b] \to X$ *é chamada de regrada se existem os limites* $\lim\limits_{s \to t^-} f(s)$, *para* $t \in (a, b]$, *e* $\lim\limits_{s \to t^+} f(s)$, *para* $t \in [a, b)$. *Nesse caso, denotamos* $\lim\limits_{s \to t^-} f(s) = f(t^-)$ *e* $\lim\limits_{s \to t^+} f(s) = f(t^+)$.

O conjunto das funções regradas $f : [a, b] \to X$ *será denotado por* $G([a, b], X)$. *Ainda, definiremos o conjunto* $G^-([a, b], X)$ *como sendo o conjunto de funções regradas* $f : [a, b] \to X$ *contínuas pela esquerda em* $(a, b]$.

Mostremos que o conjunto das funções regradas, com as operações usuais, formam um espaço vetorial.

Afirmação 2. *Seja* $G([a, b], X)$ *munido das operações:*

$$+ : G([a, b], X) \times G([a, b], X) \to G([a, b], X), \ \ com \ \ +(f, g) = f + g.$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times G([a, b], X) \to G([a, b], X), \ \ com \ \ \cdot(\alpha, f) = \alpha f.$$

sendo $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ *e* $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$ *para todos* $x\in[a,b]$, $f,g\in G([a,b],X)$ *e* $\alpha\in\mathbb{K}$. *Então* $G([a,b],X)$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$.

Demonstração. Note que, se Y é um espaço vetorial, então é um resultado conhecido que $F([a,b],Y)=\{f:[a,b]\to Y \mid f \text{ é função}\}$ é um espaço vetorial munido das operações $+$ e $\cdot$ definidas de maneira análoga a acima. Como $G([a,b],X)\subset F([a,b],X)$, para mostrar o resultado, basta provar que $G([a,b],X)$ é subespaço vetorial de $F([a,b],X)$.

- $0\in G([a,b],X)$: A função $0:[a,b]\to X$, dada por $0(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$, é contínua. Logo, $\lim_{s\to t}0(s)$ existe para todo $t\in[a,b]$. Em particular, os limites laterais existem. Assim, $0\in G([a,b],X)$.

- $G([a,b],X)$ é fechado para a soma: Sejam $f,g\in G([a,b],X)$ e $t\in(a,b]$. Sabe-se que existem $f(t^-)$ e $g(t^-)$. Portanto, dado $\epsilon>0$, existem $\delta_1>0$ tal que $u\in[a,b]\cap(t-\delta_1,t)$ implica em $\|f(u)-f(t^-)\|<\frac{\epsilon}{2}$ e $\delta_2>0$ tal que $u\in[a,b]\cap(t-\delta_2,t)$ implica em $\|g(u)-g(t^-)\|<\frac{\epsilon}{2}$. Tomando $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$, tem-se que $u\in[a,b]\cap(t-\delta,t)$ implica em $\|(f+g)(u)-(f(t^-)+g(t^-))\|=\|f(u)-f(t^-)+g(u)-g(t^-)\|\leq\|f(u)-f(t^-)\|+\|g(u)-g(t^-)\|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$. Portanto, existe $(f+g)(t^-)=\lim_{s\to t^-}(f+g)(s)=f(t^-)+g(t^-)\in X$ para todo $t\in(a,b]$. Analogamente, dado $t\in[a,b)$, existem $f(t^+)$ e $g(t^+)$. Portanto, dado $\epsilon>0$, existem $\delta_1>0$ tal que $u\in[a,b]\cap(t,t+\delta_1)$ implica em $\|f(u)-f(t^+)\|<\frac{\epsilon}{2}$ e $\delta_2>0$ tal que $u\in[a,b]\cap(t,t+\delta_2)$ implica em $\|g(u)-g(t^+)\|<\frac{\epsilon}{2}$. Tomando $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$, tem-se que $u\in[a,b]\cap(t,t+\delta)$ implica em $\|(f+g)(u)-(f(t^+)+g(t^+))\|=\|f(u)-f(t^+)+g(u)-g(t^+)\|\leq\|f(u)-f(t^+)\|+\|g(u)-g(t^+)\|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$. Dessa forma, existe $(f+g)(t^+)=\lim_{s\to t^+}(f+g)(s)=f(t^+)+g(t^+)\in X$ para todo $t\in[a,b)$. Assim, $f+g\in G([a,b],X)$.

- $G([a,b],X)$ é fechado para o produto: Seja $f\in G([a,b],X)$ e $\alpha\in\mathbb{K}$. Se $\alpha=0$, tem-se $\alpha f=0$, a qual é uma função contínua e, em particular, regrada. Se $\alpha\neq0$, dado $t\in[a,b)$, existe $f(t^+)\in X$. Dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $u\in[a,b]\cap(t,t+\delta)$ implica $\|f(u)-f(t^+)\|<\frac{\epsilon}{|\alpha|}$. Assim, $u\in[a,b]\cap(t,t+\delta)$ implica em $\|(\alpha f)(u)-\alpha f(t^+)\|=\|\alpha f(u)-\alpha f(t^+)\|=|\alpha|\,\|f(u)-f(t^+)\|<|\alpha|\,\frac{\epsilon}{|\alpha|}=\epsilon$. Logo, existe $(\alpha f)(t^+)=\lim_{s\to t^+}(\alpha f)(s)\in X$ para todo $t\in[a,b)$. Analogamente, dado $t\in(a,b]$, existe $f(t^-)\in X$. Dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $u\in[a,b]\cap(t-\delta,t)$ implica $\|f(u)-f(t^-)\|<\frac{\epsilon}{|\alpha|}$. Assim, $u\in[a,b]\cap(t-\delta,t)$ implica em $\|(\alpha f)(u)-\alpha f(t^-)\|=\|\alpha f(u)-\alpha f(t^-)\|=|\alpha|\,\|f(u)-f(t^-)\|<|\alpha|\,\frac{\epsilon}{|\alpha|}=\epsilon$. Logo, existe $(\alpha f)(t^-)=\lim_{s\to t^-}(\alpha f)(s)\in X$ para todo $t\in(a,b]$. Portanto, $\alpha f\in G([a,b],X)$.

Consequentemente, $G([a,b],X)$ é subespaço vetorial de $F([a,b],X)$. Em particular, $G([a,b],X)$ é espaço vetorial. $\square$

Mostraremos agora que toda função regrada com domínio em um intervalo compacto da reta é limitada. Tal fato é importante, pois mostra que $G([a,b],X)$ é um subespaço vetorial de $B([a,b],X) = \{f : [a,b] \to X \text{ função } \mid f \text{ é limitada}\}$.

Proposição 3. *Seja $f : [a,b] \to X$ regrada. Então f é limitada.*

Demonstração. Suponha que $f : [a,b] \to X$ seja ilimitada. Podemos supor, sem perda de generalidade, que f é ilimitada superiormente. Então, existe $(x_n) \subset [a,b]$ tal que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$ e $f(x_n) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por um resultado da análise na reta, como (x_n) é uma sequência limitada, sabemos que existe $(y_n) \subset (x_n)$ uma subsequência tal que y_n é monótona crescente ou y_n é monótona decrescente. Sem perda de generalidade, vamos supor (y_n) crescente. Então, como (y_n) é limitada e crescente, existe $y = \lim y_n$. Ainda, como $[a,b]$ é fechado, temos $y \in [a,b]$. Assim, segue que:

$$\lim f(y_n) = +\infty.$$

Com isso, não existe o limite $\lim\limits_{t \to y^-} f(t)$, o que contradiz f ser regrada. $\square$

Provaremos agora um resultado que será útil no capítulo 4, o qual mostra que certas propriedades sobre uma função implicam nessa função ser regrada.

Proposição 4. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua pela esquerda não-decrescente. Então f é regrada.*

Demonstração. Seja $t \in (a,b]$. Como f é contínua pela esquerda, existe o limite $\lim\limits_{s \to t^-} f(s) = f(t^-)$ e vale que $f(t^-) = f(t)$. Tomemos então $t \in [a,b)$ e seja $(t_n) \subset (t,b)$ uma sequência decrescente com $t_n \to t$. Como f é não-decrescente, temos que se $u, v \in [a,b]$ e $u \leq v$, então $f(u) \leq f(v)$. Em particular, dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $n \leq m$, temos $t_m \leq t_n$, donde $f(t_m) \leq f(t_n)$. Portanto, $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência não-crescente em $\mathbb{R}$. Ainda, como $t < t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $f(t) \leq f(t_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência não-crescente limitada inferiormente por $f(t)$, donde existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $T = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} f(t_n) = \lim f(t_n)$. Seja $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (t,b)$ outra sequência decrescente com $t'_n \to t$. Pelas considerações anteriores, existe $T' = \lim f(t'_n)$. Considere $A = \{t_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{t'_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset (t,b)$, e definamos $z_1 = \max A$ (o qual existe, pois $t_1 > t_n$ e $t'_1 > t'_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) e $z_{i+1} = \max A \setminus \{z_1, ..., z_i\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ (que está bem definido, pois $A \setminus \{z_1, ..., z_i\} \subset A$ com A limitado superiormente e t_n, t'_n são discretos em $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, uma vez que as sequências são decrescentes). Ou seja, a sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ assim construída consiste no ordenamento decrescente dos elementos de A. Note que, como $t_n \to t$ e $t'_n \to t$, temos $z_n \to t$. Note também que, dados $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, existem $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$, com $j_1 \geq k_1$ e $j_2 > k_2$, tais que $z_{j_1} = t_{k_1}$ e $z_{j_2} = t_{k_2}$. Como $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \subset (t,b)$ e $z_n \to t$, segue pelas considerações anteriores que

$(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Em particular, $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_1$ implicam em:

$$|f(z_m) - f(z_n)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Ainda, existem $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tais que:

$$|T - f(t_n)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ para } n > n_2,$$
$$|T' - f(t'_n)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ para } n > n_3.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\} \in \mathbb{N}$. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, com $m, n > n_0$, existem $j_1, j_2 \in \mathbb{N}$, com $j_1 \geq m > n_0$ e $j_2 \geq n > n_0$ tais que $z_{j_1} = t'_m$ e $z_{j_2} = t_n$. Assim, temos:

$$|T - T'| \leq |T - f(t_n)| + |f(t_n) - f(t'_m)| + |f(t'_m) - T'| < \frac{\epsilon}{3} + |f(t_n) - f(t'_m)| + \frac{\epsilon}{3} =$$
$$= \frac{2\epsilon}{3} + |f(z_{j_2}) - f(z_{j_1})| < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Portanto, $T = T'$. Assim, existe o limite $\lim\limits_{s\to t^+} f(s) = T = f(t^+)$ para todo $t \in [a, b)$. Consequentemente, f é regrada. $\square$

Definamos agora a variação de uma função, conforme feito em (1, Definição 1.25).

Definição 8. *Dada uma função $\alpha : [a, b] \to E$, sendo E um espaço normado, e $d = (t_i) \in D_{[a,b]}$, definimos:*

$$\mathrm{var}_d(\alpha) = \sum_{i=1}^{|d|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$$

e a variação de α é dada por:

$$\mathrm{var}(\alpha) = \mathrm{var}_a^b(\alpha) = \sup\{\mathrm{var}_d(\alpha) \mid d \in D_{[a,b]}\}.$$

Se $\mathrm{var}(\alpha) < +\infty$, então α é chamada de função de variação limitada. O conjunto das funções de variação limitada de $[a, b]$ em E é denotado por $BV([a, b], E)$.

Provaremos um resultado sobre a variação de α:

Proposição 5. *Sejam $\alpha, \beta : [a, b] \to E$, sendo E um espaço normado, e $c \in [a, b]$. Então:*

$$\mathrm{var}(\alpha + \beta) \leq \mathrm{var}(\alpha) + \mathrm{var}(\beta),$$

e:

$$\mathrm{var}_a^b(\alpha) = \mathrm{var}_a^c(\alpha) + \mathrm{var}_c^b(\alpha).$$

Demonstração. Dada $d = (t_i) \in D_{[a,b]}$, definimos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}_d(\alpha+\beta) &= \sum_{i=1}^{|d|} \|(\alpha+\beta)(t_i) - (\alpha+\beta)(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{|d|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) + \beta(t_i) - \beta(t_{i-1})\| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{|d|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| + \sum_{i=1}^{|d|} \|\beta(t_i) - \beta(t_{i-1})\| = \operatorname{var}_d(\alpha) + \operatorname{var}_d(\beta) \leq \\
&\leq \operatorname{var}(\alpha) + \operatorname{var}(\beta).
\end{aligned}$$

Segue que $\operatorname{var}(\alpha) + \operatorname{var}(\beta)$ é uma cota superior de $\{\operatorname{var}_d(\alpha) \mid d \in D_{[a,b]}\}$, donde:

$$\operatorname{var}(\alpha+\beta) = \sup\{\operatorname{var}_d(\alpha+\beta) \mid d \in D_{[a,b]}\} \leq \operatorname{var}(\alpha) + \operatorname{var}(\beta).$$

Ainda, sejam d_1 e d_2 partições de $[a,c]$ e $[c,b]$, respectivamente. Então $d = d_1 \cup d_2$ é uma partição de $[a,b]$ (pelo Lema 3), donde:

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}_{d_1}(\alpha\,|_{[a,c]}) + \operatorname{var}_{d_2}(\alpha\,|_{[c,b]}) &= \sum_{i=1}^{|d_1|} \|\alpha(t_i) + \alpha(t_{i-1})\| + \sum_{i=|d_1|+1}^{|d_1|+|d_2|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \\
&= \sum_{i=1}^{|d_1|+|d_2|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{|d|} \left\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{t_{i-1}})\right\| = \\
&= \operatorname{var}_d(\alpha) \in \{\operatorname{var}_u(\alpha) \mid u \in D_{[a,b]}\}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Em particular, temos:

$$\operatorname{var}_{d_1}\left(\alpha\,|_{[a,c]}\right) + \operatorname{var}_{d_2}\left(\alpha\,|_{[c,b]}\right) \leq \operatorname{var}(\alpha)$$

para todas as partições $d_1 \in D_{[a,c]}$ e $d_2 \in D_{[c,b]}$. Assim:

$$\operatorname{var}_a^c(\alpha) + \operatorname{var}_c^b(\alpha) \leq \operatorname{var}_a^b(\alpha).$$

Por outro lado, dada $d \in D_{[a,b]}$, temos duas possibilidades:

- $c \in d$: Nesse caso, existe $j \in \{0, ..., |d|\}$ tal que $c = t_j$, donde $d_1 = (t_i)_{i \in \{0,...,j\}}$ e $d_2 = (t_i)_{i \in \{j,...,|d|\}}$ são partições de $[a,c]$ e $[c,b]$, respectivamente. Pela equação (2.3), isso nos fornece:

$$\operatorname{var}_d(\alpha) = \operatorname{var}_{d_1}(\alpha\,|_{[a,c]}) + \operatorname{var}_{d_2}(\alpha\,|_{[c,b]}) \leq \operatorname{var}_a^c(\alpha) + \operatorname{var}_c^b(\alpha).$$

- $c \notin d$: Nesse caso, existe $j \in \{1, ..., |d|\}$ tal que $c \in (t_{j-1}, t_j)$. Definindo $d_1 = (t_i)_{i \in \{0,...,j-1\}} \cup \{c\}$ e $d_2 = (t_i)_{i \in \{j,...,|d|\}} \cup \{c\}$, temos que $d_1 \in D_{[a,c]}$ e $d_2 \in D_{[c,b]}$.

Ainda, temos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_d(\alpha) &= \sum_{i=1}^{|d|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{|d|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| + \|\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})\| \leq \\
&\leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{|d|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| + \|\alpha(t_j) - \alpha(c)\| + \|\alpha(c) - \alpha(t_{j-1})\| = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{j-1} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| + \|\alpha(c) - \alpha(t_{j-1})\| \right) + \\
&+ \left(\sum_{i=j+1}^{|d|} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| + \|\alpha(t_j) - \alpha(c)\| \right) = \\
&= \mathrm{var}_{d_1}(\alpha\mid_{[a,c]}) + \mathrm{var}_{d_2}(\alpha\mid_{[c,b]}) \leq \mathrm{var}_a^c(\alpha) + \mathrm{var}_c^b(\alpha).
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $d \in D_{[a,b]}$, temos $\mathrm{var}_d(\alpha) \leq \mathrm{var}_a^c(\alpha) + \mathrm{var}_c^b(\alpha)$, donde:

$$\mathrm{var}_a^b(\alpha) \leq \mathrm{var}_a^c(\alpha) + \mathrm{var}_c^b(\alpha).$$

Assim, vale a igualdade:

$$\mathrm{var}_a^c(\alpha) + \mathrm{var}_c^b(\alpha) = \mathrm{var}_a^b(\alpha).$$

□

Provaremos agora uma proposição, a qual mostra que toda função de variação limitada cujo contradomínio é um espaço de Banach é uma função regrada. Esse resultado pode ser encontrado em (1, Lema 1.29), o qual foi retirado originalmente de (6, Teorema 1.2.7).

Proposição 6. *$BV([a,b], X) \subset G([a,b], X)$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in BV([a,b], X)$. Provaremos que existe o limite $\lim\limits_{s\to t^-} \alpha(s)$ para todo $t \in (a,b]$. A existência do limite $\lim\limits_{s\to t^+} \alpha(s)$ para todo $t \in [a,b)$ seguirá de maneira análoga. Sejam $t \in (a,b]$ e $(t_n) \subset [a,t)$ com $t_n \to t$. Notemos que, dados $c,d \in [a,b]$ com $c \leq d$, temos $\mathrm{var}_c^d\, \alpha \geq 0$. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, segue que:

$$\sum_{i=1}^{n} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \leq \mathrm{var}_{t_1}^{t_{n+1}}(\alpha) \leq \mathrm{var}_a^{t_1}(\alpha) + \mathrm{var}_{t_1}^{t_{n+1}}(\alpha) + \mathrm{var}_{t_{n+1}}^{t}(\alpha) = \mathrm{var}_a^t(\alpha).$$

Como $\|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que existe $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|$ e vale que:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| \leq \mathrm{var}_a^t(\alpha).$$

Assim, temos:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=n}^{+\infty}\|\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)\|=0$$

e que $(y_n)\subset\mathbb{R}$ com $y_n=\sum_{i=n}^{+\infty}\|\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)\|$ para todo $n\in\mathbb{N}$ é uma sequência monótona não-crescente com $y_n\geq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Portanto, dado $\epsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $n>n_0$ implica em:

$$|y_n|=y_n=\sum_{i=n}^{+\infty}\|\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)\|<\epsilon.$$

Assim, dados $m,n\in\mathbb{N}$ com $m,n>n_0$ (e supondo, sem perda de generalidade, que $m\geq n$), temos:

$$\|\alpha(t_m)-\alpha(t_n)\|\leq\sum_{i=n}^{m-1}\|\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)\|\leq\sum_{i=n}^{+\infty}\|\alpha(t_{i+1})-\alpha(t_i)\|=y_n<\epsilon.$$

Dessa forma, $(\alpha(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X (Banach), donde existe $T\in X$ tal que $T=\lim\alpha(t_n)$. Sejam $(t'_n)\subset[a,t)$ com $t'_n\to t$ e $T'=\lim\alpha(t'_n)$ (o qual existe pelas considerações anteriores). Definamos $(z_n)\subset[a,t)$ como sendo $z_{2n-1}=t_n$ e $z_{2n}=t'_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Então, $z_n\to t$ e:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=n}^{+\infty}\|\alpha(z_{i+1})-\alpha(z_i)\|=0.$$

Dado $\epsilon>0$, existem $n_1,n_2,n_3\in\mathbb{N}$ tais que:

$$\begin{aligned}
\|T-\alpha(t_n)\|&<\frac{\epsilon}{3}\text{ para }n>n_1,\\
\|T'-\alpha(t'_n)\|&<\frac{\epsilon}{3}\text{ para }n>n_2,\\
\sum_{i=n}^{+\infty}\|\alpha(z_{i+1})-\alpha(z_i)\|&<\frac{\epsilon}{3}\text{ para }n>n_3.
\end{aligned}$$

Notemos que $n\in\mathbb{N}$ implica em $n\geq 1$, donde $2n\geq n+1$ e $2n-1\geq n$. Tomando $n_0=\max\{n_1,n_2,n_3\}\in\mathbb{N}$, sejam $m,n\in\mathbb{N}$ com $m\geq n>n_0$. Então:

$$\begin{aligned}
\|T'-T\|&\leq\|T'-\alpha(t'_m)\|+\|\alpha(t'_m)-\alpha(t_n)\|+\|\alpha(t_n)-T\|=\\
&=\|T'-\alpha(t'_m)\|+\|\alpha(z_{2m})-\alpha(z_{2n-1})\|+\|\alpha(t_n)-T\|\leq\\
&\leq\|T'-\alpha(t'_m)\|+\sum_{i=2n-1}^{2m-1}\|\alpha(z_{i+1})-\alpha(z_i)\|+\|\alpha(t_n)-T\|\leq\\
&\leq\|T'-\alpha(t'_m)\|+\sum_{i=2n-1}^{+\infty}\|\alpha(z_{i+1})-\alpha(z_i)\|+\|\alpha(t_n)-T\|\leq\\
&\leq\|T'-\alpha(t'_m)\|+\sum_{i=n}^{+\infty}\|\alpha(z_{i+1})-\alpha(z_i)\|+\|\alpha(t_n)-T\|<\\
&<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, temos $T' = T$ e, portanto, existe $\lim\limits_{s \to t^-} \alpha(s) = T$. Com isso, temos $\alpha \in G([a,b], X)$. Assim:

$$BV([a,b], X) \subset G([a,b], X).$$

$\square$

Definamos o conceito de uma função escada, de maneira análoga à (1, Definição 1.3).

Definição 9. *Uma função $f : [a,b] \to Y$, com Y espaço normado, é dita ser uma função escada se existe uma partição $d = (t_i) \in D_{[a,b]}$ tal que para cada $i = 1, ..., |d|$, existe $c_i \in Y$ tal que $f(t) = c_i$ para todo $t \in (t_{i-1}, t_i)$. O conjunto das funções escada de $[a,b]$ em Y é denotado por $E([a,b], Y)$.*

O próximo resultado, retirado de (1, Teorema 1.4), o qual é uma versão mais geral do resultado em (7, Teorema 1.3.1), relaciona as funções escadas com as funções regradas, e essa relação nos será útil mais a frente.

Teorema 7. *Seja $O \subset X$ aberto e $f : [a,b] \to O$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$f : [a,b] \to O$ é o limite uniforme de funções escada $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ com $f_n : [a,b] \to O$.*
2. *$f \in G([a,b], O)$.*
3. *Dado $\epsilon > 0$, existe uma divisão $d : a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{|d|} = b$ tal que:*

$$\sup\{\|f(t) - f(s)\| \ \mid \ t, s \in (t_{j-1}, t_j), i = 1, ..., |d|\} < \epsilon.$$

Demonstração.

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Note que $f(t) \in O$ para todo $t \in [a,b]$. Seja $t \in [a,b)$. Provaremos que $\lim\limits_{s \to t^+} f(s)$ existe. A existência de $\lim\limits_{s \to t^-} f(s)$ para $t \in (a,b]$ segue de maneira análoga. Considere uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [t,b]$ tal que $t_n \to t$. Considere também uma sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funções escada de $[a,b]$ em O tal que $f_n \to f$ uniformemente. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|f(t) - f_k(t)\| < \dfrac{\epsilon}{4}$, para todo $t \in [a,b]$. Além disso, como f_k é uma função escada, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_k(t_n) - f_k(t^+)\| < \dfrac{\epsilon}{4}$ para todo $n \geq N_0$. Portanto, para $n, m \geq N_0$, temos:

$$\begin{aligned} \|f(t_n) - f(t_m)\| \leq \|f(t_n) - f_k(t_n)\| + \left\|f_k(t_n) - f_k(t^+)\right\| + \\ + \left\|f_k(t^+) - f_k(t_m)\right\| + \|f_k(t_m) - f(t_m)\| < \epsilon. \end{aligned}$$

  Então, como X é um espaço de Banach, $\lim f(t_n)$ existe. Seja então $(t'_n) \subset [t,b]$ outra sequência com $t'_n \to t$. Sejam $L = \lim f(t_n)$ e $L' = \lim f(t'_n)$. Dado $\epsilon > 0$, existem $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tais que:

1. $n > n_1$ implica em $\|L - f(t_n)\| < \dfrac{\epsilon}{3}$.

2. $m, n > n_2$ implica em $\|f(t_n) - f(t'_m)\| < \dfrac{\epsilon}{3}$ (pois a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $u_{2n-1} = t_n$ e $u_{2n} = t'_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é tal que $u_n \subset [t, b]$ e $u_n \to t$, donde $(f(u_n))$ é de Cauchy).

3. $m > n_3$ implica em $\|L' - f(t'_m)\| < \dfrac{\epsilon}{3}$.

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, temos que $m, n > n_0$ implicam em:

$$\|L - L'\| \leq \|L - f(t_n)\| + \|f(t_n) - f(t'_m)\| + \|L' - f(t'_m)\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Portanto, $L = L'$ e assim existe o limite $\lim\limits_{s\to t^+} f(s)$ para todo $t \in [a, b)$. De maneira análoga, existe o limite $\lim\limits_{s\to t^-} f(s)$ para todo $t \in (a, b]$. Portanto, $f \in G\left([a, b], O\right)$.

- $(ii) \Rightarrow (iii)$: Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $f \in G([a, b], O)$, segue que $f \in G([a, b], X)$. Então, para todo $t \in (a, b)$, existe $\delta_t > 0$ tal que:

$$\sup_{w,s\in(t-\delta_t,t)} \|f(w) - f(s)\| < \epsilon \text{ e } \sup_{w,s\in(t,t+\delta_t)} \|f(w) - f(s)\| < \epsilon.$$

Similarmente, existem $\delta_a, \delta_b > 0$ tais que:

$$\sup_{w,s\in(a,a+\delta_a)} \|f(w) - f(s)\| < \epsilon \text{ e } \sup_{w,s\in(b-\delta_b,b)} \|f(w) - f(s)\| < \epsilon.$$

Note que o conjunto $\mathcal{A} = \{[a, a + \delta_a), (t - \delta_t, t + \delta_t), (b - \delta_b, b] \mid t \in (a, b)\}$ é uma cobertura aberta de $[a, b]$ e, portanto, existe uma divisão $d = (t_i)$ de $[a, b]$ tal que $\{[a, a + \delta_a), (t_1 - \delta_{t_1}, t_1 + \delta_{t_1}), ..., (b - \delta_b, b]\}$ é uma subcobertura finita de $\mathcal{A}$ para $[a, b]$ e, ainda:

$$\sup \|f(t) - f(s)\| \mid t, s \in (t_{i-1}, t_i), i = 1, ..., |d| < \epsilon.$$

- $(iii) \Rightarrow (i)$: Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $d_n = (t_i)$, com $i \in \{1, 2, ..., |d_n|\}$, uma partição de $[a, b]$ tal que:

$$\sup\{\|f(t) - f(s)\| \mid t, s \in (t_{i-1}, t_i), i = 1, 2, ..., |d_n|\} < \frac{1}{n}$$

e $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ para todo $i \in \{1, 2, ..., |d_n|\}$. Definamos $f_n : [a, b] \to X$ como:

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^{|d_n|} f(\tau_i)\chi_{(t_{i-1},t_i)}(t) + \sum_{i=0}^{|d_n|} f(\tau_i)\chi_{t_i}(t)$$

em que χ_B denota a função característica de um conjunto mensurável $B \subset \mathbb{R}$. Note que $f_n(t) \in O$ para todo $t \in [a, b]$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Ainda, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções escada que converge uniformemente para f.

$\square$

Destacaremos um corolário do Teorema 5, válido para a integral de Perron-Stieltjes, o qual pode ser encontrado em (1, Corolário 2.14) e (4, Corolário 6.5.5). Este resultado revela uma das relações entre as funções regradas e a integral de Perron-Stieltjes. Antes, entretanto, estabeleceremos uma notação.

Definição 10. *Sejam $f : [a, b] \to X$, $t \in [a, b)$ e $u \in (a, b]$. Se existe o limite $\lim\limits_{s \to t^+} f(s) = f(t^+)$, definimos:*

$$\Delta^+ f(t) = f(t^+) - f(t) = \lim_{s \to t^+} f(s) - f(t).$$

Analogamente, se existe o limite $\lim\limits_{s \to u^-} f(s) = f(u^-)$, definimos:

$$\Delta^- f(u) = f(u) - f(u^-) = \lim_{s \to u^-} f(u) - f(s).$$

Note que, se f é regrada, $\Delta^+ f(t)$ e $\Delta^- f(u)$ estão bem definidas.

Corolário 2. *Sejam $f : [a, b] \to X$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ regrada, tais que $\int_a^b f(t)dg(t)$ existe. Então as funções $h(t) = \int_a^t f(s)dg(s)$ e $k(t) = \int_t^b f(s)dg(s)$ são regradas em $[a, b]$ e:*

$$h(t^+) = h(t) + f(t)\Delta^+ g(t) \text{ e } k(t^+) = k(t) - f(t)\Delta^+ g(t) \text{ para } t \in [a, b),$$
$$h(t^-) = h(t) - f(t)\Delta^- g(t) \text{ e } k(t^-) = k(t) + f(t)\Delta^- g(t) \text{ para } t \in (a, b].$$

Demonstração. Mostraremos uma das igualdades, pois as demais seguem de maneira análoga. Seja $U : [a, b] \times [a, b] \to X$ dada por $U(\tau, t) = f(\tau)g(t)$, cuja integral $\int_a^b DU(\tau, t) = \int_a^b f(t)dg(t)$ existe por hipótese. Pelo teorema anterior, temos:

$$\lim_{s \to t^+} [\int_a^s DU(\tau, u) - U(t, s) - U(t, t)] = \int_a^t DU(\tau, u) \text{ para } t \in [a, b).$$

Assim:

$$\lim_{s \to t^+} [\int_a^s f(u)dg(u) - f(t)g(s) + f(t)g(t)] = \int_a^t f(u)dg(u) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{s \to t^+} \int_a^s f(u)dg(u) = \int_a^t f(u)dg(u) + \lim_{s \to t^+} f(t)(g(s) - g(t)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{s \to t^+} h(s) = h(t) + \lim_{s \to t^+} f(t)(g(s) - g(t)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h(t^+) = h(t) + f(t)\Delta^+ g(t).$$

Donde $h(t^+)$ existe e vale a igualdade. □

2.5 Desigualdade de Grönwall

Provaremos uma sequência de resultados, com o objetivo de demonstrar o Corolário 5, que será usado no estudo do método da média. Os resultados dessa seção são baseados no capítulo 1 de (3). Em particular, o próximo resultado é a generalização para espaços de Banach de (3, Proposição 1.33).

Proposição 7. *Se* $f : [a, b] \to X$ *é uma função escada com* $a = \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_m = b$ *tal que para todo* $i \in \{1, ..., m\}$*, temos* $f(t) = c_i \in X$ *para* $t \in (\beta_{i-1}, \beta_i)$ *e* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é de variação limitada em* $[a, b]$ *então a integral* $\int_a^b f(s)dg(s)$ *existe e:*

$$\int_a^b f(s)dg(s) = f(a)(g(a^+) - g(a)) + \sum_{j=1}^{m-1} f(\beta_j)(g(\beta_j^+) - g(\beta_j^-)) + f(b)(g(b) - g(b^-)) + \\ + \sum_{j=1}^{m} c_j(g(\beta_j^-) - g(\beta_{j-1}^+)).$$

Demonstração. Primeiramente, definiremos uma notação. Sejam $u, v \in \mathbb{R}$ com $u \leq v$ tal que $[u, v] \subset [a, b]$ e $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i]) \in TD_{[u,v]}$. Então, definamos $S(f, g, d) \in X$ como sendo:

$$S(f, g, d) = \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i) \left(g(t_i) - g(t_{i-1})\right).$$

Com isso, provaremos a proposição. A função g é de variação limitada e, portanto, pela Proposição 6, os limites laterais existem em cada ponto de $[a, b]$. Seja $\rho : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ uma função. Dado $\epsilon > 0$, escolhamos um calibre δ em $[a, b]$ tal que $\delta(\beta_j) < \rho(\epsilon)$, para $j \in \{0, 1, ..., m\}$ e $\delta(\tau) < \text{dist}(\tau, \{\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m\})$ para $\tau \neq \beta_j$, com $j \in \{0, 1, ..., m\}$. Se $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$ é uma partição δ-fina de $[a, b]$, então $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m$ são marcações de seus intervalos δ-finos. De fato, seja $j \in \{0, 1, ..., m\}$. Então, existe $i \in \{1, ..., |d|\}$ tal que $\beta_j \in [t_{i-1}, t_i]$. Se $\tau_i \neq \beta_j$, então:

$$\beta_j \in [t_{i-1}, t_i] \subset (\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)),$$

donde $|\beta_j - \tau_i| < \delta(\tau_i) < \text{dist}(\tau_i, \{\beta_0, \beta_1, ..., \beta_m\}) \leq |\beta_j - \tau_i|$, o que é um absurdo. Logo, $\tau_i = \beta_j$. Dado $i \in \{1, ..., m\}$, seja $\xi_i \in (\beta_{i-1}, \beta_i)$. Mostremos que, para cada $i \in \{2, ..., m\}$, existe a integral $\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(s)dg(s)$. De fato, seja $d' = \left(\tau_i', \left[t_{i-1}', t_i'\right]\right)$ uma partição marcada δ-fina de $[\xi_{i-1}, \xi_i]$. Temos que existe j tal que $\beta_{i-1} = \tau_j'$. Note que podemos assumir que $\beta_{i-1} \notin \{t_{j-1}', t_j'\}$. De fato, se $\beta_{i-1} = t_{j-1}'$, então $\beta_{i-1} \neq t_j'$ e:

$$f(\beta_{i-1})(g(t_{j-1}') - g(t_{j-2}')) + f(\beta_{i-1})(g(t_j') - g(t_{j-1}')) = f(\beta_{i-1})(g(t_j') - g(t_{j-2}')).$$

Como podemos tomar t_{j-2}', t_j' suficientemente próximos de β_{i-1} com $t_{j-2}', t_j' \neq \beta_{i-1}$ (de forma a ter d' δ-fina), podemos considerar uma partição d' tal que $\left(\beta_{i-1}, \left[t_{j-2}', t_j'\right]\right) \in d'$.

Um processo análogo nos permite considerar $\beta_{i-1} \neq t'_i$. Assim:

$$\begin{aligned}
S(f,g,d') &= \sum_{k=1}^{|d'|} f(\tau'_k)(g(t'_k) - g(t'_{k-1})) = \sum_{k=1}^{j-1} f(\tau'_k)(g(t'_k) - g(t'_{k-1})) + \\
&+ f(\beta_{i-1})(g(t'_j) - g(t'_{j-1})) + \sum_{k=j+1}^{|d'|} f(\tau'_k)(g(t'_k) - g(t'_{k-1})) = \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} c_{i-1}(g(t'_k) - g(t'_{k-1})) + f(\beta_{i-1})(g(t'_j) - g(t'_{j-1})) + \\
&+ \sum_{k=j+1}^{|d'|} c_i(g(t'_k) - g(t'_{k-1})) = c_{i-1}\sum_{k=1}^{j-1}(g(t'_k) - g(t'_{k-1})) + \\
&+ f(\beta_{i-1})(g(t'_j) - g(t'_{j-1})) + c_i \sum_{k=j+1}^{|d'|}(g(t'_k) - g(t'_{k-1})) = \\
&= c_{i-1}(g(t'_{j-1}) - g(\xi_{i-1})) + f(\beta_{i-1})(g(t'_j) - g(t'_{j-1})) + c_i(g(\xi_i) - g(t'_j)).
\end{aligned}$$

Sabemos que $\lim\limits_{s \to \beta_{i-1}^-} g(s) = g(\beta_{i-1}^-)$ e $\lim\limits_{s \to \beta_{i-1}^+} g(s) = g(\beta_{i-1}^+)$. Definamos:

$$k_i = \max\{\|c_{i-1}\|, \|c_i\|, \|f(\beta_{i-1})\|\} + 1 > 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1^i, \delta_2^i > 0$ tais que:

$$\begin{aligned}
\left|g(\beta_{i-1}^-) - g(t)\right| &< \frac{\epsilon}{5k_i} \text{ para } t \in (\beta_{i-1} - \delta_1^i, \beta_{i-1}), \\
\left|g(\beta_{i-1}^+) - g(t)\right| &< \frac{\epsilon}{5k_i} \text{ para } t \in (\beta_{i-1}, \beta_{i-1} + \delta_2^i).
\end{aligned}$$

Tomando $\delta_0^i = \min\{\delta_1^i, \delta_2^i\} > 0$ e fazendo $\rho(\epsilon) < \delta_0^i$ e $I_i = c_{i-1}(g(\beta_{i-1}^-) - g(\xi_{i-1})) + f(\beta_{i-1})(g(\beta_{i-1}^+) - g(\beta_{i-1}^-)) + c_i(g(\xi_i) - g(\beta_{i-1}^+)) \in X$, então $t'_{j-1}, t'_j \in B(\beta_{i-1}, \delta(\beta_{i-1})) \subset B(\beta_{i-1}, \rho(\epsilon)) \subset B(\beta_{i-1}, \delta_0^i)$, donde $t'_{j-1} \in (\beta_{i-1} - \delta_0^i, \beta_{i-1}) \subset (\beta_{i-1} - \delta_1^i, \beta_{i-1})$ e $t'_j \in (\beta_{i-1}, \beta_{i-1} + \delta_0^i) \subset (\beta_{i-1}, \beta_{i-1} + \delta_2^i)$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
&\|S(f,g,d') - I_i\| = \left\|c_{i-1}(g(t'_{j-1}) - g(\xi_{i-1})) + f(\beta_{i-1})(g(t'_j) - g(t'_{j-1})) + c_i(g(\xi_i) - g(t'_j)) - I_i\right\| = \\
&= \|c_{i-1}(g(t'_{j-1}) - g(\beta_{i-1}^-)) + f(\beta_{i-1})(g(t'_j) - g(\beta_{i-1}^+)) + \\
&+ f(\beta_{i-1})(g(\beta_{i-1}^-) - g(t'_{j-1})) + c_i(g(\beta_{i-1}^+) - g(t'_j))\| \leq \\
&\leq \left\|c_{i-1}(g(t'_{j-1}) - g(\beta_i^-))\right\| + \left\|f(\beta_{i-1})(g(t'_j) - g(\beta_{i-1}^+))\right\| + \left\|f(\beta_{i-1})(g(\beta_{i-1}^-) - g(t'_{j-1}))\right\| + \\
&+ \left\|c_i(g(\beta_{i-1}^+) - g(t'_j))\right\| \leq \|c_{i-1}\| \left|g(t'_{j-1}) - g(\beta_{i-1}^-)\right| + \|f(\beta_{i-1})\| \left|g(t'_j) - g(\beta_{i-1}^+)\right| + \\
&+ \|f(\beta_{i-1})\| \left|g(\beta_{i-1}^-) - g(t'_{j-1})\right| + \|c_i\| \left|g(\beta_{i-1}^+) - g(t'_j)\right| \leq \|c_{i-1}\| \frac{\epsilon}{5k_i} + \|f(\beta_{i-1})\| \frac{\epsilon}{5k_i} + \\
&+ \|f(\beta_{i-1})\| \frac{\epsilon}{5k_i} + \|c_i\| \frac{\epsilon}{5k_i} \leq \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} + \frac{\epsilon}{5} = \frac{4\epsilon}{5} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $\displaystyle\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(s)dg(s)$ existe e vale que:

$$\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(s)dg(s) = I_i.$$

Mostremos ainda que existe a integral $\int_a^{\xi_1} f(s)dg(s)$ existe, pois $\int_{\xi_m}^b f(s)dg(s)$ seguirá de forma análoga. Seja $d_1 = (\omega_i, [u_{i-1}, u_i])$ uma partição marcada δ-fina de $[a, \xi_1]$. Pelas considerações anteriores, sabemos que $\beta_0 = a = \omega_1$. Assim:

$$\begin{aligned} S(f,g,d_1) &= \sum_{k=1}^{|d_1|} f(\omega_k)(g(u_k) - g(u_{k-1})) = f(a)(g(u_1) - g(a)) + \sum_{k=2}^{|d_1|} c_1(g(u_k) - g(u_{k-1})) = \\ &= f(a)(g(u_1) - g(a)) + c_1 \sum_{k=2}^{|d_1|} (g(u_k) - g(u_{k-1})) = \\ &= f(a)(g(u_1) - g(a)) + c_1(g(\xi_1) - g(u_1)). \end{aligned}$$

Seja $\kappa = \max\{\|f(a)\|, \|c_1\|\} + 1 > 0$. Como $\lim_{s \to a^+} g(s) = g(a^+)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_0^1 > 0$ tal que:

$$\left|g(t) - g(a^+)\right| < \frac{\epsilon}{3\kappa} \text{ para } t \in \left(a, a + \delta_0^1\right).$$

Tomando $\rho(\epsilon) < \delta_0^1$ (isto é, para cada $\epsilon > 0$, tomamos $\rho(\epsilon) = \frac{1}{2} \min_{i \in \{1,\ldots,m+1\}} \{\delta_0^i\} > 0$, em que δ_0^{m+1} é aquele obtido na análise da integral $\int_{\xi_m}^b f(s)dg(s)$) e $I_1 = f(a)(g(a^+) - g(a)) + c_1(g(\xi_1) - g(a^+)) \in X$, temos que $u_1 \in B(a, \delta(a)) \subset B(a, \rho(\epsilon)) \subset B(a, \delta_0^1)$, donde $u_1 \in (a, a + \delta_0^1)$ e:

$$\begin{aligned} \|S(f,g,d_1) - I_1\| &= \|f(a)(g(u_1) - g(a)) + c_1(g(\xi_1) - g(u_1)) - I_1\| = \\ &= \left\|f(a)(g(u_1) - g(a^+)) + c_1(g(a^+) - g(u_1))\right\| \leq \\ &\leq \left\|f(a)(g(u_1) - g(a^+))\right\| + \left\|c_1(g(a^+) - g(u_1))\right\| = \\ &= \|f(a)\| \left|g(u_1) - g(a^+)\right| + \|c_1\| \left|g(a^+) - g(u_1)\right| \leq \\ &\leq \|f(a)\| \frac{\epsilon}{3\kappa} + \|c_1\| \frac{\epsilon}{3\kappa} \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon. \end{aligned}$$

donde a integral $\int_a^{\xi_1} f(s)dg(s)$ existe e vale que:

$$\int_a^{\xi_1} f(s)dg(s) = I_1.$$

Analogamente, se definirmos $I_{m+1} = f(b)(g(b) - g(b^-)) + c_m(g(b^-) - g(\xi_m)) \in X$, temos que $\int_{\xi_m}^b f(s)dg(s)$ existe e vale que:

$$\int_{\xi_m}^b f(s)dg(s) = I_{m+1}.$$

Portanto, pelo Teorema 4, temos que a integral $\int_a^b f(s)dg(s)$ existe e vale que:

$$\int_a^b f(s)dg(s) = \int_a^{\xi_1} f(s)dg(s) + \sum_{i=2}^{m} \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} f(s)dg(s) + \int_{\xi_m}^{b} f(s)dg(s) = I_1 + \sum_{i=2}^{m} I_i + I_{m+1} =$$
$$= f(a)(g(a^+) - g(a)) + c_1(g(\xi_1) - g(a^+)) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{m} \Big[c_{i-1}(g(\beta_{i-1}^-) - g(\xi_{i-1})) + f(\beta_{i-1})(g(\beta_{i-1}^+) - g(\beta_{i-1}^-)) + c_i(g(\xi_i) - g(\beta_{i-1}^+))\Big] +$$
$$+ f(b)(g(b) - g(b^-)) + c_m(g(b^-) - g(\xi_m)) = f(a)(g(a^+) - g(a)) + c_1(g(\xi_1) - g(a^+)) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{m} \Big[c_{i-1}(g(\beta_{i-1}^-) - g(\xi_{i-1}))\Big] + \sum_{i=2}^{m} \Big[f(\beta_{i-1})(g(\beta_{i-1}^+) - g(\beta_{i-1}^-))\Big] + \sum_{i=2}^{m} \Big[c_i(g(\xi_i) - g(\beta_{i-1}^+))\Big] +$$
$$+ f(b)(g(b) - g(b^-)) + c_m(g(b^-) - g(\xi_m)) = f(a)(g(a^+) - g(a)) +$$
$$+ \sum_{i=2}^{m+1} \Big[c_{i-1}(g(\beta_{i-1}^-) - g(\xi_{i-1}))\Big] + \sum_{i=2}^{m} \Big[f(\beta_{i-1})(g(\beta_{i-1}^+) - g(\beta_{i-1}^-))\Big] + \sum_{i=1}^{m} \Big[c_i(g(\xi_i) - g(\beta_{i-1}^+))\Big] +$$
$$+ f(b)(g(b) - g(b^-)) =$$

$$= f(a)(g(a^+) - g(a)) + \sum_{i=1}^{m} \Big[c_i(g(\beta_i^-) - g(\xi_i))\Big] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} \Big[f(\beta_i)(g(\beta_i^+) - g(\beta_i^-))\Big] + \sum_{i=1}^{m} \Big[c_i(g(\xi_i) - g(\beta_{i-1}^+))\Big] + f(b)(g(b) - g(b^-)) =$$
$$= f(a)(g(a^+) - g(a)) + \sum_{i=1}^{m} \Big[c_i(g(\beta_i^-) - g(\xi_i) + g(\xi_i) - g(\beta_{i-1}^+))\Big] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} \Big[f(\beta_i)(g(\beta_i^+) - g(\beta_i^-))\Big] + f(b)(g(b) - g(b^-)) =$$
$$= f(a)(g(a^+) - g(a)) + \sum_{i=1}^{m} c_i(g(\beta_i^-) - g(\beta_{i-1}^+)) + \sum_{i=1}^{m-1} f(\beta_i)(g(\beta_i^+) - g(\beta_i^-)) +$$
$$+ f(b)(g(b) - g(b^-)).$$

□

Enunciaremos uma consequência dessa proposição, a qual não provaremos pois sua demonstração utiliza muitos outros resultados prévios que fogem do nosso objetivo. A demonstração, e os respectivos resultados necessários, podem ser encontrados em (3). Em particular, o resultado seguinte é o Corolário 1.34 de (3).

Corolário 3. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função regrada no intervalo $[a,b]$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é de variação limitada em $[a,b]$ então a integral $\int_a^b f(s)dg(s)$ existe.*

O próximo teorema, que é o Teorema 1.35 de (3), nos permite comparar a norma de duas integrais de Kurzweil, sendo uma delas no $\mathbb{R}^n$ e outra em $\mathbb{R}$.

Teorema 8. *Sejam $U : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $V : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ funções tais que as integrais $\int_a^b DU(\tau,t)$ e $\int_a^b DV(\tau,t)$ existem. Se existe um calibre δ em $[a,b]$ tal que:*

$$|t-\tau| \, \|U(\tau,t) - U(\tau,\tau)\| \leq (t-\tau)\,(V(\tau,t) - V(\tau,\tau)) \tag{2.4}$$

para todo $t \in [\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)]$ então vale a desigualdade:

$$\left\| \int_a^b DU(\tau,t) \right\| \leq \int_a^b DV(\tau,t).$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ dado. Como ambas as integrais existem, há um calibre θ em $[a,b]$ tal que $\theta(s) \leq \delta(s)$ para todo $s \in [a,b]$ tal que para toda partição θ-fina $d = ([\alpha_{i-1}, \alpha_i], \tau_i)$ de $[a,b]$ temos:

$$\left\| \sum_{j=1}^{|d|} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| < \epsilon. \tag{2.5}$$

$$\left| \sum_{j=1}^{|d|} [V(\tau_j, \alpha_j) - V(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_a^b DV(\tau,t) \right| < \epsilon. \tag{2.6}$$

Notemos que a desigualdade (2.4) implica em $\|U(\tau_i,\alpha_i) - U(\tau_i,\tau_i)\| \leq V(\tau_i,\alpha_i) - V(\tau_i,\tau_i)$ quando $\alpha_i > \tau_i$ e $\|U(\tau_i,\alpha_i) - U(\tau_i,\tau_i)\| \leq V(\tau_i,\tau_i) - V(\tau_i,\alpha_i)$ quando $\alpha_i < \tau_i$. Assim, para $i \in \{1, ..., |d|\}$ temos:

$$\|U(\tau_i,\alpha_i) - U(\tau_i,\alpha_{i-1})\| \leq \|U(\tau_i,\alpha_i) - U(\tau_i,\tau_i)\| + \|U(\tau_i,\tau_i) - U(\tau_i,\alpha_{i-1})\| \leq$$
$$\leq V(\tau_i,\alpha_i) - V(\tau_i,\alpha_{i-1}).$$

Pelas desigualdades (2.5) e (2.6) obtemos:

$$\left\| \int_a^b DU(\tau,t) \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{|d|} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_a^b DU(\tau,t) \right\| +$$
$$+ \left\| \sum_{j=1}^{|d|} [U(\tau_j, \alpha_j) - U(\tau_j, \alpha_{j-1})] \right\| <$$
$$< \epsilon + \sum_{j=1}^{|d|} [V(\tau_j, \alpha_j) - V(\tau_j, \alpha_{j-1})] =$$
$$= \epsilon + \sum_{j=1}^{|d|} [V(\tau_j, \alpha_j) - V(\tau_j, \alpha_{j-1})] - \int_a^b DV(\tau,t) + \int_a^b DV(\tau,t) < 2\epsilon + \int_a^b DV(\tau,t).$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, a desigualdade:

$$\left\| \int_a^b DU(\tau,t) \right\| \leq \int_a^b DV(\tau,t)$$

é satisfeita. $\square$

O próximo corolário, que é a Observação 1.37 de (3), será usado na demonstração do Teorema 9, o qual da origem à Desigualdade de Grönwall.

Corolário 4. *Se* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $|f(s)|\le c$ *para todo* $s\in[a,b]$ *em que* c *é uma constante,* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *é de variação limitada em* $[a,b]$ *e a integral* $\int_a^b f(s)dg(s)$ *existe, então:*

$$\left|\int_a^b f(s)dg(s)\right|\le c\operatorname{var}_a^b g.$$

Demonstração. Definamos $U:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ como sendo:

$$U(\tau,t)=f(\tau)g(t).$$

Definamos também $V:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ como sendo:

$$V(\tau,t)=c\operatorname{var}_a^t g.$$

Então, por hipótese, existe a integral $\int_a^b DU(\tau,t)=\int_a^b f(s)dg(s)$. Mostremos que a integral $\int_a^b DV(\tau,t)=\int_a^b cd(\operatorname{var}_a^s g)$ existe e que vale $\int_a^b DV(\tau,t)=c\operatorname{var}_a^b g$. Tomemos $d=(\tau_i,[t_{i-1},t_i])\in TD_{[a,b]}$. Temos, pela Proposição 5, que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{|d|}V(\tau_i,t_i)-V(\tau_i,t_{i-1})&=\sum_{i=1}^{|d|}c\operatorname{var}_a^{t_i} g-c\operatorname{var}_a^{t_{i-1}} g=\\
&=c\left(\sum_{i=1}^{|d|}\operatorname{var}_a^{t_{i-1}} g+\operatorname{var}_{t_{i-1}}^{t_i} g-\operatorname{var}_a^{t_{i-1}} g\right)=c\left(\sum_{i=1}^{|d|}\operatorname{var}_{t_{i-1}}^{t_i} g\right)=\\
&=c\operatorname{var}_{t_0}^{t_{|d|}} g=c\operatorname{var}_a^b g
\end{aligned}$$

donde segue que $\int_a^b DV(\tau,t)=c\operatorname{var}_a^b g$. Notemos que $c\ge|f(a)|\ge 0$. Dados $t,\tau\in[a,b]$, temos duas possibilidades:

- $t\le\tau$: Nesse caso, usando da Proposição 5, temos:

$$\begin{aligned}
&|t-\tau|\,\|U(\tau,t)-U(\tau,\tau)\|=(\tau-t)\,\|f(\tau)g(t)-f(\tau)g(\tau)\|=\\
&=(\tau-t)\,|f(\tau)|\,\|g(t)-g(\tau)\|\le(\tau-t)\,c\operatorname{var}_t^\tau g=(\tau-t)\,c\left(\operatorname{var}_a^\tau g-\operatorname{var}_a^t g\right)=\\
&=(t-\tau)\,c\left(\operatorname{var}_a^t g-\operatorname{var}_a^\tau g\right)=(t-\tau)\left(c\operatorname{var}_a^t g-c\operatorname{var}_a^\tau g\right)=\\
&=(t-\tau)\left(V(\tau,t)-V(\tau,\tau)\right).
\end{aligned}$$

- $\tau\le t$: Nesse caso, usando da Proposição 5, temos:

$$\begin{aligned}
&|t-\tau|\,\|U(\tau,t)-U(\tau,\tau)\|=(t-\tau)\,\|f(\tau)g(t)-f(\tau)g(\tau)\|=\\
&=(t-\tau)\,|f(\tau)|\,\|g(t)-g(\tau)\|\le(t-\tau)\,c\operatorname{var}_\tau^t g=(t-\tau)\,c\left(\operatorname{var}_a^t g-\operatorname{var}_a^\tau g\right)=\\
&=(t-\tau)\left(c\operatorname{var}_a^t g-c\operatorname{var}_a^\tau g\right)=(t-\tau)\left(V(\tau,t)-V(\tau,\tau)\right).
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 8, segue que:

$$\left|\int_a^b f(s)dg(s)\right|=\left\|\int_a^b DU(\tau,t)\right\|\le\int_a^b DV(\tau,t)=c\operatorname{var}_a^b g.$$

□

Usaremos o lema seguinte (Lema 1.38 de (3)) na demonstração do Teorema 9. Esse lema nos dá um resultado que relaciona a primitiva de uma função com a integral de Perron-Stieltjes dessa função.

Lema 5. *Seja $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa e não-decrescente contínua pela esquerda em $(a,b]$. Assuma que $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função contínua não-decrescente com primitiva $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Então a integral $\int_a^b f(h(s))dh(s)$ existe e:*

$$\int_a^b f(h(s))dh(s) \leq F(h(b)) - F(h(a)).$$

Demonstração. Como f e h são não-decrescentes e $h(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$, a composição das funções f e h dada por $f(h(s))$ para $s \in [a,b]$ está bem definida e é não-decrescente. Pelo Corolário 3, a integral $\int_a^b f(h(s))dh(s)$ existe.

Para provar a desigualdade, usaremos do Teorema 3. Seja $\epsilon > 0$ dado. Pela definição de F como primitiva de f, para todo $s \in [0,+\infty)$ existe $\Theta(s) > 0$ tal que para todo ν com $0 \leq |\nu| < \Theta(s)$ temos:

$$|F(s+\nu) - F(s) - f(s)\nu| \leq \epsilon \,|\nu|\,. \tag{2.7}$$

Como $\lim_{t \to \tau^+} h(t) = h(\tau^+)$ para $\tau \in [a,b)$, existe $\delta^+(\tau) > 0$, com $\delta^+(b) = 1$, tal que $t \in (\tau, \tau + \delta^+(\tau)] \cap [a,b]$ implica em:

$$0 \leq h(t) - h(\tau^+) \leq \Theta(h(\tau^+)).$$

Colocando $s = h(\tau^+)$ e $\nu = h(t) - h(\tau^+)$, obtemos:

$$f(h(\tau^+))(h(t) - h(\tau^+)) \leq F(h(t)) - F(h(\tau^+)) + \epsilon(h(t) - h(\tau^+))$$

para $t \in (\tau, \tau + \delta^+(\tau)] \cap [a,b]$. Ainda, temos:

$$f(h(\tau^+))(h(t) - h(\tau^+)) - \Big[F(h(t)) - F(h(\tau^+))\Big] = \int_{h(\tau)}^{h(\tau^+)} [f(h(\tau)) - f(s)]\,ds \leq 0$$

pois $f(h(\tau)) \leq f(s)$ para $s \in [h(\tau), h(\tau^+)]$. Portanto:

$$\begin{aligned} &|f(h(\tau))(h(t) - h(\tau))| = f(h(\tau))(h(t) - h(\tau^+)) + f(h(\tau))(h(\tau^+) - h(\tau)) \leq \\ &\leq f(h(\tau^+))(h(t) - h(\tau^+)) + F(h(\tau^+)) - F(h(\tau)) \leq F(h(t)) - F(h(\tau)) + \epsilon(h(t) - h(\tau)) \end{aligned}$$

desde que $t \in (\tau, \tau + \delta^+(\tau)] \cap [a,b]$. Da desigualdade (2.7) e da continuidade pela esquerda da função h no ponto $\tau \in (a,b]$ existe $\delta^-(\tau) > 0$, com $\delta^-(a) = 1$, tal que para $t \in [\tau - \delta^-(\tau), \tau] \cap [a,b]$ vale a desigualdade:

$$|f(h(\tau))(h(t) - h(\tau))| \leq F(h(\tau)) - F(h(t)) + \epsilon(h(\tau) - h(t)).$$

Tome $\delta(\tau) = \min(\delta^-(\tau), \delta^+(\tau))$ para todo $\tau \in [a,b]$. Então para $\tau \in [a,b]$ e para $t \in [\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)] \cap [a,b]$ obtemos pelas desigualdades anteriores a relação:

$$|t-\tau|\,|f(h(\tau))h(t) - f(h(\tau))h(\tau)| \leq (t-\tau)\left(F(h(t)) + \epsilon h(t) - F(h(\tau)) - \epsilon h(\tau)\right).$$

Pelo corolário 8 essa desigualdade implica em:

$$\int_a^b f(h(s))dh(s) \leq \int_a^b d\left[F(h(s)) + \epsilon h(s)\right] = F(h(b)) - F(h(a)) + \epsilon(h(b) - h(a)).$$

Como a desigualdade anterior vale para todo $\epsilon > 0$, temos:

$$\int_a^b f(h(s))dh(s) \leq F(h(b)) - F(h(a)).$$

$\square$

Provaremos agora o teorema do qual a Desigualdade de Grönwall é consequência direta. Esse resultado é o Teorema 1.40 de (3).

Teorema 9. *Sejam $\psi : [a,b] \to [0,+\infty)$ limitada, $h : [a,b] \to [a,+\infty)$ contínua pela esquerda e não-decrescente. Suponha que a função $\omega : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é contínua, não-decrescente, $\omega(0) = 0$ e $\omega(r) > 0$ para $r > 0$.*

Fixemos $u_0 > 0$ e, para $u > 0$, definamos:

$$\Omega(u) = \int_{u_0}^u \frac{1}{\omega(r)}dr.$$

A função $\Omega : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é crescente, $\Omega(u_0) = 0$, $\lim_{u\to 0^+} \Omega(u) = \alpha \geq -\infty$ e $\lim_{u\to+\infty} \Omega(u) = \beta \leq +\infty$.

Assuma que existe uma constante $k > 0$ tal que a desigualdade:

$$\psi(\xi) \leq k + \int_a^\xi \omega(\psi(\tau))dh(\tau)$$

vale para todo $\xi \in [a,b]$.

Se $\Omega(k) + h(b) - h(a) < \beta$, então para $\xi \in [a,b]$, temos:

$$\psi(\xi) \leq \Omega^{-1}\left(\Omega(k) + h(\xi) - h(a)\right) \tag{2.8}$$

sendo $\Omega^{-1} : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ a função inversa da função Ω.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que Ω está bem definida e que satisfaz as propriedades citadas. Como ω é contínua e $\omega(r) > 0$ para $r > 0$, temos $\omega^{-1} = \dfrac{1}{\omega} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}_+$ bem definida e contínua. Assim, dado $u_0 \in (0,+\infty)$, a continuidade de ω^{-1} garante que a integral:

$$\int_{u_0}^u \frac{1}{\omega(r)}dr$$

existe para todo $u \in (0, +\infty)$, donde Ω está bem definida. Da definição de Ω, sabemos que:

$$\Omega(u_0) = \int_{u_0}^{u_0} \frac{1}{\omega(r)} dr = 0.$$

Ainda, sabemos da análise na reta que Ω é diferenciável e que:

$$\Omega'(u) = \frac{1}{\omega(u)} > 0,$$

donde Ω é crescente. Mostremos que $\lim_{u \to 0^+} \Omega(u) = \alpha > -\infty$ ou $\lim_{u \to 0^+} \Omega(u) = -\infty$. De fato, suponha que Ω seja limitada inferiormente. Nesse caso, existe $\alpha = \inf_{u \in (0,+\infty)} \Omega(u)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\alpha \leq \Omega(\delta) < \alpha + \epsilon.$$

Como Ω é crescente, temos que $0 < u < \delta$ é tal que:

$$\alpha \leq \Omega(u) < \Omega(\delta) < \alpha + \epsilon \Rightarrow |\Omega(u) - \alpha| < \epsilon,$$

donde $\lim_{u \to 0^+} \Omega(u) = \alpha$. Caso Ω não seja limitada inferiormente, dado $A > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\Omega(\delta) < -A$. Como Ω é crescente, temos que $0 < u < \delta$ implica em $\Omega(u) < \Omega(\delta) < -A$, donde segue que $\lim_{u \to 0^+} \Omega(u) = -\infty$. Analogamente, mostremos que $\lim_{u \to +\infty} \Omega(u) = \beta < +\infty$ ou $\lim_{u \to +\infty} \Omega(u) = +\infty$. De fato, se Ω é limitada superiormente, existe $\beta = \sup_{u \in (0,+\infty)} \Omega(u)$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\beta - \epsilon < \Omega(\delta) \leq \beta$. Como Ω é crescente, temos que $u > \delta$ implica em:

$$|\Omega(u) - \beta| < \epsilon,$$

donde $\lim_{u \to +\infty} \Omega(u) = \beta$. Se Ω não é limitado superiormente, então dado $A > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\Omega(\delta) > A$. Como Ω é crescente, temos que $u > \delta$ implica em:

$$\Omega(u) > \Omega(\delta) > A,$$

donde $\lim_{u \to +\infty} \Omega(u) = +\infty$. Portanto, Ω é uma bijeção de $(0, +\infty)$ em (α, β).

Suponha então que existe $l > 0$ tal que $\Omega(l) + h(b) - h(a) < \beta$. Então, dado $\tau \in [a, b]$, temos:

$$\alpha < \Omega(l) \leq \Omega(l) + h(\tau) - h(a) \leq \Omega(l) + h(b) - h(a) < \beta.$$

Portanto, $\Omega(l) + h(\tau) - h(a)$ está no domínio de Ω^{-1} para todo $\tau \in [a, b]$, donde podemos definir $\omega_l : [a, b] \to (0, +\infty)$ dado por:

$$\omega_l(\tau) = \Omega^{-1}\left(\Omega(l) + h(\tau) - h(a)\right)$$

para todo $\tau \in [a, b]$. Definamos também $\varphi : [0, \beta - \Omega(l)) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(s) = \omega\left(\Omega^{-1}\left(\Omega(l) + s\right)\right)$$

para todo $s \in [0, \beta - \Omega(l))$. Mostremos que Ω^{-1} é crescente. Dados $u, t \in (\alpha, \beta)$, com $u < t$, temos:

$$\Omega(\Omega^{-1}(u)) = u < t = \Omega(\Omega^{-1}(t)).$$

Como Ω é crescente, devemos ter $\Omega^{-1}(u) < \Omega^{-1}(t)$. Portanto, Ω^{-1} é crescente. Dados $s \in [0, \beta - \Omega(l))$ e $\epsilon > 0$ tal que $\beta - \Omega(l) - s > \epsilon$, temos:

$$0 < l = \Omega^{-1}(\Omega(l)) \leq \Omega^{-1}(\Omega(l) + s) < \Omega^{-1}(\Omega(l) + (\beta - \Omega(l) - \epsilon)) = \Omega^{-1}(\beta - \epsilon) < +\infty.$$

Assim, $\Omega^{-1}(\Omega(l) + s) \in (0, +\infty)$ para todo $s \in [0, \beta - \Omega(l))$. Portanto, Ω' está definida em $\Omega^{-1}(\Omega(l) + s)$ para todo $s \in [0, \beta - \Omega(l))$ e:

$$\Omega'(\Omega^{-1}(\Omega(l) + s)) = \frac{1}{\omega(\Omega^{-1}(\Omega(l) + s))} \neq 0.$$

Usando a fórmula para a derivada da função inversa, obtemos:

$$\frac{d}{ds}\Big[\omega(\Omega^{-1}(\Omega(l) + s))\Big] = \frac{1}{\Omega'(\Omega^{-1}(\Omega(l) + s))} = \omega(\Omega^{-1}(\Omega(l) + s)) = \varphi(s) \tag{2.9}$$

para $s \in [0, \beta - \Omega(l))$. Se $\xi \in [a, b]$, então pela definição de φ temos:

$$\begin{aligned} \int_a^\xi \omega(\omega_l(\tau))dh(\tau) &= \int_a^\xi \omega(\Omega^{-1}(\Omega(l) + h(\tau) - h(a)))dh(\tau) = \\ &= \int_a^\xi \varphi(h(\tau) - h(a))d(h(\tau) - h(a)). \end{aligned}$$

Usando (2.9) e o Lema 5, temos:

$$\int_a^\xi \omega(\omega_l(\tau))dh(\tau) \leq \Omega^{-1}(\Omega(l) + h(\xi) - h(a)) - \Omega^{-1}(\Omega(l)) = \omega_l(\xi) - l$$

e, consequentemente, para $\xi \in [a, b]$, temos:

$$l + \int_a^\xi \omega(\omega_l(\tau))dh(\tau) \leq \omega_l(\xi).$$

Assuma que $\epsilon_0 > 0$ é tal que $\Omega(k + \epsilon_0) + h(b) - h(a) < \beta$. Seja $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ e defina $l = k + \epsilon$. Nesse caso, a desigualdade acima se torna:

$$k + \epsilon + \int_a^\xi \omega(\omega_{k+\epsilon}(\tau))dh(\tau) \leq \omega_{k+\epsilon}(\xi).$$

Usando a desigualdade (2.8) para cada $\xi \in [a, b]$ obtemos:

$$\psi(\xi) - \omega_{k+\epsilon}(\xi) \leq k + \int_a^\xi \omega(\psi(\tau))dh(\tau) - k - \epsilon - \int_a^\xi \omega(\omega_{k+\epsilon}(\tau))dh(\tau) = \tag{2.10}$$

$$= -\epsilon + \int_a^\xi \left[\omega(\psi(\tau)) - \omega(\omega_{k+\epsilon}(\tau))\right] dh(\tau). \tag{2.11}$$

Então $\psi(a) - \omega_{k+\epsilon}(a) \leq -\epsilon$ e $\omega(\psi(a)) - \omega(\omega_{k+\epsilon}(a)) \leq 0$ pois a função ω é não-decrescente. As funções ψ e $\omega_{k+\epsilon}$ são limitadas e portanto existe uma constante $K > 0$ tal que:

$$|\omega(\psi(\tau)) - \omega(\omega_{k+\epsilon}(\tau))| < K$$

para $\tau \in [a,b]$. Usando o Teorema 5 e o Corolário 4 obtemos:

$$\begin{aligned}\psi(\xi) - \omega_{k+\epsilon}(\xi) \leq -\epsilon + \left[\omega(\psi(a)) - \omega(\omega_{k+\epsilon}(a))\right](h(a^+) - h(a)) + \\ + \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^{\xi} \left[\omega(\psi(\tau)) - \omega(\omega_{k+\epsilon}(\tau))\right] dh(\tau) \leq \\ \leq -\epsilon + K \lim_{\delta\to 0^+} \left[h(\xi) - h(a+\delta)\right] = -\epsilon + K\left[h(\xi) - h(a^+)\right].\end{aligned}$$

Como $\lim_{\xi\to a^+} h(\xi) = h(a^+)$, é possível encontrar $\nu > 0$ tal que, para $\xi \in (a, a+\nu)$, a desigualdade $h(\xi) - h(a^+) < \dfrac{\epsilon}{2K+1}$ vale e portanto:

$$\psi(\xi) - \omega_{k+\epsilon}(\xi) < -\epsilon + \frac{K\epsilon}{2K+1} < -\frac{\epsilon}{2} < 0$$

para $\xi \in (a, a+\nu)$. Definamos:

$$T = \sup\{t \in [a,b] \;\mid\; \psi(\xi) - \omega_{k+\epsilon} < 0 \text{ para } \xi \in [a,t]\}.$$

Pelo que mostramos, $T > a$ e para $\xi \in [a,T)$, as desigualdades $\psi(\xi) - \omega_{k+\epsilon}(\xi) \leq 0$ e $\omega(\psi(\xi)) - \omega(\omega_{k+\epsilon}(\xi)) \leq 0$ valem (sendo esta última devido ao fato de ω ser não decrescente). Pela equação (2.11) e pelo Teorema 5 temos:

$$\begin{aligned}&\psi(T) - \omega_{k+\epsilon}(T) \leq \\ &\leq -\epsilon + \lim_{\delta\to 0^+} \int_a^{T-\delta} \left[\omega(\psi(\tau)) - \omega(\omega_{k+\epsilon}(\tau))\right] dh(\tau) + \\ &+ \left[\omega(\psi(T)) - \omega(\omega_{k+\epsilon}(T))\right](h(T) - h(T^-)) \leq -\epsilon < 0\end{aligned}$$

pois $h(T) - h(T^-) = h(T) - \lim_{\tau\to T^-} h(\tau) = 0$ e:

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_a^{T-\delta} \left[\omega(\psi(\tau)) - \omega(\omega_{k+\epsilon}(\tau))\right] dh(\tau) \leq 0.$$

Se assumirmos que $T < b$, podemos repetir esse processo para $\xi > T$ devido à desigualdade:

$$\psi(\xi) - \omega_{k+\epsilon}(\xi) \leq -\epsilon + \int_T^{\xi} \left[\omega(\psi(\tau)) - \omega(\omega_{k+\epsilon}(\tau))\right] dh(\tau),$$

obtendo então $\psi(\xi) - \omega_{k+\epsilon}(\xi) < 0$ para $\xi \in [T, T+\nu]$ para algum $\nu > 0$. Então $T = b$ e:

$$\psi(\xi) < \omega_{k+\epsilon}(\xi) = \Omega^{-1}(\Omega(k+\epsilon) + h(\xi) - h(a))$$

para $\xi \in [a,b]$. Como a função Ω é contínua e a última desigualdade vale para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, obtemos a desigualdade:

$$\psi(\xi) \leq k + \int_a^{\xi} \omega(\psi(\tau)) dh(\tau).$$

$\square$

Provaremos agora a Desigualdade de Grönwall, que será usada no capítulo 5, durante o estudo do método da média. Esse resultado pode ser encontrado em (3), como o Corolário 1.43.

Corolário 5. *[Desigualdade de Grönwall] Sejam* $\psi : [a,b] \to [0,+\infty)$ *limitada,* $h : [a,b] \to [0,+\infty)$ *não-decrescente e contínua pela esquerda. Suponha que existam* $k > 0, L \geq 0$ *tais que:*

$$\psi(\xi) \leq k + L\int_a^\xi \psi(\tau)dh(\tau)$$

para todo $\xi \in [a,b]$*. Então para todo* $\xi \in [a,b]$ *vale a desigualdade:*

$$\psi(\xi) \leq ke^{L(h(\xi)-h(a))}.$$

Demonstração. Definamos $\omega : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ como sendo $\omega(r) = Lr$ para todo $r \geq 0$. Então ω é contínua, não-decrescente, $\omega(0) = 0$ e $\omega(r) > 0$ para $r > 0$ caso $L > 0$. Caso $L = 0$, temos por hipótese que:

$$\psi(\xi) \leq k + L\int_a^\xi \psi(\tau)dh(\tau) = k = ke^0 = ke^{0(h(\xi)-h(a))} = ke^{L(h(\xi)-h(a))}$$

para todo $\xi \in [a,b]$. Portanto, podemos considerar $L > 0$. Nesse caso, dado $u_0 > 0$, temos:

$$\Omega(u) = \frac{1}{L}\int_{u_0}^u \frac{dr}{r} = \frac{1}{L}(\ln|u| - \ln|u_0|) = \frac{1}{L}\ln\frac{u}{u_0},$$

donde $\Omega^{-1}(u) = u_0e^{Lu}$. Ainda, por hipótese, temos:

$$\psi(\xi) \leq k + L\int_a^\xi \psi(\tau)dh(\tau) = k + \int_a^\xi L\psi(\tau)dh(\tau) = k + \int_a^\xi \omega(\psi(\tau))dh(\tau)$$

para todo $\xi \in [a,b]$. Como a função inversa Ω^{-1} de Ω está definida em $(0,+\infty)$, temos que $\Omega(k) + h(b) - h(a) < \beta = \sup(0,+\infty) = +\infty$, donde pelo Teorema 9:

$$\psi(\xi) \leq \Omega^{-1}(\Omega(k) + h(\xi) - h(a)) = u_0e^{L\left(\frac{1}{L}\ln\frac{k}{u_0} + h(\xi)-h(a)\right)} = u_0e^{\ln\frac{k}{u_0}}e^{L(h(\xi)-h(a))} =$$
$$= ke^{L(h(\xi)-h(a))}$$

para todo $\xi \in [a,b]$. □

2.6 EDOs Generalizadas

Terminamos esse capítulo definindo EDOs generalizadas e apresentando um resultado sobre elas. Mostraremos, mais a frente, que muitos dos problemas de equações funcionais em medida e de equações dinâmicas em escalas podem ser entendidos como problemas de EDOs generalizadas. Usaremos, ainda, de um resultado da existência de solução desse tipo de EDO para mostrar que os problemas em medida e em escalas possuem solução.

Sejam X um espaço de Banach com norma $\|.\|$, $\Omega = \mathcal{O} \times [t_0,+\infty)$, em que $\mathcal{O} \subset X$ é um aberto e $t_0 \geq 0$. Definamos uma EDO generalizada no intervalo $[a,b]$ conforme (1, Definição 4.1).

Definição 11. *Uma função $x : [a, b] \to X$ é chamada de solução da EDO generalizada:*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t) \tag{2.12}$$

no intervalo $[a, b] \subset [t_0, +\infty)$ se $(x(t), t) \in \Omega$ para todo $t \in [a, b]$ e se a igualdade:

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t)$$

vale para todo $s_1, s_2 \in [a, b]$. Ainda, se x é uma solução da EDO generalizada (2.12)*, $x_0 \in X$, $\tau_0 \in [a, b]$ e $x(\tau_0) = x_0$, dizemos que x é solução da EDO generalizada* (2.12) *com condição inicial $x(\tau_0) = x_0$.*

Definição 12. *Dada uma função não-decrescente $h : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dizemos que uma função $F : \Omega \to X$ pertence à classe $\mathcal{F}(\Omega, h)$ se:*

$$\begin{gathered}\|F(x, s_2) - F(x, s_1)\| \leq |h(s_2) - h(s_1)| \;\; e \\ \|F(x, s_2) - F(x, s_1) - F(y, s_2) + F(y, s_1)\| \leq \|x - y\| \, |h(s_2) - h(s_1)|\end{gathered}$$

para todos $(x, s_2), (x, s_1), (y, s_1), (y, s_2) \in \Omega$.

Ainda, sob essas condições sobre F, definamos:

$$\Omega_F = \left\{(x, t) \in \Omega \;\;|\;\; x + \lim_{s \to t^+} [F(x, s)] - F(x, t) \in \mathcal{O}\right\}.$$

Para um par $(x_0, \tau_0) \in \Omega_F$, definimos como S_{τ_0, x_0} o conjunto das funções $x : I_x \subset [t_0, +\infty) \to X$ com I_x sendo um intervalo, $\tau_0 \in I_x$ e x é uma solução em I_x da EDO generalizada (2.12) com condição inicial $x(\tau_0) = x_0$. Dados dois elementos $x, z \in S_{\tau_0, x_0}$, dizemos que x é menor ou igual a z (e denotamos por $x \preceq z$) quando $I_x \subset I_z$ e $z\,|_{I_x} = x$.

Definiremos agora uma solução maximal e o prolongamento de uma solução para a direita (e para a esquerda) da EDO generalizada (2.12), conforme (1, Definição 5.7) e (1, Definição 5.8).

Definição 13 (Prolongamento de uma solução da EDO generalizada (2.12) para a direita)**.** *Sejam $\tau_0 \geq t_0$, $I \subset [t_0, +\infty)$ e $x : I \to X$ uma solução de* (2.12) *no intervalo I, com $\tau_0 = \min I$. Uma solução $y : J \to X$, com $J \subset [t_0, +\infty)$ e $\tau_0 = \min J$, da EDO generalizada* (2.12) *é chamada um prolongamento de x para a direita se $I \subset J$ e $x(t) = y(t)$ para todo $t \in I$. Se $I \subsetneq J$, então y é chamado de prolongamento próprio de x para a direita.*

Definimos o prolongamento de uma solução da EDO generalizada (2.12) para a esquerda de maneira análoga.

Definição 14 (Solução maximal da EDO generalizada (2.12))**.** *Seja $(x_0, \tau_0) \in \Omega_F$. Dizemos que $x : J \to X$ é uma solução maximal para frente (ou apenas solução maximal) da EDO* *generalizada* (2.12)*:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = DF(x,t), \\ x(\tau_0) = x_0, \end{cases}$$

se $x \in S_{\tau_0,x_0}$ *e, para todo* $z : I \to X$ *com* $z \in S_{\tau_0,x_0}$ *e* $x \preceq z$*, tivermos* $x = z$*. Ou seja,* x *é uma solução maximal da EDO generalizada* (2.12) *se* $x \in S_{\tau_0,x_0}$ *e* x *não admite prolongamento próprio pela direita.*

Apresentamos, sem demonstração, o seguinte resultado, que pode ser encontrado em (8, Teorema 2.11).

Teorema 10. *Seja* $F \in \mathcal{F}(\Omega, h)$*, com* $h : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *não-decrescente e contínua pela esquerda. Se* $(x_0, s_0) \in \Omega_F$*, então existe uma única solução maximal* $x : [s_0, \omega(s_0, x_0)) \to X$ *da EDO generalizada* (2.12) *com* $x(s_0) = x_0$*.*

3 ESCALAS TEMPORAIS

3.1 Definição

Estudaremos agora escalas temporais. O intuito desse estudo é o de definir a Δ-integral, a qual busca permitir a integração de funções sobre fechados na reta, sem exigir sua conexidade (isto é, sem exigir que sejam intervalos). Além disso, estabeleceremos uma relação entre a Δ-integral e a integral de Perron-Stieltjes, a qual nos permitirá transitar entre as duas integrais, e que será muito útil na demonstração de muitos resultados. Esse capítulo é baseado em (1) e (9). Nesse capítulo, X denota um espaço de Banach com norma $\|.\|$.

Definamos o que é uma escala temporal e os operadores avanço e recuo, conforme (1, Definição 3.11) e (9, Definição 1.1).

Definição 15. *Uma escala temporal $\mathbb{T}$ é um subconjunto fechado e não vazio de $\mathbb{R}$.*

Definição 16. *Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal. Definimos $\sigma, \rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operadores dados por:*

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s > t\} \text{ e } \rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} \mid s < t\}.$$

Chamamos σ de operador avanço e ρ de operador recuo. Convencionamos $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ e $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$.

Vale notar que, como $\mathbb{T}$ é fechado, $\sigma(t)$ e $\rho(t)$ pertencem a $\mathbb{T}$ para todo $t \in \mathbb{T}$, donde esses operadores estão bem definidos.

Definamos agora o conceito de pontos discretos e densos pela esquerda e pela direita em escalas temporais, conforme feito em (1, Definição 3.12).

Definição 17. *Dado $t \in \mathbb{T}$, dizemos que t é discreto pela direita quando $\sigma(t) > t$ e denso pela direita quando $t \neq \sup \mathbb{T}$ e $\sigma(t) = t$. Analogamente, se $\rho(t) < t$, então t é chamado de discreto pela esquerda e se $t \neq \inf \mathbb{T}$ e $\rho(t) = t$, então t é chamado de denso pela esquerda.*

Vale notar que se $\mathbb{T}$ é limitado inferiormente, então $\inf \mathbb{T}$ não é denso pela esquerda nem discreto pela esquerda. De fato, se $t \in \mathbb{T}$ é denso pela esquerda, então $t \neq \inf \mathbb{T}$. Por outro lado, $\rho(\inf \mathbb{T}) = \sup\{s \in \mathbb{T} \mid s < \inf \mathbb{T}\} = \sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$ (pela convenção estabelecida), donde $\inf \mathbb{T}$ não é discreto pela esquerda. Analogamente, se $\mathbb{T}$ é limitado superiormente, então $\sup \mathbb{T}$ não é denso pela direita nem discreto pela direita.

Definimos a função granulosidade, conforme (1, Definição 3.13).

Definição 18. *A função granulosidade $\mu : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ é definida por:*

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

Estendemos agora a definição de uma função regrada à funções em escalas, conforme definido em (1, Definição 3.14):

Definição 19. *Uma função $f : \mathbb{T} \to X$ é dita ser regrada se seus limites a direita existem em todos os pontos densos pela direita e se seus limites a esquerda existem em todos os pontos densos pela esquerda. O conjunto das funções regradas em $\mathbb{T}$ é denotado por $G(\mathbb{T}, X)$.*

Daremos agora a definição de um intervalo em escalas temporais, a qual será muito utilizada no estudo de funções em escalas.

Definição 20. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \leq b$ e $\mathbb{T}$ uma escala temporal. Se $a, b \in \mathbb{T}$, definimos o intervalo em escalas temporais $[a, b]_{\mathbb{T}}$ como sendo $[a, b]_{\mathbb{T}} = [a, b] \cap \mathbb{T}$.*

Note que, na definição anterior, exigimos que a e b pertencessem a $\mathbb{T}$. Essa condição não é sempre necessária, mas precisaremos dela para garantir a validade de grande parte dos resultados referentes a funções em escalas e a equações dinâmicas em escalas.

Apresentamos agora uma definição que, apesar de não utilizarmos nesse texto, se trata de uma definição clássica que vale ser mencionada. Definimos conforme apresentado em (1, Definição 3.15).

Definição 21. *Uma função $f : \mathbb{T} \to X$ é dita ser rd-contínua se f é regrada em $\mathbb{T}$ e contínua em todos os pontos densos pela direita de $\mathbb{T}$.*

O conjunto de todas as funções rd-contínuas de $\mathbb{T}$ em X é denotado por $C_{rd}(\mathbb{T}, X)$.

Definiremos agora o conceito de Δ-derivada, conforme (1, Definição 3.16), o qual busca estender o conceito de derivada para escalas temporais. Para isso, lembremos que se $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{T}$, dizemos que U é uma vizinhança aberta de t em $\mathbb{T}$ se U é um aberto de $\mathbb{T}$ (isto é, existe $A \subset \mathbb{R}$ aberto tal que $U = A \cap \mathbb{T}$) e $t \in U$.

Definição 22 (Δ-derivada)**.** *Definamos:*

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T}, & \textit{se não existe } m = \max\{t \in \mathbb{T} \;\mid\; t \textit{ é discreto pela esquerda}\}, \\ \mathbb{T} \setminus \{m\}, & \textit{se existe } m = \max\{t \in \mathbb{T} \;\mid\; t \textit{ é discreto pela esquerda}\}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Para $f : \mathbb{T} \to X$ e $t \in \mathbb{T}^k$, definimos $f^{\Delta}(t) \in X$ com a seguinte propriedade:

$$\textit{Para todo } \epsilon > 0, \textit{ existe uma vizinhança aberta } U \textit{ de } t \textit{ em } \mathbb{T} \textit{ tal que a desigualdade:}$$
$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s] \right\| \leq \epsilon \, |\sigma(t) - s|$$
$$\textit{vale para todo } s \in U \textit{ (note que } f^{\Delta} \textit{ pode não existir).}$$

Nesse caso, dizemos que f^{Δ} é a Δ-derivada de f em t e dizemos que f é Δ-diferenciável em t.

Usualmente, em topologia, as noções de vizinhança aberta e de vizinhança são distintas. Entretanto, como toda vizinhança de um ponto contém uma vizinhança aberta deste mesmo ponto (e toda vizinhança aberta de um ponto é uma vizinhança deste ponto), poderíamos, na definição anterior, assumir que U fosse apenas uma vizinhança de t, e teríamos assim uma definição equivalente. Devido a esse fato, usaremos, ao longo do texto, os termos vizinhança e vizinhança aberta como sinônimos, já que nos resultados abordados pode-se adotar um ou outro termo sem que se altere a validade dos resultados.

Mostremos agora que a Δ-derivada, quando existe, é única.

Afirmação 3. *Seja $f : \mathbb{T} \to X$ e $t \in \mathbb{T}^k$. Se $f^{\Delta}(t)$ existe, então ela é única.*

Demonstração. Suponha que f é Δ-diferenciável em t. Sejam $I, I' \in X$ com a propriedade da Δ-derivada. Dado $\epsilon > 0$, existem vizinhanças U, V de t em $\mathbb{T}$ tais que:

$$\|f(\sigma(t)) - f(s) - I\,[\sigma(t) - s]\| \leq \frac{\epsilon}{2}\,|\sigma(t) - s| \text{ para todo } s \in U,$$
$$\|f(\sigma(t)) - f(s) - I'\,[\sigma(t) - s]\| \leq \frac{\epsilon}{2}\,|\sigma(t) - s| \text{ para todo } s \in V.$$

Tomando $s \in U \cap V$ com $s \neq \sigma(t)$ (o que é sempre possível, pois $U \cap V$ é um aberto não-vazio, já que $t \in U \cap V$. Assim, se, $\sigma(t) = t$, então t é denso pela direita e, portanto, $U \cap V$ não consiste de um único ponto. Caso $\sigma(t) > t$, podemos tomar $s = t$), temos:

$$\begin{aligned}
\|I - I'\| &= \|I - I'\| \frac{|\sigma(t) - s|}{|\sigma(t) - s|} = \|I\,|\sigma(t) - s| - I'\,|\sigma(t) - s|\| \frac{1}{|\sigma(t) - s|} = \\
&= \|I\,|\sigma(t) - s| - f(\sigma(t)) - f(s) + f(\sigma(t)) + f(s) - I'\,|\sigma(t) - s|\| \frac{1}{|\sigma(t) - s|} \leq \\
&\leq \frac{\|f(\sigma(t)) - f(s) - I\,[\sigma(t) - s]\| + \|f(\sigma(t)) - f(s) - I'\,[\sigma(t) - s]\|}{|\sigma(t) - s|} \leq \\
&\leq \frac{\frac{\epsilon}{2}\,|\sigma(t) - s| + \frac{\epsilon}{2}\,|\sigma(t) - s|}{|\sigma(t) - s|} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ foi tomado arbitrariamente, segue que $\|I - I'\| = 0$, donde $I = I'$. Assim, a Δ-derivada de f em t, quando existe, é única. □

Provaremos um teorema que auxilia no cálculo da Δ-derivada. Uma versão para f com contradomínio restrito aos reais pode ser encontrada em (9, Teorema 1.16). A demonstração da versão que provaremos é análoga.

Teorema 11. *Sejam $f : \mathbb{T} \to X$ uma função e $t \in \mathbb{T}^k$. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se f é Δ-diferenciável em t, então f é contínua em t.*

2. *Se f é contínua em t e t é discreto pela direita, então f é Δ-diferenciável em t com:*

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

3. *Se t é denso pela direita, então f é Δ-diferenciável em t se, e somente se, existe o limite:*
$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$
Nesse caso, vale que:
$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$

4. *Se f é Δ-diferenciável em t, então:*
$$f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t).$$

Demonstração. 1. Suponha que f é Δ-diferenciável em t. Dado $\epsilon\in(0,1)$, definamos:
$$\epsilon^{*}=\epsilon\frac{1}{1+|f^{\Delta}|+2\mu(t)}.$$
Então:
$$0<\epsilon^{*}=\epsilon\frac{1}{1+|f^{\Delta}|+2\mu(t)}\le\epsilon<1.$$
Donde $\epsilon^{*}\in(0,1)$. Por definição, existe U uma vizinhança de t em $\mathbb{T}$ tal que:
$$\left\|f(\sigma(t))-f(s)-[\sigma(t)-s]\,f^{\Delta}(t)\right\|\le\epsilon^{*}\,|\sigma(t)-s|$$
para todo $s\in U$. Assim, dado $s\in U\cap(t-\epsilon^{*},t+\epsilon^{*})$, temos:
$$\begin{aligned}
&\|f(t)-f(s)\|=\\
&=\left\|\Big(f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)\,[\sigma(t)-s]\Big)-\Big(f(\sigma(t))-f(t)-\mu(t)f^{\Delta}(t)\Big)+(t-s)\,f^{\Delta}(t)\right\|\le\\
&\le\epsilon^{*}\,|\sigma(t)-s|+\epsilon^{*}\mu(t)+|t-s|\left\|f^{\Delta}(t)\right\|\le\epsilon^{*}\,|\sigma(t)-t+t-s|+\epsilon^{*}\mu(t)+\epsilon^{*}\left\|f^{\Delta}(t)\right\|\le\\
&\le\epsilon^{*}\Big(|\sigma(t)-t|+|t-s|+\mu(t)+\left\|f^{\Delta}(t)\right\|\Big)=\epsilon^{*}\Big(\mu(t)+|t-s|+\mu(t)+\left\|f^{\Delta}(t)\right\|\Big)<\\
&<\epsilon^{*}\Big(\epsilon^{*}+\left\|f^{\Delta}(t)\right\|+2\mu(t)\Big)<\epsilon^{*}\Big(1+\left\|f^{\Delta}(t)\right\|+2\mu(t)\Big)=\epsilon.
\end{aligned}$$
Segue que f é contínua em t.

2. Suponha que f é contínua em t e t é discreto pela direita. Pela continuidade de f, temos:
$$\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}.$$
Então, dado $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $|s-t|<\delta$ e $s\in\mathbb{T}$ implica em:
$$\left\|\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}-\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}\right\|<\epsilon.$$
Portanto:
$$\left\|f(\sigma(t))-f(s)-\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}\,[\sigma(t)-s]\right\|\le\epsilon\,|\sigma(t)-s|$$
para todo $s\in(t-\delta,t+\delta)_{\mathbb{T}}$. Assim:
$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}.$$

3. ($\Rightarrow$) Seja f Δ-diferenciável em t, com t denso pela direita. Dado $\epsilon > 0$, como f é Δ-diferenciável em t, existe uma vizinhança U de t em $\mathbb{T}$ tal que:

$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)\left[\sigma(t) - s\right] \right\| \leq \epsilon \left|\sigma(t) - s\right|$$

para todo $s \in U$. Como $\sigma(t) = t$, temos:

$$\left\| f(t) - f(s) - f^{\Delta}(t)(t - s) \right\| \leq \epsilon \left|t - s\right|$$

para todo $s \in U$. Segue que:

$$\left\| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t) \right\| \leq \epsilon$$

para todo $s \in U \setminus \{t\}$. Logo, existe o limite:

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

e vale a igualdade $\lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s} = f^{\Delta}(t)$.

($\Leftarrow$) Se o limite:

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

existe, seja $I = \lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$. Assim, existe uma vizinhança V de t em $\mathbb{T}$ tal que:

$$\left\| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - I \right\| < \epsilon$$

para todo $s \in V \setminus \{t\}$. Em particular, temos:

$$\left\| f(t) - f(s) - I\left[t - s\right] \right\| \leq \epsilon \left|t - s\right|$$

para todo $s \in V$. Como t é denso pela direita, temos $\sigma(t) = t$. Assim, se $s \in V$:

$$\left\| f(\sigma(t)) - f(s) - I\left[\sigma(t) - s\right] \right\| = \left\| f(t) - f(s) - I\left[t - s\right] \right\| \leq \epsilon \left|t - s\right| = \epsilon \left|\sigma(t) - s\right|.$$

Portanto, f é Δ-diferenciável em t e vale que $f^{\Delta}(t) = I = \lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$.

4. Se t é denso pela direita, então $\sigma(t) = t$ e $\mu(t) = 0$, donde:

$$f(\sigma(t)) = f(t) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

Se t é discreto pela direita, então por 2. temos:

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} \Rightarrow f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t).$$

$\square$

Daremos agora alguns exemplos de escalas temporais.

Exemplo 2. Como $\mathbb{Z}$ é discreto, segue que $\mathbb{Z}$ é fechado. Ainda, $\mathbb{Z}$ é não-vazio. Logo, $\mathbb{Z}$ é uma escala temporal.

Exemplo 3. O conjunto $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ é fechado e não-vazio. Portanto, é uma escala temporal.

Exemplo 4. Sabemos da análise na reta que o Conjunto de Cantor é compacto e não-vazio. Em particular, o Conjunto de Cantor é uma escala temporal.

Exemplo 5. $\mathbb{R}$ é uma escala temporal.

Exemplo 6. O conjunto $\left\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \cup \{0\}$ é fechado e não-vazio. Portanto, é uma escala temporal.

3.2 A Δ-Integral de Perron-Stieltjes

Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal. Dizemos que $\delta = (\delta_L, \delta_R) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é um Δ-calibre em $[a,b]_\mathbb{T}$ se $\delta_L(t) > 0$ para todo $t \in (a,b]_\mathbb{T}$, $\delta_R(t) > 0$ para todo $t \in [a,b)_\mathbb{T}$, $\delta_L(a) \geq 0$, $\delta_R(b) \geq 0$ e $\delta_R(t) \geq \mu(t)$ para todo $t \in [a,b)_\mathbb{T}$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $s_i, \tau_i \in \mathbb{T}$ para $i \in \{1,...,n\}$, com $s_i > s_{i-1}$. Se $a = s_0 \leq \tau_1 \leq s_1 \leq ... \leq s_{n-1} \leq \tau_n \leq s_n = b$, dizemos que $d_\mathbb{T} = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]_\mathbb{T}) \mid i \in \{1,...,n\}\} = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ é uma partição marcada de $[a,b]_\mathbb{T}$ e dizemos que $n = |d|$.

Se δ é um Δ-calibre em $[a,b]_\mathbb{T}$, dizemos que $d_\mathbb{T}$ é δ-fina se, para $i \in \{1,...,|d|\}$, tivermos:

$$[s_{i-1}, s_i] \subset [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)].$$

Daremos agora uma definição da Δ-integral mais geral que aquelas apresentadas em (1, Definição 3.17) e (9). A vantagem dessa definição mais geral é a de que, através dela, poderemos apresentar uma versão mais geral do Teorema 12 que aquela apresentada em (1, Teorema 3.22), o qual é o resultado mais importante referente à Δ-integral nesse texto. Com o teorema generalizado, poderemos generalizar a maior parte dos resultados seguintes referentes à escalas temporais.

Definição 23 (Δ-integral de Perron-Stieltjes)**.** *Uma função $f : [a,b]_\mathbb{T} \to X$ (Banach) é dita ser Perron-Stieltjes Δ-integrável com respeito a uma função $g : [a,b]_\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ em $[a,b]_\mathbb{T}$ se existe $I \in X$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe um Δ-calibre δ em $[a,b]_\mathbb{T}$ tal que:*

$$\left\| I - \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(g(s_i) - g(s_{i-1})) \right\| < \epsilon \tag{3.2}$$

para toda partição marcada $d_\mathbb{T} = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i]_\mathbb{T})$ δ-fina de $[a,b]_\mathbb{T}$. Nesse caso, escrevemos $I = \int_a^b f(s)\Delta g(s)$ e I é chamado de Δ-integral de Perron-Stieltjes de f em relação a g.

Devemos fazer duas considerações, semelhantes à que fizemos anteriormente sobre a integral de Kurzweil. Primeiramente, devemos considerar que a integral acima apenas faz sentido se, para todo Δ-calibre δ em $[a,b]_{\mathbb{T}}$, existir uma partição marcada $d_{\mathbb{T}}$ de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ δ-fina. De fato, caso exista um Δ-calibre δ em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ tal que não exista partição marcada $d_{\mathbb{T}}$ de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ δ-fina, então, por definição, todo $I \in X$ é a Δ-integral de f. Entretanto, mesmo que exista uma partição marcada δ-fina para todo Δ-calibre δ, isso ainda não nos garante que a integral é única. Comecemos provando uma segunda versão do Lema de Cousin, a qual será demonstrada usando o Lema 1. Uma outra demonstração pode ser encontrada em (10, Lema 1.9).

Lema 6 (Lema de Cousin)**.** *Dado um Δ-calibre δ em $[a,b]_{\mathbb{T}}$, existe uma partição marcada $d_{\mathbb{T}}$ de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ δ-fina.*

Demonstração. Primeiro, notemos que $[a,b]_{\mathbb{T}}$ é compacto. Definamos $\widetilde{\delta} : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\widetilde{\delta}(t) = \begin{cases} \delta_R(a), \text{ se } t = a, \\ \min\{\delta_L(t), \delta_R(t)\}, \text{ se } t \in (a,b)_{\mathbb{T}}, \\ \delta_L(b), \text{ se } t = b. \end{cases}$$

Como δ é um Δ-calibre, temos $\delta_R(a), \delta_L(b) > 0$ e $\delta_L(t), \delta_R(t) > 0$ para todo $t \in (a,b)_{\mathbb{T}}$. Portanto, $\widetilde{\delta}(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$. Considere então a cobertura aberta $\bigcup_{\tau \in [a,b]_{\mathbb{T}}} B(\tau, \widetilde{\delta}(\tau))$. Pelo Lema 1, existem $\{\tau_1, ..., \tau_n\} \subset [a,b]_{\mathbb{T}}$ tal que as condições do Lema 1 valem. Construiremos uma partição marcada $d_{\mathbb{T}}$. Façamos $a = x_0$. Dado $i \in \{1, ..., n-1\}$, suponha que $x_{i-1} \leq \tau_i$ e que $x_{i-1} \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)]$ (note que $a = x_0 \in B(\tau_1, \widetilde{\delta}(\tau_1))$ pelo Lema 1 e que $a = x_0 \leq \tau_1$). Se $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [a,b]_{\mathbb{T}} \neq \emptyset$, mostremos que existe $x_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}}$. Suponha que $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}} = \emptyset$. Então $\tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i) < \tau_{i+1}$. De fato, se $\tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i) \geq \tau_{i+1} > \tau_i$, então $\tau_{i+1} \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}}$ (uma vez que $\tau_{i+1} \in \mathbb{T}$). Analogamente, $\tau_i < \tau_{i+1} - \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})$, pois $\tau_i \geq \tau_{i+1} - \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})$ implica em $\tau_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}}$. Note que, como $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \supset B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [a,b]_{\mathbb{T}} \neq \emptyset$, devemos ter $\inf B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] = \tau_{i+1} - \widetilde{\delta}(\tau_{i+1}) \leq \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i) = \sup B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)]$, pois, do contrário, seguiria que $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] = \emptyset$. Assim:

$$\begin{aligned} B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [a,b]_{\mathbb{T}} &\subset (-\infty, \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap [\tau_{i+1} - \widetilde{\delta}(\tau_{i+1}), +\infty) \cap [a,b]_{\mathbb{T}} \subset \\ &\subset [\tau_{i+1} - \widetilde{\delta}(\tau_{i+1}), \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap [a,b]_{\mathbb{T}} \subset \\ &\subset [\tau_i, \tau_{i+1}] \cap [a,b]_{\mathbb{T}} = [\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}}. \end{aligned}$$

Como existe $x_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [a,b]_{\mathbb{T}}$, temos que existe $x_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}}$ tal que $x_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})]$, ou seja:

$$x_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}}$$

o que contradiz $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}} = \emptyset$. Portanto, existe $x_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}}$. Caso $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap (\tau_i, \tau_{i+1})_{\mathbb{T}} \neq \emptyset$, tomamos $x_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap (\tau_i, \tau_{i+1})_{\mathbb{T}}$ e adicionamos o elemento $(\tau_i, [x_{i-1}, x_i]_{\mathbb{T}})$ à partição. Nesse caso, $x_{i-1} \leq \tau_i < x_i < \tau_{i+1}$. Caso $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap (\tau_i, \tau_{i+1})_{\mathbb{T}} = \emptyset$ e $\tau_{i+1} \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}}$, tomamos $x_i = \tau_{i+1}$ e adicionamos o elemento $(\tau_i, [x_{i-1}, x_i]_{\mathbb{T}})$ à partição. Note que $x_{i-1} \leq \tau_i < x_i = \tau_{i+1}$. Por fim, caso $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap (\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}} = \emptyset$, temos $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}} = \{\tau_i\}$. Nesse caso, fazemos $x_i = \tau_i$ e adicionamos o elemento $(\tau_i, [x_{i-1}, x_i]_{\mathbb{T}})$ à partição. Note que $x_{i-1} \leq \tau_i = x_i < \tau_{i+1}$ e $x_i = \tau_i \in B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})]$. Portanto, em todos os casos em que $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [a, b]_{\mathbb{T}} \neq \emptyset$, temos $x_{i-1} \leq \tau_i \leq x_i \leq \tau_{i+1}$ e $x_i \in B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})]$.

Se $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [a, b]_{\mathbb{T}} = \emptyset$, então $B(\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)) \cap B(\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})) \cap [a, b]_{\mathbb{T}} = \emptyset$ e pelo Lema 1 temos que $B(\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i))$ e $B(\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1}))$ não possuem pontos na mesma componente conexa de $[a, b]_{\mathbb{T}}$. Analisaremos o conjunto $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap [a, b]_{\mathbb{T}}$. Primeiramente, $\tau_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap [a, b]_{\mathbb{T}}$, donde $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap [a, b]_{\mathbb{T}} \neq \emptyset$. Ainda $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap [a, b]_{\mathbb{T}} \subset B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)]$, donde $B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap [a, b]_{\mathbb{T}}$ é limitado. Assim, $y_i = \sup B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap [a, b]_{\mathbb{T}}$ está bem definido. Note que $y_i \geq \tau_i$ e $y_i \leq \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)$, donde $y_i = \tau_i + \delta_i$, com $0 \leq \delta_i \leq \widetilde{\delta}(\tau_i)$. Suponha que $\delta_i = \widetilde{\delta}(\tau_i)$. Como $y_i \notin B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [a, b]_{\mathbb{T}}$ e $y_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap [a, b]_{\mathbb{T}}$ (pois esse conjunto é fechado), temos $y_i \notin B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})]$. Sabemos que existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $y_i \in B(\tau_j, \widetilde{\delta}(\tau_j))$. Note que qualquer aberto contendo y_i intersecta $B(\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i))$. Pelo item 2 do Lema 1, devemos ter $j \in \{i-1, i+1\}$. Como $j \neq i+1$, devemos ter $j = i-1$ e:

$$y_i = \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i) < \tau_{i-1} + \widetilde{\delta}(\tau_{i-1}) \Rightarrow 0 < \tau_i - \tau_{i-1} < \widetilde{\delta}(\tau_{i-1}) - \widetilde{\delta}(\tau_i) \Rightarrow \widetilde{\delta}(\tau_i) < \widetilde{\delta}(\tau_{i-1}).$$

Assim, $\tau_{i-1} - \widetilde{\delta}(\tau_{i-1}) < \tau_i - \widetilde{\delta}(\tau_i)$, donde $B(\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)) \subset B(\tau_{i-1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i-1}))$, o que é um absurdo. Portanto, $y_i = \tau_i + \delta_i$ com $0 \leq \delta_i < \widetilde{\delta}(\tau_i)$. Notemos que y_i é discreto pela direita (pois $(y_i, \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap [a, b]_{\mathbb{T}} = \emptyset$ pela definição de y_i e $y_i < \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)$, o que implica em $\sigma(y_i) > \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)$) e que $\delta_R(y_i) \geq \mu(y_i)$, donde $y_i + \delta_R(y_i) \geq \sigma(y_i) > y_i$. Mostremos que $\sigma(y_i) \in B(\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1}))$. Como $\sigma(y_i) \in [a, b]_{\mathbb{T}}$, existe $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $\sigma(y_i) \in B(\tau_j, \widetilde{\delta}(\tau_j))$. Ainda, como $\sigma(y_i) > \sup B(\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)) \geq \sup B(\tau_k, \widetilde{\delta}(\tau_k))$ para todo $k \in \{1, ..., i-1\}$, temos que $\sigma(y_i) \in B(\tau_j, \widetilde{\delta}(\tau_j))$ com $j \in \{i+1, ..., n\}$. Note que, como $\tau_{i+1} > y_i$ (do contrário, teríamos $\tau_{i+1} \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [a, b]_{\mathbb{T}} = \emptyset$, o que é um absurdo) e $\tau_{i+1} \in [a, b]_{\mathbb{T}}$, temos $\sigma(\tau_i) \leq \tau_{i+1}$. Caso $\sigma(y_i) \notin B(\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1}))$, temos $\sigma(y_i) \leq \inf B(\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})) \leq \inf B(\tau_j, \widetilde{\delta}(\tau_j))$ para $j > i+1$, o que é um absurdo, pois nesse caso $\sigma(y_i) \notin B(\tau_j, \widetilde{\delta}(\tau_j))$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$. Logo, $\sigma(y_i) \in B(\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1}))$. Fazemos $x_i = \sigma(y_i)$ e adicionamos os elementos $(\tau_i, [x_{i-1}, y_i]_{\mathbb{T}})$ e $(y_i, [y_i, x_i]_{\mathbb{T}})$ à partição. Note que $x_{i-1} \leq \tau_i < y_i < x_i \leq \tau_{i+1}$ e que $x_i \in B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})]$.

Progredindo dessa forma, e fazendo $b = x_n$ e adicionando o elemento $(\tau_n, [x_{n-1}, x_n]_{\mathbb{T}})$ à partição, como o conjunto $\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$ é finito, obtemos um conjunto $d_{\mathbb{T}}$. Sabemos que

$\tau_i \leq x_i \leq \tau_{i+1}$ para todo $i \in \{1, ..., n-1\}$ e que $x_{i-1} \leq \tau_i < y_i < x_i$ (para todos os índices para os quais y_i existe). Ainda, sabemos que $x_{i-1} \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)]$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Portanto, para que $d_{\mathbb{T}}$ seja partição marcada de $[a, b]_{\mathbb{T}}$, devemos ter $x_{i-1} < x_i$ para todo $i \in \{0, ..., n\}$. Suponha que exista $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ tal que $x_i = x_{i+1}$. Então devemos ter $x_i = \tau_{i+1} = x_{i+1}$ (note que a igualdade $x_i = x_{i+1}$ não pode ocorrer caso i seja um índice para o qual y_i está definido). Retiramos o elemento $(\tau_i, [x_i, x_{i+1}]_{\mathbb{T}})$ da partição, retiramos τ_i e x_{i+1} dos conjuntos $\{\tau_1, ..., \tau_n\}$ e $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ e reindexamos os elementos (isto é, fazemos $x'_{i+k} = x_{i+k+1}$ e $\tau'_{i+k} = \tau_{i+k+1}$ para todo $k \in \{1, ..., n-1-i\}$). Note que, após essa remoção, obtemos uma partição marcada $d_{\mathbb{T}}$ de $[a, b]_{\mathbb{T}}$. Mostremos agora que $d_{\mathbb{T}}$ é δ-fina. De fato, um elemento de $d_{\mathbb{T}}$ é da forma $(\tau_i, [x_{i-1}, x_i]_{\mathbb{T}})$, $(\tau_i, [x_{i-1}, y_i]_{\mathbb{T}})$ ou $(y_i, [y_i, x_i]_{\mathbb{T}})$.

- Caso o elemento seja da forma $(\tau_i, [x_{i-1}, x_i]_{\mathbb{T}})$: Nesse caso, $x_{i-1} \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)]$ e $x_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap B[\tau_{i+1}, \widetilde{\delta}(\tau_{i+1})] \cap [\tau_i, \tau_{i+1}]_{\mathbb{T}}$.
  - Se $\tau_i = a$, então $x_{i-1} = a \in [a - \delta_L(a), a + \delta_R(a)] = [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$ e $x_i \in [\tau_i, \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)] = [\tau_i, \tau_i + \delta_R(\tau_i)] \subset [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$. Pela conexidade de $[\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$, temos:
  $$[x_{i-1}, x_i] \subset [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)] .$$
  - Se $\tau_i = b$, então $x_i = b \in [b - \delta_L(b), b + \delta_R(b)] = [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$ e $x_{i-1} \in [\tau_i - \widetilde{\delta}(\tau_i), \tau_i] = [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i] \subset [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$. Pela conexidade de $[\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$, temos:
  $$[x_{i-1}, x_i] \subset [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)] .$$
  - Se $\tau_i \notin \{a, b\}$, então $x_{i-1}, x_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] = B[\tau_i, \min\{\delta_L(\tau_i), \delta_R(\tau_i)\}] \subset [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$. Pela conexidade de $[\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$, temos:
  $$[x_{i-1}, x_i] \subset [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)] .$$
- Caso o elemento seja da forma $(\tau_i, [x_{i-1}, y_i]_{\mathbb{T}})$: Nesse caso, deve existir $\tau_{i+1} > \tau_i$, donde $\tau_i \neq b$. Ainda, $x_{i-1} \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)]$ e $y_i = \sup B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] \cap [a, b]_{\mathbb{T}}$ (que é fechado), donde $y_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)]$.
  - Se $\tau_i = a$, então $x_{i-1} = a \in [a - \delta_L(a), a + \delta_R(a)] = [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$ e $y_i \in [\tau_i, \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)] = [\tau_i, \tau_i + \delta_R(\tau_i)] \subset [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$. Pela conexidade de $[\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$, temos:
  $$[x_{i-1}, y_i] \subset [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)] .$$
  - Se $\tau_i \notin \{a, b\}$, então $x_{i-1}, y_i \in B[\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)] = B[\tau_i, \min\{\delta_L(\tau_i), \delta_R(\tau_i)\}] \subset [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$. Pela conexidade de $[\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)]$, temos:
  $$[x_{i-1}, y_i] \subset [\tau_i - \delta_L(\tau_i), \tau_i + \delta_R(\tau_i)] .$$

- Caso o elemento seja da forma $(y_i, [y_i, x_i]_{\mathbb{T}})$: Nesse caso, como $x_i = \sigma(y_i)$ e y_i é discreto pela direita, temos $y_i < x_i = \sigma(y_i) = y_i + \mu(y_i) \leq y_i + \delta_R(y_i)$, donde $x_i \in [y_i - \delta_L(y_i), y_i + \delta_R(y_i)]$. Ainda, $y_i \in [y_i - \delta_L(y_i), y_i + \delta_R(y_i)]$. Pela conexidade de $[y_i - \delta_L(y_i), y_i + \delta_R(y_i)]$, temos:

$$[y_i, x_i] \subset [y_i - \delta_L(y_i), y_i + \delta_R(y_i)]\,.$$

Portanto, $d_{\mathbb{T}}$ é uma partição marcada δ-fina de $[a, b]_{\mathbb{T}}$. $\square$

Note que o lema acima é mais geral que a versão anterior. De fato, usaremos a versão que acabamos de provar do Lema de Cousin para mostrar a primeira versão do Lema de Cousin (Lema 2). Dado um calibre δ em $[a, b]$, definamos $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ e $\delta' = \left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right) : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (isto é, $\delta'_L = \delta'_R = \frac{\delta}{2}$, sendo que $\frac{\delta}{2}(t) = \frac{\delta(t)}{2}$ para todo $t \in [a, b]$). Então $[a, b]_{\mathbb{T}} = [a, b]$, $\delta'_L(t) = \delta'_R(t) = \frac{\delta(t)}{2} > 0$ para todo $t \in [a, b] = [a, b]_{\mathbb{T}}$ e $\delta'_R(t) > 0 = \mu(t)$ para todo $t \in [a, b] = [a, b]_{\mathbb{T}}$, donde δ' é um Δ-calibre em $[a, b]_{\mathbb{T}}$. Pela segunda versão do Lema de Cousin, existe uma partição marcada $d_{\mathbb{T}} = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i]_{\mathbb{T}}) = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ de $[a, b]_{\mathbb{T}} = [a, b]$ δ'-fina (isto é, $d_{\mathbb{T}}$ é partição marcada de $[a, b]$ δ'-fina). Mostremos agora que $d_{\mathbb{T}}$ é δ-fina. Dado $i \in \{1, ..., |d|\}$, como $d_{\mathbb{T}}$ é δ'-fina, temos:

$$[s_{i-1}, s_i] \subset [\tau_i - \delta'_L(\tau_i), \tau_i + \delta'_R(\tau_i)] = \left[\tau_i - \frac{\delta(\tau_i)}{2}, \tau_i + \frac{\delta(\tau_i)}{2}\right] = B\left[\tau_i, \frac{\delta(\tau_i)}{2}\right] \subset B(\tau_i, \delta(\tau_i)),$$

donde $d_{\mathbb{T}}$ é uma partição marcada δ-fina de $[a, b]$. Portanto, mostramos que, dado um calibre δ em $[a, b]$, existe uma partição marcada $d_{\mathbb{T}}$ de $[a, b]$ tal que $d_{\mathbb{T}}$ é δ-fina (isto é, mostramos a primeira forma do Lema de Cousin).

Mostremos agora que, quando a Δ-integral de Perron-Stieltjes existe, ela é única. Para isso, usaremos a seguinte afirmação:

Afirmação 4. *Se δ_1, δ_2 são Δ-calibres em $[a, b]_{\mathbb{T}}$, então $\delta = (\min\{\delta_{1_L}, \delta_{2_L}\}, \min\{\delta_{1_R}, \delta_{2_R}\})$ (que denotaremos como $\min\{\delta_1, \delta_2\}$) é um Δ-calibre em $[a, b]_{\mathbb{T}}$. Ainda, se $d_{\mathbb{T}}$ é uma partição marcada δ-fina de $[a, b]_{\mathbb{T}}$, então $d_{\mathbb{T}}$ é δ_1-fina e δ_2-fina.*

Demonstração. Como $\delta_{1_L}(t), \delta_{2_L}(t) > 0$ para todo $t \in (a, b]_{\mathbb{T}}$, temos $\min\{\delta_{1_L}, \delta_{2_L}\} = \delta_L(t) > 0$ para todo $t \in (a, b]_{\mathbb{T}}$. Analogamente, $\delta_{1_R}(t), \delta_{2_R}(t) > 0$ para todo $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$, implica em $\min\{\delta_{1_R}, \delta_{2_R}\} = \delta_R(t) > 0$ para todo $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$. Ainda, temos que $\delta_{1_L}(a), \delta_{1_R}(b), \delta_{2_L}(a), \delta_{2_R}(b) \geq 0$ e $\delta_{1_R}(t), \delta_{2_R}(t) \geq \mu(t)$ para todo $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$, donde $\delta_L(a) = \min\{\delta_{1_L}(a), \delta_{2_L}(a)\} \geq 0, \delta_R(b) = \min\{\delta_{1_R}(b), \delta_{2_R}(b)\} \geq 0$ e $\min\{\delta_{1_R}(t), \delta_{2_R}(t)\} = \delta_R(t) \geq \mu(t)$ para todo $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$. Portanto, δ é um Δ-calibre em $[a, b]_{\mathbb{T}}$.

Seja $d_{\mathbb{T}} = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i]_{\mathbb{T}})$ uma partição marcada δ-fina de $[a, b]_{\mathbb{T}}$. Então, dado $i \in \{1, 2, ..., |d|\}$, temos:

$$\tau_i - \delta_{1_L}(\tau_i), \tau_i - \delta_{2_L}(\tau_i) \leq \tau_i - \delta_L(\tau_i) \leq s_{i-1} < s_i < \tau_i + \delta_R(\tau_i) \leq \tau_i + \delta_{1_R}(\tau_i), \tau_i + \delta_{2_R}(\tau_i),$$

donde $d_{\mathbb{T}}$ é δ_1-fina e δ_2-fina. $\square$

Sejam $I, I' \in X$ Δ-integrais de Perron-Stieltjes de uma função $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to X$ (Banach) em relação a $g : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$. Dado $\epsilon > 0$, existem δ_1, δ_2 Δ-calibres sobre $[a,b]_{\mathbb{T}}$ tais que:

$$\left\| I - \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(g(s_i) - g(s_{i-1})) \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

para toda partição marcada $d_{\mathbb{T}}$ de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ δ_1-fina e:

$$\left\| I' - \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(g(s_i) - g(s_{i-1})) \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

para toda partição marcada $d_{\mathbb{T}}$ de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ δ_2-fina. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pela afirmação anterior, δ é um Δ-calibre sobre $[a,b]_{\mathbb{T}}$, donde, pelo Lema de Cousin, existe uma partição marcada $d_{\mathbb{T}}$ de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ δ-fina. Assim:

$$\|I - I'\| \leq \left\| I - \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(g(s_i) - g(s_{i-1})) \right\| + \left\| I' - \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(g(s_i) - g(s_{i-1})) \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

donde $I = I'$ e a integral é única.

3.3 A Δ-Integral de Perron-Stieltjes e a Integral de Perron-Stieltjes

Seja $\mathbb{T}$ uma escala temporal. Definimos $\mathbb{T}^*$ a escala temporal extendida como sendo:

$$\mathbb{T}^* = \begin{cases} (-\infty, \sup \mathbb{T}], \text{ se } \sup \mathbb{T} < +\infty, \\ \qquad \mathbb{R}, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Definimos o operador $* : \begin{array}{ccc} \mathbb{T}^* & \to & \mathbb{T} \\ t & \mapsto & t^* \end{array}$, sendo $t^* = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\}$. Note que, como $t \in \mathbb{T}^*$, temos $t \leq \sup \mathbb{T}$. Caso $\sup \mathbb{T} < +\infty$, segue que $\sup \mathbb{T} \in \mathbb{T}$, donde $\sup \mathbb{T} \in \{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\}$. Caso $\sup \mathbb{T} = +\infty$, pela definição do supremo existe $u \in \mathbb{T}$ tal que $u \geq t$, donde $u \in \{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\}$. Em ambos os casos, vale que $\{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\} \neq \emptyset$.

Note ainda que, como $\{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\}$ é limitado inferiormente por t, temos que o ínfimo desse conjunto existe. Por fim, como $\{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\} = \mathbb{T} \cap [t, +\infty)$ e $\mathbb{T}$ é fechado, temos $\{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\}$ fechado, donde $t^* = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\} \in \{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\} \subset \mathbb{T}$, isto é, $t^* \in \mathbb{T}$. Portanto, o operador $*$ está bem definido.

Dada $f : \mathbb{T} \to X$, definimos $f^* : \mathbb{T}^* \to X$ como:

$$f^*(t) = f(t^*) \text{ para todo } t \in \mathbb{T}^*.$$

Analogamente, para $f : X \times \mathbb{T} \to X$, definimos $f^* : X \times \mathbb{T}^* \to X$ como:

$$f^*(x,t) = f(x,t^*) \text{ para todos } x \in X, t \in \mathbb{T}^*.$$

O seguinte lema, o qual é uma versão mais geral de (1, Lema 3.20) e (11, Lema 4), nos dá o motivo de interesse dessas extensões.

Lema 7. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $f : \mathbb{T} \to X$ uma função e $f^* : \mathbb{T}^* \to X$ como definida acima. Temos:*

1. *Se f é não-decrescente, então f^* é não-decrescente.*

2. *Se f é regrada, então f^* é regrada.*

3. *Se f é contínua pela esquerda, então f^* é contínua pela esquerda.*

4. *Se f é contínua pela direita, então f^* é contínua pela direita em pontos densos pela direita de $\mathbb{T}$.*

Demonstração. Primeiramente, provaremos o item 1. Sejam $s, t \in \mathbb{T}^*$ com $s \leq t$. Então, como $\{u \in \mathbb{T} \mid u \geq t\} \subset \{u \in \mathbb{T} \mid u \geq s\}$, temos $s^* = \inf\{u \in \mathbb{T} \mid u \geq s\} \leq \inf\{u \in \mathbb{T} \mid u \geq t\} = t^*$. Assim, $f^*(s) = f(s^*) \leq f(t^*) = f^*(t)$.

Para provarmos os demais itens, estudaremos os limites $\lim\limits_{t \to t_0^-} f^*(t)$ e $\lim\limits_{t \to t_0^+} f^*(t)$ com $t_0 \in \mathbb{T}^*$.

Comecemos por $\lim\limits_{t \to t_0^-} f^*(t)$. Se $t_0 \in \mathbb{T}$ e t_0 é denso pela esquerda, seja $(t_n) \subset \mathbb{T}^* \cap (-\infty, t_0)$ com $t_n \to t_0$. Então, como $t_0 \in \mathbb{T}$ e $t_n \leq t_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $t_n \leq t_n^* \leq t_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema do confronto, temos $t_n^* \to t_0$. Assim, se $\lim\limits_{t \to t_0^-} f(t)$ existe, temos:

$$\lim f^*(t_n) = \lim f(t_n^*) = \lim_{t \to t_0^-} f(t).$$

Portanto, $\lim\limits_{t \to t_0^-} f^*(t)$ existe e vale:

$$\lim_{t \to t_0^-} f^*(t) = \lim_{t \to t_0^-} f(t).$$

Caso $t_0 \in \mathbb{T}$ e t_0 seja discreto pela esquerda, existe $\epsilon > 0$ tal que $(t_0 - \epsilon, t_0) \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Assim:

$$f^*(t_0) = f(t_0^*) = f(t_0) = \lim_{t \to t_0^-} f(t^*) = \lim_{t \to t_0^-} f^*(t).$$

Caso $t_0 \notin \mathbb{T}$, temos $\lim\limits_{t \to t_0^-} f^*(t) = \lim\limits_{t \to t_0^-} f(t^*) = f(t_0^*) = f^*(t_0)$.

Estudemos agora $\lim\limits_{t \to t_0^+} f^*(t)$, para $t_0 \in \mathbb{T}^*$ e $t_0 < \sup \mathbb{T} = \sup \mathbb{T}^*$. Se $t_0 \in \mathbb{T}$ e t_0 é denso pela direita, seja $(t_n) \subset \mathbb{T}^* \cap (t_0, +\infty)$ com $t_n \to t_0$. Então, como t_0 é denso pela direita, existe uma sequência monótona decrescente $(y_n) \subset \mathbb{T} \cap (t_0, +\infty)$ com $y_n \to t_0$. Dado $\epsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 < y_m < t_0 + \epsilon$. Como $t_n \to t_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$n > n_0$ implica em $t_0 < t_n < y_m$, donde $t_0 < t_n^* \leq y_m < t_0 + \epsilon$, uma vez que $y_m \in \mathbb{T}$. Com isso, vemos que $t_n^* \to t_0$. Portanto, caso exista $\lim\limits_{t \to t_0^+} f(t)$, segue que:

$$\lim_{t \to t_0^*} f(t) = \lim f(t_n^*) = \lim f^*(t_n).$$

Donde existe $\lim\limits_{t \to t_0^+} f^*(t)$ e vale:

$$\lim_{t \to t_0^+} f^*(t) = \lim_{t \to t_0^+} f(t).$$

Caso $t_0 \in \mathbb{T}$ e t_0 seja discreto pela direita, existe $\epsilon > 0$ tal que $(t_0, t_0 + \epsilon) \cap \mathbb{T} = \emptyset$, donde $\lim\limits_{t \to t_0^+} f^*(t) = \lim\limits_{t \to t_0^+} f(t^*) = \lim\limits_{t \to t_0^+} f(\sigma(t_0)) = f(\sigma(t_0))$, uma vez que, se $t \in (t_0, t_0 + \epsilon)$, então $t_0^* = \sigma(t_0) \leq t^* \leq \sigma(t_0)$ (por definição de σ e t^*), donde $t^* = \sigma(t_0)$.

Por fim, caso $t_0 \notin \mathbb{T}$, temos $\lim\limits_{t \to t_0^+} f^*(t) = \lim\limits_{t \to t_0^+} f(t^*) = f(t_0^*) = f^*(t_0)$. □

Provaremos agora o resultado mais importante desse capítulo. Ele nos permite conectar a integral de Perron-Stieltjes com a Δ-integral de Perron-Stieltjes, o que nos permite generalizar diversos resultados da primeira integral para a última. Além disso, esse resultado nos permitirá conectar problemas de equações funcionais com problemas de equações dinâmicas em escalas, relacionando suas soluções. Uma demonstração de um caso particular desse teorema pode ser encontrada em (1, Teorema 3.22) e (12). A demonstração aqui apresentada é análoga.

Teorema 12. *Sejam $a, b \in \mathbb{T}$, $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to X$ e $g : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ funções. Então a Δ-integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b f(s)\Delta g(s)$ existe se, e somente se, a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b f^*(s)dg^*(s)$ existe. Ainda, no caso da existência, vale a igualdade $\int_a^b f(s)\Delta g(s) = \int_a^b f^*(s)dg^*(s)$.*

Demonstração. Para simplificar a notação, dada $d = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i]) \in TD_{[a,b]}$, definamos:

$$S(f, g, d) = \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(g(s_i) - g(s_{i-1})).$$

($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, existe um Δ-calibre $\delta = (\delta_L, \delta_R)$ em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ tal que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(g(s_i) - g(s_{i-1})) - \int_a^b f(s)\Delta g(s) \right\| < \epsilon$$

para toda partição marcada $d = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i]_{\mathbb{T}})$ de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ δ-fina. Considere $\widetilde{\delta} : [a,b] \to (0, +\infty)$ dado por:

$$\widetilde{\delta}(t) = \begin{cases} \min(\delta_L(t), \sup\{m \mid t + m \in [a,b]_{\mathbb{T}}, m \leq \delta_R(t)\}), \text{ se } t \in (a,b) \cap \mathbb{T}, \\ \sup\{m \mid a + m \in [a,b]_{\mathbb{T}}, m \leq \delta_R(a)\}, \text{ se } t = a, \\ \delta_L(b), \text{ se } t = b, \\ \frac{1}{2} \inf\{|t - s| \mid s \in \mathbb{T}\}, \text{ se } t \in [a,b] \setminus \mathbb{T}. \end{cases}$$

Mostremos que $\widetilde{\delta}$ está bem definido (e, portanto, é um calibre). Se $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$, temos $\delta_R(t) > 0$. Caso t seja denso pela direita, existe $m > 0$ tal que $t + m \in [a,b]_{\mathbb{T}}$ e $m \leq \delta_R(t)$, donde $\{m \mid t+m \in [a,b]_{\mathbb{T}}, m \leq \delta_R(t)\} \neq \emptyset$ e é limitado superiormente por $t + \delta_R(t)$. Consequentemente, existe $\sup\{m \mid t+m \in [a,b]_{\mathbb{T}}, m \leq \delta_R(t)\} > 0$. Como $\delta_L(t) > 0$ para $t \in (a,b)_{\mathbb{T}}$, temos $0 < \min(\delta_L(t), \sup\{m \mid t+m \in [a,b]_{\mathbb{T}}, m \leq \delta_R(t)\}) = \widetilde{\delta}(t)$.

Caso t seja discreto pela direita, temos:

1. $\sigma(t) > t \Rightarrow \sigma(t) - t > 0$.

2. $\sigma(t) = t + \sigma(t) - t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$. De fato, $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ (pela definição de sigma e pelo fato de $\mathbb{T}$ ser fechado) e $t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$, donde $t < b$. Como $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s > t\}$ e $b \in \mathbb{T}$ com $t < b$, temos $b \in \{s \in \mathbb{T} \mid s > t\}$. Assim, $a \leq t < \sigma(t) \leq b$, o que implica em $\sigma(t) \in [a,b] \cap \mathbb{T} = [a,b]_{\mathbb{T}}$.

3. $\delta_R(t) \geq \mu(t) = \sigma(t) - t$.

Portanto, $\sigma(t) - t \in \{m \mid t+m \in [a,b]_{\mathbb{T}}, m \leq \delta_R(t)\}$, donde $\{m \mid t+m \in [a,b]_{\mathbb{T}}, m \leq \delta_R(t)\} \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio limitado superiormente por $\delta_R(t)$. Assim, existe $a_t = \sup\{m \mid t+m \in [a,b]_{\mathbb{T}}, m \leq \delta_R(t)\}$. Como $\sigma(t) - t \in \{m \mid t+m \in [a,b]_{\mathbb{T}}, m \leq \delta_R(t)\}$, segue que $a_t \geq \sigma(t) - t > 0$. Dessa forma, dado que $\delta_L(t) > 0$ para todo $t \in (a,b)_{\mathbb{T}}$, temos $\widetilde{\delta}(t) = \min\{\delta_L(t), a_t\} > 0$.

Caso $t = a$, temos $\widetilde{\delta}(t) = \widetilde{\delta}(a) = \sup\{m \mid a+m \in [a,b]_{\mathbb{T}}, m \leq \delta_R(a)\} > 0$, pelas considerações anteriores.

Caso $t = b$, temos $\widetilde{\delta}(t) = \widetilde{\delta}(b) = \delta_L(b) > 0$, pois $\delta_L(t) > 0$ para todo $t \in (a,b]_{\mathbb{T}}$.

Por fim, se $t \in [a,b] \setminus \mathbb{T} = C_{\mathbb{T}} \cap [a,b] = C_{\mathbb{T}} \cap (a,b)$ (pois $a, b \in \mathbb{T}$), existe $\delta_t > 0$ tal que $B(t, \delta_t) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ (uma vez que $C_{\mathbb{T}} \cap (a,b)$ é aberto, já que (a,b) é aberto e, como $\mathbb{T}$ é fechado, $C_{\mathbb{T}}$ também é aberto). Assim, $s \in \mathbb{T}$ implica em $s \notin B(t, \delta_t)$, donde $|t - s| \geq \delta_t$. Como $\mathbb{T} \neq \emptyset$, temos que $\{|t-s| \mid s \in \mathbb{T}\} \neq \emptyset$ e que $\{|t-s| \mid s \in \mathbb{T}\}$ é limitado inferiormente por δ_t, donde $\inf\{|t-s| \mid s \in \mathbb{T}\} = b_t$ existe e $b_t \geq \delta_t > 0$. Assim, $\widetilde{\delta}(t) = \dfrac{b_t}{2} \geq \dfrac{\delta_t}{2} > 0$.

Portanto, $\widetilde{\delta}$ é calibre. Seja $d = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ uma partição marcada $\widetilde{\delta}$-fina de $[a,b]$. Temos duas possibilidades:

1. $\tau_i \in \mathbb{T}$.

2. $[s_{i-1}, s_i] \cap \mathbb{T} = \emptyset$.

De fato, se $\tau_i \notin \mathbb{T}$, então $\tau_i \in [a,b] \setminus \mathbb{T} = [a,b] \setminus [a,b]_{\mathbb{T}}$, donde $[s_{i-1}, s_i] \subset B(\tau_i, \widetilde{\delta}(\tau_i)) = B\left(\tau_i, \dfrac{1}{2}\inf\{|\tau_i - s| \mid s \in \mathbb{T}\}\right)$. Assim:

$$|\tau_i - s_i|, |\tau_i - s_{i-1}| < \frac{1}{2}\inf\{|\tau_i - s| \mid s \in \mathbb{T}\} < \inf\{|\tau_i - s| \mid s \in \mathbb{T}\}.$$

Primeiramente, note que $|\tau_i - k| < \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\}$ implica em $k \notin \mathbb{T}$, pois, caso contrário, teríamos $|\tau_i - k| < \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\} \leq |\tau_i - k|$, um absurdo. Ainda, seja $x \in [s_{i-1}, s_i] = [s_{i-1}, \tau_i] \cup [\tau_i, s_i]$. Caso $x \in [s_{i-1}, \tau_i]$, temos:

$$\begin{aligned}|\tau_i - x| = \tau_i - x \leq \tau_i - s_{i-1} = |\tau_i - s_{i-1}| \leq \max\{|\tau_i - s_{i-1}|, |\tau_i - s_i|\} < \\ < \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\}.\end{aligned}$$

Caso $x \in [\tau_i, s_i]$, temos:

$$|\tau_i - x| = x - \tau_i \leq s_i - \tau_i = |\tau_i - s_i| \leq \max\{|\tau_i - s_{i-1}|, |\tau_i - s_i|\} < \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\}.$$

Portanto, $|\tau_i - x| < \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\}$ para todo $x \in [s_{i-1}, s_i]$, donde $x \notin \mathbb{T}$ para todo $x \in [s_{i-1}, s_i]$. Assim, $[s_{i-1}, s_i] \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

Com isso, construiremos uma partição $\widetilde{d} = (\widetilde{\tau}_i, [\widetilde{s_{i-1}}, \widetilde{s}_i]_{\mathbb{T}})$ de $[a, b]_{\mathbb{T}}$.

Primeiramente, notemos que $s_0 = a \in \mathbb{T}$. Se $[s_{i-1}, s_i]$ é um intervalo da partição e $s_{i-1} \in \mathbb{T}$, então $\tau_i \in \mathbb{T}$ pelas observações anteriores. Caso $s_i \in \mathbb{T}$, fazemos $\widetilde{\tau}_j = \tau_i, \widetilde{s}_{j-1} = s_{i-1}$ e $\widetilde{s}_j = s_i$ (para o índice j de acordo com a numeração da partição). Note que, nesse caso, $f\left(\widetilde{\tau}_j\right)\left(g\left(\widetilde{s}_j\right) - g\left(\widetilde{s}_{j-1}\right)\right) = f\left(\widetilde{\tau}_j^*\right)\left(g\left(\widetilde{s}_j^*\right) - g\left(\widetilde{s}_{j-1}^*\right)\right) = f^*\left(\widetilde{\tau}_j\right)\left(g^*(\widetilde{s}_j) - g^*(\widetilde{s}_{j-1})\right) = f^*(\tau_i)\left(g^*(s_i) - g^*(s_{i-1})\right)$. Caso $s_i \notin \mathbb{T}$, fazemos $\widetilde{s}_{j-1} = s_{i-1}, \widetilde{\tau}_j = \tau_i$ e $\widetilde{s}_j = s_i^* \in \mathbb{T}$. Note que $s_i^* \leq b$ e $s_i^* \in [s_{k-1}, s_k]$ para algum k. Com isso:

$$\begin{aligned}\sum_{l=i}^{k-1} f^*(\tau_l)(g^*(s_l) - g^*(s_{l-1})) &= \sum_{l=i}^{k-1} f(\tau_l^*)(g(s_l^*) - g(s_{l-1}^*)) = \\ &= f(\tau_i^*)(g(s_i^*) - g(s_{i-1}^*)) + \sum_{l=i+1}^{k-1} f(\tau_l^*)(g(s_l^*) - g(s_{l-1}^*)) = \\ &= f(\widetilde{\tau}_j^*)(g(\widetilde{s}_j) - g(\widetilde{s}_{j-1}^*)) + \sum_{l=i+1}^{k-1} f(\tau_l^*)(g(s_l^*) - g(s_{l-1}^*)) = \\ &= f(\widetilde{\tau}_j)(g(\widetilde{s}_j) - g(\widetilde{s}_{j-1})) + \sum_{l=i+1}^{k-1} f(\tau_l^*)(g(s_l^*) - g(s_{l-1}^*)) = \\ &= f(\widetilde{\tau}_j)(g(\widetilde{s}_j) - g(\widetilde{s}_{j-1}))\end{aligned}$$

pois, para $l \in \{i+1, i+2, ..., k-1\}$, temos $s_i^* \geq s_{k-1} \geq s_l > s_{l-1} \geq s_i$, donde $s_l^*, s_{l-1}^* = s_i^*$ e $g(s_l^*) - g(s_{l-1}^*) = g(s_i^*) - g(s_i^*) = 0$. Note que $s_i^* \in [s_{k-1}, s_k] \cap \mathbb{T}$. Assim, $[s_{k-1}, s_k] \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$. Logo, $\tau_k \in \mathbb{T}$ e $\tau_k \geq s_i^* = \widetilde{s}_j$. Podemos assumir que $s_i^* < s_k$ caso $s_k \neq b$. De fato, se $s_i^* = s_k$, temos $\sum_{l=i}^{k} f^*(\tau_l)(g^*(s_l) - g^*(s_{l-1})) = f(\widetilde{\tau}_j)(g(\widetilde{s}_j) - g(\widetilde{s}_{j-1})) + f(\tau_k^*)(g(s_k^*) - g(s_{k-1}^*)) = f(\widetilde{\tau}_j)(g(\widetilde{s}_j) - g(\widetilde{s}_{j-1}))$, pois $s_k^* = s_k = s_i^* > s_{k-1} \geq s_i$, donde $s_{k-1}^* = s_k^*$ e $g(s_k^*) - g(s_{k-1}^*) = g(s_{k-1}^*) - g(s_{k-1}^*) = 0$. Caso $s_k = b$, terminamos a partição. Caso $s_k \neq b$, temos $s_i^* \in [s_k, s_{k+1}]$, com $s_i^* = s_k < s_{k+1}$ e $\tau_{k+1} \in \mathbb{T}$, pois $s_k \in \mathbb{T}$. Assim, supondo $s_i^* < s_k$, temos $\widetilde{s}_j = s_i^*, \widetilde{\tau}_{j+1} = \tau_k \in \mathbb{T}$ e repetimos o processo anterior para determinar $\widetilde{s}_{j+1}$. Dessa forma, obtemos uma partição $\widetilde{d} = (\widetilde{\tau}_j, [\widetilde{s}_{j-1}, \widetilde{s}_j]_{\mathbb{T}})$ de $[a, b]_{\mathbb{T}}$ tal que $S(f^*, g^*, d) = S(f, g, \widetilde{d})$

(note que, para o caso $s_i^* \in [s_{k-1}, s_k)$, temos $f(\widetilde{\tau}_j)(g(\widetilde{s}_j)-g(\widetilde{s}_{j-1})) = f(\tau_k^*)(g(\widetilde{s}_j)-g(\widetilde{s}_{j-1}))$ e $\widetilde{s}_j = s_k^*$ [uma vez que $\widetilde{s}_j = s_k^*$ caso $s_k \notin \mathbb{T}$ e $\widetilde{s}_j = s_k = s_k^*$ caso $s_k \in \mathbb{T}$] e $s_i \leq s_{k-1} \leq s_i^*$, donde $s_{k-1}^* = s_i^* = \widetilde{s}_{j-1}$ e, consequentemente, $f(\tau_k^*)(g(\widetilde{s}_j) - g(\widetilde{s}_{j-1})) = f(\tau_k^*)(g(s_k^*) - g(s_{k-1}^*)) = f^*(\tau_k)(g^*(s_k) - g^*(s_{k-1})))$.

Vamos agora mostrar que $\widetilde{d}$ é δ-fina. Seja $(\widetilde{\tau}_i, [\widetilde{s}_{i-1}, \widetilde{s}_i]_{\mathbb{T}})$ um elemento da partição $\widetilde{d}$. Pela construção de $\widetilde{d}$, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\tau}_i = \tau_k$ e $s_{k-1} \leq \widetilde{s}_{i-1} \leq \tau_k$, donde $\widetilde{\tau}_i - \delta_L(\widetilde{\tau}_i) = \tau_k - \delta_L(\tau_k) < s_{k-1} \leq \widetilde{s}_{i-1}$. Seja $L_i = \sup([a, \widetilde{\tau}_i + \delta_R(\widetilde{\tau}_i)] \cap [a,b]_{\mathbb{T}})$. Note que $a \in [a, \widetilde{\tau}_i + \delta_R(\widetilde{\tau}_i)] \cap [a,b]_{\mathbb{T}}$, donde $[a, \widetilde{\tau}_i + \delta_R(\widetilde{\tau}_i)] \cap [a,b]_{\mathbb{T}} \neq \emptyset$ e $[a, \widetilde{\tau}_i + \delta_R(\widetilde{\tau}_i)] \cap [a,b]_{\mathbb{T}}$ é limitado superiormente por $\widetilde{\tau}_i + \delta_R(\widetilde{\tau}_i)$. Assim, existe $L_i = \sup([a, \widetilde{\tau}_i + \delta_R(\widetilde{\tau}_i)] \cap [a,b]_{\mathbb{T}})$. Como $[a, \widetilde{\tau}_i + \delta_R(\widetilde{\tau}_i)]$ e $[a,b]_{\mathbb{T}}$ são fechados, $[a, \widetilde{\tau}_i + \delta_R(\widetilde{\tau}_i)] \cap [a,b]_{\mathbb{T}}$ é fechado. Portanto, $L_i \in [a, \widetilde{\tau}_i + \delta_R(\widetilde{\tau}_i)] \cap [a,b]_{\mathbb{T}}$. Como d é $\widetilde{\delta}$-fina, temos $s_k \leq \widetilde{\tau}_i + \widetilde{\delta}(\widetilde{\tau}_i) \leq \widetilde{\tau}_i + \sup\{m \mid \widetilde{\tau}_i + m \in [a,b]_{\mathbb{T}}, m \leq \delta_R(\widetilde{\tau}_i)\} = L_i$.

Caso $s_k \in \mathbb{T}$, temos $\widetilde{s}_i = s_k^* = s_k \leq L_i$.

Caso $s_k \notin \mathbb{T}$, temos $\widetilde{s}_i = s_k^* \leq L_i$, pois $L_i \in \mathbb{T}$ e $s_k^* = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s \geq s_k\}$ e $L_i \geq s_k$.

Assim, $\widetilde{s}_i \leq L_i \leq \widetilde{\tau}_i + \delta_R(\widetilde{\tau}_i)$. Logo, $\widetilde{\tau}_i - \delta_L(\widetilde{\tau}_i) \leq \widetilde{s}_{i-1} \leq \widetilde{\tau}_i \leq \widetilde{s}_i \leq \widetilde{\tau}_i + \delta_R(\widetilde{\tau}_i)$, donde $\widetilde{d}$ é δ-fina e $S(f, g, \widetilde{d}) = S(f^*, g^*, d)$. Portanto:

$$\left\| S(f^*, g^*, d) - \int_a^b f(t)\Delta g(t) \right\| = \left\| S(f, g, \widetilde{d}) - \int_a^b f(t)\Delta g(t) \right\| < \epsilon.$$

Dessa forma, para todo $\epsilon > 0$, existe $\widetilde{\delta}$ calibre em $[a,b]$ tal que, se d é uma partição marcada de $[a,b]$ $\widetilde{\delta}$-fina, então:

$$\left\| S(f^*, g^*, d) - \int_a^b f(t)\Delta g(t) \right\| < \epsilon.$$

Consequentemente, a integral $\displaystyle\int_a^b f^*(s)dg^*(s)$ existe e vale:

$$\int_a^b f^*(s)dg^*(s) = \int_a^b f(t)\Delta g(t).$$

$(\Leftarrow)$ Suponha que a integral de Perron-Stieltjes $\displaystyle\int_a^b f^*(t)dg^*(t)$ existe. Então, dado $\epsilon > 0$, existe um calibre $\widetilde{\delta} : [a,b] \to (0, +\infty)$ tal que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f^*(\tau_i)(g^*(s_i) - g^*(s_{i-1})) - \int_a^b f^*(t)dg^*(t) \right\| < \epsilon$$

para toda partição marcada d de $[a,b]$ $\widetilde{\delta}$-fina. Definiremos um Δ-calibre $\delta = (\delta_L, \delta_R)$ em $[a,b]_{\mathbb{T}}$ como sendo:

$$\delta_L(t) = \widetilde{\delta}(t) \text{ e } \delta_R(t) = \max\{\widetilde{\delta}(t), \mu(t)\} \text{ para todo } t \in [a,b]_{\mathbb{T}}.$$

Seja $\hat{d}_{\mathbb{T}} = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i]_{\mathbb{T}})$ uma partição marcada de $[a,b]_{\mathbb{T}}$ δ-fina. Notemos que $s_0, \tau_i, s_i \in \mathbb{T}$ para todo $i \in \{1, ..., \left|\hat{d}\right|\}$ e que $\hat{d}_{\mathbb{T}}$ não é, necessariamente, $\widetilde{\delta}$-fina, pois caso $\mu(\tau_i) > \widetilde{\delta}(\tau_i)$, podemos ter $\delta_R(\tau_i) + \tau_i = \tau_i + \mu(\tau_i) \geq s_i > \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)$. Caso contrário, segue que $s_i \leq \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)$. Portanto, a situação acima pode ocorrer apenas se τ_i é discreto pela direita e, como $s_i \in \mathbb{T}, s_i > \tau_i$, temos $s_i \geq \sigma(\tau_i)$. Se tivéssemos $s_i > \sigma(\tau_i)$, teríamos $s_i > \tau_i + \mu(\tau_i) = \tau_i + \delta(\tau_i)$, o que não ocorre. Assim, a situação em questão ocorre apenas se τ_i é discreto pela direita e $s_i = \sigma(\tau_i)$. Construiremos uma partição marcada $d' = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ de $[a,b]$ $\widetilde{\delta}$-fina tal que $S(f, g, \hat{d}_{\mathbb{T}}) = S(f^*, g^*, d')$. Como $\hat{d}_{\mathbb{T}}$ é δ-fina, temos:

$$\tau_i - \widetilde{\delta}(\tau_i) = \tau_i - \delta_L(\tau_i) \leq s_{i-1} < s_i \leq \tau_i + \delta_R(\tau_i) \text{ para todo } i \in \{1, ..., \left|\hat{d}_{\mathbb{T}}\right|\}.$$

Caso $\delta_R(\tau_i) = \widetilde{\delta}(\tau_i)$, adicionamos o elemento $(\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ na partição. Caso contrário, temos $s_{i-1} \leq \tau_i < \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i) < s_i$. Dividamos $[s_{i-1}, s_i]$ nos intervalos $[s_{i-1}, \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)]$ e $[\tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i), s_i]$. Adicionemos o elemento $(\tau_i, [s_{i-1}, \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)])$ à partição d' (note que $\tau_i - \widetilde{\delta}(\tau_i) \leq s_{i-1} \leq \tau_i < \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i) \leq \tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)$). Utilizando o Lema de Cousin, sabemos que existe uma partição marcada $\widetilde{d}_i$ de $[\tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i), s_i]$ $\widetilde{\delta}$-fina. Adicionando $\widetilde{d}_i$ à d' e repetindo esse processo para todo $i \in \left\{1, ..., \left|\hat{d}_{\mathbb{T}}\right|\right\}$, obtemos uma partição marcada d' $\widetilde{\delta}$-fina de $[a,b]$. Por fim, seja $i \in \left\{1, ..., \left|\hat{d}_{\mathbb{T}}\right|\right\}$ tal que $\delta_R(\tau_i) \neq \widetilde{\delta}(\tau_i)$. Então, como $s_i = \sigma(\tau_i)$, temos:

$$\begin{aligned}
&f^*(\tau_i)(g^*(\tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i)) - g^*(s_{i-1})) + \sum_{l=1}^{\left|\widetilde{d}_i\right|} f^*(\tau_l^i)(g^*(s_l^i) - g^*(s_{l-1}^i)) = \\
&= f(\tau_i^*)(g((\tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i))^*) - g(s_{i-1}^*)) + \sum_{l=1}^{\left|\widetilde{d}_i\right|} f((\tau_l^i)^*)(g((s_l^i)^*) - g((s_{l-1}^i)^*)) = \\
&= f(\tau_i^*)(g(s_i^*) - g(s_{i-1}^*)) + \sum_{l=1}^{\left|\widetilde{d}_i\right|} f((\tau_l^i)^*)(g(s_i) - g(s_i)) = \\
&= f(\tau_i^*)(g(s_i^*) - g(s_{i-1}^*)) = f(\tau_i)(g(s_i) - g(s_{i-1}))
\end{aligned}$$

pois $\tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i), s_{l-1}^i, s_l^i \in (\tau_i, s_i]$ para todo $l \in \left\{1, ..., \left|\widetilde{d}_i\right|\right\}$, donde $(\tau_i + \widetilde{\delta}(\tau_i))^* = (s_{l-1}^i)^* = (s_l^i)^* = s_i = s_i^*$ para todo $l \in \left\{1, ..., \left|\widetilde{d}_i\right|\right\}$ (já que $s_i = \sigma(\tau_i)$). Portanto, a soma de Riemann sobre os intervalos $[s_{i-1}, s_i]$ não foi alterada, donde $S(f^*, g^*, d') = S(f, g, \hat{d}_{\mathbb{T}}) = \sum_{i=1}^{\left|\hat{d}_{\mathbb{T}}\right|} f^*(\tau_i)(g^*(s_i) - g^*(s_{i-1})) = \sum_{i=1}^{\left|\hat{d}_{\mathbb{T}}\right|} f(\tau_i^*)(g(s_i^*) - g(s_{i-1}^*)) = \sum_{i=1}^{\left|\hat{d}_{\mathbb{T}}\right|} f(\tau_i)(g(s_i) - g(s_{i-1}))$. Portanto:

$$\left\| \sum_{i=1}^{\left|\hat{d}_{\mathbb{T}}\right|} f(\tau_i)(g(s_i) - g(s_{i-1})) - \int_a^b f^*(t) dg^*(t) \right\| = \left\| S(f, g, \hat{d}_{\mathbb{T}}) - \int_a^b f^*(t) dg^*(t) \right\| =$$

$$= \left\| S(f^*, g^*, d') - \int_a^b f^*(t) dg^*(t) \right\| < \epsilon,$$

donde a integral $\int_a^b f(t)\Delta g(t)$ existe e vale a igualdade $\int_a^b f(t)\Delta g(t) = \int_a^b f^*(t)dg^*(t)$. $\square$

Mostremos agora uma utilidade do teorema anterior.

Teorema 13. *[Aditividade em Intervalos Adjacentes] Sejam $f : [a,b]_{\mathbb{T}} \to X$ e $g : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ funções e $c \in [a,b]_{\mathbb{T}}$. Então, a Δ-integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b f(s)\Delta g(s)$ existe se, e somente se, as integrais $\int_a^c f(s)\Delta g(s)$ e $\int_c^b f(s)\Delta g(s)$ existem. Nesse caso:*

$$\int_a^b f(s)\Delta g(s) = \int_a^c f(s)\Delta g(s) + \int_c^b f(s)\Delta g(s).$$

Demonstração. Se a integral $\int_a^b f(s)\Delta g(s)$ existe, pelo Teorema 12 existe a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b f^*(s)dg^*(s)$ e vale a igualdade:

$$\int_a^b f^*(s)dg^*(s) = \int_a^b f(s)\Delta g(s).$$

Pelo Teorema 4, existem as integrais $\int_a^c f^*(s)dg^*(s)$ e $\int_c^b f^*(s)dg^*(s)$ e vale que:

$$\int_a^b f^*(s)dg^*(s) = \int_a^c f^*(s)dg^*(s) + \int_c^b f^*(s)dg^*(s).$$

Usando novamente o Teorema 12, existem as integrais $\int_a^c f(s)\Delta g(s)$ e $\int_c^b f(s)\Delta g(s)$ e valem as igualdades:

$$\int_a^c f^*(s)dg^*(s) = \int_a^c f(s)\Delta g(s),$$
$$\int_c^b f^*(s)dg^*(s) = \int_c^b f(s)\Delta g(s).$$

Portanto:

$$\int_a^b f(s)\Delta g(s) = \int_a^c f(s)\Delta g(s) + \int_c^b f(s)\Delta g(s).$$

Analogamente, se existem as integrais $\int_a^c f(s)\Delta g(s)$ e $\int_c^b f(s)\Delta g(s)$, pelo Teorema 12, temos que existem as integrais $\int_a^c f^*(s)dg^*(s)$ e $\int_c^b f^*(s)dg^*(s)$ e vale que:

$$\int_a^c f^*(s)dg^*(s) = \int_a^c f(s)\Delta g(s),$$
$$\int_c^b f^*(s)dg^*(s) = \int_c^b f(s)\Delta g(s).$$

Pelo Teorema 4, vale que a integral $\int_a^b f^*(s)dg^*(s)$ existe e:

$$\int_a^b f^*(s)dg^*(s) = \int_a^c f^*(s)dg^*(s) + \int_c^b f^*(s)dg^*(s).$$

Pelo Teorema 12, temos que a Δ-integral $\int_a^b f(s)\Delta g(s)$ existe e vale que:

$$\int_a^b f^*(s)dg^*(s) = \int_a^b f(s)\Delta g(s).$$

Portanto:

$$\int_a^b f(s)\Delta g(s) = \int_a^c f(s)\Delta g(s) + \int_c^b f(s)\Delta g(s).$$

□

Usando o mesmo método usado na demonstração anterior, podemos generalizar muitos resultados da integral de Perron-Stieltjes para a Δ-integral de Perron-Stieltjes (isto é, transformamos a Δ-integral em uma integral de Perron-Stieltjes com o Teorema 12, aplicamos o teorema para a integral de Perron-Stieltjes e voltamos para a Δ-integral com o Teorema 12). Daqui em diante, provaremos resultados para integrais de Perron-Stieltjes da forma $\int_a^b f^*(s)dg^*(s)$. Vale notar que, pelo Teorema 12, esses resultados valem também para a Δ-integral. Em particular, o próximo lema é uma versão mais geral de (1, Lema 3.23) e pode ser encontrado também em (12) e (13).

Lema 8. *Sejam $a, b \in \mathbb{T}, a \leq b$ e $g : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$. Se $f : [a, b] \to X$ é tal que a integral de Perron-Stieltjes $\int_a^b f(s)dg^*(s)$ existe, então para todo $c, d \in [a, b]$:*

$$\int_c^d f(s)dg^*(s) = \int_{c^*}^{d^*} f(s)dg^*(s).$$

Demonstração. Caso $a = b$, o resultado segue trivialmente, pois:

$$\int_c^d f(s)dg^*(s) = 0 = \int_{c^*}^{d^*} f(s)dg^*(s).$$

Suponha então $a < b$. Como g^* é constante em $[c, c^*]$ e em $[d, d^*]$, temos:

$$\int_c^{c^*} f(s)dg^*(s) = \int_d^{d^*} f(s)dg^*(s) = 0.$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\int_c^d f(s)dg^*(s) &= \int_c^{c^*} f(s)dg^*(s) + \int_{c^*}^d f(s)dg^*(s) = \\
&= \int_c^{c^*} f(s)dg^*(s) + \int_{c^*}^d f(s)dg^*(s) + \int_d^{d^*} f(s)dg^*(s) = \\
&= \int_c^{c^*} f(s)dg^*(s) + \int_{c^*}^{d^*} f(s)dg^*(s) = \int_{c^*}^{d^*} f(s)dg^*(s).
\end{aligned}$$

□

O próximo resultado nos diz que uma integral de Perron-Stieltjes da forma $\int_a^b f(s)dg^*(s)$ não depende dos valores de f nos pontos fora da escala temporal. Um caso particular desse resultado pode ser encontrado em (1, Teorema 3.24), (12) e (13).

Teorema 14. *Sejam* $\mathbb{T}$ *uma escala temporal,* $[a,b] \subset \mathbb{T}^*$ *e uma função* $g : [a,b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$. *Considere funções* $f_1, f_2 : [a,b] \to X$ *tais que* $f_1(t) = f_2(t)$ *para todo* $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$. *Se a integral de Perron-Stieltjes* $\int_a^b f_1(s)dg^*(s)$ *existe, então a integral de Perron-Stieltjes* $\int_a^b f_2(s)dg^*(s)$ *também existe e ambas as integrais coincidem.*

Demonstração. Seja $I = \int_a^b f_1(s)dg^*(s)$. Dado $\epsilon > 0$, existe um calibre $\delta_1 : [a,b] \to (0,+\infty)$ tal que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f_1(\tau_i) \left[g^*(s_i) - g^*(s_{i-1}) \right] - I \right\| < \epsilon$$

para toda partição $d = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ δ_1-fina de $[a,b]$. Definamos:

$$\delta_2(t) = \begin{cases} \delta_1(t), \text{ se } t \in [a,b] \cap \mathbb{T}, \\ \min\left\{ \delta_1(t), \dfrac{1}{2} \inf\{|t-s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\} \right\}, \text{ se } t \in [a,b] \setminus \mathbb{T}. \end{cases}$$

Mostremos que δ_2 é de fato um calibre. Se $t \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, temos $\delta_2(t) = \delta_1(t) > 0$. Se $t \in [a,b] \setminus \mathbb{T} = C_{\mathbb{T}} \cap [a,b] = C_{\mathbb{T}} \cap (a,b)$ (pois $a, b \in \mathbb{T}$), existe $\delta_t > 0$ tal que $B(t, \delta_t) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ (uma vez que $C_{\mathbb{T}} \cap (a,b)$ é aberto, já que (a,b) é aberto e, como $\mathbb{T}$ é fechado, $C_{\mathbb{T}}$ também é aberto). Assim, $s \in \mathbb{T}$ implica em $s \notin B(t, \delta_t)$, donde $|t-s| \geq \delta_t$. Como $\mathbb{T} \neq \emptyset$, temos que $\{|t-s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\} \neq \emptyset$ e que $\{|t-s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\}$ é limitado inferiormente por δ_t, donde $\inf\{|t-s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\} = b_t$ existe e $b_t \geq \delta_t > 0$. Assim, como $\delta_1(t) > 0$, temos $\delta_2(t) = \min\left\{ \delta_1(t), \frac{1}{2} \inf\{|t-s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\} \right\} > 0$. Portanto, δ_2 é calibre. Notemos que, como $\delta_2(t) \leq \delta_1(t)$ para todo $t \in [a,b]$, se d é uma partição δ_2-fina então d é δ_1-fina.

Seja $d = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ uma partição marcada δ_2-fina de $[a,b]$. Dado $i \in \{1, ..., |d|\}$, há duas possibilidades:

1. $\tau_i \in \mathbb{T}$.

2. $[s_{i-1}, s_i] \cap \mathbb{T} = \emptyset$.

De fato, se $\tau_i \notin \mathbb{T}$, então $\tau_i \in [a,b] \setminus \mathbb{T} = [a,b] \setminus [a,b]_{\mathbb{T}}$, donde $[s_{i-1}, s_i] \subset B(\tau_i, \delta_2(\tau_i)) \subset B\left(\tau_i, \frac{1}{2} \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\}\right)$. Assim:

$$|\tau_i - s_i|, |\tau_i - s_{i-1}| < \frac{1}{2} \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\} < \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\}.$$

Primeiramente, note que $|\tau_i - k| < \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\}$ implica em $k \notin \mathbb{T}$, pois, caso contrário, teríamos $|\tau_i - k| < \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\} \leq |\tau_i - k|$, um absurdo. Ainda, seja $x \in [s_{i-1}, s_i] = [s_{i-1}, \tau_i] \cup [\tau_i, s_i]$. Caso $x \in [s_{i-1}, \tau_i]$, temos:

$$|\tau_i - x| = \tau_i - x \leq \tau_i - s_{i-1} = |\tau_i - s_{i-1}| \leq \max\{|\tau_i - s_{i-1}|, |\tau_i - s_i|\} <$$
$$< \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\}.$$

Caso $x \in [\tau_i, s_i]$, temos:

$|\tau_i - x| = x - \tau_i \leq s_i - \tau_i = |\tau_i - s_i| \leq \max\{|\tau_i - s_{i-1}|, |\tau_i - s_i|\} < \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\}$.

Portanto, $|\tau_i - x| < \inf\{|\tau_i - s| \ \mid \ s \in \mathbb{T}\}$ para todo $x \in [s_{i-1}, s_i]$, donde $x \notin \mathbb{T}$ para todo $x \in [s_{i-1}, s_i]$. Assim, $[s_{i-1}, s_i] \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$.

Com isso, dado $i \in \{1, ..., |d|\}$, se $[s_{i-1}, s_i] \cap \mathbb{T} = \emptyset$, então $g^*(s_{i-1}) = g(s_{i-1}^*) = g(s_i^*) = g^*(s_i)$, pois $s_{i-1}^* = \inf\{s \in \mathbb{T} \ \mid \ s \geq s_{i-1}\} = \inf\{s \in \mathbb{T} \ \mid \ s \geq s_i\} \cup \{s \in \mathbb{T} \ \mid \ s_{i-1} \leq s < s_i\}$ e $\{s \in \mathbb{T} \ \mid \ s_{i-1} \leq s < s_i\} \subset [s_{i-1}, s_i] \cap \mathbb{T} = \emptyset$. Nesse caso:

$$f_2(\tau_i)(g^*(s_i) - g^*(s_{i-1})) = 0 = f_1(\tau_i)(g^*(s_i) - g^*(s_{i-1})).$$

Caso $\tau_i \in \mathbb{T}$, então $f_1(\tau_i) = f_2(\tau_i)$ e:

$$f_2(\tau_i)(g^*(s_i) - g^*(s_{i-1})) = f_1(\tau_i)(g^*(s_i) - g^*(s_{i-1})).$$

Portanto:

$$\left\| \sum_{i=1}^{|d|} f_2(\tau_i)(g^*(s_i) - g^*(s_{i-1})) - I \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{|d|} f_1(\tau_i)(g^*(s_i) - g^*(s_{i-1})) - I \right\| < \epsilon,$$

pois d é δ_2-fina e, consequentemente, é δ_1-fina. Assim, a integral $\int_a^b f_2(s)dg^*(s)$ existe e vale a igualdade:

$$\int_a^b f_2(s)dg^*(s) = \int_a^b f_1(s)dg^*(s).$$

□

Provaremos agora um resultado que relaciona funções definidas através da integral de Perron-Stieltjes com funções definidas através da Δ-integral de Perron-Stieltjes. Um caso particular desse resultado pode ser encontrado em (12, Teorema 4.1). A demonstração aqui apresentada é análoga.

Teorema 15. *Sejam $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \to X$ e $g : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ funções tais que a Δ-integral de Perron-Stieltjes $\int_u^v f(s)\Delta g(s)$ existe para todos $u, v \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ com $u < v$. Seja $c \in \mathbb{T}$ e definamos $F_1 : [a, b]_{\mathbb{T}} \to X$ e $F_2 : [a, b] \to X$ como sendo:*

$$F_1(t) = \int_c^t f(s)\Delta g(s) \text{ para todo } t \in [a, b]_{\mathbb{T}} \text{ e } F_2(t) = \int_c^t f^*(s)dg^*(s) \text{ para todo } t \in [a, b].$$

Então, $F_2 = F_1^* |_{[a,b]}$.

Demonstração. Seja $t \in [a, b]$. Pelo Teorema 12 e pelo Lema 8, temos:

$$\begin{aligned} F_2(t) &= \int_c^t f^*(s)dg^*(s) = \int_{c^*}^{t^*} f^*(s)dg^*(s) = \int_c^{t^*} f^*(s)dg^*(s) = \int_c^{t^*} f(s)\Delta g(s) = \\ &= F_1(t^*) = F_1^*(t), \end{aligned}$$

donde o resultado segue. □

Por fim, usando dos resultados mostrados nessa seção, vamos calcular o valor da Δ-integral de Perron-Stieltjes da função identidade com respeito à própria identidade para duas escalas temporais distintas. Assim, considere $f, g : [0,1] \to [0,1]$ ambas iguais à função identidade.

Exemplo 7. Seja $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ a escala temporal do Exemplo 3. Pelo Teorema 12, sabemos que a Δ-integral de Perron-Stieltjes $\int_0^1 f(s)\Delta g(s)$ existe se, e somente se, existe a integral $\int_0^1 f^*(s)dg^*(s)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f^*(s)dg^*(s) &= \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{n}dg^*(s) = \frac{1}{n}\left(g^*\left(\frac{1}{n}\right) - g^*\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{n}\left(g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\
&= \frac{1}{n^2(n+1)} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}
$$

pois $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \in \mathbb{T}$. Como as séries com termos gerais $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ e $\frac{1}{n^2}$ são convergentes, então a integral $\int_0^1 f(s)\Delta g(s)$ existe e vale que:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f(s)\Delta g(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \\
&= -1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.
\end{aligned}
$$

Exemplo 8. Seja $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\} \cup \{0\}$ a escala temporal do Exemplo 6. Pelo Teorema 12, sabemos que a Δ-integral de Perron-Stieltjes $\int_0^1 f(s)\Delta g(s)$ existe se, e somente se, existe a integral $\int_0^1 f^*(s)dg^*(s)$. Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} f^*(s)dg^*(s) &= \int_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{\frac{1}{2^n}} \frac{1}{2^n}dg^*(s) = \frac{1}{2^n}\left(g^*\left(\frac{1}{2^n}\right) - g^*\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2^n}\left(g\left(\frac{1}{2^n}\right) - g\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) = \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^n}\right),
\end{aligned}
$$

pois $\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}} \in \mathbb{T}$. Como a série de termo geral $\frac{1}{2^{2n+1}}$ converge, então a integral $\int_0^1 f(s)\Delta g(s)$ existe e vale que:

$$
\int_0^1 f(s)\Delta g(s) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.
$$

Note ainda que, pela irracionalidade de π, o valor de ambas as integrais diferem.

4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS EM MEDIDA

Nesse capítulo, estudaremos diversos problemas de equações (dinâmicas e em medida), e utilizaremos os resultados estabelecidos nos capítulos 2 e 3 para estudar as propriedades dessas equações e relacionar problemas de equações dinâmicas com problemas de equações em medida. Esse capítulo é baseado em (1). A não ser que seja especificado o contrário, nesse capítulo X indica um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$.

4.1 EDF em medida

Definiremos uma EDF em medida e suas soluções conforme apresentado em (1, Definição 3.1).

Queremos analisar equações em medida dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s, s)dg(s), \text{ para } t \in [t_0, t_0+\gamma], \\ x_{t_0} = \phi. \end{cases} \tag{4.1}$$

com $t_0 \in \mathbb{R}, \gamma > 0, B$ (aberto) $\subset X$ (Banach), $P = G([-r,0], B)$, $\phi \in P$, $f : P \times [t_0, t_0+\gamma] \to X$ uma função, $g : [t_0, t_0+\gamma] \to \mathbb{R}$ não decrescente e $x_t : [-r, 0] \to X$ dada por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ para todos $\theta \in [-r, 0]$ e $t \in \mathbb{R}$.

Para fazermos sentido da integral em (4.1), considere $F : [t_0, t_0+\gamma] \to X$ dada por $F(s) = f(x_s, s)$ para todo $s \in [t_0, t_0+\gamma]$. Então F está bem definida, e a integral em (4.1) pode ser entendida como a integral de Perron-Stieltjes de F em função de g, isto é, se $U : [t_0, t_0+\gamma] \times [t_0, t_0+\gamma] \to X$ é dada por $U(\tau, t) = F(\tau)g(t)$, então a integral em (4.1) é a integral de Kurzweil $\displaystyle\int_{t_0}^{t} DU(\tau, t)$.

No restante do texto, uma integral da forma $\displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s, s)dg(s)$ será entendida como descrito acima.

Definição 24. *Seja $B \subset X$ aberto. Dizemos que uma função $x : [t_0, t_0+\gamma] \to X$ é uma solução de uma equação diferencial funcional em medida com condição inicial $x_{t_0} = \phi$ se ela satisfaz as seguintes condições:*

1. *$x_{t_0} = \phi \in G([-r, 0], B)$.*
2. *$x \in G([t_0, t_0+\gamma], B)$ e $(x(t), t) \in B \times [t_0, t_0+\gamma]$.*
3. *A integral de Perron-Stieltjes $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(x_s, s)dg(s)$ existe.*
4. *A igualdade $x(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s, s)dg(s)$ vale para todo $t \in [t_0, t_0+\gamma]$.*

Provaremos um lema que afirma que a norma da função memória de uma função regrada é também regrada. Esse resultado pode ser encontrado em (1, Lema 3.3), e foi originalmente retirado de (13).

Lema 9. *Seja* $y : [t_0 - r, t_0 + \gamma] \to X$ *uma função regrada. Então a norma da função memória* $s \in [t_0, t_0 + \gamma] \mapsto \|y_s\|_\infty \in \mathbb{R}_+$*, com* $\|y_s\|_\infty = \sup_{\theta \in [-r,0]} \|y_s(\theta)\|$ *é regrada em* $[t_0, t_0 + \gamma]$.

Demonstração. Seja $s_0 \in (t_0, t_0 + \gamma]$. Como y é regrada, existe o limite $\lim_{s \to s_0^-} y(s) = y(s_0^-)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $s \in (s_0 - \delta_1, s_0)$ implica em $\left\|y(s) - y(s_0^-)\right\| < \frac{\epsilon}{2}$. Logo, $u, v \in (s_0 - \delta_1, s_0)$ implica em $\|y(u) - y(v)\| \leq \left\|y(u) - y(s_0^-)\right\| + \left\|y(v) - y(s_0^-)\right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Ainda, como $s_0 > t_0$, temos $s_0 - r > t_0 - r$, donde existe o limite $\lim_{s \to (s_0 - r)^-} y(s) = y((s_0 - r)^-)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $s \in (s_0 - r - \delta_2, s_0 - r)$ implica em $\|y(s) - y((s_0 - r)^-)\| < \frac{\epsilon}{2}$. Logo, se $u, v \in (s_0 - r - \delta_2, s_0 - r)$:

$$\|y(u) - y(v)\| \leq \left\|y(u) - y((s_0 - r)^-)\right\| + \left\|y(v) - y((s_0 - r)^-)\right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} &\|y(u) - y(v)\| < \epsilon, u, v \in (s_0 - r - \delta, s_0 - r) \text{ e} \\ &\|y(u) - y(v)\| < \epsilon, u, v \in (s_0 - \delta, s_0). \end{aligned}$$

Sejam $s_1, s_2 \in (s_0 - \delta, s_0)$ com $s_1 < s_2$. Caso $s_2 - r \geq s_1$, temos $s_0 - r - \delta < s_1 - r < s_1 \leq s_2 - r < s_0 - r$. Dado $s \in [s_1 - r, s_2 - r]$, temos:

$$\begin{aligned} \|y(s)\| &\leq \|y(s) - y(s_2 - r)\| + \|y(s_2 - r)\| < \epsilon + \|y(s_2 - r)\| = \\ &= \epsilon + \|y_{s_2}(-r)\| \leq \epsilon + \sup_{\theta \in [-r,0]} \|y_{s_2}(\theta)\| = \epsilon + \|y_{s_2}\|_\infty. \end{aligned}$$

Caso $s_2 - r < s_1$, dado $s \in [s_2 - r, s_1]$, temos $\|y(s)\| \leq \sup_{\theta \in [s_2 - r, s_1]} \|y(\theta)\| \leq \sup_{\theta \in [s_2 - r, s_2]} \|y(\theta)\| = \sup_{\theta \in [-r,0]} \|y(s_2 + \theta)\| = \sup_{\theta \in [-r,0]} \|y_{s_2}(\theta)\| = \|y_{s_2}\|_\infty$.

Assim, dado $s \in [s_1 - r, s_1]$, temos $s \in [s_1 - r, s_2 - r]$ ou $s \in [s_2 - r, s_1]$. Caso $s \in [s_1 - r, s_2 - r]$, segue que:

$$\|y(s)\| \leq \|y(s) - y(s_2 - r)\| + \|y(s_2 - r)\| < \epsilon + \|y_{s_2}(-r)\| \leq \sup_{\theta \in [-r,0]} \|y_{s_2}(\theta)\| + \epsilon = \|y_{s_2}\|_\infty + \epsilon$$

Portanto, $\|y(s)\| < \|y_{s_2}\|_\infty + \epsilon$ para todo $s \in [s_1 - r, s_1]$ caso $s_2 - r < s_1$, e $\|y(s)\| < \|y_{s_2}\|_\infty + \epsilon$ para todo $s \in [s_1 - r, s_1] \subset [s_1 - r, s_2 - r]$ caso $s_2 - r \geq s_1$, donde $\|y(s)\| < \|y_{s_2}\|_\infty + \epsilon$ para todo $s \in [s_1 - r, s_1]$. Logo:

$$\sup_{s \in [s_1 - r, s_1]} \|y(s)\| = \sup_{s \in [-r,0]} \|y(s_1 + s)\| = \sup_{s \in [-r,0]} \|y_{s_1}(s)\| = \|y_{s_1}\|_\infty \leq \|y_{s_2}\|_\infty + \epsilon.$$

Ainda, caso $s_2 - r \geq s_1$, se $s \in [s_2 - r, s_2]$:

$$\|y(s_1)\| \leq \|y(s) - y(s_1)\| + \|y(s_1)\| < \epsilon + \|y(s_1)\| \leq \epsilon + \|y(s_1)(0)\| \leq \epsilon + \|y_{s_1}\|_\infty ,$$

donde $\sup_{s \in [s_2 - r, s_2]} \|y(s)\| = \|y_{s_2}\|_\infty \leq \|y_{s_1}\|_\infty + \epsilon$.

Caso $s_2 - r < s_1$, dado $s \in [s_2 - r, s_2]$, temos $s \in [s_2 - r, s_1]$ ou $s \in [s_1, s_2]$. Se $s \in [s_2 - r, s_1]$, temos $\|y(s)\| \leq \sup_{s \in [s_2 - r, s_1]} \|y(s)\| \leq \sup_{s \in [s_1 - r, s_1]} \|y(s)\| = \|y_{s_1}\|_\infty$. Se $s \in [s_1, s_2]$, temos $\|y(s)\| \leq \|y(s) - y(s_1)\| + \|y(s_1)\| < \epsilon + \|y_{s_1}\|_\infty$. Logo, $\|y(s)\| < \|y_{s_1}\|_\infty + \epsilon$ para todo $s \in [s_2 - r, s_2]$, donde $\|y_{s_2}\|_\infty \leq \|y_{s_1}\|_\infty + \epsilon$. Dessa forma:

$$\begin{aligned} &\|y_{s_2}\|_\infty \leq \|y_{s_1}\|_\infty + \epsilon \text{ e } \|y_{s_1}\|_\infty \leq \|y_{s_2}\|_\infty + \epsilon \Rightarrow \\ &\left| \|y_{s_1}\|_\infty - \|y_{s_2}\|_\infty \right| \leq \epsilon \text{ para todos } s_1, s_2 \in (s_0 - \delta, s_0). \end{aligned}$$

Segue daí que existe o limite $\lim_{s \to s_0^-} \|y_s\|_\infty$ para todo $s_0 \in (t_0, t_0 + \gamma]$. De maneira análoga, segue que existe o limite $\lim_{s \to s_0^+} \|y_s\|_\infty$ para todo $s_0 \in [t_0, t_0 + \gamma)$. Assim, $s \in [t_0, t_0 + \gamma] \mapsto \|y_s\|_\infty \in \mathbb{R}_+$ é regrada. $\square$

Podemos nos perguntar sob quais condições uma EDF em medida tem solução. Para isso, definiremos alguns conceitos e apresentaremos, sem a demonstração, dois resultados.

Definição 25. *Seja $O \subset G([t_0 - r, t_0 + \gamma], X)$ aberto. O conjunto O é dito ter a propriedade de prolongamento se, para todos $y \in O$ e $\bar{t} \in [t_0 - r, t_0 + \gamma]$, a função $\overline{y}$ dada por:*

$$\overline{y}(t) = \begin{cases} y(t), & \text{se } t_0 - r \leq t \leq \bar{t}, \\ y(\bar{t}), & \text{se } \bar{t} < t \leq t_0 + \gamma, \end{cases}$$

também pertence a O.

Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$, $r, \gamma > 0$ e conjuntos:

$$\begin{aligned} &O \subset G([t_0 - r, t_0 + \gamma], X) \text{ aberto e} \\ &P' = \{y_t \;\; | \;\; y \in O, t \in [t_0, t_0 + \gamma]\} \subset G([-r, 0], X). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sejam ainda $g : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente e $f : P' \times [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ uma função, tais que, para todos $y, z \in O$ e $s_1, s_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$, com $s_1 \leq s_2$, tenhamos:

1. A integral de Perron-Stieltjes:
$$\int_{s_1}^{s_2} f(y_s, s) dg(s) \tag{4.3}$$
existe.

2. Existe uma função $M : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ Perron-Stieltjes integrável com respeito a g tal que:
$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} f(y_s, s) dg(s) \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} M(s) dg(s). \tag{4.4}$$

3. Existe uma função $L : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ Perron-Stieltjes integrável com respeito a g tal que:
$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} [f(y_s, s) - f(z_s, s)]\, dg(s) \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} L(s) \|y_s - z_s\|_\infty \, dg(s). \tag{4.5}$$

Definamos $F : O \times [t_0, t_0 + \gamma] \to G([t_0 - r, t_0 + \gamma], X)$ como sendo:
$$F(x,t)(\alpha) = \begin{cases} 0, \text{ se } t_0 - r \leq \alpha \leq t_0, \\ \displaystyle\int_{t_0}^{\alpha} f(x_s, s) dg(s), \text{ se } t_0 \leq \alpha \leq t \leq t_0 + \gamma, \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s, s) dg(s), t \leq \alpha \leq t_0 + \gamma, \end{cases} \tag{4.6}$$
para todos $x \in O$ e $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$.

Enunciemos um teorema, que pode ser encontrado em (1, Teorema 4.19). Omitiremos sua demonstração por esta fugir do escopo deste trabalho.

Teorema 16. *Suponha que O satisfaz a propriedade de prolongamento. Sejam $\phi \in P$, F dada por* (4.6) *e $x : [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ uma solução da EDO generalizada:*
$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x,t)$$
com condição inicial:
$$x(t_0)(\alpha) = \begin{cases} \phi(\alpha - t_0), \ se\ t_0 - r \leq \alpha \leq t_0, \\ \phi(0), \ se\ t_0 \leq \alpha \leq t_0 + \gamma. \end{cases}$$
Então a função $y \in O$, dada por:
$$y(\alpha) = \begin{cases} x(t_0)(\alpha), \ se\ t_0 - r \leq \alpha \leq t_0, \\ x(\alpha)(\alpha), \ se\ t_0 \leq \alpha \leq t_0 + \gamma, \end{cases}$$
é uma solução da EDF em medida:
$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(y_s, s) dg(s), \ para\ t \in [t_0, t_0 + \gamma], \\ y_{t_0} = \phi. \end{cases}$$

Apresentaremos agora outro resultado, mas apresentando antes uma definição. Considere uma EDF em medida da forma:
$$y(t) = y(s_0) + \int_{s_0}^{t} f(y_s, s) dg(s), t \geq s_0 \tag{4.7}$$
com $s_0 \geq t_0$, $f : P' \times [t_0, +\infty) \to X$, $g : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e a integral do lado direito uma integral de Perron-Stieltjes. Definiremos uma solução maximal da equação acima.

Definição 26 (Solução maximal)**.** *Dizemos que $y : [s_0 - r, \omega(s_0, \phi)) \to X$ é uma solução maximal da EDF em medida* (4.7), *com condição inicial $y_{s_0} = \phi$, $s_0 \geq t_0$ e $\omega(s_0, \phi) \leq +\infty$, se y satisfaz as seguintes condições:*

1. $y(t) = \phi(0)$ para todo $t \in [t_0 - r, s_0 - r]$.

2. $y(t) = \phi(t - s_0)$ para todo $t \in [s_0 - r, s_0]$.

3. $(y_t, t) \in P' \times [s_0, \omega(s_0, \phi))$.

4. A integral de Perron-Stieltjes $\int_{s_0}^{t} f(y_s, s)dg(s)$ existe para todo $t \geq s_0$.

5. A igualdade $y(t) = y(s_0) + \int_{s_0}^{t} f(y_s, s)dg(s)$ vale para todo $t \in [s_0, \omega(s_0, \phi))$.

6. Se existem y' e $\omega' \leq +\infty$ tais que y' satisfaz as condições 1 a 5 acima (com ω' no lugar de $\omega(s_0, \phi)$ em 3 e 5), $\omega' \geq \omega(s_0, \phi)$ e $y'(t) = y(t)$ para $t \in [s_0, \omega(s_0, \phi))$, então $\omega(s_0, \phi) = \omega'$.

Podemos agora enunciar um teorema, retirado de (8, Teorema 7.7), o qual apresentaremos sem demonstração, por esta fugir do escopo desse texto.

Teorema 17. *Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$, $O \subset G([t_0 - r, +\infty), X)$ aberto, P' dado por (4.2), $g : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua pela esquerda e não-decrescente e $f : P' \times [t_0, +\infty) \to X$ tal que, para todos $y, z \in O$ e $s_1, s_2 \in [t_0, +\infty)$, com $s_1 \leq s_2$, valem as relações:*

1. A integral de Perron-Stieltjes:

$$\int_{s_1}^{s_2} f(y_s, s)dg(s) \tag{4.8}$$

existe.

2. Existe uma função $M : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ Perron-Stieltjes integrável com respeito a g tal que:

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} f(y_s, s)dg(s) \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} M(s)dg(s). \tag{4.9}$$

3. Existe uma função $L : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ Perron-Stieltjes integrável com respeito a g tal que:

$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} \left[f(y_s, s) - f(z_s, s) \right] dg(s) \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} L(s) \left\| y_s - z_s \right\|_{\infty} dg(s). \tag{4.10}$$

Seja $(\psi, \tau_0) \in P' \times [t_0, +\infty)$ e assuma que $\Delta^+ g(\tau_0) = 0$. Então, existe uma única solução maximal $y : [\tau_0, \omega(\tau_0, \psi)) \to X$ da EDF em medida (4.7) com condição inicial $y_{\tau_0} = \psi$.

4.2 EDFs em medida com impulso

Nessa seção, estudaremos EDFs em medida com impulso e como estas se relacionam com EDFs em medida.

Sejam $\{t_k\}_{k=1}^m$ os momentos de impulso, com $t_0 \leq t_1 < ... < t_m < t_0+\gamma$. Definamos $J_0 = [t_0, t_1]$, $J_k = (t_k, t_{k+1}]$ para $k \in \{1, ..., m-1\}$ e $J_m = (t_m, t_0+\gamma]$. Estudaremos as EDFs de medida com impulso dadas por:

$$\begin{cases} x(v) - x(u) = \displaystyle\int_u^v f(x_s, s)dg(s), u, v \in J_k \text{ para } k \in \{0, ..., m\}, \\ \Delta^+ x(t_k) = I_k(x(t_k)) \text{ para } k \in \{1, ..., m\}, \\ x_{t_0} = \phi, \end{cases} \tag{4.11}$$

com $\Delta^+ x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k), t_0 \in \mathbb{R}, \gamma > 0, B$ (aberto) $\subset X$ (Banach), $P = G([-r, 0], B), f : P \times [t_0, t_0+\gamma] \to X$ uma função, $g : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua pela esquerda e não-decrescente, e $I_k : B \to X$ um operador impulso para $k \in \{1, ..., m\}$.

Daremos agora a definição de uma solução do sistema (4.11).

Definição 27. *Sejam $B \subset X$ (Banach) um aberto e $P = G([-r, 0], B)$. Dizemos que $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma] \to X$ é uma solução de* (4.11) *se:*

1. *$x(t) = \phi(t - t_0)$ para todo $t \in [t_0 - r, t_0]$.*
2. *$x \in G([t_0 - r, t_0 + \gamma], B)$ e $(x_t, t) \in P \times [t_0, t_0 + \gamma]$.*
3. *Para todos $k \in \{0, 1, ..., m\}$ e $u, v \in J_k$, a integral de Perron-Stieltjes $\int_u^v f(x_s, s)dg(s)$ existe e vale a igualdade $x(v) - x(u) = \int_u^v f(x_s, s)dg(s)$.*
4. *Para todo $k \in \{1, ..., m\}$, vale a igualdade $\Delta^+ x(t_k) = I_k(x(t_k))$.*

Seja $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma] \to X$ uma solução do sistema (4.11). Para que $x(t) \in B$ para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + \gamma]$ (de forma a termos $f(x_s, s)$ bem definida), devemos ter $x(t_k^+) \in B$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$. Com isso, após a aplicação do impulso I_k, a solução x permanece em B. Por isso, iremos supor que $I + I_k : B \to B$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$, sendo $I : B \to B$ a identidade.

Provaremos um resultado que nos permite adicionar uma constante à função g, sem que alteremos a existência ou o valor da integral em (4.11). Esse resultado será útil para que possamos transformar o problema acima em um problema mais simples.

Proposição 8. *Sejam $f : G([-r, 0], B) \times [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ uma função (B (aberto) $\subset X$), $g : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ uma função e $\tilde{g} : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ uma função tal que $g - \tilde{g}$ seja constante em $[t_0, t_0 + \gamma]$. Suponha que $F : [t_0, t_0 + \gamma] \to X$, dada por $F(s) = f(x_s, s)$ para todo $s \in [t_0, t_0 + \gamma]$, seja uma função. Então, se $u, v \in [t_0, t_0 + \gamma]$ e $\int_u^v f(x_s, s)dg(s)$ existe, $\int_u^v f(x_s, s)d\tilde{g}(s)$ também existe e vale que $\int_u^v f(x_s, s)dg(s) = \int_u^v f(x_s, s)d\tilde{g}(s)$.*

Demonstração. Dados $u, v \in [t_0, t_0 + \gamma]$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $u \leq v$ (pois $u > v$ implica em $\int_u^v f(x_s, s)dg(s) = -\int_v^u f(x_s, s)dg(s)$). Como $\tilde{g} - g$ é constante em $[t_0, t_0+\gamma]$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{g}(t) = g(t) + c$ para todo $t \in [t_0, t_0+\gamma]$. Seja $d = (\xi_i, [t_{i-1}, t_i]) \in TD_{[u,v]}$. Temos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{|d|} F(\xi_i)[\widetilde{g}(t_i) - \widetilde{g}(t_{i-1})] &= \sum_{i=1}^{|d|} F(\xi_i)[(g(t_i)+c) - (g(t_{i-1})+c)] = \\ &= \sum_{i=1}^{|d|} F(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})].\end{aligned}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[u,v]$ tal que se $d = (\xi_i, [t_{i-1}, t_i]) \in TD_{[u,v]}$ é δ-fina, então:

$$\begin{aligned}&\left\| \sum_{i=1}^{|d|} F(\xi_i)[\widetilde{g}(t_i) - \widetilde{g}(t_{i-1})] - \int_u^v F(s)dg(s) \right\| = \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{|d|} F(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] - \int_u^v F(s)dg(s) \right\| < \epsilon,\end{aligned}$$

donde $\int_u^v F(s)d\widetilde{g}(s) = \int_u^v f(x_s, s)d\widetilde{g}(s)$ existe e vale:

$$\int_u^v f(x_s, s)d\widetilde{g}(s) = \int_u^v f(x_s, s)dg(s).$$

□

Com isso, podemos supor que $\Delta^+ g(t_k) = g(t_k^+) - g(t_k) = 0$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$. De fato, definamos $\widetilde{g} : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ como sendo:

$$\widetilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), \text{ para } t \in J_0, \\ g(t) - \sum_{i=1}^{k}(g(t_i^+) - g(t_i)), \text{ para } t \in J_k, k \in \{1, ..., m\}. \end{cases} \tag{4.12}$$

Isto é:

$$\widetilde{g}(t) = g(t) - \sum_{i=1}^{k}(g(t_k^+) - g(t_k)) \text{ para } t \in J_k, k \in \{0, 1, ..., m\}.$$

Então, como $\widetilde{g}(t) - g(t) = -\sum_{i=1}^{k}(g(t_k^+) - g(t_k))$ é uma constante em cada intervalo J_k, temos pela proposição anterior que $\int_u^v f(x_s, s)dg(s) = \int_u^v f(x_s, s)d\widetilde{g}(s)$ para $u, v \in J_k$, com $k \in \{0, ..., m\}$. Ainda, como g é contínua pela esquerda, segue que $\widetilde{g}$ é contínua pela esquerda. Uma vez que g é não-decrescente, temos $\widetilde{g}$ não-decrescente em cada J_k. Ainda:

$$\begin{aligned}\Delta^+\widetilde{g}(t_k) = \widetilde{g}(t_k^+) - \widetilde{g}(t_k) &= g(t_k^+) - \sum_{i=1}^{k}(g(t_i^+) - g(t_i)) - g(t_k) + \sum_{i=1}^{k-1}(g(t_i^+) - g(t_i)) = \\ &= g(t_k^+) - g(t_k) - g(t_k^+) + g(t_k) = 0,\end{aligned}$$

donde $\widetilde{g}(t_k^+) = \widetilde{g}(t_k)$. Assim, $\widetilde{g}$ é não-decrescente e é contínua em t_k para todo $k \in \{1, ..., m\}$.

Com isso, e utilizando o Corolário 2, temos que a função $J : [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ dada por:

$$J(t) = \int_{t_0}^{t} f(x_s, s)dg(s) \text{ para todo } t \in [t_0, t_0 + \gamma] .$$

é contínua em $t_1, ..., t_m$. Portanto, podemos reescrever o problema (4.11) como sendo:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s, s)dg(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,...,m\}\\ t_k<t}} I_k(x(t_k)), \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma] , \\ x_{t_0} = \phi. \end{cases}$$

Dado $T \in (t_0, +\infty)$, definamos $H_T : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ como sendo:

$$H_T(t) = \begin{cases} 0, \text{ para } t_0 \le t \le T, \\ 1, \text{ para } t > T. \end{cases}$$

Então, para $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$, podemos reescrever o problema de valor inicial como sendo:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s, s)dg(s) + \sum_{k=1}^{m} I_k(x(t_k))H_{t_k}(t), \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma] , \\ x_{t_0} = \phi. \end{cases}$$

Usaremos o primeiro desses enunciados alternativos do problema (4.11) em um dos teoremas que provaremos.

Com essas considerações, definiremos novamente (com uma definição equivalente à anterior) a solução de uma EDF em medida com impulso, de maneira mais geral que aquela apresentada em (1, Definição 3.4), e provaremos um lema, retirado de (1, Lema 3.5) e (12), com o qual seremos capazes de provar um resultado que relaciona as soluções de EDFs em medida com impulso com as soluções de EDFs em medida. Vale notar ainda que a definição de uma solução de uma EDF em medida com impulso que daremos se baseia no segundo enunciado alternativo que apresentamos do problema (4.11).

Definição 28. *Sejam $B \subset X$ (Banach) um aberto e $P = G([-r, 0], B)$. Dizemos que $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma] \to X$ é uma solução de (4.11) se:*

1. *$x(t) = \phi(t - t_0)$ para todo $t \in [t_0 - r, t_0]$.*
2. *$x \in G([t_0 - r, t_0 + \gamma], B)$ e $(x_t, t) \in P \times [t_0, t_0 + \gamma]$.*
3. *A integral de Perron-Stieltjes $\int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(x_s, s)dg(s)$ existe.*
4. *$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_s, s)ds + \sum_{k=1}^{m} I_k(x(t_k))H_{t_k}(t)$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$, com*
$$H_T(t) = \begin{cases} 0, \text{ para } t_0 \le t \le T, \\ 1, \text{ para } t > T. \end{cases}$$

Lema 10. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Suponha que para cada $k \in \{1,...,m\}, t_k \in [t_0, t_0+\gamma], t_0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_m < t_0+\gamma$ e $g : [t_0, t_0+\gamma] \to \mathbb{R}$ é regrada, contínua pela esquerda e contínua em cada t_k para $k \in \{1,...,m\}$. Sejam $f : [t_0, t_0+\gamma] \to X$ (Banach) uma função e $\widetilde{f} : [t_0, t_0+\gamma] \to X$ outra função tal que $\widetilde{f}(t) = f(t)$ para todo $t \in [t_0, t_0+\gamma] \setminus \{t_1,...,t_m\}$ e $\widetilde{g} : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{g} - g$ é constante em $[t_0, t_1], (t_1, t_2], ..., (t_{m-1}, t_m], (t_m, t_0+\gamma]$. Então a integral de Perron-Stieltjes $\int_{t_0}^{t_0+\gamma} \widetilde{f}(s)d\widetilde{g}(s)$ existe se, e somente se, a integral de Perron-Stieltjes $\int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(s)dg(s)$ existir. Nesse caso:*

$$\int_{t_0}^{t_0+\gamma} \widetilde{f}(s)d\widetilde{g}(s) = \int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(s)dg(s) + \sum_{k \in \{1,...,m\}} \widetilde{f}(t_k)\Delta^+\widetilde{g}(t_k).$$

Demonstração. Como $\widetilde{g} - g$ é constante em $[t_0, t_1]$, pelas considerações anteriores temos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \widetilde{f}(s)d\widetilde{g}(s) = \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{f}(s)dg(s) \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \widetilde{f}(s)d(\widetilde{g} - g)(s) = 0. \tag{4.13}$$

Similarmente, dados $k \in \{1,...,m\}$ e $u, v \in J_k = (t_k, t_{k+1}]$ (com $t_{m+1} = t_0 + \gamma$), temos $\widetilde{g} - g$ constante em $[u, v] \subset J_k$, donde:

$$\int_{u}^{v} \widetilde{f}(s)d\widetilde{g}(s) = \int_{u}^{v} \widetilde{f}(s)dg(s) \Rightarrow \int_{u}^{v} \widetilde{f}(s)d(\widetilde{g} - g)(s) = 0.$$

Em particular, fazendo $F_k : (t_k, t_{k+1}] \to X$, dada por $F_k(t) = \int_{t}^{t_{k+1}} \widetilde{f}(s)d(\widetilde{g} - g)(s)$ para todo $t \in (t_k, t_{k+1}]$, temos $F_k = 0$, donde $\lim\limits_{t \to t_k} F_k(t) = \lim\limits_{t \to t_k^+} \int_{t}^{t_{k+1}} \widetilde{f}(s)d(\widetilde{g} - g)(s) = 0$ para todo $k \in \{1,...,m\}$. Pelo Corolário 2, temos:

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \widetilde{f}(s)d(\widetilde{g} - g)(s) &= \lim_{t \to t_k^+} \int_{t}^{t_{k+1}} \widetilde{f}(s)d(\widetilde{g} - g)(s) + \widetilde{f}(t_k)\Delta^+(\widetilde{g} - g)(t_k) = \\ &= \widetilde{f}(t_k)((\widetilde{g} - g)(t_k^+) - (\widetilde{g} - g)(t_k)) = \widetilde{f}(t_k)(\widetilde{g}(t_k^+) - \widetilde{g}(t_k)) = \\ &= \widetilde{f}(t_k)\Delta^+\widetilde{g}(t_k) \end{aligned}$$

para todo $k \in \{1,...,m\}$. Portanto, pelo Teorema 4, $\int_{t_0}^{t_0+\gamma} \widetilde{f}(s)d(\widetilde{g} - g)(s)$ existe e vale:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+\gamma} \widetilde{f}(s)d(\widetilde{g} - g)(s) &= \sum_{k=0}^{m} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \widetilde{f}(s)d(\widetilde{g} - g)(s) = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \widetilde{f}(s)d(\widetilde{g} - g)(s) = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \widetilde{f}(t_k)\Delta^+\widetilde{g}(t_k). \end{aligned}$$

Sendo a segunda igualdade válida por (4.13). Note ainda que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \widetilde{f}(s)dg(s) = \lim_{t\to t_1^-} \int_{t_0}^{t} \widetilde{f}(s)dg(s) = \lim_{t\to t_1^-} \int_{t_0}^{t} f(s)dg(s) = \int_{t_0}^{t_1} f(s)dg(s)$$

$$\begin{aligned}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \widetilde{f}(s)dg(s) &= \lim_{\substack{\lambda\to t_k^+\\ \tau\to t_{k+1}^-}} \int_{\lambda}^{\tau} \widetilde{f}(s)dg(s) = \lim_{\substack{\lambda\to t_k^+\\ \tau\to t_{k+1}^-}} \int_{\lambda}^{\tau} f(s)dg(s) = \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s)dg(s) \text{ para } k \in \{1, ..., m-1\},\end{aligned}$$

$$\int_{t_m}^{t_0+\gamma} \widetilde{f}(s)dg(s) = \lim_{t\to t_m^+} \int_{t}^{t_0+\gamma} \widetilde{f}(s)dg(s) = \lim_{t\to t_m^+} \int_{t}^{t_0+\gamma} f(s)dg(s) = \int_{t_m}^{t_0+\gamma} f(s)dg(s).$$

De forma que as integrais a esquerda existem se, e somente se, as integrais a direita existem. Dessa forma, a integral $\int_{t_0}^{t_0+\gamma} \widetilde{f}(s)dg(s)$ existe se, e somente se, $\int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(s)dg(s)$ existe e ambas tem o mesmo valor. Logo:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_0+\gamma} \widetilde{f}(s)d\widetilde{g}(s) &= \int_{t_0}^{t_0+\gamma} \widetilde{f}(s)d(\widetilde{g} - g + g)(s) = \\ &= \int_{t_0}^{t_0+\gamma} \widetilde{f}(s)d(\widetilde{g} - g)(s) + \int_{t_0}^{t_0+\gamma} \widetilde{f}(s)dg(s) = \\ &= \int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(s)dg(s) + \sum_{k=1}^{m} \widetilde{f}(t_k)\Delta^+\widetilde{g}(t_k).\end{aligned}$$

□

Usaremos agora do lema anterior e das reformulações do problema (4.11) para relacionar soluções de uma EDF em medida com as soluções de uma EDF em medida com impulso. Esse resultado pode ser encontrado em (12).

Teorema 18. *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $B \subset X$ aberto, $r > 0$ e $P = G([-r, 0], B)$. Suponha que, para todo $k \in \{1, ..., m\}$, temos $t_k \in [t_0, t_0 + \gamma]$ e $I_k : B \to X$ um operador impulso, tais que $t_0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_m < t_0 + \gamma$ e $I + I_k : B \to B$ está bem definido, em que $I : B \to B$ é o operador identidade. Suponha ainda que $f : P \times [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ é Perron-Stieltjes integrável com respeito a uma função $g \in G^-([t_0, t_0 + \gamma], \mathbb{R})$ contínua em cada t_k, com $k \in \{1, ..., m\}$. Para cada $y \in P$, definamos:*

$$\widetilde{f}(y,t) = \begin{cases} f(y,t), & \text{para } t \in [t_0, t_0+\gamma] \setminus \{t_1, ..., t_m\}, \\ I_k(y(0)), & \text{para } t = t_k, \text{ com } k \in \{1, ..., m\}. \end{cases}$$

Ainda, para cada $k \in \{1, ..., m\}$, seja $c_k \in \mathbb{R}_+$ uma constante, com $c_k \leq c_{k+1}$ para todo $k \in \{1, ..., m-1\}$, e definamos $\widetilde{g} : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ como sendo:

$$\widetilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), & \text{para } t \in [t_0, t_1], \\ g(t) + c_k, & \text{para } t \in (t_k, t_{k+1}], \text{ com } k \in \{1, ..., m-1\}, \\ g(t) + c_m, & \text{para } t \in (t_m, t_0+\gamma]. \end{cases}$$

satisfazendo $\Delta^+\widetilde{g}(t_k) = 1$, *para* $k \in \{1, ..., m\}$. *Então* $x \in G([t_0 - r, t_0 + \gamma], B)$ *é uma solução da EDF em medida com impulso:*

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s, s)dg(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,...,m\}\\ t_k<t}} I_k(x(t_k)), \ \textit{para } t \in [t_0, t_0 + \gamma], \\ x_{t_0} = \phi, \end{cases} \tag{4.14}$$

se, e somente se, x *é uma solução da EDF em medida:*

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \widetilde{f}(x_s, s)d\widetilde{g}(s), \ \textit{para } t \in [t_0, t_0 + \gamma], \\ x_{t_0} = \phi. \end{cases} \tag{4.15}$$

Demonstração. Seja $x \in G([t_0 - r, t_0 + \gamma], B)$. Pelo Lema 10, dado $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$, temos:

$$\int_{t_0}^{t} \widetilde{f}(x_s, s)d\widetilde{g}(s) = \int_{t_0}^{t} f(x_s, s)dg(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,...,m\}\\ t_k<t}} \widetilde{f}(x_{t_k}, t_k)\Delta^+\widetilde{g}(t_k).$$

Dado $k \in \{1, ..., m\}$, temos:

$$\widetilde{f}(x_{t_k}, t_k)\Delta^+\widetilde{g}(t_k) = \widetilde{f}(x_{t_k}, t_k) = I_k(x_{t_k}(0)) = I_k(x(t_k)).$$

Portanto, x é solução de (4.14) se, e somente se, x é solução de (4.15). $\square$

Como uma consequência direta desse teorema, obtemos o seguinte corolário, sobre equações diferenciais em medida, o qual é retirado de (1, Corolário 3.7).

Corolário 6. *Sejam* $m \in \mathbb{N}$ *e* $B \subset X$ *aberto. Suponha que, para todo* $k \in \{1, ..., m\}$, *temos* $t_k \in [t_0, t_0 + \gamma]$ *e* $I_k : B \to X$ *um operador impulso, tais que* $t_0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_m < t_0 + \gamma$ *e* $I + I_k : B \to B$ *está bem definido, em que* $I : B \to B$ *é o operador identidade. Suponha ainda que* $f : B \times [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ *é Perron-Stieltjes integrável com respeito a uma função* $g \in G^-([t_0, t_0 + \gamma], \mathbb{R})$ *contínua em cada* t_k, *com* $k \in \{1, ..., m\}$. *Para cada* $y \in B$, *definamos:*

$$\widetilde{f}(y, t) = \begin{cases} f(y, t), \ \textit{para } t \in [t_0, t_0 + \gamma] \setminus \{t_1, ..., t_m\}, \\ I_k(y), \ \textit{para } t = t_k, \ \textit{com } k \in \{1, ..., m\}. \end{cases}$$

Ainda, para cada $k \in \{1, ..., m\}$, *seja* $c_k \in \mathbb{R}_+$ *uma constante, com* $c_k \leq c_{k+1}$ *para todo* $k \in \{1, ..., m - 1\}$, *e definamos* $\widetilde{g} : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ *como sendo:*

$$\widetilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), \ \textit{para } t \in [t_0, t_1], \\ g(t) + c_k, \ \textit{para } t \in (t_k, t_{k+1}], \ \textit{com } k \in \{1, ..., m - 1\}, \\ g(t) + c_m, \ \textit{para } t \in (t_m, t_0 + \gamma], \end{cases}$$

satisfazendo $\Delta^+\widetilde{g}(t_k) = 1$, *para* $k \in \{1, ..., m\}$. *Então* $x \in G([t_0, t_0 + \gamma], B)$ *é uma solução da EDF em medida com impulso:*

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x(s), s)dg(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,...,m\}\\ t_k<t}} I_k(x(t_k)), \ \textit{para } t \in [t_0, t_0 + \gamma], \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

se, e somente se, x é uma solução da EDF em medida:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \widetilde{f}(x(s), s) d\widetilde{g}(s), \ \ para \ t \in [t_0, t_0 + \gamma], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

O seguinte lema nos permite relacionar certas condições em EDFs em medida com impulso com condições em EDFs em medida. Esse resultado pode ser encontrado em (1, Lema 3.9), e uma versão menos geral pode ser encontrada em (12). Usaremos nesse lema a notação $S(f, g, d) = \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$, em que $f : [a, b] \to X$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções e $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$ é uma partição marcada de $[a, b]$.

Lema 11. *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $B \subset X$ aberto, $r, \gamma > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $P = G([-r, 0], B)$ e $O = G([t_0 - r, t_0 + \gamma], B)$. Suponha que, para todo $k \in \{1, ..., m\}$, temos $t_k \in [t_0, t_0 + \gamma]$ e $I_k : B \to X$ um operador impulso, tais que $t_0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_m < t_0 + \gamma$ e $I + I_k : B \to B$ está bem definido, em que $I : B \to B$ é o operador identidade. Sejam $f : P \times [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ uma função e $g : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ uma função contínua pela esquerda, não-decrescente e contínua em cada t_k, para $k \in \{1, ..., m\}$. Definamos $\widetilde{f} : P \times [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ como:*

$$\widetilde{f}(y, t) = \begin{cases} f(y, t), \ \ para \ t \in [t_0, t_0 + \gamma] \setminus \{t_1, ..., t_m\}, \\ I_k(y(0)), \ \ para \ t = t_k, \ \ com \ k \in \{1, ..., m\}. \end{cases}$$

Ainda, para cada $k \in \{1, ..., m\}$, seja $c_k \in \mathbb{R}_+$ uma constante, com $c_k \leq c_{k+1}$ para todo $k \in \{1, ..., m - 1\}$, e definamos $\widetilde{g} : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ como sendo:

$$\widetilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), \ \ para \ t \in [t_0, t_1], \\ g(t) + c_k, \ \ para \ t \in (t_k, t_{k+1}], \ \ com \ k \in \{1, ..., m - 1\}, \\ g(t) + c_m, \ \ para \ t \in (t_m, t_0 + \gamma], \end{cases}$$

satisfazendo $\Delta^+ \widetilde{g}(t_k) = 1$, para $k \in \{1, ..., m\}$. Então, as seguintes afirmativas são verdadeiras:

1. *A função $\widetilde{g}$ é não-decrescente e contínua pela esquerda. Ainda, dados $u, v \in [t_0, t_0 + \gamma]$ com $u \leq v$, temos $\widetilde{g}(v) - \widetilde{g}(u) \geq g(v) - g(u)$.*
2. *Dados $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$ e $x \in O$, se a integral de Perron-Stieltjes $\int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s) dg(s)$ existe, então a integral de Perron-Stieltjes $\int_{u_1}^{u_2} \widetilde{f}(x_s, s) d\widetilde{g}(s)$ também existe.*
3. *Se existe uma função $M_1 : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ Perron-Stieltjes integrável com respeito a g tal que:*

$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s) dg(s) \right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} M_1(s) dg(s)$$

para todos $x \in O$ *e todos* $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$ *com* $u_1 \leq u_2$*, e existe uma constante* $M_2 > 0$ *tal que* $\|I_k(z)\| \leq M_2$ *para todo* $z \in B$ *e* $k \in \{1, ..., m\}$*, então existe uma função Perron-Stieltjes integrável* $M : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ *com respeito a* $\widetilde{g}$ *satisfazendo:*

$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} \widetilde{f}(x_s, s) d\widetilde{g}(s) \right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s) d\widetilde{g}(s)$$

para todos $x \in O$ *e todos* $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$*, com* $u_1 \leq u_2$*.*

4. *Se existe uma função Perron-Stieltjes integrável* $L_1 : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ *com respeito a* g *tal que:*

$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} [f(x_s, s) - f(z_s, s)]\, dg(s) \right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} L_1(s) \|x_s - z_s\|_\infty \, dg(s)$$

para todos $x, z \in O$ *e* $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$*, com* $u_1 \leq u_2$*, e existe uma constante* $L_2 > 0$ *tal que:*

$$\|I_k(w) - I_k(y)\| \leq L_2 \|w - y\|$$

para todos $w, y \in B$ *e todo* $k \in \{1, ..., m\}$*, então existe uma função Perron-Stieltjes integrável* $L : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ *com respeito a* $\widetilde{g}$ *satisfazendo:*

$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} \left[\widetilde{f}(x_s, s) - \widetilde{f}(z_s, s) \right] d\widetilde{g}(s) \right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} L(s) \|x_s - z_s\|_\infty \, d\widetilde{g}(s)$$

para todos $x, z \in O$ *e todos* $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$*, com* $u_1 \leq u_2$*.*

Demonstração. 1. Definamos $c_0 = 0$. Sejam $u, v \in [t_0, t_0 + \gamma]$, com $u \leq v$. Se $u, v \in [t_0, t_1]$, ou $u, v \in (t_k, t_{k+1}]$ com $k \in \{1, ..., m-1\}$, ou $u, v \in (t_m, t_0 + \gamma]$, então existe $i \in \{0, 1, ..., m\}$ tal que:

$$\widetilde{g}(u) = g(u) + c_i \text{ e } \widetilde{g}(v) = g(v) + c_i.$$

Então, como g é não-decrescente, temos $g(u) \leq g(v)$ e:

$$\widetilde{g}(u) = g(u) + c_i \leq g(v) + c_i = \widetilde{g}(v).$$

Além disso, temos:

$$\widetilde{g}(v) - \widetilde{g}(u) = g(v) + c_i - (g(u) + c_i) = g(v) - g(u).$$

Caso u e v não estejam ambos em um mesmo intervalo dentre os citados acima, existem $i, j \in \{0, 1, ..., m\}$, com $i < j$, tais que:

$$\widetilde{g}(u) = g(u) + c_i \text{ e } \widetilde{g}(v) = g(v) + c_j.$$

Como $c_i \leq c_j$ (pois $c_0 = 0 \leq c_k \leq c_{k+1}$ para todo $k \in \{1, ..., m-1\}$) e g é não-decrescente, temos:

$$\widetilde{g}(u) = g(u) + c_i \leq g(v) + c_i \leq g(v) + c_j = \widetilde{g}(v).$$

Portanto, $\widetilde{g}$ é não-decrescente. Além disso, temos:

$$\widetilde{g}(v) - \widetilde{g}(u) = g(v) + c_j - (g(u) + c_i) = g(v) - g(u) + (c_j - c_i) \geq g(v) - g(u),$$

donde $\widetilde{g}(v) - \widetilde{g}(u) \geq g(v) - g(u)$ para $u, v \in [t_0, t_0 + \gamma]$ com $u \leq v$. Ainda, $\widetilde{g}\ |_{[t_0,t_1]}$, $\widetilde{g}\ |_{(t_k,t_{k+1}]}$ com $k \in \{1, ..., m-1\}$ e $\widetilde{g}\ |_{(t_m,t_0+\gamma]}$ são da forma $g + c_i$, em que c_i é uma constante. Como g é contínua pela esquerda, temos que $\widetilde{g}$ é contínua pela esquerda nesses intervalos. Assim, $\widetilde{g}$ é contínua pela esquerda em $[t_0, t_1] \cup \left(\bigcup_{k=1}^{m-1} (t_k, t_{k+1}]\right) \cup (t_m, t_0 + \gamma] = [t_0, t_0 + \gamma]$. Como $[t_0, t_0 + \gamma]$ é o domínio de $\widetilde{g}$, segue que $\widetilde{g}$ é contínua pela esquerda.

2. Dados $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$ e $x \in O$, sejam $F : [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ e $\widetilde{F} : [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ dadas por $F(s) = f(x_s, s)$ e $\widetilde{F}(s) = \widetilde{f}(x_s, s)$ para todo $s \in [t_0, t_0 + \gamma]$, respectivamente. Então, pela definição de $\widetilde{f}$, temos que $s \in [t_0, t_0 + \gamma] \setminus \{t_1, ..., t_m\}$ implica em $\widetilde{F}(s) = \widetilde{f}(x_s, s) = f(x_s, s) = F(s)$. Assim, usando o item 1, o Lema 10 e a definição de $\widetilde{g}$, temos que a existência da integral $\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} F(s)dg(s) = \int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s)dg(s)$ implica na existência de $\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} \widetilde{F}(s)d\widetilde{g}(s) = \int_{u_1}^{u_2} \widetilde{f}(x_s, s)d\widetilde{g}(s)$.

3. Sejam $x \in O$ e $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$ com $u_1 \leq u_2$. Como a integral $\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s)dg(s)$ existe, temos pelo item 2 e pelo Lema 10 que a integral $\int_{u_1}^{u_2} \widetilde{f}(x_s, s)d\widetilde{g}(s)$ existe e vale que:

$$\begin{aligned}\int_{u_1}^{u_2} \widetilde{f}(x_s, s)d\widetilde{g}(s) &= \int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s)dg(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} \widetilde{f}(x_{t_k}, t_k)\Delta^+\widetilde{g}(t_k) = \\ &= \int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s)dg(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} I_k(x(t_k))\Delta^+\widetilde{g}(t_k).\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{u_1}^{u_2} \widetilde{f}(x_s, s)d\widetilde{g}(s)\right\| &= \left\|\int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s)dg(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} I_k(x(t_k))\Delta^+\widetilde{g}(t_k)\right\| \leq \\ &\leq \left\|\int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s)dg(s)\right\| + \left\|\sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} I_k(x(t_k))\Delta^+\widetilde{g}(t_k)\right\| \leq \\ &\leq \int_{u_1}^{u_2} M_1(s)dg(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} \left\|I_k(x(t_k))\Delta^+\widetilde{g}(t_k)\right\| = \\ &= \int_{u_1}^{u_2} M_1(s)dg(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} \|I_k(x(t_k))\| \left|\Delta^+\widetilde{g}(t_k)\right| \leq \\ &\leq \int_{u_1}^{u_2} M_1(s)dg(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} M_2\Delta^+\widetilde{g}(t_k).\end{aligned}$$

Pelo item 1 e pela Proposição 2, temos que:

$$\int_{u_1}^{u_2} M_1(s)dg(s) \leq \int_{u_1}^{u_2} M_1(s)d\widetilde{g}(s).$$

Seja $T : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ uma função constante dada por $T(t) = 1 + M_2 > 0$ para todo $t \in [u_1, u_2]$. Então, se $d = (\tau_i, [t_{i-1}, t_i])$ é uma partição marcada de $[u_1, u_2]$, temos:

$$\begin{aligned} S(T, \widetilde{g}, d) &= \sum_{i=1}^{|d|} T(\tau_i)(\widetilde{g}(t_i) - \widetilde{g}(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{|d|}(1 + M_2)(\widetilde{g}(t_i) - \widetilde{g}(t_{i-1})) = \\ &= (1 + M_2)\sum_{i=1}^{|d|}(\widetilde{g}(t_i) - \widetilde{g}(t_{i-1})) = (1 + M_2)(\widetilde{g}(u_2) - \widetilde{g}(u_1)). \end{aligned}$$

Portanto, a integral $\int_{u_1}^{u_2} T(s)d\widetilde{g}(s)$ existe e vale que:

$$\int_{u_1}^{u_2} T(s)d\widetilde{g}(s) = (1 + M_2)(\widetilde{g}(u_2) - \widetilde{g}(u_1)) \geq 0.$$

Assim, se $\widetilde{M} : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ é dada por $\widetilde{M}(t) = T(t) + M_1(t) = 1 + M_2 + M_1(t)$ para $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$, temos pela linearidade da integral de Perron-Stieltjes que a integral $\int_{u_1}^{u_2} \widetilde{M}(s)d\widetilde{g}(s)$ existe e vale que:

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} M_1(s)d\widetilde{g}(s) &\leq \int_{u_1}^{u_2} M_1(s)d\widetilde{g}(s) + \int_{u_1}^{u_2} T(s)d\widetilde{g}(s) = \int_{u_1}^{u_2} (M_1 + T)(s)\widetilde{g}(s) = \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \widetilde{M}(s)d\widetilde{g}(s). \end{aligned}$$

Definamos $h : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ como sendo:

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} \widetilde{M}(s)d\widetilde{g}(s) \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma].$$

Note que pelas considerações anteriores, h está bem definido. Mostremos que h é não-decrescente. Sejam $s_1, s_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$ com $s_1 \leq s_2$. Então:

$$\begin{aligned} h(s_2) - h(s_1) &= \int_{t_0}^{s_2} \widetilde{M}(s)d\widetilde{g}(s) - \int_{t_0}^{s_1} \widetilde{M}(s)d\widetilde{g}(s) = \int_{s_1}^{s_2} \widetilde{M}(s)d\widetilde{g}(s) \geq \\ &\geq \int_{s_1}^{s_2} M_1(s)dg(s) \geq \left\| \int_{s_1}^{s_2} f(x_s, s)dg(s) \right\| \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, h é não-decrescente. Note que $\widetilde{g}$ é não-decrescente e contínua pela esquerda, donde, pela Proposição 4, $\widetilde{g}$ é regrada. Pelo Corolário 2, temos $\Delta^+ h(t_k) = \widetilde{M}(t_k)\Delta^+\widetilde{g}(t_k)$ para $k \in \{1, ..., m\}$. Seja $\lambda : [t_0, t_0 + \gamma]$ dada por $\lambda(t) = \int_{t_0}^{t} M_1(s)d\widetilde{g}(s)$. Pelo item 1 e pelo Corolário 2, temos que λ é regrada em $[t_0, t_0 + \gamma]$ e que, dado $t \in [t_0, t_0 + \gamma)$, temos:

$$\lambda(t^+) = \lambda(t) + M_1(t)\Delta^+\widetilde{g}(t).$$

Seja $s \in (0, t_0 + \gamma - t)$. Então, pela Proposição 2, temos:

$$\lambda(t+s) - \lambda(t) = \int_t^{t+s} M_1(s) d\widetilde{g}(s) \geq \int_t^{t+s} M_1(s) dg(s) \geq 0.$$

Fazendo o limite com $s \to 0^+$, temos:

$$\lambda(t^+) - \lambda(t) = M_1(t)\Delta^+\widetilde{g}(t) \geq 0.$$

Em particular, fazendo $t = t_k$, com $k \in \{1, ..., m\}$, temos:

$$M_1(t_k)\Delta^+\widetilde{g}(t_k) \geq 0.$$

Ainda, como $\widetilde{g}$ é não-decrescente, temos $\Delta^+\widetilde{g}(t) \geq 0$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \gamma)$. Em particular, $\Delta^+\widetilde{g}(t_k) \geq 0$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$. Assim:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} M_2\Delta^+\widetilde{g}(t_k) \leq & \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} M_2\Delta^+\widetilde{g}(t_k) + \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} M_1(t_k)\Delta^+\widetilde{g}(t_k) + \\
& + \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} \Delta^+\widetilde{g}(t_k) = \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} (M_1(t_k) + M_2 + 1)\Delta^+\widetilde{g}(t_k) = \\
& = \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} \widetilde{M}(t_k)\Delta^+\widetilde{g}(t_k) = \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} \Delta^+h(t_k).
\end{aligned}$$

Façamos $t_{m+1} = t_0 + \gamma$. Sejam $k \in \{1, ..., m\}$ e $s \in (0, t_{k+1} - t_k) \neq \emptyset$ (pois $t_{k+1} > t_k$). Então $t_k + s < t_{k+1}$ e, pelo fato de h ser não-decrescente:

$$h(t_k + s) - h(t_k) \leq h(t_{k+1}) - h(t_k).$$

Fazendo $s \to 0^+$, temos que:

$$\Delta^+h(t_k) = h(t_k^+) - h(t_k) \leq h(t_{k+1}) - h(t_k).$$

Então, considere o conjunto $A = \{t_k \ | \ k \in \{1, ..., m\}, u_1 \leq t_k < u_2\}$. Se $A = \emptyset$, então:

$$\sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} \Delta^+h(t_k) = 0 \leq h(u_2) - h(u_1)$$

uma vez que h é não-decrescente e $u_1 \leq u_2$. Se $A \neq \emptyset$, sejam $t_i = \min A$ e $t_j = \max A$. Então $u_1 \leq t_i$, $t_j < u_2$ e, usando o fato de que h é não-decrescente:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} \Delta^+h(t_k) = \sum_{k=i}^{j} \Delta^+h(t_k) = \sum_{k=i}^{j-1} \Delta^+h(t_k) + \Delta^+h(t_j) \leq \\
\leq \sum_{k=i}^{j-1} (h(t_{k+1}) - h(t_k)) + \Delta^+h(t_j) = \\
= h(t_j) - h(t_i) + h(t_j^+) - h(t_j) = h(t_j^+) - h(t_i) \leq h(t_j^+) - h(u_1).
\end{aligned}$$

Como $u_2 > t_j$, seja $s \in (0, u_2 - t_j) \neq \emptyset$. Temos $t_j + s \leq u_2$, donde:

$$h(t_j + s) \leq h(u_2).$$

Fazendo $s \to 0^+$, obtemos que:

$$h(t_j^+) \leq h(u_2).$$

Portanto:

$$\sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,m\}\\ u_1\leq t_k<u_2}} M_2\Delta^+\widetilde{g}(t_k) \leq \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,m\}\\ u_1\leq t_k<u_2}} \Delta^+h(t_k) \leq h(t_j^+) - h(u_1) \leq h(u_2) - h(u_1) =$$
$$= \int_{u_1}^{u_2} \widetilde{M}(s)d\widetilde{g}(s).$$

Assim:

$$\left\|\int_{u_1}^{u_2} \widetilde{f}(x_s, s)d\widetilde{g}(s)\right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} M_1(s)dg(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,m\}\\ u_1\leq t_k<u_2}} M_2\Delta^+\widetilde{g}(t_k) \leq$$
$$\leq \int_{u_1}^{u_2} \widetilde{M}(s)d\widetilde{g}(s) + \int_{u_1}^{u_2} \widetilde{M}(s)d\widetilde{g}(s) = 2\int_{u_1}^{u_2} \widetilde{M}(s)d\widetilde{g}(s).$$

Definindo $M : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ como $M = 2\widetilde{M}$, temos que a integral de Perron-Stieltjes $\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} M(s)d\widetilde{g}(s)$ existe para todos $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$, com $u_1 \leq u_2$, e que, para todos $x \in O$ e $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$, com $u_1 \leq u_2$, temos:

$$\left\|\int_{u_1}^{u_2} \widetilde{f}(x_s, s)d\widetilde{g}(s)\right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s)d\widetilde{g}(s).$$

4. Sejam $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$ com $u_1 \leq u_2$. Pelo Lema 10, temos:

$$\int_{u_1}^{u_2} \left[\widetilde{f}(x_s, s) - \widetilde{f}(z_s, s)\right] d\widetilde{g}(s) = \int_{u_1}^{u_2} \left[f(x_s, s) - f(z_s, s)\right] dg(s) +$$
$$+ \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,m\}\\ u_1\leq t_k<u_2}} \left[I_k(x(t_k)) - I_k(z(t_k))\right] \Delta^+\widetilde{g}(t_k).$$

Portanto:

$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} \left[\widetilde{f}(x_s, s) - \widetilde{f}(z_s, s) \right] d\widetilde{g}(s) \right\| \leq \left\| \int_{u_1}^{u_2} \left[f(x_s, s) - f(z_s, s) \right] dg(s) \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} \left[I_k(x(t_k)) - I_k(z(t_k)) \right] \Delta^+ \widetilde{g}(t_k) \right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} L_1(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty dg(s) +$$

$$+ \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} \left\| \left[I_k(x(t_k)) - I_k(z(t_k)) \right] \Delta^+ \widetilde{g}(t_k) \right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} L_1(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty dg(s) +$$

$$+ \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} L_2 \left\| x(t_k) - z(t_k) \right\| \Delta^+ \widetilde{g}(t_k) = \int_{u_1}^{u_2} L_1(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty dg(s) +$$

$$+ \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} L_2 \left\| (x_{t_k} - z_{t_k})(0) \right\| \Delta^+ \widetilde{g}(t_k) \leq \int_{u_1}^{u_2} L_1(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty dg(s) +$$

$$+ \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} L_2 \left\| x_{t_k} - z_{t_k} \right\|_\infty \Delta^+ \widetilde{g}(t_k).$$

De maneira análoga ao item 3, temos que se $\widetilde{L} : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ é dada por $\widetilde{L}(s) = 1 + L_2 + L_1(s)$ para todo $s \in [t_0, t_0 + \gamma]$, então a integral de Perron-Stieltjes $\int_{u_1}^{u_2} \widetilde{L}(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty d\widetilde{g}(s)$ existe para todos $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]$ com $u_1 \leq u_2$ e:

$$\int_{u_1}^{u_2} L_1(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty dg(s) \leq \int_{u_1}^{u_2} L_1(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty d\widetilde{g}(s) \leq$$
$$\leq \int_{u_1}^{u_2} \widetilde{L}(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty d\widetilde{g}(s).$$

Definindo $\kappa : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ como:

$$\kappa(t) = \int_{t_0}^{t} \widetilde{L}(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty d\widetilde{g}(s)$$

temos κ não-decrescente (pelas mesmas considerações feitas para h no item 3). Assim, como $\widetilde{g}$ é regrada, pelo Corolário 2 temos que:

$$\Delta^+ \kappa(t_k) = \widetilde{L}(t_k) \left\| y_{t_k} - z_{t_k} \right\|_\infty \Delta^+ \widetilde{g}(t_k)$$

para $k \in \{1, ..., m\}$. Então:

$$\sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} L_2 \left\| x_{t_k} - z_{t_k} \right\|_\infty \Delta^+ \widetilde{g}(t_k) \leq \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} \widetilde{L}(t_k) \left\| x_{t_k} - z_{t_k} \right\|_\infty \Delta^+ \widetilde{g}(t_k) =$$
$$= \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ u_1 \leq t_k < u_2}} \Delta^+ \kappa(t_k) \leq \kappa(u_2) - \kappa(u_1) =$$
$$= \int_{u_1}^{u_2} \widetilde{L}(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty d\widetilde{g}(s).$$

Assim, tomando $L : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ dado por $L = 2\widetilde{L}$, temos:

$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} \left[\widetilde{f}(x_s, s) - \widetilde{f}(z_s, s) \right] d\widetilde{g}(s) \right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} L(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty d\widetilde{g}(s).$$

□

Vale notar que no item 4, assumimos que a integral de Perron-Stieltjes de L_1 com respeito a g existe, mas não mostramos que isso implica na existência da integral:

$$\int_{u_1}^{u_2} L_1(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty dg(s).$$

De fato, as condições exigidas sobre as funções L_1 e g implicam na existência da integral acima (e, por consequência, na existência da integral $\int_{u_1}^{u_2} L(s) \left\| x_s - z_s \right\|_\infty d\widetilde{g}(s)$). A demonstração desse fato, entretanto, faz uso de resultados que fogem do escopo desse texto e, portanto, foi omitida. Um resultado análogo para escalas temporais será apresentado mais a frente, no Lema 12.

Vale ainda fazer mais uma observação. No Lema 11, no Corolário 6 e no Teorema 18, exigimos que $\Delta^+\widetilde{g}(t_k) = 1$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$ sem mostrar que era possível escolher os c_k's de forma a satisfazer esses resultados. Mostremos que tal escolha é, de fato, possível.

As únicas condições sobre g que estão presentes nos 3 resultados são as de que g é contínua pela esquerda, g é contínua em t_k com $k \in \{1, ..., m\}$ e a de que g é regrada (note que no Lema 11 não exigimos g regrada, mas exigimos g não-decrescente, o que, junto da condição de g ser contínua pela esquerda, implica em g regrada, como mostrado na Proposição 4). Sejam então $\gamma > 0$, $g : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ regrada e $t_k \in [t_0, t_0 + \gamma]$ para $k \in \{1, ..., m\}$ com $t_0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_m < t_0 + \gamma$. Ainda, considere g contínua em t_k, com $k \in \{1, ..., m\}$. Definindo $c_0 = 0$ e $t_{m+1} = t_0 + \gamma$, definamos $\widetilde{g} : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ como sendo:

$$\widetilde{g}(t) = \begin{cases} g(t) + c_0, \text{ para } t \in [t_0, t_1], \\ g(t) + c_k, \text{ para } t \in (t_k, t_{k+1}], \text{ com } k \in \{1, ..., m\}. \end{cases}$$

Com $c_k \in \mathbb{R}$ e $c_{k-1} \leq c_k$ para $k \in \{1, ..., m\}$. Temos que $\widetilde{g}$ está bem definida. Ainda, dado $k \in \{1, ..., m\}$, sabemos que $t_{k+1} > t_k$, donde $(0, t_{k+1} - t_k) \neq \emptyset$. Dado $s \in (0, t_{k+1} - t_k)$, temos $t_k < t_k + s \leq t_{k+1}$ e:

$$\widetilde{g}(t_k + s) - \widetilde{g}(t_k) = g(t_k + s) + c_k - (g(t_k) - c_{k-1}) = (g(t_k + s) - g(t_k)) + (c_k - c_{k-1}).$$

Fazendo $s \to 0^+$, como g é regrada, temos que o limite $\lim_{s \to 0^+} g(t_k + s) = g(t_k^+)$ existe, donde o limite $\lim_{s \to 0^+} \widetilde{g}(t_k + s) = \widetilde{g}(t_k^+)$ também existe. Ainda, como g é contínua em t_k, temos $g(t_k^+) = g(t_k)$. Assim:

$$\Delta^+\widetilde{g}(t_k) = \widetilde{g}(t_k^+) - \widetilde{g}(t_k) = (g(t_k^+) - g(t_k)) + (c_k - c_{k-1}) = c_k - c_{k-1}.$$

Se quisermos que $\Delta^+\widetilde{g}(t_k) = 1$ para $k \in \{1, ..., m\}$, devemos ter então:

$$c_k - c_{k-1} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k}(c_i - c_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} 1 = k \Rightarrow c_k = c_k - c_0 = k.$$

Note que $c_k = k$ para $k \in \{1, ..., m\}$ satisfaz $0 \leq c_k = k \leq k + 1 = c_{k+1}$ para $k \in \{1, ..., m-1\}$, $c_k \in \mathbb{R}$ para $k \in \{1, ..., m\}$ e $\Delta^+\widetilde{g}(t_k) = c_k - c_{k-1} = k - (k-1) = 1$ para $k \in \{1, ..., m\}$. Portanto, a escolha dos c_k's conforme os enunciados dos resultados dessa seção é possível.

4.3 Equações diferenciais em medida e equações dinâmicas em escalas temporais

Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $\gamma > 0$ e $t_0 \in \mathbb{T}$ tal que $t_0 + \gamma \in \mathbb{T}$. Considere a equação dinâmica em escalas temporais dada por:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\Delta g(s) \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}, \tag{4.16}$$

onde $B \subset X$ é um aberto, $g : [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ é uma função e $f : B \times [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ é uma função tal que $t \mapsto f(x(t), t)$ é Perron-Stieltjes Δ-integrável com respeito a g em $[t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$ e a integral do lado direito é tomada com relação a Δ-integral de Perron-Stieltjes.

As definições de equações dinâmicas em escalas temporais e de suas soluções aqui apresentadas são versões mais gerais daquelas dadas em (1, Definição 3.27).

Definição 29. *Dizemos que a função $x : [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ é uma solução da equação dinâmica em escalas temporais* (4.16)*, com a condição inicial $x(s_0) = x_0, s_0 \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$, se x satisfizer:*

1. *$x(s_0) = x_0 \in B$.*
2. *$x \in G([t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}, B)$ e $(x(t), t) \in B \times [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$.*
3. *A Δ-integral de Perron-Stieltjes $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(x(s), s)\Delta g(s)$ existe.*
4. *A igualdade em* (4.16) *vale para todo $t \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$.*

Enunciaremos agora um teorema, o qual é uma versão mais geral do resultado encontrado em (1, Teorema 3.28), (4) (11) e (14), que relaciona as soluções das equações dinâmicas em escalas temporais definidas acima com as soluções de certas equações diferenciais em medida. Entretanto, não apresentaremos a demonstração desse resultado, uma vez que esta é análoga à do Teorema 20, o qual provaremos mais adiante.

Teorema 19. *Sejam $\gamma > 0$, $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $t_0 \in \mathbb{T}$ com $t_0 + \gamma \in \mathbb{T}$. Sejam ainda $B \subset X$ aberto, $g : [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ e $f : B \times [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ uma função tal que, para todo $x \in G([t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}, B)$, a função $t \mapsto f(x(t), t)$ é Perron-Stieltjes Δ-integrável com* *respeito a g em $[s_1, s_2]_{\mathbb{T}}$ para todos $s_1, s_2 \in [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$. Se $x : [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}} \to B$ é uma solução da equação dinâmica em escalas temporais:*

$$x(t) = x_0 + \int_{s_0}^{t} f(x(s), s)\Delta g(s) \ \textit{para}\ t \in [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}},$$

com $x_0 \in B$ e $s_0 \in [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$, então $x^* : [t_0, t_0+\gamma] \to B$ é uma solução da equação diferencial em medida:

$$y(t) = x_0 + \int_{s_0}^{t} f^*(y(s), s)dg^*(s) = x_0 + \int_{s_0}^{t} f(y(s), s^*)dg^*(s) \ \textit{para}\ t \in [t_0, t_0+\gamma].$$

Reciprocamente, se $y : [t_0, t_0+\gamma] \to B$ é solução da equação diferencial em medida acima, então existe $x : [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}} \to B$ solução da equação dinâmica em escalas temporais tal que $y = x^*$.

4.4 Relações com EDFs em medida

Mostraremos que certas equações diferencias funcionais (EDFs) em escalas temporais podem ser consideradas EDFs em medida. Considere equações diferenciais funcionais em escalas temporais da forma:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s)\Delta g(s), \ \text{para}\ t \in [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}, \\ x(t) = \phi(t), \ \text{para}\ t \in [t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

em que $\mathbb{T}$ é uma escala temporal, $\gamma, r > 0$, $t_0 \in \mathbb{T}$ tal que $t_0+\gamma, t_0 - r \in \mathbb{T}$, $B \subset X$ é aberto, $O = G([t_0 - r, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}, B)$, $P = \{x_t^* \mid x \in O, t \in [t_0, t_0+\gamma]\}$, $g : [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ é uma função, $f : P \times [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ é uma função Perron-Stieltjes Δ-integrável com respeito a g e $\phi \in G([t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}, B)$.

As definições de EDFs em escalas temporais e de suas soluções aqui apresentadas são versões mais gerais daquelas dadas em (1, Definição 3.29).

Definição 30. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $\gamma, r > 0$, $t_0 \in \mathbb{T}$ tal que $t_0 - r, t_0+\gamma \in \mathbb{T}$, $B \subset X$ aberto, $O = G([t_0 - r, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}, B)$, $P = \{x_t^* \mid x \in O, t \in [t_0, t_0+\gamma]\}$, $g : [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ é uma função, $f : P \times [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ é uma função e $\phi \in G([t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}, B)$. Dizemos que uma função $x : [t_0 - r, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ é uma solução da equação dinâmica funcional em escalas temporais:*

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s)\Delta g(s), \ \textit{para}\ t \in [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}, \\ x(t) = \phi(t), \ \textit{para}\ t \in [t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}. \end{cases} \tag{4.17}$$

se:

1. *$x_t^* \in P$ para todo $t \in [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$.*

2. A Δ-integral de Perron-Stieltjes $\int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(x_s^*, s)\Delta g(s)$ *existe.*

3. As igualdades em (4.17) *valem.*

Apresentaremos agora o principal resultado dessa seção, que permite fazer a conexão entre soluções das equações dinâmicas funcionais descritas acima com as soluções de certas EDFs em medida. Esse teorema é uma versão mais geral do resultado apresentado em (1, Teorema 3.30).

Teorema 20. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $r, \gamma > 0$, $t_0 \in \mathbb{T}$ tal que $t_0 + \gamma, t_0 - r \in \mathbb{T}$, $[t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$ um intervalo em escala temporal, $B \subset X$ aberto, $O = G([t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}, B)$, $P = \{x_t^* \mid x \in O, t \in [t_0, t_0 + \gamma]\}$, $f : P \times [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ e $g : [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ funções e $\phi \in G([t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}, B)$. Suponha que, para todo $z \in P$, a Δ-integral de Perron-Stieltjes $\int_{u_1}^{u_2} f(z, s)\Delta g(s)$ existe, para todos $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$. Se $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to B$ é uma solução da equação dinâmica funcional em escalas temporais* (4.17)*, então $x^* : [t_0 - r, t_0 + \gamma] \to B$ satisfaz:*

$$\begin{cases} x^*(t) = x^*(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_{s^*}^*, s^*)dg^*(s), \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma], \\ \qquad\qquad x_{t_0}^* = \phi_{t_0}^*. \end{cases}$$

Reciprocamente, se $y : [t_0 - r, t_0 + \gamma] \to B$ é uma solução da EDF em medida:

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(y_s, s^*)dg^*(s), \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma], \\ \qquad\qquad y_{t_0} = \phi_{t_0}^*. \end{cases}$$

Então existe $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to B$ satisfazendo (4.17) *tal que $y = x^*$.*

Demonstração. Sejam $s \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$ e $t \in [-r, 0]$. Então:

$$x_{s^*}^*(t) = (x^*)_{s^*}(t) = x^*(s^* + t) = x^*(s + t) = x_s^*(t).$$

Portanto, $x_{s^*}^* = x_s^*$ para todo $s \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$, donde $f(x_{s^*}^*, s^*) = f(x_s^*, s^*)$ para todo $s \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$. Suponha que $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to B$ é uma solução de (4.17). Então, pelo Teorema 15, vale que:

$$x^*(t) = x^*(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_{s^*}^*, s^*)dg^*(s) \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma].$$

Como $f(x_{s^*}^*, s^*) = f(x_s^*, s^*)$ para $s \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$, temos pelo Teorema 14 que:

$$x^*(t) = x^*(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s^*)dg^*(s)$$

para $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$. Ainda, dado $\theta \in [-r, 0]$, temos:

$$x_{t_0}^*(\theta) = x^*(t_0 + \theta) = x((t_0 + \theta)^*) = \phi((t_0 + \theta)^*) = \phi^*(t_0 + \theta) = \phi_{t_0}^*(\theta),$$

pois $t_0+\theta \in [t_0-r,t_0]$ implica em $(t_0+\theta)^* \in [t_0-r,t_0]_{\mathbb{T}}$. De fato, como $t_0 \in \mathbb{T}$, temos $t_0-r \leq t_0+\theta \leq (t_0+\theta)^* \leq t_0^* = t_0$ e $(t_0+\theta)^* \in \mathbb{T}$, donde $(t_0+\theta)^* \in [t_0-r,t_0]_{\mathbb{T}}$. Portanto, vale que:

$$\begin{cases} x^*(t) = x^*(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s^*)dg^*(s), \ \text{para } t \in [t_0, t_0+\gamma], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_{t_0}^* = \phi_{t_0}^*. \end{cases}$$

Por outro lado, seja $y : [t_0-r, t_0+\gamma] \to B$ uma solução da EDF em medida:

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(y_s, s^*)dg^*(s), \ \text{para } t \in [t_0, t_0+\gamma], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad y_{t_0} = \phi_{t_0}^*. \end{cases}$$

Definamos $x : [t_0-r, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ como sendo $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0-r, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$. Então $x^*(t) = x(t^*) = x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0-r, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$, donde $x^* \mid_{[t_0-r,t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}} = y \mid_{[t_0-r,t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}}$. Mostraremos que $x^* = y$. Caso $[t_0-r, t_0+\gamma] = [t_0-r, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$, temos $x^* = x^* \mid_{[t_0-r,t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}} = y \mid_{[t_0-r,t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}} = y$. Suponha então que $[t_0-r, t_0+\gamma] \not\subset \mathbb{T}$. Dado $t \in [t_0-r, t_0+\gamma] \setminus \mathbb{T}$, mostremos que $y(t) = x^*(t) = x(t^*)$. De fato, $[t_0-r, t_0+\gamma] \setminus \mathbb{T} = (t_0-r, t_0+\gamma) \setminus \mathbb{T} = (t_0-r, t_0+\gamma) \cap C_{\mathbb{T}}$ é aberto, pois é a intersecção finita de abertos. Assim, como $[t_0-r, t_0+\gamma] \setminus \mathbb{T} \neq \emptyset$, não existe $\min[t_0-r, t_0+\gamma] \setminus \mathbb{T}$. Logo, existe $t' < t$ tal que $t' \in [t_0-r, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$.

Mostraremos agora que se existe $\beta \in [t_0-r, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$ discreto pela esquerda tal que $t \in (\rho(\beta), \beta]$, então $x^*(t) = y(t)$. De fato, seja $\beta \in [t_0-r, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$ discreto pela esquerda. Então $\beta > t_0 - r$, donde $t_0 - r \in \{s < \beta \ \mid \ s \in \mathbb{T}\} \neq \emptyset$. Logo:

$$t_0 - r \leq \rho(\beta) < \beta \leq t_0+\gamma \Rightarrow \rho(\beta) \in [t_0-r, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}.$$

Seja $u \in (\rho(\beta), \beta] \neq \emptyset$ (pois $\rho(\beta) < \beta$, uma vez que β é discreto pela esquerda). Temos $u^* = \inf\{s \in \mathbb{T} \ \mid \ s \geq u\} = \beta$. De fato, $\beta \in \{s \in \mathbb{T} \ \mid \ s \geq u\}$, donde $u^* \leq \beta$. Caso $u^* < \beta$, temos que $u^* \in \{s \in \mathbb{T} \ \mid \ s < \beta\}$, donde vale que:

$$\rho(\beta) < u \leq u^* \leq \sup\{s \in \mathbb{T} \ \mid \ s < \beta\} = \rho(\beta),$$

o que é um absurdo. Logo, $u^* = \beta$. Assim, $x^*(u) = x(u^*) = x(\beta)$. Ainda, temos:

$$y(u) = y(t_0) + \int_{t_0}^{u} f(y_s, s^*)dg^*(s) \text{ e}$$
$$y(\beta) = y(u^*) = y(t_0) + \int_{t_0}^{u^*} f(y_s, s^*)dg^*(s).$$

Pelo Lema 8, temos:

$$\int_{t_0}^{u} f(y_s, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0^*}^{u^*} f(y_s, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{u^*} f(y_s, s^*)dg^*(s).$$

Assim, $y(u) = y(u^*) = y(\beta) = x(\beta) = x(u^*) = x^*(u)$. Como $t \in [t_0-r, t_0+\gamma] \setminus \mathbb{T}$ (aberto), existe $\epsilon > 0$ tal que $B(t,\epsilon) \cap [t_0-r, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}} = \emptyset$. Dessa forma, como $t^* \in \mathbb{T}$ e

$t^* \geq t$, temos $t^* > t$. Mostremos que $\rho(t^*) < t$. De fato, $\rho(t^*) \in \mathbb{T}$, donde $\rho(t^*) \notin B(t, \epsilon)$. Em particular, $\rho(t^*) \neq t$. Caso $\rho(t^*) = \sup\{s \in \mathbb{T} \ | \ s < t^*\} = t^*$, então, como $t < t^*$, existe $s \in \mathbb{T}$ tal que $t < s < t^*$. Entretanto, isso implica em $s \in \{z \in \mathbb{T} \ | \ z \geq t\}$, donde $t^* = \inf\{z \in \mathbb{T} \ | \ z \geq t\} \leq s < t^*$, o que é um absurdo. Logo, $\rho(t^*) < t^*$. Suponha que $\rho(t^*) > t$. Então $\rho(t^*) \in \{s \in \mathbb{T} \ | s \geq t\}$, donde:

$$t^* = \inf\{s \in \mathbb{T} \ | s \geq t\} \leq \rho(t^*) < t^*,$$

o que é um absurdo. Portanto, $\rho(t^*) < t < t^*$. Em particular, $t \in (\rho(t^*), t^*]$ com t^* discreto pela esquerda, donde $x^*(t) = y(t)$.

Logo, $y = x^*$, donde $y_s = x^*_s$ e $x^*(t) = x^*(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x^*_s, s^*)dg^*(s)$ para todos $t, s \in [t_0, t_0 + \gamma]$. Ainda, $x^*_{t_0} = y_{t_0} = \phi^*_{t_0}$.

Portanto, $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ é tal que $y = x^*$. Nos resta agora mostrar que x é solução de (4.17).

Sejam $A_1 : [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ e $A_2 : [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ funções dadas por $A_1(s) = f(x^*_s, s^*)$ e $A_2(s) = f(x^*_{s^*}, s^*)$ para todo $s \in [t_0, t_0 + \gamma]$. Dado $s \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$, temos $A_2(s) = f(x^*_{s^*}, s^*) = f(x^*_s, s^*) = A_1(s)$. Dado $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$, como a integral $\int_{t_0}^{t^*} f(y_s, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} f(x^*_s, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} A_1(s)dg^*(s)$ existe, temos pelo Teorema 14 que a integral $\int_{t_0}^{t^*} A_2(s)dg^*(s)$ existe e vale que:

$$\int_{t_0}^{t^*} A_2(s)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} f(x^*_{s^*}, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} f(x^*_s, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} A_1(s)dg^*(s).$$

Com isso, sabemos que $\int_{t_0}^{t^*} f(x^*_{s^*}, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} A_2(s)dg^*(s)$ e $\int_{t_0}^{t^*} f(x^*_s, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} A_1(s)dg^*(s)$ existem. Como $t_0, t \in [t_0, t^*]$ com $t_0 \leq t$, temos pelo Lema 8 que:

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} f(x^*_s, s^*)dg^*(s) &= \int_{t_0}^{t} A_1(s)dg^*(s) = \int_{t_0^*}^{t^*} A_1(s)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} A_1(s)dg^*(s) = \\ &= \int_{t_0}^{t^*} A_2(s)dg^*(s) = \int_{t_0^*}^{t^*} A_2(s)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t} A_2(s)dg^*(s) = \\ &= \int_{t_0}^{t} f(x^*_{s^*}, s^*)dg^*(s).\end{aligned}$$

Isto é, ambas as integrais $\int_{t_0}^{t} f(x^*_s, s^*)dg^*(s)$ e $\int_{t_0}^{t} f(x^*_{s^*}, s^*)dg^*(s)$ existem e vale a igualdade acima.

Dessa forma, dado $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$ e usando o Teorema 12, temos:

$$\begin{aligned}x(t^*) = x^*(t) &= x^*(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x^*_s, s^*)dg^*(s) = x(t_0^*) + \int_{t_0}^{t} f(x^*_{s^*}, s^*)dg^*(s) = \\ &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f^*(x^*_s, s)dg^*(s) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x^*_s, s)\Delta g(s),\end{aligned}$$

donde:

$$x(t) = x(t^*) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s)\Delta g(s) \text{ para todo } t \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}.$$

Por fim, se $t \in [t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}$, então $t - t_0 \in [-r, 0]$ e:

$$x(t) = x(t^*) = x^*(t) = x_{t_0}^*(t - t_0) = \phi_{t_0}^*(t - t_0) = \phi^*(t) = \phi(t^*) = \phi(t).$$

Assim, x é solução de (4.17). □

Apresentaremos aqui um lema que garante, sob certas condições, a existência da integral de Perron-Stietjes do produto de uma função L por uma função regrada, dado que a integral de Perron-Stieltjes de L exista. Entretanto, não daremos aqui uma prova desse lema, uma vez que esta utiliza de resultados que fogem do escopo desse texto. Uma versão menos geral desse resultado e sua demonstração podem ser encontradas em (1, Lema 3.31), e a demonstração para o enunciado apresentado a seguir segue de maneira análoga.

Lema 12. *Sejam $[t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$ um intervalo em escalas temporais e $g : [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente. Se existe uma função $L : [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ Δ-Perron integrável com respeito a g, então $\int_{u_1}^{u_2} L(s)h^*(s)\Delta g(s)$ existe no sentido da Δ-integral de Perron-Stieltjes para toda função regrada $h^* : [t_0, t_0 + \gamma] \to \mathbb{R}$ e $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$ tais que $u_1 \leq u_2$.*

Apresentaremos agora um lema que nos permite encontrar equivalências entre as condições usualmente exigidas sobre EDFs em medida para condições análogas sobre equações dinâmicas. Em particular, esse resultado é importante para permitir a aplicação do Teorema 20. A versão que mostramos aqui é mais geral que aquela mostrada em (1, Lema 3.32) e (12), mas tem demonstração análoga.

Lema 13. *Sejam $[t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$ um intervalo em uma escala temporal $\mathbb{T}$ tal que $t_0 \in \mathbb{T}$, $B \subset X$ aberto, $O = G([t_0 - r, t_0 + \gamma], B)$, $P = G([-r, 0], B)$ e $f : P \times [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ uma função. Seja ainda $g : [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ uma função. Definamos $f^*(z, t) = f(z, t^*)$ para todo $z \in P$ e $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$. Valem as seguintes afirmações:*

1. *Se a Δ-integral de Perron-Stieltjes $\int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(y_s, s)\Delta g(s)$ existe para cada $y \in O$, então a integral de Perron-Stieltjes $\int_{t_0}^{t_0+\gamma} f^*(y_s, s)dg^*(s)$ existe para todo $y \in O$.*
2. *Suponha que há uma função $M : [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ Perron-Stieltjes Δ-integrável com respeito a g tal que, para cada $y \in O$ e $u_1, u_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$, com $u_1 \leq u_2$, tenhamos:*

$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} f(y_s, s)\Delta g(s) \right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s)\Delta g(s).$$

Então, para $t_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq t_0 + \gamma$ e $y \in O$, temos:

$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} f^*(y_s, s)dg^*(s) \right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} M^*(s)dg^*(s).$$

3. *Suponha que g seja não-decrescente e que exista uma função $L : [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ Perron-Stieltjes Δ-integrável com respeito a g tal que, para $y, z \in O$ e $u_1, u_2 \in [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$, com $u_1 \leq u_2$, tenhamos:*
$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} [f(y_s, s) - f(z_s, s)] \Delta g(s) \right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} L(s) \left\| y_s - z_s \right\|_\infty \Delta g(s).$$
Então, para $t_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq t_0+\gamma$ e $y, z \in O$, obtemos:
$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} [f^*(y_s, s) - f^*(z_s, s)] dg^*(s) \right\| \leq \int_{u_1}^{u_2} L^*(s) \left\| y_s - z_s \right\|_\infty dg^*(s).$$

Demonstração. Seja $y \in O$. Se a Δ-integral de Perron-Stieltjes $\int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(y_s, s)\Delta s$ existe, então pelos Teoremas 12 e 14 temos:

$$\int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(y_s, s)\Delta g(s) \underset{\text{Teorema 12}}{=} \int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(y_{s^*}, s^*) dg^*(s) \underset{\text{Teorema 14}}{=} \int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(y_s, s^*) dg^*(s) =$$
$$= \int_{t_0}^{t_0+\gamma} f^*(y_s, s) dg^*(s),$$

donde o item 1 segue.

Com as igualdades acima e usando os Teoremas 12, 14 e o Lema 8, dados $u_1, u_2 \in [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$ com $u_1 \leq u_2$, temos:

$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} f^*(y_s, s) dg^*(s) \right\| = \left\| \int_{u_1}^{u_2} f(y_{s^*}, s^*) dg^*(s) \right\| \underset{\text{Lema 8}}{=} \left\| \int_{u_1^*}^{u_2^*} f(y_{s^*}, s^*) dg^*(s) \right\| =$$
$$= \left\| \int_{u_1^*}^{u_2^*} f(y_s, s)\Delta g(s) \right\| \leq \int_{u_1^*}^{u_2^*} M(s)\Delta g(s) \underset{\text{Teorema 12}}{=} \int_{u_1^*}^{u_2^*} M^*(s) dg^*(s) =$$
$$\underset{\text{Lema 8}}{=} \int_{u_1}^{u_2} M^*(s) dg^*(s),$$

donde o item 2 segue.

Dados $y, z \in O$, temos $y - z \in O$ (pois $G([t_0 - r, t_0+\gamma], B) = O$ é espaço vetorial), donde $s \mapsto \|(y-z)_s\|_\infty = \|y_s - z_s\|_\infty$ é regrada, pelo Lema 9. Então, pelo Lema 12, temos que $\int_{u_1}^{u_2} L(s) \|y_s - z_s\|_\infty \Delta g(s)$ existe para cada $u_1, u_2 \in [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}$, com $u_1 \leq u_2$. Ainda:

$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} [f^*(y_s, s) - f^*(z_s, s)] dg^*(s) \right\| \underset{\text{Teorema 14}}{=} \left\| \int_{u_1}^{u_2} [f(y_{s^*}, s^*) - f(z_{s^*}, s^*)] dg^*(s) \right\| =$$
$$\underset{\text{Lema 8}}{=} \left\| \int_{u_1^*}^{u_2^*} [f(y_{s^*}, s^*) - f(z_{s^*}, s^*)] dg^*(s) \right\| \underset{\text{Teoremas 12 e 14}}{=}$$
$$= \left\| \int_{u_1^*}^{u_2^*} [f(y_s, s) - f(z_s, s)] \Delta g(s) \right\| \leq$$
$$\leq \int_{u_1^*}^{u_2^*} L(s) \|y_s - z_s\|_\infty \Delta g(s) \underset{\text{Teorema 12}}{=}$$
$$= \int_{u_1^*}^{u_2^*} L^*(s) \|y_s - z_s\|_\infty dg^*(s) \underset{\text{Lema 8}}{=}$$
$$= \int_{u_1}^{u_2} L^*(s) \|y_s - z_s\|_\infty dg^*(s),$$

donde o item 3 segue. $\square$

Usaremos do Teorema 16 para mostrar a existência da solução de equações dinâmicas em escalas, de maneira análoga a como fizemos para EDFs em medida. Dados $t_0 \in \mathbb{R}$, $r, \gamma > 0$, temos:

Teorema 21. *Sejam $O \subset G([t_0 - r, t_0 + \gamma], X)$ com a propriedade de prolongamento, $P = \{y_t \mid y \in O, t \in [t_0, t_0 + \gamma]\}$, $\phi \in P$, $g : [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ uma função contínua pela esquerda não-decrescente e $f : P \times [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ satisfaz as condições do Lema* 13*. Seja $F : O \times [t_0, t_0 + \gamma] \to G([t_0 - r, t_0 + \gamma], X)$ dada por* (4.6)*. Se $x : [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ é uma solução da EDO generalizada:*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x, t)$$

com condição inicial:

$$x(t_0)(\alpha) = \begin{cases} \phi(\alpha - t_0), \text{ se } t_0 - r \leq \alpha \leq t_0, \\ \phi(0), \text{ se } t_0 \leq \alpha \leq t_0 + \gamma. \end{cases}$$

Então existe uma função $y \in O$, tal que y^* é dada por:

$$y^*(\alpha) = \begin{cases} x(t_0)(\alpha), \text{ se } t_0 - r \leq \alpha \leq t_0, \\ x(\alpha)(\alpha), t_0 \leq \alpha \leq t_0 + \gamma, \end{cases}$$

e y é solução da equação dinâmica em escalas:

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(y_s^*, s)\Delta g(s), \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}, \\ y(t) = \phi(t), \text{ para } t \in [t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

Demonstração. Pelo Lema 13, sabemos que f^* satisfaz todas as condições do Teorema 16. Ainda, pelo Lema 7, g^* é contínua pela esquerda e não-decrescente. Assim, existe solução z da EDF em medida:

$$\begin{cases} z(t) = z(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f^*(z_s, s)dg^*(s), \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma], \\ z_{t_0} = \phi. \end{cases}$$

Portanto, pelo Teorema 20, existe $y : [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$ tal que $y^* = z$ e y é solução da equação dinâmica em escalas:

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(y_s^*, s)\Delta g(s), \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}, \\ y(t) = \phi(t), \text{ para } t \in [t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}. \end{cases}$$

□

Por fim, usaremos do Teorema 17 para mostrar a existência de soluções maximais para equações dinâmicas em escalas.

Teorema 22. *Sejam* $\mathbb{T}$ *uma escala temporal,* $r, \gamma > 0$*,* $t_0 \in \mathbb{T}$*,* $O \subset G([t_0 - r, t_0 + \gamma], X)$ *aberto com a propriedade de prolongamento,* $P = \{y_t \mid y \in O, t \in [t_0, t_0 + \gamma]\} \subset G([-r, 0], X)$ *e* $g : [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua pela esquerda e não-decrescente. Seja* $f : P \times [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \to X$ *tal que, para* $y, z \in O$ *e* $s_1, s_2 \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$*, com* $s_1 \leq s_2$*, valem as seguintes propriedades:*

1. *A* Δ*-integral de Perron-Stieltjes:*
$$\int_{s_1}^{s_2} f(y_s^*, s)\Delta g(s)$$
existe.

2. *Existe uma função* $M : [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ Δ*-Perron integrável com respeito a* g *tal que:*
$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} f(y_s^*, s)\Delta g(s) \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} M(s)\Delta g(s).$$

3. *Existe uma função* $L : [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ Δ*-Perron integrável com respeito a* g *tal que:*
$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} [f(y_s^*, s) - f(z_s^*, s)]\, \Delta g(s) \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} L(s) \|y_s^* - z_s^*\|_\infty \Delta g(s).$$

Seja ainda $(\psi, \tau_0) \in P \times [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$ *e assuma que* $\Delta^+ g(\tau_0) = 0$ *e que* τ_0 *é denso pela direita. Então, existe uma única solução maximal* $y : [\tau_0, \omega(\tau_0, \psi))_{\mathbb{T}} \to X$ *da equação dinâmica em escalas:*
$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y_s^*, s)\Delta g(s), t \geq t_0,$$
com condição inicial $y(t) = \psi(t)$ *para todo* $t \in [\tau_0 - r, \tau_0]_{\mathbb{T}}$*.*

Demonstração. Pelo Teorema 12 e pelos Lemas 7 e 13, sabemos que $f^* : P \times [t_0, +\infty) \to X$ e $g^* : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes propriedades:

1. A integral de Perron-Stieltjes:
$$\int_{s_1}^{s_2} f^*(y_s^*, s) dg^*(s)$$
existe.

2. Existe uma função $M : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ Perron-Stieltjes integrável com respeito a g^* tal que:
$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} f^*(y_s^*, s) dg^*(s) \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} M(s) dg^*(s).$$

3. Existe uma função $L : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ Perron-Stieltjes integrável com respeito a g^* tal que:
$$\left\| \int_{s_1}^{s_2} [f^*(y_s^*, s) - f^*(z_s^*, s)]\, dg^*(s) \right\| \leq \int_{s_1}^{s_2} L(s) \|y_s^* - z_s^*\|_\infty dg^*(s).$$

4. g^* é contínua pela esquerda e não-decrescente.

5. $\Delta g^*(\tau_0) = 0$.

Pelo Teorema 17, existe única $x : [\tau_0, \omega(\tau_0, \psi)) \to X$ solução maximal da EDF em medida:

$$\begin{cases} x(t) = x(\tau_0) + \displaystyle\int_{\tau_0}^{t} f^*(x_s, s)dg^*(s) \text{ para } t \in [\tau_0, \omega(\tau_0, \psi)), \\ x_{\tau_0} = \psi^*_{\tau_0}. \end{cases}$$

Note ainda que, pelo Teorema 14, temos:

$$x(t) = x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{t} f^*(x_s, s)dg^*(s) = x(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{t} f(x_s, s^*)dg^*(s) \text{ para } t \in [\tau_0, \omega(\tau_0, \psi)).$$

Usando o Teorema 20, temos que existe $y : [\tau_0, \omega(\tau_0, \psi))_{\mathbb{T}} \to X$ uma solução maximal de:

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y^*_s, s)\Delta g(s),$$

com condição inicial $y(t) = \psi(t)$ para todo $t \in [\tau_0 - r, \tau_0]_{\mathbb{T}}$ tal que $y^* = x$. Note que, pela unicidade de x e pelo fato de haver uma correspondência entre as soluções da equação dinâmica em escalas acima e de certas EDFs em medida (como descrito pelo Teorema 20), temos que, se z é uma solução maximal da equação dinâmica em escalas, devemos ter $z^* = x = y^*$. Em particular, para $t \in [\tau_0, \omega(\tau_0, \psi))_{\mathbb{T}}$, temos:

$$y(t) = y(t^*) = y^*(t) = z^*(t) = z(t^*) = z(t),$$

donde $y = z$. Assim, a solução maximal é única. $\square$

4.5 Equações dinâmicas funcionais impulsivas em escalas temporais

Sejam $[t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$ um intervalo em escalas temporais, $\{t_k\}_{k=1}^m \subset [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$ com $t_0 \leq t_1 < ... < t_m < t_0 + \gamma$ momentos de impulso e operadores $I_k : B \to X$, com $B \subset X$ aberto, $k \in \{1, ..., m\}$. O impulso é descrito por:

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = I_k(x(t_k^-)) \text{ para } k \in \{1, ..., m\}.$$

Adotaremos a convenção de que $x(t^+) = x(t)$ se $t \in \mathbb{T}$ e t é discreto pela direita e $x(t^-) = x(t)$ se $t \in \mathbb{T}$ e é discreto pela esquerda.

Se $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to B$ for contínua pela esquerda, então o impulso pode ser reescrito como:

$$I_k(x(t_k)) = x(t_k^+) - x(t_k) \text{ para } k \in \{1, ..., m\}.$$

Assumiremos que $I + I_k : B \to B$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$, de forma que $x(t_k^+) \in B$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$.

Note que, com essas considerações, se t_k for discreto pela direita, temos $I_k(x(t_k)) = 0$. Por isso, podemos assumir, sem perda de generalidade, que t_k é denso pela direita para todo $k \in \{1, ..., m\}$. Isso nos leva à seguinte definição, mais geral que aquela apresentada em (1):

Definição 31. *Sejam $B \subset X$ é aberto, $O = G([t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}, B)$, $P = \{x_t^* \mid x \in O, t \in [t_0, t_0 + \gamma]\}$, $f : P \times [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ uma função, $g : [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ uma função, $\phi \in G([t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}, B)$ e $t_1, t_2, ..., t_m \in \mathbb{T}$ densos pela direita com $t_0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_m < t_0 + \gamma$, $I_1, ..., I_m : B \to X$ operadores impulso com $I + I_k : B \to B$ para $k \in \{1, ..., m\}$. Dizemos que o seguinte sistema é uma EDF impulsiva em escalas temporais:*

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s)\Delta g(s) + \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ k < t}} I_k(x(t_k)), \ \text{para } t \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}, \\ x(t) = \phi(t), \ \text{para } t \in [t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}. \end{cases} \tag{4.18}$$

Daremos agora a definição de uma solução de (4.18), de maneira análoga àquela dada em (1, Definição 3.33).

Definição 32. *Nas condições da definição anterior, dizemos que $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ é uma solução da EDF impulsiva em escalas temporais em $[t_0 - r, t_0 + \sigma]_{\mathbb{T}}$ se:*

1. *x é contínua pela esquerda.*
2. *A Δ-integral de Perron-Stieltjes $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\gamma} f(x_s^*, s)\Delta g(s)$ existe.*
3. *$x_t^* \in P$ para $t \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$.*
4. *As igualdades em (4.18) valem.*

Provaremos agora um resultado análogo ao Teorema 20, mas referente à equações dinâmicas funcionais impulsivas em escalas temporais. Apresentaremos uma versão mais geral do teorema dado em (1, Teorema 3.34), e daquele encontrado em (12), porém com demonstração análoga.

Teorema 23. *Sejam $r, \gamma > 0$, $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $t_0 \in \mathbb{T}$ tal que $t_0 - r, t_0 + \gamma \in \mathbb{T}$, $B \subset X$ aberto, $O = G^-([t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}, B)$, $P = \{x_t^* \mid x \in O, t \in [t_0, t_0 + \gamma]\}$, $f : P \times [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$, $g : [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ e $\phi \in G([t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}, B)$. Sejam ainda $t_1, ..., t_m \in \mathbb{T}$ pontos de impulso densos pela direita satisfazendo $t_0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_m < t_0 + \gamma$, $I_1, ..., I_m : B \to X$ são operadores impulso tais que $I + I_k : B \to B$ está bem definido para todo $k \in \{1, ..., m\}$, em que $I : B \to B$ é o operador identidade. Se $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to B$ é uma solução da equação dinâmica funcional impulsiva em escalas temporais (4.18), então $x^* : [t_0 - r, t_0 + \gamma] \to B$ é uma solução da EDF em medida com impulso:*

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(y_s, s^*)dg^*(s) + \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ t_k < t}} I_k(y(t_k)), \ \text{para } t \in [t_0, t_0 + \gamma], \\ y_{t_0} = \phi_{t_0}^*. \end{cases} \tag{4.19}$$

Reciprocamente, se $y : [t_0 - r, t_0 + \gamma] \to B$ é solução da EDF em medida com impulso (4.19), então existe $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to B$ satisfazendo (4.18) tal que $y = x^*$.

Demonstração. Sejam $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to B$ uma solução de (4.18), $F_1 : [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ dada por $F_1(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s)\Delta g(s)$ para $t \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$ e $F_2 : [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ dada por $F_2(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f^*(x_s^*, s) dg^*(s)$ para $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$. Tomando $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$ e usando o Teorema 15, obtemos:

$$F_1^*(t) = F_1(t^*) = \int_{t_0}^{t^*} f(x_s^*, s)\Delta g(s) = \int_{t_0}^{t} f^*(x_s^*, s) dg^*(s) = \int_{t_0}^{t} f(x_{s^*}^*, s^*) dg^*(s) = F_2(t).$$

Seja $k \in \{1, ..., m\}$. Como $t_k \in \mathbb{T}$, temos $x(t_k) = x(t_k^*) = x^*(t_k)$. Ainda, seja $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$. Como $t \le t^*$, temos que $t_k < t$ implica em $t_k < t^*$. Por outro lado, suponha que $t_k < t^*$ e $t \le t_k$. Então $t_k \in \{s \in \mathbb{T} \ \mid \ s \ge t\}$, donde $t_k \ge \inf\{s \in \mathbb{T} \ \mid \ s \ge t\} = t^* > t_k$, o que é um absurdo. Logo, $t_k < t^*$ implica em $t_k < t$. Dessas considerações, concluímos que $t_k < t$ se, e somente se, $t_k < t^*$. Em particular, $\{t_k \ \mid \ k \in \{1, ..., m\}, t_k < t\} = \{t_k \ \mid \ k \in \{1, ..., m\}, t_k < t^*\}$. Com isso, temos:

$$\begin{aligned}
x^*(t) = x(t^*) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t^*} f(x_s^*, s)\Delta g(s) + \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ t_k < t^*}} I_k(x(t_k)) = \\
= x(t_0^*) + \int_{t_0}^{t} f(x_{s^*}^*, s^*) dg^*(s) + \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ t_k < t}} I_k(x(t_k^*)) = \\
= x^*(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_{s^*}^*, s^*) dg^*(s) + \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ t_k < t}} I_k(x^*(t_k)) \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma].
\end{aligned}$$

Dado $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$, pelo Lema 8, vale que:

$$\int_{t_0}^{t} f(x_{s^*}^*, s^*) dg^*(s) = \int_{t_0^*}^{t^*} f(x_{s^*}^*, s^*) dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} f(x_{s^*}^*, s^*) dg^*(s).$$

Note que, dado $s \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$, temos $s^* = s$, donde $x_{s^*}^* = x_s^*$ e $f(x_{s^*}^*, s^*) = f(x_s^*, s^*)$. Assim, usando o Teorema 14, temos:

$$\int_{t_0}^{t^*} f(x_{s^*}^*, s^*) dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} f(x_s^*, s^*) dg^*(s) \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma].$$

Usando novamente o Lema 8, segue que:

$$\int_{t_0}^{t^*} f(x_s^*, s^*) dg^*(s) = \int_{t_0^*}^{t^*} f(x_s^*, s^*) dg^*(s) = \int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s^*) dg^*(s) \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma].$$

Portanto:

$$x^*(t) = x^*(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s^*) dg^*(s) + \sum_{\substack{k \in \{1,...,m\} \\ t_k < t}} I_k(x^*(t_k)) \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \gamma].$$

Ainda, dado $\theta \in [-r, 0]$, temos $t_0 + \theta \in [t_0 - r, t_0]$, donde $t_0 - r \le t_0 + \theta \le (t_0 + \theta)^* \le t_0^* = t_0$. Assim, $(t_0 + \theta)^* \in [t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}$. Logo:

$$x_{t_0}^*(\theta) = x^*(t_0 + \theta) = x((t_0 + \theta)^*) = \phi((t_0 + \theta)^*) = \phi^*(t_0 + \theta) = \phi_{t_0}^*(\theta),$$

donde $x^*_{t_0} = \phi^*_{t_0}$. Dessa forma, mostramos que x^* é solução de:

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(y_s, s^*)dg^*(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\}\\ t_k<t}} I_k(y(t_k)), \text{ para } t \in [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}, \\ y_{t_0} = \phi^*_{t_0}. \end{cases}$$

Reciprocamente, seja $y : [t_0 - r, t_0 + \gamma] \to B$ uma solução da EDF em medida com impulso:

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(y_s, s^*)dg^*(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\}\\ t_k<t}} I_k(y(t_k)), \text{ para } t \in [t_0, t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}, \\ y_{t_0} = \phi^*_{t_0}. \end{cases}$$

Definamos $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ dada por $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$. Então $x^* : [t_0 - r, t_0 + \gamma] \to B$ é tal que $x^*(t) = x(t^*) = x(t) = y(t)$ para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$. Assim, $x^* \mid_{[t_0-r,t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}} = y \mid_{[t_0-r,t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}}$. Mostremos que $x^* = y$. Caso $[t_0 - r, t_0 + \gamma] = [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$, temos $x^* = x^* \mid_{[t_0-r,t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}} = y \mid_{[t_0-r,t_0+\gamma]_{\mathbb{T}}} = y$. Suponha então que $[t_0-r, t_0+\gamma] \not\subset \mathbb{T}$. Dado $t \in [t_0-r, t_0+\gamma]\backslash\mathbb{T}$, mostremos que $y(t) = x^*(t) = x(t^*)$. De fato, $[t_0-r, t_0+\gamma]\backslash\mathbb{T} = (t_0-r, t_0+\gamma)\backslash\mathbb{T} = (t_0-r, t_0+\gamma)\cap C_{\mathbb{T}}$ é aberto, pois é a intersecção finita de abertos. Assim, como $[t_0 - r, t_0 + \gamma] \setminus \mathbb{T} \neq \emptyset$, não existe $\min[t_0 - r, t_0 + \gamma] \setminus \mathbb{T}$. Logo, existe $t' < t$ tal que $t' \in [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$.

Mostraremos agora que se existe $\beta \in [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$ discreto pela esquerda tal que $t \in (\rho(\beta), \beta]$, então $x^*(t) = y(t)$. De fato, seja $\beta \in [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$ discreto pela esquerda. Então $\beta > t_0 - r$, donde $t_0 - r \in \{s < \beta \mid s \in \mathbb{T}\} \neq \emptyset$. Logo:

$$t_0 - r \leq \rho(\beta) < \beta \leq t_0 + \gamma \Rightarrow \rho(\beta) \in [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}.$$

Seja $u \in (\rho(\beta), \beta] \neq \emptyset$ (pois $\rho(\beta) < \beta$, uma vez que β é discreto pela esquerda). Temos $u^* = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s \geq u\} = \beta$. De fato, $\beta \in \{s \in \mathbb{T} \mid s \geq u\}$, donde $u^* \leq \beta$. Caso $u^* < \beta$, temos que $u^* \in \{s \in \mathbb{T} \mid s < \beta\}$, donde vale que:

$$\rho(\beta) < u \leq u^* \leq \sup\{s \in \mathbb{T} \mid s < \beta\} = \rho(\beta),$$

o que é um absurdo. Logo, $u^* = \beta$. Assim, $x^*(u) = x(u^*) = x(\beta)$. Ainda, temos:

$$y(u) = y(t_0) + \int_{t_0}^{u} f(y_s, s^*)dg^*(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\}\\ t_k<u}} I_k(y(t_k)) \text{ e}$$

$$y(\beta) = y(u^*) = y(t_0) + \int_{t_0}^{u^*} f(y_s, s^*)dg^*(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\}\\ t_k<u^*}} I_k(y(t_k)).$$

Pelas considerações feitas na primeira parte da demonstração, temos:

$$\sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\}\\ t_k<u}} I_k(y(t_k)) = \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\}\\ t_k<u^*}} I_k(y(t_k)) = \sum_{\substack{k\in\{1,\dots,m\}\\ t_k<\beta}} I_k(y(t_k)).$$

Ainda, pelo Lema 8, temos:

$$\int_{t_0}^{u} f(y_s, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0^*}^{u^*} f(y_s, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{u^*} f(y_s, s^*)dg^*(s).$$

Logo:

$$y(u) = y(t_0) + \int_{t_0}^{u} f(y_s, s^*)dg^*(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,m\}\\ t_k<u}} I_k(y(t_k)) =$$
$$= y(t_0) + \int_{t_0}^{u^*} f(y_s, s^*)dg^*(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,m\}\\ t_k<u^*}} I_k(y(t_k)) = y(u^*) = y(\beta).$$

Assim, $y(u) = y(u^*) = y(\beta) = x(\beta) = x(u^*) = x^*(u)$. Como $t \in [t_0 - r, t_0 + \gamma] \setminus \mathbb{T}$ (aberto), existe $\epsilon > 0$ tal que $B(t, \epsilon) \cap [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} = \emptyset$. Dessa forma, como $t^* \in \mathbb{T}$ e $t^* \geq t$, temos $t^* > t$. Mostremos que $\rho(t^*) < t$. De fato, $\rho(t^*) \in \mathbb{T}$, donde $\rho(t^*) \notin B(t, \epsilon)$. Em particular, $\rho(t^*) \neq t$. Se $\rho(t^*) = \sup\{s \in \mathbb{T} \mid s < t^*\} = t^*$, então, como $t < t^*$, existe $s \in \mathbb{T}$ tal que $t < s < t^*$. Entretanto, isso implica em $s \in \{z \in \mathbb{T} \mid z \geq t\}$, donde $t^* = \inf\{z \in \mathbb{T} \mid z \geq t\} \leq s < t^*$, o que é um absurdo. Logo, $\rho(t^*) < t^*$. Suponha que $\rho(t^*) > t$. Então $\rho(t^*) \in \{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\}$, donde:

$$t^* = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s \geq t\} \leq \rho(t^*) < t^*,$$

o que é um absurdo. Portanto, $\rho(t^*) < t < t^*$. Em particular, $t \in (\rho(t^*), t^*]$ com t^* discreto pela esquerda, donde $x^*(t) = y(t)$.

Logo, $y = x^*$, donde $y_s = x_s^*$ e $x^*(t) = x^*(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s^*)dg^*(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,\ldots,m\}\\ t_k<t}} I_k(x^*(t_k))$ para todos $t, s \in [t_0, t_0 + \gamma]$. Ainda, $x_{t_0}^* = y_{t_0} = \phi_{t_0}^*$.

Portanto, $x : [t_0 - r, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}} \to X$ é tal que $y = x^*$. Nos resta agora mostrar que x é solução de (4.18).

Sejam $A_1 : [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ e $A_2 : [t_0, t_0 + \gamma] \to X$ funções dadas por $A_1(s) = f(x_s^*, s^*)$ e $A_2(s) = f(x_{s^*}^*, s^*)$ para todo $s \in [t_0, t_0 + \gamma]$, respectivamente. Dado $s \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}$, temos $A_2(s) = f(x_{s^*}^*, s^*) = f(x_s^*, s^*) = A_1(s)$. Dado $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$, como a integral $\int_{t_0}^{t^*} f(y_s, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} f(x_s^*, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} A_1(s)dg^*(s)$ existe, temos pelo Teorema 14 que a integral $\int_{t_0}^{t^*} A_2(s)dg^*(s)$ existe e vale que:

$$\int_{t_0}^{t^*} A_2(s)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} f(x_{s^*}^*, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} f(x_s^*, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} A_1(s)dg^*(s).$$

Com isso, sabemos que $\int_{t_0}^{t^*} f(x_{s^*}^*, s^*)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} A_2(s)dg^*(s)$ e $\int_{t_0}^{t^*} f(x_s^*, s^*)dg^*(s) =$

$\int_{t_0}^{t^*} A_1(s)dg^*(s)$ existem. Como $t_0, t \in [t_0, t^*]$ com $t_0 \leq t$, temos pelo Lema 8 que:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s^*)dg^*(s) &= \int_{t_0}^{t} A_1(s)dg^*(s) = \int_{t_0^*}^{t^*} A_1(s)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t^*} A_1(s)dg^*(s) = \\
&= \int_{t_0}^{t^*} A_2(s)dg^*(s) = \int_{t_0^*}^{t^*} A_2(s)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t} A_2(s)dg^*(s) = \\
&= \int_{t_0}^{t} f(x_{s^*}^*, s^*)dg^*(s).
\end{aligned}$$

Isto é, ambas as integrais $\int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s^*)dg^*(s)$ e $\int_{t_0}^{t} f(x_{s^*}^*, s^*)dg^*(s)$ existem e vale a igualdade acima.

Dessa forma, dado $t \in [t_0, t_0 + \gamma]$ e usando o Teorema 12 e o fato de que $t_k \in \mathbb{T}$ para $k \in \{1, ..., m\}$, temos:

$$\begin{aligned}
x(t^*) = x^*(t) = x^*(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s^*)dg^*(s) &+ \sum_{\substack{k\in\{1,...,m\} \\ t_k<t}} I_k(x^*(t_k)) = \\
= x(t_0^*) + \int_{t_0}^{t} f(x_{s^*}^*, s^*)dg^*(s) &+ \sum_{\substack{k\in\{1,...,m\} \\ t_k<t}} I_k(x(t_k^*)) = \\
= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f^*(x_s^*, s)dg^*(s) &+ \sum_{\substack{k\in\{1,...,m\} \\ t_k<t}} I_k(x(t_k)) = \\
= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s)\Delta g(s) &+ \sum_{\substack{k\in\{1,...,m\} \\ t_k<t}} I_k(x(t_k)).
\end{aligned}$$

Donde:

$$x(t) = x(t^*) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s)\Delta g(s) + \sum_{\substack{k\in\{1,...,m\} \\ t_k<t}} I_k(x(t_k)) \text{ para todo } t \in [t_0, t_0 + \gamma]_{\mathbb{T}}.$$

Por fim, se $t \in [t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}$, então $t - t_0 \in [-r, 0]$ e:

$$x(t) = x(t^*) = x^*(t) = x_{t_0}^*(t - t_0) = \phi_{t_0}^*(t - t_0) = \phi^*(t) = \phi(t^*) = \phi(t).$$

Assim, x é solução de (4.18). $\square$

5 MÉTODO DA MÉDIA

Historicamente, o estudo de equações diferenciais esteve profundamente ligado à Física. Se destaca, nesse aspecto, o estudo do movimento dos corpos celestes, o qual foi um dos primeiros sistemas físicos analisados à luz do ferramental do Cálculo, pelo físico e matemático Isaac Newton. Durante o estudo desses sistemas, ao longo dos séculos, alguns fatos se tornaram evidentes: primeiramente, notou-se que, para sistemas com 3 ou mais corpos, não se podia obter, no caso geral, uma solução analítica que descrevesse a posição de todos os corpos em função do tempo; além disso, notou-se que, em intervalos curtos de tempo, a interação entre os corpos poderia gerar uma variação muito grande na posição de um dado corpo, tornando os sistemas altamente sensíveis à variações nas condições iniciais e particularmente difíceis de prever.

Em contrapartida, notou-se também que, em muitos dos casos, apesar da alta imprevisibilidade dos sistemas em intervalos curtos de tempo, as pequenas variações nas condições iniciais e interações momentâneas entre os corpos pouco interferiam na evolução do sistema e em seu comportamento assintótico, o qual era, muitas vezes, capaz de ser descrito por modelos “mais simples” dos sistemas físicos analisados. Com isso, surgiu a ideia de aproximar o comportamento desses sistemas por meio destes outros modelos, que fossem mais facilmente tratáveis analiticamente, mas que tivessem o mesmo comportamento assintótico do sistema original.

O método da média (periódica e não-periódica), o qual estudaremos agora, consiste em um desses modelos de aproximação. Em particular, este método leva esse nome por aproximarmos sistemas com termos de oscilação lenta (que estão associados ao comportamento assintótico do sistema) e rápida (que estão associados ao comportamento do sistema em curtos intervalos de tempo) pela média, com relação ao tempo, dos termos de oscilação lenta. Em particular, estudaremos o método da média para EDFs em medida (com e sem impulsos) e para equações dinâmicas em escalas temporais (com e sem impulsos).

5.1 Média periódica

Iniciamos pelo estudo do método da média periódica, o qual leva esse nome ser aplicável à modelos em que o termo de oscilação lenta é periódico com relação ao tempo. Para ilustrar a ideia por trás deste método, o exemplificaremos por meio de uma EDO clássica. Vale ressaltar, entretanto, que a teoria e os resultados trabalhados neste capítulo serão referentes à EDFs em medida e equações dinâmicas em escalas temporais.

Sejam $\epsilon_0, L, T > 0$ e considere a EDO não linear:

$$\begin{cases} x'(t) = \epsilon f(x(t), t) + \epsilon^2 g(x(t), t, \epsilon), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{5.1}$$

com $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, $O \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, $x_0 \in O$, $f : O \times \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right] \to \mathbb{R}^n$ é T-periódica com respeito a segunda variável, e $g : O \times \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right] \times (0, \epsilon_0] \to \mathbb{R}^n$ é uma função. A ideia por trás do método da média é aproximar as soluções da EDO acima por meio das soluções de uma função que é dada pela "média" da função f. Mais formalmente, buscamos condições para que as soluções de (5.1) sejam próximas das soluções de:

$$\begin{cases} y'(t) = \epsilon f_0(y(t)), \\ y(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{5.2}$$

com $f_0(y) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} f(y,t)dt$ para todo $y \in O$. Para isso, precisaremos que o valor da função f varie de maneira controlada.

Provaremos agora o primeiro teorema referente ao método da média periódica para EDFs em medida, que é uma versão mais geral do resultado em (1, Teorema 3.35) (o qual é inspirado no resultado presente em (15)), e que nos permite aproximar as soluções de certas EDFs não-autônomas em medida por meio das soluções de EDFs autônomas em medida. Ainda, usaremos desse resultado, e das equivalências entre soluções apresentadas no capítulo 4, para provar resultados análogos para outros tipos de equações.

Teorema 24. *Sejam $\epsilon_0, L, T > 0$, $B \subset X$ aberto e $P = G([-r, 0], B)$. Considere um par de funções limitadas $f : P \times [0, +\infty) \to X$ e $g : P \times [0, +\infty) \times (0, \epsilon_0] \to X$ e uma função $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ não-decrescente tais que:*

1. *As integrais de Perron-Stieltjes:*

$$\int_0^b f(y_s, s)dh(s) \text{ e } \int_0^b g(y_s, s, \epsilon)dh(s)$$

existem para todos $b > 0$, $y \in G([-r, b], B)$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$.

2. *f é T-periódica na segunda variável.*

3. *Existe $\alpha > 0$ tal que $h(t + T) - h(t) = \alpha$ para todo $t \geq 0$.*

4. *Existe $C > 0$ tal que, para todos $x, y \in P$ e $u_1, u_2 \in [0, +\infty)$ com $u_1 \leq u_2$, temos:*

$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} [f(x, s) - f(y, s)]dh(s) \right\| \leq C \int_{u_1}^{u_2} \|x - y\|_\infty dh(s).$$

Defina $f_0(z) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(z, s)dh(s)$ para $z \in P$ e seja $\phi \in P$ uma função limitada. Suponha que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, $x_\epsilon : \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right] \to B$ é uma solução da EDF não-autônoma em medida:

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \epsilon \displaystyle\int_0^t f(x_s, s)dh(s) + \epsilon^2 \int_0^t g(x_s, s, \epsilon)dh(s), \\ x_0 = \epsilon\phi. \end{cases}$$

E $y_\epsilon : \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right] \to B$ *é uma solução da EDF autônoma:*

$$\begin{cases} y(t) = y(0) + \epsilon \int_0^t f_0(y_s)ds, \\ y_0 = \epsilon\phi. \end{cases}$$

Então, existe uma constante $J > 0$ *tal que:*

$$\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| \leq J\epsilon \text{ para todo } \epsilon \in (0, \epsilon_0] \text{ e } t \in \left[-r, \frac{L}{\epsilon}\right].$$

Demonstração. Como f, g e ϕ são limitadas, existe $M > 0$ tal que $\|f(z,t)\| \leq M$ e $\|g(z,t,\epsilon)\| \leq M$ para todos $z \in P$, $t \in [0, +\infty)$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e $\|\phi\|_\infty \leq M$. Então:

$$\|f_0(x)\| = \left\|\frac{1}{T}\int_0^T f(x,s)dh(s)\right\| \leq \frac{M}{T}[h(T) - h(0)] = \frac{M\alpha}{T}.$$

Então, para $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e $s, t \in [0, +\infty)$, com $s \geq t$, considere os seguintes casos:

1. Se $s + \theta, t + \theta < 0$, então:

$$\|y_\epsilon(s+\theta) - y_\epsilon(t+\theta)\| = \|\epsilon\phi(s+\theta) - \epsilon\phi(t+\theta)\| \leq \epsilon 2M.$$

2. Se $s + \theta, t + \theta = 0$, então $\|y_\epsilon(s+\theta) - y_\epsilon(t+\theta)\| = 0$.

3. Se $s + \theta \geq 0$ e $t + \theta \leq 0$, então:

$$\begin{aligned} \|y_\epsilon(s+\theta) - y_\epsilon(t+\theta)\| &\leq \left\|\epsilon\int_0^{s+\theta} f_0((y_\epsilon)_\lambda)d\lambda\right\| + \|\epsilon\phi(t+\theta)\| + \|\epsilon\phi(0)\| \leq \\ &\leq \frac{\epsilon M(s+\theta)\alpha}{T} + \epsilon 2M \leq \\ &\leq \frac{\epsilon M(s+\theta)\alpha}{T} - \frac{\epsilon M(t+\theta)\alpha}{T} + 2\epsilon M = \\ &= \frac{\epsilon M(s-t)\alpha}{T} + \epsilon 2M. \end{aligned}$$

4. Se $s + \theta, t + \theta \geq 0$, então:

$$\|y_\epsilon(s+\theta) - y_\epsilon(t+\theta)\| = \left\|\epsilon\int_{t+\theta}^{s+\theta} f_0((y_\epsilon)_\lambda)d\lambda\right\| \leq \frac{\epsilon M(s-t)\alpha}{T} \text{ para todo } \theta \in [-r, 0].$$

Combinando os casos acima, obtemos:

$$\|(y_\epsilon)_s - (y_\epsilon)_t\|_\infty = \sup_{\theta\in[-r,0]} \|y_\epsilon(s+\theta) - y_\epsilon(t+\theta)\| \leq \frac{\epsilon M(s-t)\alpha}{T} + \epsilon 2M \tag{5.3}$$

para todos $s,t \in [0,+\infty)$ com $s \geq t$. Por outro lado, para cada $t \in [0, \frac{L}{\epsilon}]$, temos:

$$\begin{aligned}
\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| &= \left\|\epsilon \int_0^t f((x_\epsilon)_s, s)dh(s) + \epsilon^2 \int_0^t g((x_\epsilon)_s, s, \epsilon) - \epsilon \int_0^t f_0((y_\epsilon)_s)ds\right\| \leq \\
&\leq \epsilon \left\|\int_0^t [f((x_\epsilon)_s, s) - f((y_\epsilon)_s, s)]dh(s)\right\| + \\
&+ \epsilon \left\|\int_0^t f((y_\epsilon)_s, s)dh(s) - \int_0^t f_0((y_\epsilon)_s)ds\right\| + \\
&+ \epsilon^2 \left\|\int_0^t g((x_\epsilon)_s, s, \epsilon)dh(s)\right\| \leq \\
&\leq \epsilon \int_0^t C \left\|(x_\epsilon)_s - (y_\epsilon)_s\right\|_\infty dh(s) + \\
&+ \epsilon \left\|\int_0^t f((y_\epsilon)_s, s)dh(s) - \int_0^t f_0((y_\epsilon)_s)ds\right\| + \epsilon^2 M(h(t) - h(0)).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Vamos estimar o valor do último termo dessa desigualdade. Seja p o maior inteiro tal que $pT \leq t$. Temos:

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_0^t f((y_\epsilon)_s, s)dh(s) - \int_0^t f_0((y_\epsilon)_s)ds\right\| \leq \sum_{i=1}^{p} \left\|\int_{(i-1)T}^{iT} [f((y_\epsilon)_s, s) - f((y_\epsilon)_{(i-1)T}, s)]dh(s)\right\| + \\
&+ \sum_{i=1}^{p} \left\|\int_{(i-1)T}^{iT} f((y_\epsilon)_{(i-1)T}, s)dh(s) - \int_{(i-1)T}^{iT} f_0((y_\epsilon)_{(i-1)T})ds\right\| + \\
&+ \sum_{i=1}^{p} \left\|\int_{(i-1)T}^{iT} [f_0((y_\epsilon)_{(i-1)T}) - f_0((y_\epsilon)_s)]ds\right\| + \left\|\int_{pT}^{t} f((y_\epsilon)_s, s)dh(s) - \int_{pT}^{t} f_0((y_\epsilon)_s)ds\right\|.
\end{aligned}$$

Para cada $i \in \{1, 2, ..., p\}$ e cada $s \in [(i-1)T, iT]$, (5.3) nos dá:

$$\left\|(y_\epsilon)_s - (y_\epsilon)_{(i-1)T}\right\|_\infty \leq \frac{M\epsilon\alpha(s - (i-1)T)}{T} + \epsilon 2M \leq M\epsilon(\alpha + 2).$$

Com isso, e com o fato de que $pT \leq \frac{L}{\epsilon}$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \left\|\int_{(i-1)T}^{iT} [f((y_\epsilon)_s, s) - f((y_\epsilon)_{(i-1)T}, s)]dh(s)\right\| &\leq \sum_{i=1}^{p} CM\epsilon(\alpha+2)[h(iT) - h((i-1)T)] = \\
&= CM\epsilon\alpha(\alpha+2)p \leq \frac{CML\alpha(\alpha+2)}{T}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $z_s, z_t \in P$, com $s, t \geq 0$, a definição de f_0 implica em:

$$\begin{aligned}
\|f_0(z_s) - f_0(z_t)\| &\leq \frac{1}{T}\left\|\int_0^T [f(z_s, \lambda) - f(z_t, \lambda)]dh(\lambda)\right\| \leq \frac{C}{T}\left\|z_s - z_t\right\|_\infty [h(T) - h(0)] = \\
&= \frac{C}{T}\left\|z_s - z_t\right\|_\infty \alpha.
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $(y_\epsilon)_s, (y_\epsilon)_{(i-1)T} \in P$ para $s \in [(i-1)T, iT]$, segue que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \left\| \int_{(i-1)T}^{iT} [f_0((y_\epsilon)_s) - f_0((y_\epsilon)_{(i-1)T})] ds \right\| &\leq \sum_{i=1}^{p} \int_{(i-1)T}^{iT} \left\| f_0((y_\epsilon)_s) - f_0((y_\epsilon)_{(i-1)T}) \right\| ds \leq \\
&\leq \frac{C}{T} \alpha \sum_{i=1}^{p} \int_{(i-1)T}^{iT} \left\| (y_\epsilon)_s - (y_\epsilon)_{(i-1)T} \right\|_\infty ds \leq \\
&\leq \frac{C}{T} \alpha \left[\sum_{i=1}^{p} \epsilon M (\alpha + 2) T \right] = \epsilon M C \alpha (\alpha + 2) p \leq \\
&\leq \frac{MCL\alpha(\alpha+2)}{T}.
\end{aligned}$$

Pela T-periodicidade de f na segunda variável e da definição de f_0, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{p} \left\| \int_{(i-1)T}^{iT} f((y_\epsilon)_{(i-1)T}, s) dh(s) - \int_{(i-1)T}^{iT} f_0((y_\epsilon)_{(i-1)T}) ds \right\| = \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left\| \int_0^T f((y_\epsilon)_{(i-1)T}, s) dh(s) - f_0((y_\epsilon)_{(i-1)T}) T \right\| = 0.
\end{aligned}$$

Ainda:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{pT}^{t} f((y_\epsilon)_s, s) dh(s) - \int_{pT}^{t} f_0((y_\epsilon)_s) ds \right\| &\leq \left\| \int_{pT}^{t} f((y_\epsilon)_s, s) dh(s) \right\| + \int_{pT}^{t} \| f_0((y_\epsilon)_s) \| ds \leq \\
&\leq M[h(t) - h(pT)] + \frac{M\alpha}{T}(t - pT) \leq \\
&\leq M[h((p+1)T) - h(pT)] + \frac{M\alpha T}{T} = 2M\alpha,
\end{aligned}$$

donde chegamos na seguinte estimativa:

$$\left\| \int_0^t f((y_\epsilon)_s, s) dh(s) - \int_0^t f_0((y_\epsilon)_s) ds \right\| \leq \frac{2MCL\alpha(\alpha+2)}{T} + 2M\alpha = K.$$

Da desigualdade (5.4), segue que:

$$\| x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t) \| \leq \epsilon \int_0^t C \, \| (x_\epsilon)_s - (y_\epsilon)_s \|_\infty dh(s) + \epsilon K + \epsilon^2 M [h(t) - h(0)].$$

Definamos $\psi(s) = \sup_{\tau \in [0,s]} \| x_\epsilon(\tau) - y_\epsilon(\tau) \|$ para todo $s \in \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right]$. Então, para cada $u \in [0, t]$:

$$\begin{aligned}
\| x_\epsilon(u) - y_\epsilon(u) \| &\leq \epsilon \int_0^u C\psi(s) dh(s) + \epsilon K + \epsilon^2 M [h(u) - h(0)] \leq \\
&\leq \epsilon \int_0^t C\psi(s) dh(s) + \epsilon K + \epsilon^2 M [h(t) - h(0)].
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\psi(t) \leq \epsilon \int_0^t C\psi(s) dh(s) + \epsilon K + \epsilon^2 M [h(t) - h(0)].$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
\epsilon [h(t) - h(0)] &\leq \epsilon \left[h\left(\frac{L}{\epsilon}\right) - h(0) \right] \leq \epsilon \left[h\left(\left\lceil \frac{L}{\epsilon T} \right\rceil T \right) - h(0) \right] \leq \epsilon \left\lceil \frac{L}{\epsilon T} \alpha \right\rceil \leq \\
&\leq \epsilon \left(\frac{L}{\epsilon T} + 1 \right) \alpha \leq \left(\frac{L}{T} + \epsilon_0 \right) \alpha.
\end{aligned}$$

Assim:

$$\psi(t) \leq \epsilon \int_0^t C\psi(s)dh(s) + \epsilon K + \epsilon M \left(\frac{L}{T} + \epsilon_0\right)\alpha.$$

Pela desigualdade de Grönwall (Corolário 5), segue que:

$$\psi(t) \leq e^{\epsilon C[h(t)-h(0)]}\left(K + M\left(\frac{L}{T}+\epsilon_0\right)\alpha\right)\epsilon \leq e^{C\left(\frac{L}{T}+\epsilon_0\right)\alpha}\epsilon\left(K + M\left(\frac{L}{T}+\epsilon_0\right)\alpha\right).$$

Seja $J = e^{C\left(\frac{L}{T}+\epsilon_0\right)\alpha}\left(K + M\left(\frac{L}{T}+\epsilon_0\right)\alpha\right)$. Então:

$$\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| \leq \psi(t) \leq J\epsilon \text{ para todos } \epsilon \in (0, \epsilon_0] \text{ e } t \in \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right].$$

Ainda, como $x_0 = \epsilon\phi = y_0$, temos $\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| = 0 \leq J\epsilon$ para todos $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e $t \in [-r, 0]$. Portanto:

$$\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| \leq J\epsilon \text{ para todos } \epsilon \in (0, \epsilon_0] \text{ e } t \in \left[-r, \frac{L}{\epsilon}\right].$$

$\square$

Usando das equivalências entre soluções de diferentes equações feitas no capítulo 4 e do Teorema 24, provaremos o próximo resultado, que nos fornece um método da média periódica para EDFs em medida com impulsos. Esse teorema pode ser encontrado em (1, Teorema 3.36), e versões diferentes podem ser encontradas em (12).

Teorema 25. *Suponha que* $\epsilon_0, L, T > 0$, $P = G([-r, 0], X)$, *e que existe* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_m < T$. *Considere funções limitadas* $f : P \times [0, +\infty) \to X$ *e* $g : P \times [0, +\infty) \times (0, \epsilon_0] \to X$ *e uma função não-decrescente contínua pela esquerda* $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* h *é contínua em* t_k *para cada* $k \in \mathbb{N}$. *Sejam* $I_k : X \to X$, *com* $k \in \mathbb{N}$, *funções limitadas e Lipschitz contínuas representando os operadores impulso. Para cada inteiro* $k > m$, *defina* t_k *e* I_k *recursivamente como sendo* $t_k = t_{k-m} + T$ *e* $I_k = I_{k-m}$. *Suponha que as seguintes condições valem:*

1. *As integrais de Perron-Stieltjes:*

$$\int_0^b f(y_s, s)dh(s) \text{ e } \int_0^b g(y_s, s, \epsilon)dh(s)$$

existem para todo $b > 0$, $y \in G([-r, b], X)$ *e* $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$.

2. f *é Lipschitz contínua com respeito a primeira variável.*

3. f *é* T*-periódica na segunda variável.*

4. *Existe* $\alpha > 0$ *tal que* $h(T + t) - h(t) = \alpha$ *para todo* $t \geq 0$.

5. *A integral de Perron-Stieltjes:*

$$f_0(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x,s)dh(s)$$

existe para todo $x \in P$.

Seja $I_0(z) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{k=1}^{m} I_k(z)$, *para todo* $z \in X$ *e assuma que* $\phi \in P$ *é limitada. Suponha, ainda, que para cada* $\epsilon \in (0,\epsilon_0]$, $x_\epsilon : \left[-r, \dfrac{L}{\epsilon}\right] \to X$ *é uma solução da EDF impulsiva:*

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \epsilon\displaystyle\int_0^t f(x_s,s)dh(s) + \epsilon^2\int_0^t g(x_s,s,\epsilon)dh(s) + \epsilon\sum_{\substack{t_k<t\\ k\in\mathbb{N}}} I_k(x(t_k)), \\ x_0 = \epsilon\phi, \end{cases} \tag{5.5}$$

e que $y_\epsilon : \left[-r, \dfrac{L}{\epsilon}\right] \to X$ *é uma solução de:*

$$\begin{cases} y(t) = y(0) + \epsilon\displaystyle\int_0^t \left[f_0(y_s) + I_0(y(s))\right]ds, \\ y_0 = \epsilon\phi. \end{cases}$$

Então, existe uma constante $J > 0$ *tal que:*

$$\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| \leq J\epsilon \text{ para todo } \epsilon \in (0,\epsilon_0] \text{ e } t \in \left[-r, \frac{L}{\epsilon}\right].$$

Demonstração. Seja $\widetilde{h} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} h(t), \text{ para } t \in [0,t_1], \\ h(t) + c_k, \text{ para } t \in (t_k,t_{k+1}], \text{ com } k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

em que $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é tal que $0 \leq c_k \leq c_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Suponha que $\Delta^+\widetilde{h}(t_k) = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que, pela Proposição 4, sabemos que h é regrada. Então, pelas considerações feitas no final da seção 4.2, sabemos que é possível tomar $\widetilde{h}$ satisfazendo essas propriedades. Como h é não-decrescente e contínua pela esquerda, o mesmo vale para $\widetilde{h}$ (como demonstrado no item 1 do Lema 11). Ainda, se $t \geq 0$, temos:

- Caso $t \in (t_k, t_{k+1}]$ para algum $k \in \mathbb{N}$:

  $$T + t \in (T + t_k, T + t_{k+1}] = (t_{k+m}, t_{k+m+1}] \Rightarrow \widetilde{h}(T+t) = h(T+t) + c_{k+m}.$$

  Se $c_{k+m} - c_k = c_m \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos:

  $$\widetilde{h}(t+T) - \widetilde{h}(t) = \alpha + c_m = \widetilde{\alpha} \geq 0.$$

- Caso $t \in [0,t_1]$, temos $\widetilde{h}(t+T) = h(t+T) + c_m$ e $\widetilde{h}(t) = h(t)$, donde $\widetilde{h}(t+T) - \widetilde{h}(t) = \alpha + c_m = \widetilde{\alpha} \geq 0$.

Assim, existe $\widetilde{\alpha} > 0$ tal que $\widetilde{h}(t+T) - \widetilde{h}(t) = \widetilde{\alpha}$ para todo $t \geq 0$. Sabemos ainda que, como $x_\epsilon : \left[-r, \frac{L}{\epsilon}\right] \to X$ é uma solução da EDF impulsiva em medida (5.5), temos:

$$x_\epsilon(t) = x_\epsilon(0) + \int_0^t \left[\epsilon f((x_\epsilon)_s, s) + \epsilon^2 g((x_\epsilon)_s, s, \epsilon)\right] dh(s) + \sum_{\substack{t_k < t \\ k \in \mathbb{N}}} \epsilon I_k(x_\epsilon(t_k))$$

para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e $t \in \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right]$. Defina, para cada $y \in P$ e $t \geq 0$:

$$F^\epsilon(y,t) = \epsilon \widetilde{f}(y,t) + \epsilon^2 \widetilde{g}(y,t,\epsilon)$$

sendo:

$$\widetilde{f}(y,t) = \begin{cases} f(y,t), \text{ para } t \notin \{t_k \mid k \in \mathbb{N}\}, \\ I_k(y(0)), \text{ para } t \in \{t_k \mid k \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

$$\widetilde{g}(y,t,\epsilon) = \begin{cases} g(y,t,\epsilon), \text{ para } t \notin \{t_k \mid k \in \mathbb{N}\}, \\ 0, \text{ para } t \in \{t_k \mid k \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

Então, de acordo com o Teorema 18, encontramos:

$$x_\epsilon(t) = x_\epsilon(0) + \int_0^t F^\epsilon((x_\epsilon)_s, s) d\widetilde{h}(s).$$

Assim, para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, a função $x_\epsilon : \left[-r, \frac{L}{\epsilon}\right] \to X$ satisfaz:

$$\begin{cases} x_\epsilon(t) = x_\epsilon(0) + \epsilon \displaystyle\int_0^t \widetilde{f}((x_\epsilon)_s, s) d\widetilde{h}(s) + \epsilon^2 \int_0^t \widetilde{g}((x_\epsilon)_s, s, \epsilon) d\widetilde{h}(s), \\ (x_\epsilon)_0 = \epsilon \phi. \end{cases}$$

Por definição, $\widetilde{f}$ é Lipschitz contínua com respeito à primeira variável e T-periódica com respeito a segunda variável. Então, pelo Lema 10, para todo $x \in P$ temos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \widetilde{f}(x,s) d\widetilde{h}(s) &= \int_0^T f(x,s) dh(s) + \sum_{k=1}^m \widetilde{f}(x, t_k) \Delta^+ \widetilde{h}(t_k) = \\ &= \int_0^T f(x,s) dh(s) + \sum_{k=1}^m I_k(x(0)). \end{aligned}$$

Assim, a função $\widetilde{f}_0$ dada por:

$$\widetilde{f}_0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \widetilde{f}(x,s) d\widetilde{h}(s)$$

satisfaz:

$$\widetilde{f}_0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x,s) dh(s) + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^m I_k(x(0)) = f_0(x) + I_0(x(0)), \text{ para } x \in P.$$

Por fim, pelo Teorema 24, existe uma constante $J > 0$ tal que:

$$\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| \leq J\epsilon \text{ para todos } \epsilon \in (0, \epsilon_0] \text{ e } t \in \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right].$$

Ainda, como $x_0 = \epsilon\phi = y_0$, temos $\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| = 0 \leq J\epsilon$ para todos $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e $t \in [-r, 0]$. Portanto:

$$\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| \leq J\epsilon \text{ para todos } \epsilon \in (0, \epsilon_0] \text{ e } t \in \left[-r, \frac{L}{\epsilon}\right].$$

□

Daremos, a seguir, a definição de uma escala T-periódica, distinta daquela apresentada em (1).

Definição 33. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal, $T > 0$ e $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. $\mathbb{T}$ é dita ser T-periódica com relação a g se:*

1. $t \in \mathbb{T} \Rightarrow t + T \in \mathbb{T}$.
2. *Existe $\alpha > 0$ tal que $g(t) + \alpha = g(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{T}$.*

Mostremos que a definição anterior generaliza a definição apresentada em (1). De fato, a primeira condição de ambas as definições coincidem. Note ainda que $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ está bem definida e, supondo que $\mathbb{T}$ é T-periódica com relação à definição de (1), temos:

$$\mu(t + T) = \mu(t) \text{ para todo } t \in \mathbb{T} \Rightarrow \sigma(t + T) - t - T = \sigma(t) - t \text{ para todo } t \in \mathbb{T} \Rightarrow$$
$$\sigma(t) + T = \sigma(t + T) \text{ para todo } t \in \mathbb{T}.$$

Logo, existe $T > 0$ tal que $\sigma(t) + T = \sigma(t + T)$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Em particular, $\mathbb{T}$ é T-periódica com relação a σ.

Podemos ainda nos perguntar se essa nova definição nos fornece outras funções além da σ. Considere $\mathbb{T}$ a escala temporal $\mathbb{T} = 2\pi\mathbb{Z}$. Escolhendo $T = 2\pi k > 0$, com $k \in \mathbb{N}$, tomando $a > 0$, $b \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$ e definindo $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ como $g(t) = at + \cos(bt + c)$ e $h(t) = at + \operatorname{sen}(bt + c)$, temos $t + T = 2\pi l + 2\pi k = 2\pi(l + k) \in \mathbb{T}$ para todo $t = 2\pi l \in \mathbb{T}$ ($l \in \mathbb{Z}$), $bT = \frac{B}{k}2\pi k = 2\pi B \in 2\pi\mathbb{Z}$ e, dado $t \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} g(T + t) - g(t) &= a(T + t) + \cos(bt + c + bT) - at - \cos(bt + c) = \\ &= aT + \cos(bt + c + 2\pi B) - \cos(bt + c) = aT, \\ h(T + t) - h(t) &= a(T + t) + \operatorname{sen}(bt + c + bT) - at - \operatorname{sen}(bt + c) = \\ &= aT + \operatorname{sen}(bt + c + 2\pi B) - \operatorname{sen}(bt + c) = aT. \end{aligned}$$

Como $aT > 0$, segue que $\mathbb{T}$ é T-periódica com relação a g e h, sendo que $g, h \neq \sigma$.

Portanto, a definição aqui apresentada é, de fato, mais geral que aquela em (1). Note ainda que, se $\mathbb{T}$ é uma escala temporal T-periódica com respeito a g e a h, e $a > 0$ é um número real, então dado $t \in \mathbb{T}$:

$$(ag+h)(t+T) - (ag+h)(t) = a(g(t+T) - g(t)) + (h(t+T) - h(t)) = a\alpha + \beta > 0,$$

em que $\alpha, \beta > 0$ são as constantes que aparecem na condição 2 da definição de uma escala temporal ser T-periódica com relação a g e a h, respectivamente, e o fato de que $t + T \in \mathbb{T}$ segue de $\mathbb{T}$ ser T-periódica com relação a g. Assim, $\mathbb{T}$ é T-periódica com relação a $ag + h$.

Vale notar ainda que, pela argumentação anterior, se alterarmos a definição de uma escala temporal ser T-periódica com relação a g para permitirmos que o α na segunda condição seja qualquer número real, então se $T > 0$ é tal que $t + T \in \mathbb{T}$ para todo $t \in \mathbb{T}$, segue que o conjunto das funções g com relação as quais $\mathbb{T}$ é T-periódica com respeito a g forma um espaço vetorial não-trivial, uma vez que qualquer polinômio de grau menor ou igual a 1 está neste espaço.

Usando da definição anterior, podemos mostrar um método da média periódica para equações dinâmicas funcionais impulsivas em escalas temporais. O próximo teorema é uma versão mais geral daquela encontrada em (1, Teorema 3.37) e (12), com demonstração análoga.

Teorema 26. *Sejam $\epsilon_0, T, L, \gamma, r > 0$ e $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Suponha que $\mathbb{T}$ é uma escala temporal T-periódica em relação a h tal que $t_0 \in \mathbb{T}$ e $P = G([-r, 0], X)$. Suponha ainda que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t_1, ..., t_m \in \mathbb{T}$ são pontos densos pela direita satisfazendo $t_0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_m < t_0 + T$ e h contínua em t_k para $k \in \{0, ..., m\}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $I_k : X \to X$ uma função limitada Lipschitz contínua. Para cada $k > m$, definamos t_k e I_k recursivamente por $t_k = t_{k-m} + T$ e $I_k = I_{k-m}$. Considere funções limitadas $f : P \times [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \to X$ e $g : P \times [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \times (0, \epsilon_0] \to X$ satisfazendo:*

1. *As Δ-integrais de Perron-Stieltjes:*

$$\int_{t_0}^{b} f(y_s, s)\Delta h(s) \text{ e } \int_{t_0}^{b} g(y_s, s, \epsilon)\Delta h(s)$$

   existem para todo $b \in (t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, $y \in G([t_0 - r, b], X)$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$.

2. *f é Lipschitz contínua com respeito a primeira variável.*

3. *f é T-periódica com respeito a segunda variável.*

4. *A Δ-integral de Perron-Stieltjes:*

$$f_0(x) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(x, s)\Delta h(s)$$

   existe para todo $x \in P$.

Seja:

$$I_0(z) = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{m} I_k(z) \text{ para todo } z \in X$$

e $\phi \in G([t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}, X)$ limitada. Ainda, suponha que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, $x_\epsilon : \left[t_0 - r, t_0 + \frac{L}{\epsilon}\right]_{\mathbb{T}}$ é uma solução da equação dinâmica funcional impulsiva em escalas temporais:

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + \epsilon \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s)\Delta h(s) + \epsilon^2 \int_{t_0}^{t} g(x_s^*, s, \epsilon)\Delta h(s) + \epsilon \sum_{\substack{t_k < t \\ k \in \mathbb{N}}} I_k(x(t_k)), \\ x(t) = \epsilon\phi(t) \text{ para } t \in [t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}, \end{cases}$$

e que $y_\epsilon : \left[t_0 - r, t_0 + \frac{L}{\epsilon}\right] \to X$ é uma solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y(t) = y(t_0) + \epsilon \displaystyle\int_{t_0}^{t} [f_0(y_s) + I_0(y(s))]\, ds, \\ y_{t_0} = \epsilon\phi_{t_0}^*. \end{cases}$$

Então existe $J > 0$ tal que:

$$\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| \leq J\epsilon \text{ para todo } \epsilon \in (0, \epsilon_0] \text{ e } t \in \left[t_0 - r, t_0 + \frac{L}{\epsilon}\right]_{\mathbb{T}}.$$

Demonstração. Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $t_0 = 0$, pois caso $t_0 \neq 0$, podemos considerar o problema dado pela escala temporal $\widetilde{\mathbb{T}} = \{t - t_0 \mid t \in \mathbb{T}\}$ e pelas funções $\widetilde{f} : P \times [0, +\infty)_{\widetilde{\mathbb{T}}} \to X$, $\widetilde{g} : P \times [0, +\infty)_{\widetilde{\mathbb{T}}} \times (0, \epsilon_0] \to X$ e $\widetilde{h} : \widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ dadas por $\widetilde{f}(x, t) = f(x, t + t_0)$, $\widetilde{g}(x, t, \epsilon) = g(x, t + t_0, \epsilon)$ e $\widetilde{h}(t) = h(t + t_0)$. Nesse caso, as propriedades de f, g e h descritas no enunciado do Teorema valem para $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ e $\widetilde{h}$. Mostremos que $\widetilde{\mathbb{T}}$ é T-periódica com relação a $\widetilde{h}$. De fato, seja $\widetilde{t} \in \widetilde{\mathbb{T}}$. Então existe $t \in \mathbb{T}$ tal que $\widetilde{t} = t - t_0$. Assim, $\widetilde{t} + T = t + T - t_0$ e $t + T \in \mathbb{T}$ por $\mathbb{T}$ ser T-periódica com respeito a h, donde $\widetilde{t} + T \in \widetilde{\mathbb{T}}$. Ainda, existe $\alpha > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(\widetilde{t}) + \alpha &= h(\widetilde{t} + t_0) + \alpha = h(t) + \alpha = h(t + T) = h(t - t_0 + t_0 + T) = h(\widetilde{t} + t_0 + T) = \\ &= \widetilde{h}(\widetilde{t} + T). \end{aligned}$$

para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e $x \in P$. Assim, $\widetilde{\mathbb{T}}$ é T-periódica com relação a h. Desse fato, podemos tomar $\widetilde{t}_i = t_i - t_0 \in \widetilde{\mathbb{T}}$ para $i \in \{1, 2, ..., m\}$, de forma a garantir a validade das hipóteses do Teorema. Portanto, iremos supor que $t_0 = 0$.

Para cada $t \in [0, +\infty)$, $x \in P$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, considere as seguintes extensões das funções f e g:

$$f^*(x, t) = f(x, t^*) \text{ e } g^*(x, t, \epsilon) = g(x, t^*, \epsilon).$$

Dado $x \in P$, definamos $F : [0, +\infty)_{\mathbb{T}} \to X$ como sendo $F(s) = f(x, s)$. Então, o Teorema 15 nos dá:

$$f_0(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x, s)\Delta h(s) = \frac{1}{T}\int_0^T F(s)\Delta h(s) = \frac{1}{T}\int_0^T F^*(s)dh^*(s) = \frac{1}{T}\int_0^T f^*(x, s)dh^*(s).$$

Para todo $b > 0$ com $b \in \mathbb{T}$ e todo $y \in G([-r, b], X)$, sabemos que a Δ-integral de Perron-Stieltjes $\int_0^b f(y_s, s)\Delta h(s)$ existe. Então, pelos Teoremas 14 e 15, obtemos:

$$\int_0^b f(y_s, s)\Delta h(s) = \int_0^b f(y_{s^*}, s^*)dh^*(s) = \int_0^b f(y_s, s^*)dh^*(s) = \int_0^b f^*(y_s, s)dh^*(s),$$

o que garante a existência da última integral.

Analogamente, para todo $b > 0$ com $b \in \mathbb{T}$ e todo $y \in G([-r, b], X)$, sabemos que a Δ-integral de Perron-Stieltjes $\int_0^b g(y_s, s, \epsilon)\Delta h(s)$ existe. Então, pelos Teoremas 14 e 15, obtemos:

$$\int_0^b g(y_s, s, \epsilon)\Delta h(s) = \int_0^b g(y_{s^*}, s^*, \epsilon)dh^*(s) = \int_0^b g(y_s, s^*, \epsilon)dh^*(s) = \int_0^b g^*(y_s, s, \epsilon)dh^*(s),$$

o que garante a existência da última integral.

Dados $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e $y \in G([t_0 - r, b], X)$, definamos $A : [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \to X$ como sendo $A(s) = \epsilon f(y_s, s) + \epsilon^2 g(y_s, s, \epsilon)$. Então, dado $b > 0$ com $b \in \mathbb{T}$, pelas considerações anteriores, temos que a integral $\int_0^b A(s)\Delta h(s)$ existe e vale que:

$$\int_0^b A(s)\Delta h(s) = \epsilon \int_0^b f^*((x_\epsilon)^*_s, s)dh^*(s) + \epsilon^2 \int_0^b g^*((x_\epsilon)^*_s, s, \epsilon)dh^*(s).$$

Em particular, usando o Lema 12, temos:

$$\int_0^b A^*(s)dh^*(s) = \epsilon \int_0^b f^*((x_\epsilon)^*_s, s)dh^*(s) + \epsilon^2 \int_0^b g^*((x_\epsilon)^*_s, s, \epsilon)dh^*(s)$$

para todo $b > 0$.

Pelo Teorema 20 (o qual podemos aplicar à $z(t) = x_\epsilon(t) - \epsilon \sum_{\substack{t_k < t \\ k \in \mathbb{N}}} I_k(x_\epsilon(t_k))$ com A no lugar de f), para $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e $t \in \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right]$, $x_\epsilon : \left[-r, \frac{L}{\epsilon}\right] \to X$ satisfaz:

$$\begin{cases} (x_\epsilon)^*(t) = (x_\epsilon)^*(0) + \epsilon \int_0^t f^*((x_\epsilon)^*_s, s)dh(s) + \epsilon^2 \int_0^t g^*((x_\epsilon)^*_s, s, \epsilon)dh(s) + \epsilon \sum_{\substack{t_k < t \\ k \in \mathbb{N}}} I_k((x_\epsilon)^*(t_k)), \\ (x_\epsilon)^*_0 = \epsilon \phi^*. \end{cases}$$

Portanto, pelo Teorema 25, existe $J > 0$ tal que:

$$\|(x_\epsilon)^*(t) - y_\epsilon(t)\| \leq J\epsilon \text{ para todo } \epsilon \in (0, \epsilon_0] \text{ e } t \in \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right].$$

Como $(x_\epsilon)^*(t) = x_\epsilon(t)$ para $t \in \left[0, \frac{L}{\epsilon}\right]_{\mathbb{T}}$ e pela condição inicial, obtemos:

$$\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| \leq J\epsilon \text{ para todo } \epsilon \in (0, \epsilon_0] \text{ e } t \in \left[-r, \frac{L}{\epsilon}\right]_{\mathbb{T}}.$$

$\square$

5.2 Média não-periódica

Seja $\epsilon_0 > 0$ dado. Queremos analisar equações diferenciais funcionais em medida da forma:

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \epsilon \int_0^t f(x_s, s) dh_1(s) + \epsilon^2 \int_0^t g(x_s, s, \epsilon) dh_2(s), \\ \qquad x_0 = \epsilon\phi, \end{cases} \tag{5.6}$$

em que $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, $B \subset X$ é aberto, $P \subset G([-r, 0], B)$ é aberto, $r > 0$, $h_1, h_2 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ são funções não-decrescentes contínuas pela esquerda, $f : P \times [0, +\infty) \to X$ e $g : P \times [0, +\infty) \times (0, \epsilon_0] \to X$ são funções e $\phi \in P$.

Para encontrar um "método da média" para (5.6), consideraremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \int_0^t \epsilon f\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) + \int_0^t \epsilon^2 g\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}, \epsilon\right) dh_2\left(\frac{s}{\epsilon}\right) \text{ para } t \in [0, M], \\ \qquad x_0 = \epsilon\phi, \end{cases} \tag{5.7}$$

em que $x_{t,\epsilon}(\theta) = x(t + \epsilon\theta)$, para $\theta \in \left[-\frac{r}{\epsilon}, 0\right]$, $\phi \in P$ e $M > 0$.

Fixemos $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$. Façamos sentido das integrais de (5.6) e (5.7). Definamos $F_1, F_2 : [0, +\infty) \to X$ como sendo $F_1(s) = f(x_s, s)$ e $F_2(s) = \epsilon f\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right)$, $G_1, G_2 : [0, +\infty) \to X$ como sendo $G_1(s) = g(x_s, s, \epsilon)$ e $G_2(s) = \epsilon^2 g\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}, \epsilon\right)$, e $H_1, H_2 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ como sendo $H_1(s) = h_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right)$ e $H_2(s) = h_2\left(\frac{s}{\epsilon}\right)$. Então as integrais em (5.6) podem ser entendidas como:

$$\int_0^t f(x_s, s) dh_1(s) = \int_0^t F_1(s) dh_1(s) \text{ e } \int_0^t g(x_s, s, \epsilon) = \int_0^t G_1(s) dh_2(s),$$

e as integrais em (5.7) podem ser entendidas como:

$$\int_0^t \epsilon f\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) = \int_0^t F_2(s) dH_1(s) \text{ e } \int_0^t \epsilon^2 g\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}, \epsilon\right) dh_2\left(\frac{s}{\epsilon}\right) = \int_0^t G_2(s) dH_2(s).$$

Assim, as integrais em (5.6) e (5.7) estão bem definidas como integrais de Perron-Stieltjes.

Mostremos agora que, por meio de uma mudança de variáveis, podemos transformar o sistema (5.7) no sistema (5.6). De fato, se $x : [-r, M] \to B$ é uma solução de (5.7), então:

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t \epsilon f\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) + \int_0^t \epsilon^2 g\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}, \epsilon\right) dh_2\left(\frac{s}{\epsilon}\right) \text{ para } t \in [0, M].$$

Definamos $y : \left[0, \frac{M}{\epsilon}\right] \to B$, dada por $y(t) = x(\epsilon t)$, $\psi : [0, M] \to \mathbb{R}$, dada por $\psi(s) = \frac{s}{\epsilon}$ e $m : \left[0, \frac{M}{\epsilon}\right] \to X$, dada por $m(\tau) = f(x_{\epsilon\tau,\epsilon}, \tau)$. Como $s \in [0, M]$ implica em

$\dfrac{s}{\epsilon} \in \left[0, \dfrac{M}{\epsilon}\right]$, consideremos $\tau = \psi(s) = \dfrac{s}{\epsilon}$. Então, utilizando o Corolário 1:

$$\begin{aligned}
\int_0^t f\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) &= \int_0^t f\left(x_{\epsilon\left(\frac{s}{\epsilon}\right),\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) = \\
&= \int_0^t m\left(\frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) = \int_0^t m\left(\psi(s)\right) dh_1\left(\psi(s)\right) = \\
&= \int_0^{\frac{t}{\epsilon}} m(\tau) dh_1(\tau) = \int_0^{\frac{t}{\epsilon}} f(x_{\epsilon\tau,\epsilon}, \tau) dh_1(\tau) = \\
&= \int_0^{\frac{t}{\epsilon}} f(y_\tau, \tau) dh_1(\tau),
\end{aligned}$$

concluindo que $\displaystyle\int_0^{\frac{t}{\epsilon}} f(y_\tau, \tau) dh_1(\tau)$ existe e vale a igualdade.

Definamos $n : \left[0, \dfrac{M}{\epsilon}\right] \to X$ dada por $n(\tau) = g(x_{\epsilon\tau,\epsilon}, \tau, \epsilon)$. Então, usando o Corolário 1, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^t g\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}, \epsilon\right) dh_2\left(\frac{s}{\epsilon}\right) &= \int_0^t g\left(x_{\epsilon\left(\frac{s}{\epsilon}\right),\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}, \epsilon\right) dh_2\left(\frac{s}{\epsilon}\right) = \\
&= \int_0^t n\left(\frac{s}{\epsilon}\right) dh_2\left(\frac{s}{\epsilon}\right) = \int_0^t n(\psi(s)) dh_2(\psi(s)) = \\
&= \int_0^{\frac{t}{\epsilon}} n(\tau) dh_2(\tau) = \int_0^{\frac{t}{\epsilon}} g\left(x_{\epsilon\tau,\epsilon}, \tau, \epsilon\right) dh_2(\tau) = \\
&= \int_0^{\frac{t}{\epsilon}} g\left(y_\tau, \tau, \epsilon\right) dh_2(\tau),
\end{aligned}$$

donde $\displaystyle\int_0^{\frac{t}{\epsilon}} g\left(y_\tau, \tau, \epsilon\right) dh_2(\tau)$ existe e vale a igualdade.

Como, para cada $\tau \in \left[0, \dfrac{M}{\epsilon}\right]$ e $\theta \in \left[-\dfrac{r}{\epsilon}, 0\right]$, temos:

$$x_{\epsilon\tau,\epsilon}(\theta) = x(\epsilon(\tau + \theta)) = y(\tau + \theta) = y_\tau(\theta).$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
y(t) - y(0) &= x(\epsilon t) - x(0) = \\
&= \epsilon \int_0^{\epsilon t} f\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) + \epsilon^2 \int_0^{\epsilon t} g\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}, \epsilon\right) dh_2\left(\frac{s}{\epsilon}\right) = \\
&= \epsilon \int_0^t f(y_\tau, \tau) dh_1(\tau) + \epsilon^2 \int_0^t g\left(y_\tau, \tau, \epsilon\right) dh_2(\tau)
\end{aligned}$$

para $t \in \left[0, \dfrac{M}{\epsilon}\right]$. Portanto, uma solução da EDF em medida (5.7) em $[0, M]$ corresponde a uma solução da EDF em medida (5.6) em $\left[0, \dfrac{M}{\epsilon}\right]$, e o recíproco vale. Assim, estudaremos a equação (5.7), já que os resultados obtidos para esse sistema podem ser estendidos para o sistema (5.6).

Considere conjuntos abertos $B \subset X$ e $\widetilde{P}_\epsilon \subset G\left(\left[-\dfrac{r}{\epsilon}, 0\right], B\right)$, e assuma que $f : \widetilde{P}_\epsilon \times [0, +\infty) \to X$ satisfaz as seguintes condições:

1. Para cada $\varphi \in \widetilde{P}_\epsilon$ e para todo $t \in [0, +\infty)$, a integral de Perron-Stieltjes:
$$\int_0^t f(\varphi, s) dh_1(s) \tag{5.8}$$
existe.

2. Existe uma constante $L > 0$ tal que, para cada $\varphi, \psi \in \widetilde{P}_\epsilon$ e cada $u_1, u_2 \in [0, +\infty)$, com $u_1 \leq u_2$, temos:
$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} [f(\varphi, s) - f(\psi, s)] \, dh_1(s) \right\| \leq L \int_{u_1}^{u_2} \|\varphi - \psi\|_\infty \, dh_1(s). \tag{5.9}$$

Considere as seguintes hipóteses sobre $g : \widetilde{P}_\epsilon \times [0, +\infty) \times (0, \epsilon_0] \to X$, em que $h_1, h_2 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ são funções contínuas pela esquerda e não-decrescentes:

1. A integral de Perron-Stieltjes:
$$\int_0^t g(\varphi, s, \epsilon) dh_2(s) \tag{5.10}$$
existe, para cada $\phi \in \widetilde{P}_\epsilon$, $t \in [0, +\infty)$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$.

2. Existe uma constante $C > 0$ tal que $\varphi \in \widetilde{P}_\epsilon$, $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e $u_1, u_2 \in [0, +\infty)$, com $u_1 \leq u_2$, temos:
$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} g(\varphi, s, \epsilon) dh_2(s) \right\| \leq C \int_{u_1}^{u_2} dh_2(s). \tag{5.11}$$

3. Existe $K > 0$ tal que, para todo $\beta \geq 0$, temos:
$$\limsup_{T \to +\infty} \frac{h_1(T + \beta) - h_1(\beta)}{T} \leq K. \tag{5.12}$$

4. Existe $N > 0$ tal que, para todo $\beta \geq 0$, temos:
$$\limsup_{T \to +\infty} \frac{h_2(T + \beta) - h_2(\beta)}{T} \leq N. \tag{5.13}$$

5. Existe $\gamma > 0$ tal que:
$$\|\phi\|_\infty \leq \gamma. \tag{5.14}$$

Suponha que, para cada $\phi \in \widetilde{P}_\epsilon$, o limite:
$$f_0(\varphi) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi, s) dh_1(s) \tag{5.15}$$
existe, em que a integral é tomada no sentido de Perron-Stieltjes com respeito a h_1. Considere a equação diferencial funcional dada por:
$$\begin{cases} y' = f_0(y_{t,\epsilon}), \\ y_0 = \epsilon\phi, \end{cases} \tag{5.16}$$
em que $t \in [0, M]$ e f_0 é dada por (5.15).

Afirmação 5. *Se y é uma solução de* (5.16), *então* $u : \left[-\frac{r}{\epsilon}, M\right] \to X$, *dada por* $u(t) = y(\epsilon t)$ *para* $t \in [0, M]$, *é solução de:*

$$\begin{cases} u' = \epsilon f_0(u_t), \\ \quad u_0 = \epsilon\phi. \end{cases} \tag{5.17}$$

Demonstração. Considere $\psi : [0, M] \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(s) = \frac{s}{\epsilon}$ e $m : \left[0, \frac{M}{\epsilon}\right]$, dada por $m(\tau) = f_0(y_{\epsilon\tau,\epsilon})$. Então, para $s \in [0, M]$, $\tau = \frac{s}{\epsilon} \in \left[0, \frac{M}{\epsilon}\right]$. Ainda, pelo Corolário 1:

$$\begin{aligned} \int_0^t f_0(y_{s,\epsilon})ds &= \int_0^t f_0\left(y_{\epsilon\left(\frac{s}{\epsilon}\right),\epsilon}\right) ds = \int_0^t m(\psi(s))ds = \\ &= \epsilon \int_0^{\frac{t}{\epsilon}} m(\tau)d\tau = \epsilon \int_0^{\frac{t}{\epsilon}} f_0(y_{\epsilon\tau,\epsilon})d\tau, \end{aligned}$$

donde a última integral existe no caso da existência da primeira e vale a igualdade. Ainda, para $\tau \in \left[0, \frac{M}{\epsilon}\right]$ e $\theta \in \left[-\frac{r}{\epsilon}, 0\right]$, obtemos:

$$y_{\epsilon\tau,\epsilon}(\theta) = y(\epsilon(\tau + \theta)) = u(\tau + \theta) = u_\tau(\theta).$$

Portanto:

$$\begin{aligned} u(t) - u(0) = y(\epsilon t) - y(0) &= \int_0^{\epsilon t} f_0(y_{s,\epsilon})ds = \\ &= \epsilon \int_0^t f_0(u_s)ds \end{aligned}$$

para todo $t \in \left[0, \frac{M}{\epsilon}\right]$. □

Antes de provarmos alguns resultados, observemos mais um fato. Se (5.9) e (5.12) valem, então:

$$\begin{aligned} \|f_0(\xi) - f_0(\varphi)\| &= \left\| \lim_{T\to+\infty} \int_0^T f(\xi, s)dh_1(d) - \lim_{T\to+\infty} \int_0^T f(\varphi, s)dh_1(s) \right\| \leq \\ &\leq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T L \|\xi - \varphi\|_\infty dh_1(s) \leq \\ &\leq L \|\xi - \varphi\|_\infty \limsup_{T\to+\infty} \frac{h_1(T) - h_1(0)}{T} \leq LK \|\xi - \varphi\|_\infty . \end{aligned}$$

Em particular, para cada $y_t, y_s \in P$ e cada $t, s \in [0, +\infty)$, temos:

$$\|f_0(y_s) - f_0(y_t)\| \leq LK \|y_s - y_t\|_\infty . \tag{5.18}$$

Seja $y \in \widetilde{P}_\epsilon$ uma solução da equação (5.16), em que ϕ é limitada por uma constante $\gamma > 0$. Sejam $s, t \in [0, M]$, com $t \leq s$ e $\theta \in \left[-\frac{r}{\epsilon}, 0\right]$. Então:

1. Se $s+\epsilon\theta > 0$ e $t+\epsilon\theta > 0$, então:

$$\begin{aligned}\|y_{s,\epsilon}(\theta) - y_{t,\epsilon}(\theta)\| = \|y(s+\epsilon\theta) - y(t+\epsilon\theta)\| = \left\| \int_{t+\epsilon\theta}^{s+\epsilon\theta} f_0(y_{\sigma,\epsilon}) d\sigma \right\| \leq \\ \leq \int_{t+\epsilon\theta}^{s+\epsilon\theta} \|f_0(y_{\sigma,\epsilon}) - f_0(0)\| \, d\sigma + \int_{t+\epsilon\theta}^{s+\epsilon\theta} \|f_0(0)\| \, d\sigma \leq \\ \leq LK \int_{t+\epsilon\theta}^{s+\epsilon\theta} \sup_{\sigma \in [t-r,s]} \|y(\sigma)\| \, d\sigma + (s-t) \|f_0(0)\|,\end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade segue de (5.18). Assim:

$$\|y_{s,\epsilon} - y_{t,\epsilon}\|_\infty = \sup_{\theta \in \left[-\frac{r}{\epsilon}, 0\right]} \|y(s+\epsilon\theta) - y(t+\epsilon\theta)\| \leq LK(s-t) \sup_{\sigma \in [t-r,s]} \|y(\sigma)\| + (s-t) \|f_0(0)\|.$$

2. Se $s+\epsilon\theta \leq 0$ e $t+\epsilon\theta \leq 0$, então:

$$\|y(s+\epsilon\theta) - y(t+\epsilon\theta)\| = \|\epsilon\phi(s+\epsilon\theta) - \epsilon\phi(t+\epsilon\theta)\| \leq 2\epsilon\gamma.$$

3. Se $s+\epsilon\theta > 0$ e $t+\epsilon\theta \leq 0$, então:

$$\begin{aligned}\|y(s+\epsilon\theta) - y(t+\epsilon\theta)\| \leq \left\| \epsilon\phi(0) + \int_0^{s+\epsilon\theta} f_0(y_{\sigma,\epsilon}) d\sigma \right\| + \|\epsilon\phi(t+\epsilon\theta)\| \leq \\ \leq 2\epsilon\gamma + \int_0^{s+\epsilon\theta} \|f_0(y_{\sigma,\epsilon})\| \, d\sigma \leq \\ \leq 2\epsilon\gamma + LK \int_0^{s+\epsilon\theta} \sup_{\sigma \in [t-r,s]} \|y(\sigma)\| \, d\sigma + (s-t) \|f_0(0)\| \leq \\ \leq 2\epsilon\gamma + LK(s+\epsilon\theta) \sup_{\sigma \in [t-r,s]} \|y(\sigma)\| + (s-t) \|f_0(0)\| \leq \\ \leq 2\epsilon\gamma + LK\left[s+\epsilon\theta - (t+\epsilon\theta)\right] \sup_{\sigma \in [t-r,s]} \|y(\sigma)\| + (s-t) \|f_0(0)\| = \\ = 2\epsilon\gamma + LK(s-t) \sup_{\sigma \in [t-r,s]} \|y(\sigma)\| + (s-t) \|f_0(0)\|.\end{aligned}$$

Em qualquer um desses casos, temos:

$$\|y_{s,\epsilon} - y_{t,\epsilon}\|_\infty \leq 2\epsilon\gamma + LK(s-t) \sup_{\sigma \in [t-r,s]} \|y(\sigma)\| + (s-t) \|f_0(0)\|, \tag{5.19}$$

donde $\|y_{s,\epsilon} - y_{t,\epsilon}\|_\infty \leq 2\gamma\epsilon$ quando $s-t \to 0^+$. Então, o mapeamento $[0, M] \ni t \mapsto y_{t,\epsilon}$ é contínuo, em que $y_{t,\epsilon}$ é uma solução da EDF (5.16).

Provaremos agora um lema que nos permite reescrever uma função que será usada na demonstração do método da média. Esse resultado pode ser encontrado em (1, Lema 3.39), e outras versões podem ser encontradas em (16, Lema 3.1) e (17).

Lema 14. *Sejam $B \subset X$ aberto, $f : G([-r,0], B) \times [0, +\infty) \to X$ é Perron-Stieltjes integrável com respeito a uma função não-decrescente $h_1 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Suponha que o limite:*

$$f_0(\psi) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\psi, s) dh_1(s) \ \textit{para}\ \psi \in G([-r,0], B) \tag{5.20}$$

existe e é bem definido. Então, para cada $t, \alpha > 0$*, a igualdade:*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\epsilon}{\alpha}\int_{\frac{t}{\epsilon}}^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) = f_0(\psi) \text{ para } \psi \in G([-r,0],B)$$

vale, sendo que a integral do lado esquerdo da igualdade existe e é bem definida.

Demonstração. Da equação (5.20), encontramos que, para $t, \alpha > 0$ e $\psi \in G([-r,0],B)$, vale:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) = f_0(\psi) \text{ e} \tag{5.21}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\epsilon}{t}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) = f_0(\psi). \tag{5.22}$$

Então:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) - \frac{1}{\frac{t}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s)\right] =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) - f_0(\psi)\right] + \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[f_0(\psi) - \frac{\epsilon}{t}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s)\right] = 0.$$

Assim, para cada $\epsilon > 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon}{\alpha}\int_{\frac{t}{\epsilon}}^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) &= \frac{1}{\frac{\alpha}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) - \frac{1}{\frac{\alpha}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) = \\
&= \left(\frac{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}}{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}}\right)\frac{1}{\frac{\alpha}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) - \left(\frac{\frac{t}{\epsilon}}{\frac{t}{\epsilon}}\right)\frac{1}{\frac{\alpha}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) = \\
&= \frac{1}{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}}\left(\frac{t}{\alpha}+1\right)\int_0^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) - \frac{t}{\alpha}\cdot\frac{1}{\frac{t}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) = \\
= \frac{1}{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) &+ \frac{t}{\alpha}\left[\frac{1}{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) - \frac{1}{\frac{t}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s)\right].
\end{aligned}$$

Então, combinando as equações (5.21) e (5.22), temos:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{\epsilon}{\alpha}\int_{\frac{t}{\epsilon}}^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) - f_0(\psi)\right] = \\
&= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) - f_0(\psi)\right] + \\
&+ \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{t}{\alpha}\left[\frac{1}{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) - \frac{1}{\frac{t}{\epsilon}}\int_0^{\frac{t}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\epsilon}{\alpha}\int_{\frac{t}{\epsilon}}^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(\psi,s)dh_1(s) = f_0(\psi).$$

□

Dado $P \subset G([-r,0],B)$ aberto, podemos estender uma função $f : P\times[0,+\infty) \to X$ Perron-Stieltjes integrável para uma função $F : G([-r,0],B) \times [0,+\infty) \to X$ Perron-Stieltjes integrável definindo:

$$F(\psi,t) = \begin{cases} f(\psi,t) \text{ para } (\psi,t) \in P \times [0,+\infty), \\ 0 \text{ para } \psi \notin P. \end{cases}$$

Aplicando então, o lema anterior sobre F, obtemos o seguinte corolário, o qual pode ser encontrado em (1, Corolário 3.40), (16) e (17):

Corolário 7. *Sejam $B \subset X$ e $P \subset G([-r,0],B)$ abertos, e $f : P \times [0,+\infty) \to X$ uma Perron-Stieltjes integrável com respeito a uma função não-decrescente $h_1 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Suponha que o limite:*

$$f_0(\psi) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\psi,s)dh_1(s) \text{ para } \psi \in P$$

existe e é bem definido. Então, para cada $t,\alpha > 0$, a igualdade:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\epsilon}{\alpha}\int_{\frac{t}{\epsilon}}^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(y_t,s)dh_1(s) = f_0(y_t) \text{ para } y_t \in P$$

vale, sendo que a integral do lado esquerdo da igualdade existe e é bem definida.

O próximo corolário é uma versão do Lema 14, e segue por uma demonstração análoga. Esse resultado pode ser encontrado em (1, Corolário 3.41).

Corolário 8. *Sejam $B \subset X$ e $\widetilde{P}_\epsilon \subset G\left(\left[-\frac{r}{\epsilon},0\right],B\right)$ abertos e $f : \widetilde{P}_\epsilon \times [0,+\infty) \to X$ uma função Perron-Stieltjes integrável com respeito a uma função não-decrescente $h_1 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Suponha que o limite:*

$$f_0(\psi) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\psi,s)dh_1(s) \text{ para } \psi \in \widetilde{P}_\epsilon$$

existe e é bem definido. Então, para cada $t,\alpha > 0$, a igualdade:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{\epsilon}{\alpha}\int_{\frac{t}{\epsilon}}^{\frac{t}{\epsilon}+\frac{\alpha}{\epsilon}} f(y_{t,\epsilon},s)dh_1(s) = f_0(y_t) \text{ para } y_{t,\epsilon} \in \widetilde{P}_\epsilon$$

vale, sendo que a integral do lado esquerdo da igualdade existe e é bem definida.

O próximo lema será usado na demonstração do método da média não-periódica, e pode ser encontrado em (1, Lema 3.42) e (17, Lema 3.2).

Lema 15. *Sejam $B \subset X$ e $\widetilde{P}_\epsilon \subset G\left(\left[-\frac{r}{\epsilon},0\right],B\right)$ abertos. Seja $f : \widetilde{P}_\epsilon \times [0,+\infty) \to X$ uma função que satisfaz (5.8) e (5.9) e $h_1 : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz (5.12). Suponha, que para cada $\varphi \in \widetilde{P}_\epsilon$, o limite:*

$$f_0(\varphi) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi,s)dh_1(s)$$

existe. Assuma que $0 < M < +\infty$ *e* $y : [-r, M] \to B$ *é uma solução maximal da EDF:*

$$\begin{cases} y' = f_0(y_{t,\epsilon}), \\ y_0 = \epsilon\phi, \end{cases}$$

com intervalo maximal de existência sendo $[-r, M]$*. Então, dado* $\epsilon > 0$*, existe* $\xi(\epsilon) > 0$ *tal que:*

$$\left\|\epsilon \int_0^t f\left(y_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) - \int_0^t f_0(y_{s,\epsilon}) ds\right\| < \xi(\epsilon) \text{ para todo } t \in [0, M]$$

e $\xi(\epsilon)$ *tende a* 0 *quando* $\epsilon \to 0^+$*.*

Demonstração. Dados $\epsilon > 0$ e $t \in [0, +\infty)$, seja δ um calibre em $[0, t]$ correspondente a $\epsilon > 0$ na definição da integral de Perron-Stieltjes $\int_0^t f\left(y_{\sigma,\epsilon}, \frac{\sigma}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right)$. Seja $d = (\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$ uma partição marcada δ-fina de $[0, t]$. Então:

$$\left\|\epsilon \int_0^t f\left(y_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) - \int_0^t f_0(y_{s,\epsilon}) ds\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{|d|} \left\|\epsilon \int_{s_{i-1}}^{s_i} \left[f\left(y_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) - f\left(y_{s_{i-1},\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right)\right] dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right)\right\| + \sum_{i=1}^{|d|} \left\|\int_{s_{i-1}}^{s_i} \left[f_0(y_{s,\epsilon}) - f_0(y_{s_{i-1},\epsilon})\right] ds\right\| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{|d|} \left\|\epsilon \int_{s_{i-1}}^{s_i} f\left(y_{s_{i-1},\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f_0\left(y_{s_{i-1},\epsilon}\right) ds\right\|.$$

Devido ao Lema de Cousin, podemos assumir, sem perda de generalidade, que o calibre δ satisfaz $\delta(\tau_i) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $\tau_i \in [s_{i-1}, s_i]$ com $i \in \{1, ..., |d|\}$. Por (5.19), temos:

$$\begin{aligned} \left\|y_{s,\epsilon} - y_{s_{i-1},\epsilon}\right\|_\infty &\leq LK(s - s_{i-1}) \sup_{\sigma \in [s_{i-1}-r, s_i]} \|y(\sigma)\| + (s - s_{i-1}) \|f_0(0)\| + 2\epsilon\gamma < \\ &< LK2\delta(\tau_i) \left(\sup_{\sigma \in [s_{i-1}-r, s_i]} \|y(\sigma)\|\right) + 2\delta(\tau_i) \|f_0(0)\| + 2\epsilon\gamma < \\ &< LK\epsilon \left(\sup_{\sigma \in [s_{i-1}-r, s_i]} \|y(\sigma)\|\right) + \epsilon \|f_0(0)\| + 2\epsilon\gamma \end{aligned}$$

para $i \in \{1, ..., |d|\}$ e $s \in [s_{i-1}, s_i]$. Então, tomando:

$$D = LK\left(\sup_{\sigma \in [-r, M]} \|y(\sigma)\|\right) + \|f_0(0)\| + 2\gamma$$

obtemos $\sup_{s \in [s_{i-1}, s_i]} \left\|y_{s,\epsilon} - y_{s_{i-1},\epsilon}\right\| \leq \epsilon D$ para todo $i \in \{1, ..., |d|\}$. Tal fato, em conjunto das condições (5.9) e (5.12), implicam em:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{|d|}\left\|\int_{s_{i-1}}^{s_i}\epsilon\left[f\left(y_{s,\epsilon},\frac{s}{\epsilon}\right)-f\left(y_{s-1,\epsilon},\frac{s}{\epsilon}\right)\right]dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right)\right\|\leq\\
&\leq \epsilon L\sum_{i=1}^{|d|}\sup_{\sigma\in[s_{i-1},s_i]}\left\|y_{\sigma,\epsilon}-y_{s_{i-1},\epsilon}\right\|_\infty\int_{s_{i-1}}^{s_i}dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right)\leq\\
&\leq \epsilon^2 DL\sum_{i=1}^{|d|}\left[h_1\left(\frac{s_i}{\epsilon}\right)-h_1\left(\frac{s_{i-1}}{\epsilon}\right)\right]=\\
&=\epsilon^2 DL\left[h_1\left(\frac{t}{\epsilon}\right)-h_1\left(0\right)\right]=\epsilon DLt\left[\frac{h_1\left(\frac{t}{\epsilon}\right)-h_1(0)}{\frac{t}{\epsilon}}\right].
\end{aligned}$$

Pela condição 5.12, podemos escolher $\epsilon>0$ tal que:

$$\frac{h_1\left(\frac{t}{\epsilon}\right)-h_1(0)}{\frac{t}{\epsilon}}\leq K \text{ para cada } t\in[0,M]\,.$$

Então:

$$\sum_{i=1}^{|d|}\left\|\int_{s_{i-1}}^{s_i}\epsilon\left[f\left(y_{s,\epsilon},\frac{s}{\epsilon}\right)-f\left(y_{s-1,\epsilon},\frac{s}{\epsilon}\right)\right]dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right)\right\|\leq\epsilon DLtK\leq\epsilon DLMK.$$

Por outro lado, para $i\in\{1,2,...,|d|\}$ e $s\in[s_{i-1},s_i]$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{|d|}\left\|\int_{s_{i-1}}^{s_i}\left[f_0\left(y_{s,\epsilon}\right)-f_0\left(y_{s-1,\epsilon}\right)\right]ds\right\|&\leq LK\sum_{i=1}^{|d|}\sup_{\sigma\in[s_{i-1},s_i]}\left\|y_{\sigma,\epsilon}-y_{s_{i-1},\epsilon}\right\|_\infty(s_i-s_{i-1})<\\
&<\epsilon DLKM.
\end{aligned}$$

Mostremos que a soma:

$$\sum_{i=1}^{|d|}\left\|\epsilon\int_{s_{i-1}}^{s_i}f\left(y_{s_{i-1},\epsilon},\frac{s}{\epsilon}\right)dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right)-\int_{s_{i-1}}^{s_i}f_0(y_{s_{i-1},\epsilon})ds\right\|$$

pode ser feita arbitrariamente pequena pelo corolário 7. De fato, para cada $i\in\{1,2,...,|d|\}$ e $\alpha_i=s_i-s_{i-1}$, temos:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{|d|}\left\|\epsilon\int_{s_{i-1}}^{s_i}f\left(y_{s_{i-1},\epsilon},\frac{s}{\epsilon}\right)dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right)-\int_{s_{i-1}}^{s_i}f_0(y_{s_{i-1},\epsilon})ds\right\|=\\
&=\sum_{i=1}^{|d|}\left\|\epsilon\int_{s_{i-1}}^{s_{i-1}+\alpha_i}f\left(y_{s_{i-1},\epsilon},\frac{s}{\epsilon}\right)dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right)-\int_{s_{i-1}}^{s_{i-1}+\alpha_i}f_0(y_{s_{i-1},\epsilon})ds\right\|=\\
&=\sum_{i=1}^{|d|}\alpha_i\left\|\frac{\epsilon}{\alpha_i}\int_{\frac{s_{i-1}}{\epsilon}}^{\frac{s_{i-1}}{\epsilon}+\frac{\alpha_i}{\epsilon}}f\left(y_{s_{i-1},\epsilon},s\right)dh_1\left(s\right)-f_0(y_{s_{i-1},\epsilon})\right\|.
\end{aligned}$$

Para cada $i\in\{1,2,...,|d|\}$, definamos:

$$\beta_i(\epsilon)=\frac{\epsilon}{\alpha_i}\int_{\frac{s_{i-1}}{\epsilon}}^{\frac{s_{i-1}}{\epsilon}+\frac{\alpha_i}{\epsilon}}f\left(y_{s_{i-1},\epsilon},s\right)dh_1\left(s\right)-f_0(y_{s_{i-1},\epsilon})$$

e façamos $\beta(\epsilon) = \max\{\|\beta_i(\epsilon)\| \ \mid \ i = 1, 2, ..., |d|\}$. Então:

$$\sum_{i=1}^{|d|} \alpha_i \|\beta_i(\epsilon)\| \leq \beta(\epsilon) \sum_{i=1}^{|d|} (s_i - s_{i-1}) = \beta(\epsilon)t < \beta(\epsilon)M.$$

Pelo corolário 7, segue que $\beta(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0^+$. Então:

$$\left\| \epsilon \int_0^t f\left(y_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) - \int_0^t f_0\left(y_{s,\epsilon}\right) ds \right\| < 2\epsilon DLKM + \beta(\epsilon)M.$$

Então:

$$\xi(\epsilon) = 2\epsilon DLKM + \beta(\epsilon)M$$

é tal que $\xi(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0^+$. Assim:

$$\left\| \epsilon \int_0^t f\left(y_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) - \int_0^t f_0\left(y_{s,\epsilon}\right) ds \right\| < \xi(\epsilon),$$

donde o resultado segue. □

Provaremos agora o método da média não-periódica, que é o principal resultado dessa seção. Esse teorema, que se encontra em (1, Teorema 3.43) (o qual é uma versão do resultado em (17, Teorema 3.1)), nos permite aproximar EDFs em medida não autônomas por EDFs autônomas semelhantes àquelas estudadas no Lema 15.

Teorema 27. *Sejam $B \subset X$ e $\widetilde{P}_\epsilon \subset G\left(\left[-\frac{r}{\epsilon}, 0\right], B\right)$ abertos, $f : \widetilde{P}_\epsilon \times [0, +\infty) \to X$ uma função satisfazendo* (5.8) *e* (5.9) *e $g : \widetilde{P}_\epsilon \times [0, +\infty) \times (0, \epsilon_0] \to X$ uma função satisfazendo as condições* (5.10) *e* (5.11)*. Suponha que existam $h_1, h_2 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funções não-decrescentes tais que* (5.12) *e* (5.13) *valham e $\phi \in P$ tal que* (5.14) *vale. Suponha, ainda, que para cada $\varphi \in \widetilde{P}_\epsilon$, o limite:*

$$f_0(\varphi) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi, s) dh_1(s)$$

existe e está bem definido. Seja $M > 0$ e considere a EDF:

$$\begin{cases} x(t) = \phi(0) + \displaystyle\int_0^t \epsilon f\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) + \int_0^t \epsilon^2 g\left(x_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}, \epsilon\right) dh_2\left(\frac{s}{\epsilon}\right) \ \text{para } t \in [0, M], \\ x_0 = \epsilon\phi, \end{cases} \tag{5.23}$$

em que $x_{t,\epsilon}(\theta) = x(t + \epsilon\theta)$, para $\theta \in \left[\frac{-r}{\epsilon}, 0\right]$, e a EDF:

$$\begin{cases} y' = f_0(y_{t,\epsilon}), \\ y_0 = \epsilon\phi. \end{cases} \tag{5.24}$$

em que $t \in [0, M]$. Suponha que $[0, \overline{b})$ é o intervalo maximal de existência da EDF (5.23) *e $[0, b)$ é o intervalo maximal de existência da EDF* (5.24)*. Suponha também que $x_\epsilon : [-r, M] \to B$ é uma solução maximal da EDF* (5.23) *e $y : [-r, M] \to B$ é uma solução maximal da EDF* (5.24)*, em que $0 < M < \min\{\overline{b}, b\}$. Então, para todo $\nu > 0$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$:*

$$\|x_\epsilon(t) - y(t)\| < \nu \text{ para todo } t \in [0, M].$$

Demonstração. Se $t=0$, então $\|x_\epsilon(0)-y(0)\|=0$. Se $t>0$, então pelas condições (5.9), (5.11), (5.12) e pelo Lema 15:

$$\begin{aligned}
&\|x_\epsilon(t)-y(t)\| = \\
&= \left\|\epsilon\int_0^t f\left((x_\epsilon)_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) + \epsilon^2\int_0^t g\left((x_\epsilon)_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}, \epsilon\right) dh_2\left(\frac{s}{\epsilon}\right) - \int_0^t f_0\left(y_{s,\epsilon}\right) ds\right\| \leq \\
&\leq \epsilon\int_0^t \left\|f\left((x_\epsilon)_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) - f\left(y_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right)\right\| dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) + \left\|\epsilon\int_0^t f\left(y_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) - \int_0^t f_0\left(y_{s,\epsilon}\right) ds\right\| + \\
&+ \left\|\epsilon^2\int_0^t g\left((x_\epsilon)_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}, \epsilon\right) dh_2\left(\frac{s}{\epsilon}\right)\right\| \leq \\
&\leq L\epsilon\int_0^t \left\|(x_\epsilon)_{s,\epsilon} - y_{s,\epsilon}\right\|_\infty dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) + \left\|\epsilon\int_0^t f\left(y_{s,\epsilon}, \frac{s}{\epsilon}\right) dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) - \int_0^t f_0\left(y_{s,\epsilon}\right) ds\right\| + \\
&+ \epsilon^2 C\left(h_2\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - h_2(0)\right) < \\
&< L\epsilon\int_0^t \left\|(x_\epsilon)_{s,\epsilon} - y_{s,\epsilon}\right\|_\infty dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) + \xi(\epsilon) + \epsilon C t\frac{h_2\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - h_2(0)}{\frac{t}{\epsilon}},
\end{aligned}$$

sendo $\xi(\epsilon)$ dado pelo Lema 15. Pela condição (5.13), existe $\epsilon>0$ suficientemente pequeno tal que:

$$\frac{h_2\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - h_2(0)}{\frac{t}{\epsilon}} \leq N \text{ para todo } t>0.$$

Portanto, para $0<t\leq M$, obtemos:

$$\|x_\epsilon(t)-y(t)\| \leq L\epsilon\int_0^t \left\|(x_\epsilon)_{s,\epsilon} - y_{s,\epsilon}\right\|_\infty dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) + \xi(\epsilon) + \epsilon CMN.$$

Do fato que $(x_\epsilon)_0 = \epsilon\phi = y_0$, obtemos $\sup\limits_{\theta\in[-r,0]}\|x_\epsilon(\theta)-y(\theta)\| = 0$, donde, para $s\in[0,t]$, temos:

$$\begin{aligned}
\left\|(x_\epsilon)_{s,\epsilon} - y_{s,\epsilon}\right\|_\infty &= \sup_{\theta\in[-\frac{r}{\epsilon},0]}\|x_\epsilon(s+\epsilon\theta) - y(s+\epsilon\theta)\| = \\
&= \sup_{\theta\in[s-r,s]}\|x_\epsilon(\theta)-y(\theta)\| \leq \sup_{\theta\in[-r,s]}\|x_\epsilon(\theta)-y(\theta)\| = \\
&= \sup_{\theta\in[0,s]}\|x_\epsilon(\theta)-y(\theta)\|.
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos:

$$\|x_\epsilon(t)-y(t)\| \leq L\epsilon\int_0^t \sup_{\theta\in[0,s]}\|x_\epsilon(\theta)-y(\theta)\| \, dh_1\left(\frac{s}{\epsilon}\right) + \xi(\epsilon) + \epsilon CMN,$$

e então, a Desigualdade de Grönwall para a integral de Perron-Stieltjes (Corolário 5) implica que:

$$\|x_\epsilon(t)-y(t)\| \leq \sup_{\tau\in[0,t]}\|x_\epsilon(\tau)-y(\tau)\| \leq e^{\epsilon L\left(h_1\left(\frac{t}{\epsilon}\right)-h_1(0)\right)}[\xi(\epsilon)+\epsilon CMN].$$

Por fim, pela condição (5.12), é possível escolher $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que:

$$\epsilon L \left[h_1\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - h_1(0)\right] = tL\frac{\left[h_1\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - h_1(0)\right]}{\frac{t}{\epsilon}} \leq tLK \leq MLK.$$

Então, tomando $\nu = e^{KLM}[\xi(\epsilon) + \epsilon CMN]$, temos:

$$\|x_\epsilon(t) - y(t)\| \leq \nu \text{ para todo } t \in [0, M].$$

□

Usando a equivalência dos problemas (5.6) e (5.7) e as observações feitas, podemos provar o seguinte corolário, que é o resultado encontrado em (1, Corolário 3.44), e semelhante ao resultado em (17, Corolário 3.2).

Corolário 9. *Sejam $B \subset X$ e $P \subset G([-r, 0], B)$ abertos, $f : P \times [0, +\infty) \to X$ uma função satisfazendo* (5.8) *e* (5.9) *com P ao invés de $\widetilde{P}_\epsilon$ e $g : P \times [0, +\infty) \times (0, \epsilon_0] \to X$ uma função satisfazendo as condições* (5.10) *e* (5.11) *com P ao invés de $\widetilde{P}_\epsilon$. Suponha que existam $h_1, h_2 : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e funções não-decrescentes tais que* (5.12) *e* (5.13) *valham e $\phi \in P$ tal que* (5.14) *vale. Considere a EDF:*

$$\begin{cases} y(t) = y(0) + \displaystyle\int_0^t \epsilon f(y_s, s)dh_1(s) + \epsilon^2 \int_0^t g(y_s, s, \epsilon)dh_2(s), \\ y_0 = \epsilon\phi, \end{cases} \tag{5.25}$$

e a EDF:

$$\begin{cases} x' = f_0(x_t), \\ x_0 = \epsilon\phi, \end{cases} \tag{5.26}$$

em que f_0 é dada por:

$$f_0(\varphi) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi, s)dh_1(s) \text{ para todo } \varphi \in P.$$

Sejam $M > 0$ e $x_\epsilon, y : \left[-r, \frac{M}{\epsilon}\right] \to B$ soluções de (5.25) *e* (5.26) *respectivamente. Então, para todo $\nu > 0$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que:*

$$\|x_\epsilon(t) - y(t)\| < \nu \text{ para todo } t \in \left[-r, \frac{M}{\epsilon}\right] \text{ e } \epsilon \in (0, \epsilon_0].$$

Com o método da média não-periódica, o Teorema 18 e as relações entre as soluções de EDFs em medida com impulsos e as soluções de EDFs em medida, podemos provar o próximo resultado, que se trata de um método da média não-periódica para EDFs em medida com impulsos. Esse teorema está em (1, Teorema 3.45), e uma versão desse resultado está em (17, Teorema 4.2).

Teorema 28. *Considere $\epsilon_0, r > 0$, $P = G([-r,0], X)$ e a EDF impulsiva em medida:*

$$\begin{cases} x_\epsilon(t) = x_\epsilon(0) + \epsilon \displaystyle\int_0^t f((x_\epsilon)_s, s)dh_1(s) + \epsilon^2 \int_0^t g((x_\epsilon)_s, s, \epsilon)dh_2(s) + \epsilon \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ t_k<t}} I_k(x_\epsilon(t_k)), \\ (x_\epsilon)_0 = \epsilon\phi, \end{cases} \tag{5.27}$$

em que $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, $\phi \in P$ e a função $f : P \times [0,+\infty) \to X$ satisfaz as condições (5.8) e (5.9). Assuma que $h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição (5.12) e que $g : P \times [0,+\infty) \times (0, \epsilon_0] \to X$ é limitada e satisfaz a condição (5.10). Ainda, suponha que os operadores impulso $I_k : X \to X$ são limitados e Lipschitz contínuos, com a mesma constante de Lipschitz para todo $k \in \mathbb{N}$, e que o limite:

$$f_0(\varphi) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi, s)dh(s)$$

existe e está bem definido para todo $\varphi \in P$. Denote:

$$I_0(z) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ 0\le t_k<T}} I_k(z) \text{ para todo } z \in X$$

e considere o problema autônomo:

$$\begin{cases} y_\epsilon(t) = y_\epsilon(0) + \displaystyle\int_0^t \epsilon\left[f_0\left((y_\epsilon)_s\right) + I_0\left(y_\epsilon(s)\right)\right] ds, \\ (y_\epsilon)_0 = \epsilon\phi, \end{cases} \tag{5.28}$$

em que $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$. Sejam $M > 0$ e $x_\epsilon, y_\epsilon : \left[-r, \frac{M}{\epsilon}\right] \to X$ soluções de (5.27) e (5.28), respectivamente. Então, para todo $\nu > 0$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que:

$$\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| < \nu \text{ para todo } t \in \left[-r, \frac{M}{\epsilon}\right] \text{ e } \epsilon \in (0, \epsilon_0].$$

Demonstração. Defina $\widetilde{h} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ por:

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} h(t), \text{ para } t \in [0, t_1], \\ h(t) + c_k, \text{ para } t \in (t_k, t_{k+1}], k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

de forma que, para todo $k \in \mathbb{N}$, a sequência $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaz $0 \le c_k \le c_{k+1}$ e $\Delta^+\widetilde{h}(t_k) = 1$. Pela definição, a função $\widetilde{h}$ é não-decrescente e contínua pela esquerda.

Por outro lado, pela definição de $\widetilde{h}$ e por (5.12), existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $\beta \ge 0$, temos:

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{\widetilde{h}(T+\beta) - \widetilde{h}(\beta)}{T} \le C.$$

Então, pela hipótese, obtemos:

$$x_\epsilon(t) = x_\epsilon(0) + \int_0^t \left(\epsilon f\left((x_\epsilon)_s, s\right) + \epsilon^2 g\left((x_\epsilon)_s, s, \epsilon\right)\right) dh(s) + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ 0\le t_k<t}} \epsilon I_k\left(x_\epsilon(t_k)\right)$$

para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e para todo $t \in \left[0, \frac{M}{\epsilon}\right]$.

Defina:

$$F_\epsilon(z,t) = \begin{cases} \epsilon f(z,t) + \epsilon^2 g(z,t,\epsilon), \text{ para } t \notin \{t_1, t_2, ...\}, \\ \epsilon I_k\left(z(0)\right), \text{ para } t = t_k, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

para todo $z \in P$ e todo $t \geq 0$. Como uma consequência do Teorema 18, obtemos:

$$x_\epsilon(t) = x_\epsilon(0) + \int_0^t F_\epsilon\left((x_\epsilon)_s, s\right) d\widetilde{h}(s) \tag{5.29}$$

para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e para todo $t \in \left[0, \frac{M}{\epsilon}\right]$. Então, para cada $z \in P$ e $t \geq 0$, podemos reescrever $F_\epsilon(z,t)$ como:

$$F_\epsilon(z,t) = \epsilon \widetilde{f}\left(z,t\right) + \epsilon^2 \widetilde{g}\left(z,t,\epsilon\right) \tag{5.30}$$

em que:

$$\widetilde{f}(z,t) = \begin{cases} f(z,t), \text{ para } t \notin t_1, t_2, ..., \\ I_k\left(z(0)\right), \text{ para } t = t_k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$\widetilde{g}\left(z,t,\epsilon\right) = \begin{cases} g(z,t,\epsilon), \text{ para } t \notin t_1, t_2, ..., \\ 0, \text{ para } t = t_k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Portanto, as igualdades (5.29) e (5.30) significam que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, a função $x_\epsilon : \left[-r, \frac{M}{\epsilon}\right] \to X$ satisfaz:

$$\begin{cases} x_\epsilon(t) = x_\epsilon(0) + \epsilon \int_0^t \widetilde{f}((x_\epsilon)_s, s) d\widetilde{h}\left(s\right) + \epsilon^2 \int_0^t \widetilde{g}((x_\epsilon)_s, s, \epsilon) d\widetilde{h}\left(s\right), \\ (x_\epsilon)_0 = \epsilon\phi. \end{cases}$$

A definição de $\widetilde{f}$, com as hipóteses e o Lema 11 implicam que a condição (5.9) é cumprida. Então, pelo Lema 10, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^T \widetilde{f}\left(z,s\right) d\widetilde{h}(s) &= \int_0^T f(z,s) dh(s) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq t_k < T}} \widetilde{f}(z, t_k) \Delta^+ \widetilde{h}(t_k) = \\ &= \int_0^T f(z,s) dh(s) + \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq t_k < T}} I_k(z(0)) \end{aligned}$$

para todo $z \in P$. Então, a função $\widetilde{f}_0 : P \to X$, definida por:

$$\widetilde{f}_0(y) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \widetilde{f}\left(y,s\right) d\widetilde{h}(s) \text{ para todo } y \in P$$

satisfaz:

$$\widetilde{f}_0(y) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(y,s) dh(s) + \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ 0 \leq t_k < T}} I_k(y(0)) = f_0(y) + I_0(y(0)), \text{ para } y \in P.$$

Por fim, o Corolário 9 mostra que, para todo $\nu > 0$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que:

$$\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| < \nu, \text{ para todo } \epsilon \in (0, \epsilon_0] \text{ e } t \in \left[-r, \frac{M}{\epsilon}\right].$$

□

Provaremos agora um lema que nos permitirá adaptar os resultados dessa seção para equações dinâmicas em escalas temporais. Provaremos duas versões desse lema, ambas mais gerais do que aquela presente em (1, Lema 3.46) e (18, Corolário 5.6), sendo a primeira dessas versões com um enunciado ligeiramente diferente.

Lema 16. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Suponha que $\sup \mathbb{T} = +\infty$, que existe uma sequência crescente $(t_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \subset \mathbb{T}$ com $\lim t_n = +\infty$ tal que $\lim \dfrac{t_n - t_{n-1}}{t_{n-1}} = 0$ e $m : [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \to X$ é Perron-Stieltjes Δ-integrável com respeito a g sobre todo subintervalo compacto da forma $[t_0, t_n]_{\mathbb{T}}$. Seja $Y = \{T \in [0, +\infty) \mid (T + t_0)^* = t_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Então:*

$$\lim_{\substack{T\to+\infty \\ T\in Y}} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s) = \lim \frac{1}{t_n - t_0} \int_{t_0}^{t_n} m(s)\Delta g(s),$$

desde que o limite a direita da igualdade exista.

Demonstração. Seja $U \geq 0$ tal que $t_0 + U = t_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Então, como $[t_0, t_0 + U]_{\mathbb{T}} = [t_0, t_n]_{\mathbb{T}}$, existe $\int_{t_0}^{t_0+U} m(s)\Delta g(s)$. Pelo Teorema 12, existe a integral de Perron-Stieltjes $\int_{t_0}^{t_0+U} m^*(s)dg^*(s)$ e vale:

$$\int_{t_0}^{t_0+U} m^*(s)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t_0+U} m(s)\Delta g(s).$$

Seja $T \in Y$ dado, com $T > 0$. Como $\sup \mathbb{T} = \lim t_n = +\infty$, temos que $t_0 \leq t_0 + T < \sup \mathbb{T}$, donde existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 + T < t_n$. Segue da observação anterior que $\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s)$ existe. Ainda, como $[t_0, t_0 + T] \subset [t_0, t_n]$, segue da integrabilidade de subintervalos que $\int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s)$ existe. Analisemos então o valor dessa integral. Sabemos, pelo Lema 8, que:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s) = \int_{t_0^*}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) = \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) = \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m(s)\Delta g(s),$$

donde:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m(s)\Delta g(s).$$

Como $t_0 + T > t_0$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ é crescente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_{n-1} < t_0 + T \leq t_n$. Ainda, como $T \in Y$, existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $(t_0 + T)^* = t_m$. Dado que $t_{n-1} < t_0 + T \leq t_n$, segue que $t_{n-1} < t_m \leq t_n$. Do fato de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ é crescente, temos $t_m = t_n$. Assim:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{t_n - t_0}\int_{t_0}^{t_n} m(s)\Delta g(s) - \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s)\right\| = \\
&= \left\|\frac{1}{t_n - t_0}\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s) - \frac{1}{T}\int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s)\right\| = \\
&= \left\|\frac{1}{t_n - t_0}\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s) - \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s)\right\| = \\
&= \left\|\left(\frac{1}{t_n - t_0} - \frac{1}{T}\right)\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s)\right\| = \\
&= \left\|\left(\frac{t_0 + T - t_n}{T\,(t_n - t_0)}\right)\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s)\right\| = \\
&= \left|\frac{t_0 + T - t_n}{T}\right|\left\|\frac{1}{t_n - t_0}\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s)\right\| = \\
&= \frac{t_n - (t_0 + T)}{T}\left\|\frac{1}{t_n - t_0}\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s)\right\| \leq \\
&\leq \frac{t_n - t_{n-1}}{t_{n-1} - t_0}\left\|\frac{1}{t_n - t_0}\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s)\right\| \leq \\
&\leq \frac{t_n - t_{n-1}}{t_{n-1}}\frac{t_{n-1}}{t_{n-1} - t_0}\left\|\frac{1}{t_n - t_0}\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s)\right\|.
\end{aligned}$$

Como $T \to +\infty$ implica em $n \to +\infty$, temos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\substack{T\to+\infty \\ T\in Y}}\left\|\frac{1}{t_n - t_0}\int_{t_0}^{t_n} m(s)\Delta g(s) - \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s)\right\| \leq \\
&\leq \lim \frac{t_n - t_{n-1}}{t_{n-1}}\frac{t_{n-1}}{t_{n-1} - t_0}\left\|\frac{1}{t_n - t_0}\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s)\right\| = \\
&= \left(\lim \frac{t_n - t_{n-1}}{t_{n-1}}\right)\left(\lim \frac{t_{n-1}}{t_{n-1} - t_0}\right)\left\|\lim \frac{1}{t_n - t_0}\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s)\right\| = 0.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\lim \dfrac{t_{n-1}}{t_{n-1} - t_0} = 1$, $\lim \dfrac{1}{t_n - t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t_n} m^*(s)dg^*(s)$ existe e $\lim \dfrac{t_n - t_{n-1}}{t_{n-1}} = 0$. Portanto:

$$\lim_{\substack{T\to+\infty \\ T\in Y}} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s) = \lim \frac{1}{t_n - t_0}\int_{t_0}^{t_n} m(s)\Delta g(s).$$

□

Note que, na demonstração anterior, dado $n \in \mathbb{N}$, $(\rho(t_n) - t_0, t_n - t_0] \subset Y$. De fato, $\rho(t_n) \geq t_0$ (donde $(\rho(t_n) - t_0, t_n - t_0] \subset [0, +\infty)$) e, dado $t \in (\rho(t_n) - t_0, t_n - t_0]$, temos $t + t_0 \in (\rho(t_n), t_n]$. Assim, $(t + t_0)^* = t_n$ (uma vez que $t_n \in \mathbb{T}$). Em particular, caso $\rho(t_n) < t_n$, temos $t_n - t_0 \in Y$. Note ainda que, caso $\rho(t_n) = t_n$, então $t_n - t_0 \in [0, +\infty)$ e $(t_n - t_0 + t_0)^* = t_n^* = t_n$, donde $t_n - t_0 \in Y$ em qualquer um dos casos.

Mostremos agora outra versão esse lema, mais similar àquelas em (1, Lema 3.46) e (18, Corolário 5.6):

Lema 17. *Sejam $\mathbb{T}$ uma escala temporal e $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Suponha que* $\sup \mathbb{T} = +\infty$*, que* $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\mu(t)}{t} = 0$ *e que* $m : [t_0, +\infty)_{+\infty} \to X$ *é Perron-Stieltjes* Δ*-integrável com respeito a* g *sobre todo subintervalo compacto de* $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$*, então:*

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s) = \lim_{\substack{T\to+\infty \\ t_0+T\in\mathbb{T}}} \int_{t_0}^{t_0+T} m(s)\Delta g(s),$$

desde que o limite a direita da igualdade exista.

Demonstração. Seja $U \geq 0$ tal que $t_0 + U = k$ para algum $k \in \mathbb{T}$. Então, como $[t_0, k]_{\mathbb{T}}$ é um subintervalo compacto de $[t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, existe $\int_{t_0}^{t_0+U} m(s)\Delta g(s)$. Pelo Teorema 12, existe a integral de Perron-Stieltjes $\int_{t_0}^{t_0+U} m^*(s)dg^*(s)$ e vale:

$$\int_{t_0}^{t_0+U} m^*(s)dg^*(s) = \int_{t_0}^{t_0+U} m(s)\Delta g(s).$$

Seja $T > 0$ dado. Como $\sup \mathbb{T} = +\infty$, temos que $t_0 \leq t_0 + T < \sup \mathbb{T}$, donde existe $k \in \mathbb{T}$ tal que $t_0 + T < k$. Segue da observação anterior que $\int_{t_0}^{k} m^*(s)dg^*(s)$ existe. Ainda, como $[t_0, t_0 + T] \subset [t_0, k]$, segue da integrabilidade de subintervalos que $\int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s)$ existe. Analisemos então o valor dessa integral. Sabemos, pelo Lema 8, que:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s) = \int_{t_0^*}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) = \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) = \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m(s)\Delta g(s),$$

donde:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m(s)\Delta g(s).$$

Sabemos que $\lim\limits_{\substack{T\to+\infty \\ t_0+T}} \dfrac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} m(s)\Delta g(s) = L$ existe. Assim:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{(t_0+T)^* - t_0} \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m(s)\Delta g(s) - \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s) \right\| = \\
&= \left\| \frac{1}{(t_0+T)^* - t_0} \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) - \frac{1}{T} \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) \right\| = \\
&= \left\| \left(\frac{1}{(t_0+T)^* - t_0} - \frac{1}{T} \right) \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) \right\| = \\
&= \left\| \left(\frac{t_0 + T - (t_0+T)^*}{T\,((t_0+T)^* - t_0)} \right) \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) \right\| = \\
&= \left| \frac{t_0 + T - (t_0+T)^*}{T} \right| \left\| \frac{1}{(t_0+T)^* - t_0} \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) \right\| = \\
&= \frac{(t_0+T)^* - (t_0+T)}{T} \left\| \frac{1}{(t_0+T)^* - t_0} \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) \right\| \leq \\
&\leq \left(\frac{\sigma((t_0+T)) - (t_0+T)}{t_0+T} \right) \left(\frac{t_0+T}{T} \right) \left\| \frac{1}{(t_0+T)^* - t_0} \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) \right\| = \\
&= \frac{\mu(t_0+T)}{t_0+T} \frac{t_0+T}{T} \left\| \frac{1}{(t_0+T)^* - t_0} \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) \right\|.
\end{aligned}$$

Como $T \to +\infty$ implica em $(t_0+T)^* \to +\infty$, temos:

$$0 \leq \lim_{T\to+\infty} \left\| \frac{1}{(t_0+T)^* - t_0} \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m(s)\Delta g(s) - \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s) \right\| \leq$$
$$\lim_{T\to+\infty} \frac{\mu(t_0+T)}{t_0+T} \lim_{T\to+\infty} \frac{t_0+T}{T} \lim_{T\to+\infty} \left\| \frac{1}{(t_0+T)^* - t_0} \int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) \right\| = 0,$$

pois $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{\mu(t_0+T)}{t_0+T} = 0$, $\lim\limits_{T\to+\infty} \dfrac{t_0+T}{T} = 1$ e $\lim\limits_{T\to+\infty} \left\| \dfrac{1}{(t_0+T)^* - t_0} \displaystyle\int_{t_0}^{(t_0+T)^*} m^*(s)dg^*(s) \right\| = L$. Portanto:

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} m^*(s)dg^*(s) = \lim_{\substack{T\to+\infty \\ t_0+T\in\mathbb{T}}} \int_{t_0}^{t_0+T} m(s)\Delta g(s).$$

□

Por fim, mostraremos um método da média não-periódica para equações dinâmicas em escalas. Apresentaremos uma versão mais geral do resultado encontrado em (1, Teorema 3.47), mas com demonstração análoga. Outras versões desse resultado podem ser encontradas em (17) e (18, Teorema 5.3).

Teorema 29. *Sejam $B \subset X$ aberto, $\epsilon_0, L, r > 0$, $P = G([-r,0], B)$, $\mathbb{T}$ uma escala temporal com $\sup \mathbb{T} = +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\mu(t)}{t} = 0$, e $[t_0 - r, +\infty)_{\mathbb{T}}$ um intervalo em escalas temporais, com $t_0 \in \mathbb{T}$ tal que $t_0 - r \in \mathbb{T}$. Considere funções $f : P \times [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \to X$, $g : P \times [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}} \times (0, \epsilon_0] \to X$ limitada e $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ tais que:*

1. *Para todo $b > t_0$ com $b \in \mathbb{T}$ e $y \in G([t_0 - r, b], B)$, as funções $t \mapsto f(y_t, t)$ e $t \mapsto g(y_t, t, \epsilon)$ são regradas em $[t_0, b]_{\mathbb{T}}$.*

2. *Existe uma constante $C > 0$ tal que para $x, y \in P$ e $u_1, u_2 \in [t_0, +\infty)_{\mathbb{T}}$, com $u_1 \leq u_2$, vale que:*
$$\left\| \int_{u_1}^{u_2} [f(x,s) - f(y,s)]\, \Delta h(s) \right\| \leq C \int_{u_1}^{u_2} \|x - y\|_\infty \Delta h(s).$$

3. *Se $z : [-r, 0] \to B$ é uma função regrada, então:*
$$f_0(z) = \lim_{\substack{T\to+\infty \\ t_0+T\in\mathbb{T}}} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(z,s)\Delta h(s)$$
existe e está bem definida.

4. *Existe $K > 0$ tal que, para todo $\beta \geq t_0$, vale que:*
$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{h^*(T+\beta) - h^*(\beta)}{T} \leq K.$$

Seja $\phi \in G([t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}, B)$ limitada. Suponha que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, a equação dinâmica em escalas temporais:

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + \epsilon \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(x_s^*, s)\Delta h(s) + \epsilon^2 \int_{t_0}^{t} g(x_s^*, s, \epsilon)\Delta h(s), \\ x(t) = \epsilon\phi(t), \;\; para\ t \in [t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}, \end{cases} \tag{5.31}$$

possui uma solução $x_\epsilon : \left[t_0 - r, t_0 + \dfrac{M}{\epsilon}\right]_{\mathbb{T}} \to B$, *e a EDF:*

$$\begin{cases} y' = \epsilon f_0(y_t^*), \\ y(t) = \epsilon\phi(t), \ \text{para } t \in [t_0 - r, t_0]_{\mathbb{T}}, \end{cases} \tag{5.32}$$

tem uma solução $y_\epsilon : \left[t_0 - r, t_0 + \dfrac{M}{\epsilon}\right]_{\mathbb{T}} \to B$. *Então, para todo* $\nu > 0$, *existe* $\epsilon_0 > 0$ *tal que para* $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, *temos:*

$$\|x_\epsilon(t) - y_\epsilon(t)\| < \nu \ \text{para todo } t \in \left[t_0 - r, t_0 + \frac{M}{\epsilon}\right]_{\mathbb{T}}.$$

Demonstração. Podemos considerar $t_0 = 0$ sem perda de generalidade. De fato, se $t_0 \neq 0$, podemos definir $\widetilde{\mathbb{T}} = \{t - t_0 \mid t \in \mathbb{T}\}$ e funções $\widetilde{f} : P \times [0, +\infty)_{\widetilde{\mathbb{T}}} \to X$ e $\widetilde{g} : P \times [0, +\infty)_{\widetilde{\mathbb{T}}} \times (0, \epsilon_0] \to X$ tais que:

$$\widetilde{f}(x, t) = f(x, t + t_0) \text{ e } \widetilde{g}(x, t, \epsilon) = g(x, t + t_0, \epsilon),$$

e as propriedades de f, g e $\mathbb{T}$ são generalizadas para $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ e $\widetilde{\mathbb{T}}$. Portanto, consideremos $t_0 = 0$ e definamos:

$$f^*(z, t) = f(z, t^*) \text{ e } g^*(z, t, \epsilon) = g(z, t^*, \epsilon).$$

Dado $z \in P$ e usando o Teorema 15 e o Lema 17, encontramos que:

$$\begin{aligned} f_0(z) &= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(z, s)\Delta h(s) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(z, s^*) dh^*(s) = \\ &= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^*(z, s) dh^*(s). \end{aligned}$$

Então, usando o fato de que $x_\epsilon : \left[-r, \dfrac{M}{\epsilon}\right]_{\mathbb{T}} \to B$ é uma solução da equação dinâmica funcional não-autônoma em escalas temporais (5.31), o Teorema 23 implica que $x_\epsilon^* : \left[-r, \dfrac{M}{\epsilon}\right] \cap \mathbb{T}^* \to B$ é uma solução em $\left[-r, \dfrac{M}{\epsilon}\right] \cap \mathbb{T}^*$ da EDF em medida:

$$\begin{cases} x^*(t) = x^*(0) + \displaystyle\int_0^t \epsilon f^*(x_s^*, s) dh^*(s) + \epsilon^2 \int_0^t g^*(x_s^*, s, \epsilon) dh^*(s), \\ x_0^* = \epsilon\phi^*. \end{cases}$$

Por fim, o Lema 13 implica que as condições (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11) são cumpridas. Como as condições (5.12) e (5.13) foram tomadas como hipótese, temos pelo Teorema 9 que, para todo $\nu > 0$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ e $t \in \left[0, \dfrac{M}{\epsilon}\right]$, a desigualdade:

$$\|x_\epsilon^*(t) - y_\epsilon(t)\| < \nu,$$

vale, em que y_ϵ é uma solução da EDF autônoma em escalas temporais (5.32). Como $x_\epsilon^*(t) = x_\epsilon(t)$ para $t \in \left[0, \dfrac{M}{\epsilon}\right]_{\mathbb{T}}$, o resultado segue. □

Mostremos que a condição 4 do teorema anterior é satisfeita por diversas funções conhecidas. De fato, sejam $\omega \in \mathbb{R}$, $H : [\omega, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{t\to+\infty} \frac{H(t)}{t}$ existe e existe $\gamma > 0$ tal que $H(t) \geq 0$ para $t > \gamma$. Seja $B = \lim_{t\to+\infty} \frac{H(t)}{t}$. Definamos $h : [\omega, +\infty)_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ como sendo $h = H \mid_{[\omega,+\infty)_{\mathbb{T}}}$. Então, dados $\beta \geq t_0$ e $T > \max\{0, -\beta, \gamma - \beta\}$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{h^*(T+\beta) - h^*(\beta)}{T} &= \frac{h((T+\beta)^*)}{T} - \frac{h(\beta^*)}{T} = \\
&= \left(\frac{T+\beta}{T}\right)\left(\frac{(T+\beta)^*}{T+\beta}\right)\frac{h((T+\beta)^*)}{(T+\beta)^*} - \frac{h(\beta^*)}{T} = \\
&= \left(\frac{T+\beta}{T}\right)\left(\frac{(T+\beta)^* - (T+\beta)}{T+\beta} + 1\right)\frac{h((T+\beta)^*)}{(T+\beta)^*} - \frac{h(\beta^*)}{T}.
\end{aligned}$$

Como $T > \gamma - \beta$ e $T > -\beta$, temos $T + \beta > \gamma$ e $T + \beta > 0$, donde $(T + \beta)^* > \max\{\gamma, 0\}$ e:

$$\frac{h((T+\beta)^*)}{(T+\beta)^*} = \frac{H((T+\beta)^*)}{(T+\beta)^*} \geq 0,$$

uma vez que $H(t) \geq 0$ para $t > \gamma$. Ainda, $T + \beta > 0$, donde $\frac{T+\beta}{T} > 0$ e:

$$\frac{(T+\beta)^* - (T+\beta)}{T+\beta} + 1 \geq 1 > 0.$$

Com isso, como $(T + \beta)^* \leq \sigma(T + \beta)$, segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{h^*(T+\beta) - h^*(\beta)}{T} &= \left(\frac{T+\beta}{T}\right)\left(\frac{(T+\beta)^* - (T+\beta)}{T+\beta} + 1\right)\frac{h((T+\beta)^*)}{(T+\beta)^*} - \frac{h(\beta^*)}{T} \leq \\
&\leq \left(\frac{T+\beta}{T}\right)\left(\frac{\sigma(T+\beta) - (T+\beta)}{T+\beta} + 1\right)\frac{h((T+\beta)^*)}{(T+\beta)^*} - \frac{h(\beta^*)}{T} = \\
&= \left(\frac{T+\beta}{T}\right)\left(\frac{\mu(T+\beta)}{T+\beta} + 1\right)\frac{h((T+\beta)^*)}{(T+\beta)^*} - \frac{h(\beta^*)}{T}.
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{T\to+\infty} \frac{h^*(T+\beta) - h^*(\beta)}{T}$ existe e vale que:

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty} \frac{h^*(T+\beta) - h^*(\beta)}{T} &= \lim_{T\to+\infty} \left(\frac{T+\beta}{T}\right)\left(\frac{\mu(T+\beta)}{T+\beta} + 1\right)\frac{h((T+\beta)^*)}{(T+\beta)^*} - \frac{h(\beta^*)}{T} = \\
&= (1)\,(0+1)\,B - 0 = B.
\end{aligned}$$

Assim, fazendo $K = \max\{B, 1\} > 0$, temos que:

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{h^*(T+\beta) - h^*(\beta)}{T} \leq K \text{ para todo } \beta \geq t_0.$$

Em particular, dados $n \in \mathbb{N}$, $a_i > 0$, $\beta_i, C_i, C \geq 0$, $\alpha_i \in [0, 1)$ e $M, b_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{1, ..., n\}$, podemos tomar $\omega > \max_{i\in\{1,...,n\}} -\frac{b_i}{a_i}$ tal que $\omega > 0$ de forma que $H : [\omega, +\infty) \to \mathbb{R}$ seja dada por:

$$H(t) = M + Ct + \sum_{i=1}^{n} C_i t^{\alpha_i} \log^{\beta_i}(a_i t + b_i).$$

Então $\lim_{t \to +\infty} \frac{H(t)}{t} = C$ e existe $\gamma > 0$ tal que $H(t) \geq 0$ para $t > \gamma$. Pelas considerações anteriores, existe $K > 0$ tal que:

$$\limsup_{T \to +\infty} \frac{h^*(T + \beta) - h^*(\beta)}{T} \leq K \text{ para todo } \beta \geq t_0.$$

Note que fazendo $C_i, M = 0$ para $i \in \{1, ..., n\}$ e $C = 1$, encontramos que H é a identidade; fazendo $C, C_i = 0$ para $i \in \{1, ..., n\}$ encontramos a função constante; fazendo $n = 1$, $C_1, \beta_1, a_1 = 1$ e $\alpha_1, M, C, b_1 = 0$, temos que H é a função log; e fazendo $n = 1$, $C_1, \beta_1, a_1 = 1$ e $M, C, b_1 = 0$, temos uma função da forma $t^{\alpha_1} \log t$, com $\alpha_1 \in [0, 1)$. Assim, diversas funções usuais satisfazem a condição 4.

Por fim, no teorema anterior, caso h seja a identidade, podemos retirar a condição 4 e estabelecer condições sobre $\mathbb{T}$ de forma a garantir a validade do resultado, conforme feito em (1, Teorema 3.47) e (1, Lema 3.46).

6 CONCLUSÃO

Esse texto teve como objetivo apresentar resultados referentes ao método da média, às equações diferenciais funcionais em medida e às equações dinâmicas funcionais em escalas temporais, desenvolvendo, no processo, os conceitos necessários para o entendimento desses resultados, como a integral de Kurzweil e as escalas temporais.

Conseguimos, ao longo desse trabalho, apresentar o Lema 1, um resultado inédito, o qual nos permitiu dar novas demonstrações das duas formas do Lema de Cousin, ambas fazendo uso apenas de conceitos elementares de topologia na reta. Conseguimos, também, generalizar muitos resultados, generalizações estas que advieram de uma simples mudança em uma definição. Tal fato levanta questionamentos sobre quais resultados poderíamos obter generalizando mais alguns conceitos.

Devido a isso, podemos propor algumas continuações para esse estudo. Uma das propostas é o estudo de outros conceitos associado à EDOs clássicas para os tipos de equações aqui abordados, como a estabilidade de soluções. Outra proposta é a de tentar generalizar a integral de Kurzweil para espaços métricos ou EVTs, e tentar generalizá-la também para escalas temporais, com o intuito de obter uma relação entre a integral de Kurzweil em intervalos e a integral de Kurzweil em escalas semelhante à existente entre a integral de Perron-Stieltjes e a Δ-integral de Perron-Stieltjes. Por fim, propomos investigar o Teorema 9, com o intuito de, para outras escolhas de função, obter outras desigualdades que possam ser usadas para encontrar outros métodos de aproximação de soluções, como o método da média.

REFERÊNCIAS

1 Bonotto, E. M., Federson, M., e Mesquita, J. G. *Generalized Ordinary Differential Equations in Abstract Spaces and Applications*. Wiley, 2021.

2 McLeod, R. M. *The Generalized Riemann Integral*, *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Gambier, OH, 1980.

3 Schwabik, Š. *Generalized Ordinary Differential Equations*, vol. 5 of *Series in Real Analysis*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1992.

4 Monteiro, G. A., Slavík, A., and Tvrdý, M. *Kurzweil–Stieltjes Integral: Theory and Applications*, vol. 15 of *Series in Real Analysis*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2019

5 Collegari, R. *Equações diferenciais ordinárias generalizadas lineares e aplicações às equações diferenciais funcionais lineares*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2014

6 Hönig, C. S. *The abstract Riemann–Stieltjes integral and its applications to linear differential equations with generalized boundary conditions*. Notas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo Série Matemática 1 1973.

7 Hönig, C. S. *Volterra Stieltjes–Integral Equations*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975. Functional analytic methods; linear constraints, Mathematics Studies, No. 16, Notas de Matemática, No. 56. [Notes on Mathematics, No. 56].

8 Andrade da Silva, F., Federson, M., Toon, E. *Stability, boundedness and controllability of solutions of measure functional differential equations*. Journal of Differential Equations, Volume 307, 2022, 160-210.

9 Bohner, M., Peterson, A. *Dynamic Equations on Time Scales - An Introduction with Applications*. Birkhäuser, 2001.

10 Peterson, A., and Thompson, B. *Henstock-Kurzweil delta and nabla integrals. Journal of Mathematical Analysis and Applications 323*, 1 (2006), 162-178.

11 Slavík, A. *Dynamic equations on time scales and generalized ordinary differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 385*, 1 (2012), 534–550.

12 Federson, M., Mesquita, J. G., and Slavík, A. *Basic results for functional differential and dynamic equations involving impulses. Mathematische Nachrichten 286*, 2-3 (2013), 181-204.

13 Federson, M., Mesquita, J. G., and Slavík, A. *Measure functional differential equations and functional dynamic equations on time scales. Journal of Differential Equations 252*, 6 (2012), 3816–3847.

14 Federson, M., Grau, R., and Mesquita, J. G. *Prolongation of solutions of measure differential equations and dynamic equations on time scales. Mathematische Nachrichten 292*, 1 (2019), 22–55

15 Mesquita, J. G., and Slavík, A. *Periodic averaging theorems for various types of equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 387*, 2 (2012), 862–877.

16 Federson, M., and Mesquita, J. G. *Averaging for retarded functional differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 382*, 1 (2011), 77–85.

17 Federson, M., and Mesquita, J. G. *Non–periodic averaging principles for measure functional differential equations and functional dynamic equations on time scales involving impulses. Journal of Differential Equations 255*, 10 (2013), 3098–3126.

18 Slavík, A. *Averaging dynamic equations on time scales. Journal of Mathematical Analysis and Applications 388*, 2 (2012), 996–1012.