

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas/Faculdade de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

**Michelli Marlane Silva Loureiro**

**Um Método de Reanálise Adaptativa para Otimização Estrutural Usando  
um Algoritmo Genético Não-Generacional**

Juiz de Fora

2016

**Michelli Marlane Silva Loureiro**

**Um Método de Reanálise Adaptativa para Otimização Estrutural Usando  
um Algoritmo Genético Não-Generacional**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Modelagem Computacional.

Orientador: D.Sc. Afonso Celso de Castro Lemonge

Coorientador: D.Sc. Helio José Corrêa Barbosa

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da  
UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Loureiro, Michelli Marlane Silva.

Um Método de Reanálise Adaptativa para Otimização Estrutural  
Usando um Algoritmo Genético Não-Geracional / Michelli Marlane Silva  
Loureiro. – 2016.

103 f. : il.

Orientador: D.Sc. Afonso Celso de Castro Lemonge

Coorientador: D.Sc. Helio José Corrêa Barbosa

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de  
Ciências Exatas/Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação  
em Modelagem Computacional, 2016.

1. Reanálise Adaptativa. 2. Otimização Estrutural. 3. Algoritmo  
Genético Não-Geracional. I. Lemonge, Afonso Celso de Castro, orient. II.  
Barbosa, Helio José Corrêa, coorient. III. Título.

Michelli Marlane Silva Loureiro

Um Método de Reanálise Adaptativa para Otimização Estrutural Usando  
um Algoritmo Genético Não-Generacional

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Modelagem Computacional.

Aprovada em 26 de Fevereiro de 2016.

BANCA EXAMINADORA



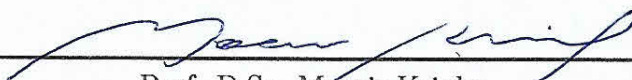
---

Prof. D.Sc. Afonso Celso de Castro Lemonge - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora




---

Prof. D.Sc. Marcelo Greco  
Universidade Federal de Minas Gerais



---

Prof. D.Sc. Moacir Kripka  
Universidade de Passo Fundo



---

Prof. D.Sc. Heder Soares Bernardino  
Universidade Federal de Juiz de Fora



---

Prof. D.Sc. Elson Magalhães Toledo  
Universidade Federal de Juiz de Fora

*Dedico este trabalho aos meus pais, Sebastião e Nilza, minha irmã Grazielli e meu esposo Felipe.*

## AGRADECIMENTOS

O que parecia ser tão simples, se tornou mais difícil que minha tese de doutorado. Nunca imaginei ser tão complicado escrever a gratidão e amor que sinto por aqueles que me apoiaram, fizeram e fazem parte de minha trajetória.

Primeiramente, agradeço a Deus e a Virgem Maria, por todas as oportunidades que apresentaram em minha vida e pela sabedoria que me presentearam no momento de minha escolha. Agradeço também por manter a saúde dos meus pais.

Retribuo toda essa conquista aos meus amados pais, Sebastião e Nilza, que nunca mediram esforços para chegar onde cheguei, aqueles que me ensinaram que a honestidade cabe em todos os lugares, que são minha base e exemplo de vida. Me apoiaram nos momentos de desânimo e me deram forças nesse longo trajeto. O meu eterno agradecimento!!!

Agradeço aos meus orientadores, Prof. Lemonge pela dedicação, sabedoria, compreensão e acima de tudo pelo aprendizado a mim proporcionado e Prof. Helio pelas discussões e ideias sempre proveitosas. Sem a brilhante orientação de vocês este trabalho não seria o mesmo.

Aos membros da banca pela disponibilidade em avaliar meu trabalho e pelas brilhantes sugestões e contribuições.

Agradeço a minha querida irmã, aquela que compartilhou e compartilha todas as minhas alegrias, tristezas, vitórias e insucessos. Obrigada por ser a pessoa mais chata e ao mesmo tempo a que eu mais amo. Obrigada por todas as vezes que implicou e conseqüentemente, me defendeu. Obrigada por estar ao meu lado mesmo eu sendo “injuada” como você fala. Eu amo você.

Grata ao meu querido esposo Felipe por não medir esforços para realização deste sonho. Obrigada pelo incentivo, obrigada pela compreensão, obrigada por todas as idas e vindas à Juiz de Fora, obrigada por ser meu amigo e por entender a importância desta conquista. Eu amo você!!!

Gratidão a Dona Solene e sua família, por abrir as portas de sua casa e me acolher tão bem no início desta minha trajetória, obrigada por não me deixar voltar para trás. E a minha família, amigos e amigas que sempre estiveram presentes me aconselhando e incentivando com carinho,

Aos colegas, amigos e professores do PPGMC e UFSJ, meu muito obrigada.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido.

E por fim, agradeço um anjinho que Deus nos presenteou durante o Doutorado, nossa Gabi. Obrigada pelo amor mais puro e sincero e por fazer meus dias mais felizes.

“No meio da dificuldade encontra-se a oportunidade”

Albert Einstein

## RESUMO

Algoritmos Genéticos (AG's) são ferramentas de grande poder computacional quando utilizadas em problemas de otimização em que a solução não pode ser obtida de forma trivial. Apesar de ser uma excelente ferramenta, o AG tem um alto custo computacional devido ao elevado número de avaliações necessárias para a obtenção de uma solução factível. Além disso, em otimização estrutural, a avaliação de uma solução candidata pode resultar na resolução de um sistema de equações. A solução deste sistema na maioria das vezes demanda alto custo computacional. Dessa forma, a fim de reduzir o custo computacional, uma técnica de reanálise por aproximação combinada é utilizada. Esta técnica reduz a dimensão do sistema para um número de vetores base previamente definido. Na formulação padrão, a escolha do número de vetores base não é feita de forma automática. Então, o método de reanálise será usado em um esquema adaptativo, proposto aqui, em que, o número de vetores base serão escolhidos e alterados ao longo do processo de otimização. Com o objetivo de obter o menor número possível de análises completas, a matriz de rigidez inicial também será alterada ao longo do processo de otimização. Para ilustrar a eficácia da formulação proposta, exemplos clássicos de otimização estrutural são analisados. Os exemplos numéricos mostram que o esquema adaptativo proposto fornece resultados com boa precisão e, em algumas situações, melhores, ou seja, menor peso com menor custo computacional, comparados com outras estratégias da literatura. Palavras Chave: Reanálise Adaptativa. Otimização Estrutural. Algoritmo Genético Não-Generacional.



## ABSTRACT

Genetic Algorithms (GA's) are tools of great computational power when employed in optimization problems for which the solution cannot be obtained by a trivial way. Despite being an effective tool, GA has a high computational cost due to the high number of structural analysis needed to obtain a feasible solution. Furthermore, in structural optimization, the evaluation of a candidate solution may lead to the solution of a system of equations. The solution of such a system in some cases demands a great computational effort. In this way, in order to reduce the high computational cost, a reanalysis technique using the combined approximations method is employed. This technique reduces the dimension of the system to a number of basis vectors previously defined. In the standard formulation, the choice of the number of basis vectors is not carried out in an automatic way. Hence, the reanalysis technique will be employed in a proposed adaptive scheme for which the number of basis vectors will be chosen and modified along with the optimization process. With the objective of obtaining the smallest number of complete analyses, the initial stiffness matrix will also be modified along with the optimization process. In order to illustrate the effectiveness of the proposed formulation, classical examples of structural optimization are analyzed. The numerical examples reveal that the proposed adaptive scheme provides accurate and, in some cases, better results, i.e. lowest weight with lowest computational cost, when compared to other schemes in the literature. Key-words: Adaptive Reanalysis. Structural Optimization. Steady State Genetic Algorithm.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Treliça de 10 barras. . . . .	45
Figura 2 – Pórtico de 3 Barras. . . . .	48
Figura 3 – Relação entre o número de operações algébricas $\eta$ . . . . .	51
Figura 4 – Relação entre o número de operações algébricas $\eta$ para estrutura 2D armazenada em banda . . . . .	51
Figura 5 – Relação entre o número de operações algébricas $\eta$ para estrutura 3D armazenada em banda . . . . .	52
Figura 6 – Treliça de 10 Barras. . . . .	61
Figura 7 – Treliça de 52 Barras. . . . .	62
Figura 8 – Histórico do Peso em Relação ao Tempo - Treliça de 52 Barras. . . . .	66
Figura 9 – Histórico do Peso em Relação ao Tempo (Zoom) - Treliça de 52 Barras. . . . .	66
Figura 10 – Evolução do Número de Vetores Base ao Longo da Execução do AG para o Melhor Resultado - Treliça de 52 Barras. . . . .	67
Figura 11 – Box Plot para o Intervalo de Confiança - Treliça de 52 Barras. . . . .	68
Figura 12 – Pórtico de 3 Barras. . . . .	69
Figura 13 – Evolução do Número de Vetores Base ao Longo da Execução do AG para o Melhor Resultado - Pórtico de 3 Barras. . . . .	71
Figura 14 – Domo de 120 Barras. . . . .	72
Figura 15 – Histórico do Peso em Relação ao Tempo - Domo de 120 Barras - Análise Linear. . . . .	74
Figura 16 – Evolução do Número de Vetores Base ao Longo da Execução do AG para o Melhor Resultado - Domo de 120 Barras Análise Linear. . . . .	75
Figura 17 – Box Plot para o Intervalo de Confiança - Domo de 120 Barras - Análise Linear. . . . .	76
Figura 18 – Histórico do Peso em Relação ao Tempo - Domo de 120 Barras - Análise Não-Linear. . . . .	78
Figura 19 – Evolução do Número de Vetores Base ao Longo da Execução do AG para o Melhor Resultado - Domo de 120 Barras - Análise Não-Linear. . . . .	79
Figura 20 – Box Plot para o Intervalo de Confiança - Domo 120 Barras Análise Não-Linear. . . . .	80
Figura 21 – Pórtico Plano de 70 barras. . . . .	81
Figura 22 – Histórico do Peso em Relação ao Tempo - Pórtico de 70 Barras. . . . .	83
Figura 23 – Evolução do Número de Vetores Base ao Longo da Execução do AG para o Melhor Resultado - Pórtico de 70 Barras. . . . .	84
Figura 24 – Box Plot para o Intervalo de Confiança - Pórtico de 70 Barras. . . . .	85
Figura 25 – Treliça de 200 Barras. . . . .	88
Figura 26 – Histórico do Peso em Relação ao Tempo - Treliça de 200 Barras. . . . .	89

Figura 27 – Evolução do Número de Vetores Base ao Longo da Execução do AG para o Melhor Resultado - Treliça de 200 Barras. . . . .	89
Figura 28 – Box Plot para o para o Intervalo de Confiança - Treliça 200 Barras. . .	92

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Deslocamentos exatos e aproximados para a treliça de 10 barras (KIRSCH; KOCVARA; ZOWE, 2002) separados por número de vetores bases . . .	45
Tabela 2 – Deslocamentos na direção y do nó 1 para o Pórtico de 3 barras - Comparação dos Métodos. . . . .	48
Tabela 3 – Comparação dos melhores resultados para Treliza 10 Barras. *ACp - % Análise Completa **nfe - Número de Avaliações com Reanálise. *** (LEMONGE; BARBOSA; BERNARDINO, 2015) . . . . .	61
Tabela 4 – Classificação dos membros da Treliza de 52 Barras. . . . .	63
Tabela 5 – Valores Discretos para a Treliza de 52 Barras. . . . .	64
Tabela 6 – Comparação entre os melhores resultados obtidos para a treliça de 52 Barras. *ACp - % Análise Completa **nfe - Número de Avaliações com Reanálise *** (LEMONGE; BARBOSA; BERNARDINO, 2015) ****AK <sub>0</sub> - número de vezes em que a matriz de rigidez foi alterada. . .	65
Tabela 7 – Comparação Estatística para a Treliza de 52 Barras. . . . .	65
Tabela 8 – Intervalo de Confiança para a Treliza de 52 Barras. . . . .	67
Tabela 9 – Tabela com os valores discretos - Pórtico de 3 Barras. . . . .	70
Tabela 10 – Comparação entre os melhores resultados obtidos para o Pórtico de 3 Barras. *ACp - % Análise Completa **nfe - Número de Avaliações com Reanálise *** (SILVA, 2011) ****AK <sub>0</sub> - número de vezes em que a matriz de rigidez foi alterada. . . . .	71
Tabela 11 – Tabela para valores discretos - Domo de 120 barras. . . . .	73
Tabela 12 – Comparação entre os melhores resultados obtidos para o Domo de 120 Barras - Análise Linear. *ACp - % Análise Completa **nfe - Número de Avaliações com Reanálise ****AK <sub>0</sub> - número de vezes em que a matriz de rigidez foi alterada. . . . .	73
Tabela 13 – Comparação Estatística para o Domo de 120 Barras Análise Linear. . .	74
Tabela 14 – Intervalo de Confiança para Domo de 120 Barras - Análise Linear. . . .	75
Tabela 15 – Comparação entre os melhores resultados obtidos para o Domo de 120 Barras - Análise Não-Linear. *ACp - % Análise Completa **nfe - Número de Avaliações com Reanálise, ****AK <sub>0</sub> - número de vezes em que a matriz de rigidez foi alterada. . . . .	77
Tabela 16 – Comparação Estatística para o Domo de 120 Barras - Análise Não-Linear.	79
Tabela 17 – Intervalo de Confiança para Domo de 120 Barras - Análise Não-Linear.	79
Tabela 18 – Sub-conjunto extraído das Tabelas AISC para seções do tipo “W” com 64 possibilidades . . . . .	82

Tabela 19 – Comparação entre os melhores resultados obtidos para o Pórtico de 70 Barras. *ACp - % Análise Completa **nfe - Número de Avaliações com Reanálise, ***(SILVA, 2011), ****AK <sub>0</sub> - número de vezes em que a matriz de rigidez foi alterada. . . . .	82
Tabela 20 – Comparação Estatística para o Pórtico de 70 Barras. . . . .	83
Tabela 21 – Intervalo de Confiança para o Pórtico de 70 Barras. . . . .	85
Tabela 22 – Agrupamento das Barras para a Treliça de 200 Barras. . . . .	87
Tabela 23 – Comparação entre os melhores resultados obtidos para a Treliça de 200 Barras. *ACp - % Análise Completa **nfe - Número de Avaliações com Reanálise ***(LEMONGE; BARBOSA; BERNARDINO, 2015) ****AK <sub>0</sub> - número de vezes em que a matriz de rigidez foi alterada. . .	90
Tabela 24 – Comparação estatística para a Treliça de 200 Barras. . . . .	91
Tabela 25 – Intervalo de Confiança para a Treliça de 200 Barras. . . . .	91
Tabela 26 – Síntese dos Resultados . . . . .	92

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

$f(x)$	Função objetivo
$A$	Área da seção transversal
$l$	Tamanho do elemento
$\mathbf{r}$	Vetor deslocamento
$\sigma$	Vetor Tensão
$F(x)$	Função aptidão
$k$	Parâmetro de penalização
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{R}$	Vetor de ações externas
$\mathbf{K}_E$	Matriz de rigidez elástica
$\delta\mathbf{R}$	Vetor força residual
$\mathbf{K}_T$	Matriz de rigidez tangente
$\mathbf{R}_I$	Vetor de forças internas
$\mathbf{K}_G$	Matriz de rigidez geométrica
$\mathbf{K}_0$	Matriz de rigidez de referência
$\Delta\mathbf{K}_0$	Diferença entre as matrizes de rigidez
$\mathbf{r}_B$	Matriz dos vetores base
$\mathbf{K}_R$	Matriz de rigidez reduzida
$\mathbf{R}_R$	Vetor de ações externas reduzido
$s$	Número de vetores base
$n$	Número de graus de liberdade
$E_M$	Erro quadrático médio
$n_{ind}$	Número total de indivíduos avaliados
$erro_{ind}$	Erro de cada indivíduo avaliado
$C_C$	Custo da análise completa

$C_R$	Custo da reanálise com aproximação combinada
$C_T$	Custo da etapa de uma execução em relação à avaliação das restrições
$N_C$	Número de avaliações com análise completa
$N_R$	Número de avaliações com reanálise por aproximação combinada
$\eta_t$	Razão entre o custo com a estratégia convencional e a estratégia usando reanálise por aproximação combinada

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>16</b>
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO . . . . .	16
1.2	JUSTIFICATIVA E OBJETIVO . . . . .	18
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO . . . . .	19
<b>2</b>	<b>OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL e ALGORITMO GENÉTICO</b>	<b>21</b>
2.1	INTRODUÇÃO . . . . .	21
2.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL	23
2.3	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL . . . . .	23
2.4	ALGORITMO GENÉTICO . . . . .	24
2.4.1	Codificação . . . . .	25
2.4.2	Inicialização da população . . . . .	26
2.4.3	Função Aptidão . . . . .	26
2.4.4	Seleção . . . . .	26
2.4.5	Operadores Genéticos . . . . .	27
2.4.6	Esquema de reprodução . . . . .	27
2.5	PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES . . . . .	29
2.5.1	Utilização de funções de penalização . . . . .	30
2.5.2	Método Adaptativo de Penalização - APM . . . . .	30
2.6	SÍNTESE DO CAPÍTULO 2 . . . . .	32
<b>3</b>	<b>REANÁLISE ESTRUTURAL . . . . .</b>	<b>33</b>
3.1	INTRODUÇÃO . . . . .	33
3.1.1	Descrição do Problema de Análise Estrutural Linear Estática . . . . .	34
3.1.2	Descrição do Problema de Análise Estrutural Não-Linear . . . . .	34
3.2	MÉTODOS DE REANÁLISE ESTRUTURAL . . . . .	36
3.2.1	Métodos Diretos . . . . .	36
3.2.2	Métodos Aproximados . . . . .	37
3.3	REANÁLISE POR APROXIMAÇÃO COMBINADA . . . . .	39
3.3.1	Reanálise para o Caso Linear . . . . .	41
3.3.1.1	Formulação do Problema . . . . .	41
3.3.1.2	Solução pelo método de Aproximação Combinada . . . . .	42
3.3.1.3	Exemplo . . . . .	45
3.3.2	Reanálise para o Caso Não-Linear Geométrico . . . . .	46
3.3.2.1	Considerações em relação ao Método de Newton Raphson . . . . .	47
3.3.3	Convergência da Série . . . . .	49



3.3.4	Escolha da matriz $\mathbf{K}_0$ . . . . .	49
3.3.5	Eficiência dos Cálculos . . . . .	50
3.4	SÍNTESE DO CAPÍTULO 3 . . . . .	52
<b>4</b>	<b>ESTRATÉGIA PROPOSTA . . . . .</b>	<b>53</b>
4.1	HIPÓTESES PARA IMPLEMENTAÇÃO DA REANÁLISE ADAPTA- TIVA PARA ALGORITMO GENÉTICO NÃO-GERACIONAL . . . . .	54
<b>5</b>	<b>EXPERIMENTOS NUMÉRICOS . . . . .</b>	<b>58</b>
5.1	EXEMPLO 1 - TRELIÇA DE 10 BARRAS . . . . .	60
5.2	EXEMPLO 2 - TRELIÇA DE 52 BARRAS . . . . .	60
5.3	EXEMPLO 3 - PÓRTICO DE 3 BARRAS . . . . .	68
5.4	EXEMPLO 4 - DOMO 120 BARRAS . . . . .	70
5.4.1	Análise Linear . . . . .	72
5.4.2	Análise Não-linear . . . . .	76
5.5	EXEMPLO 5 - PÓRTICO PLANO DE 70 BARRAS . . . . .	80
5.6	EXEMPLO 6 - TRELIÇA DE 200 BARRAS . . . . .	85
5.7	SÍNTESE DOS RESULTADOS COM A ESTRATÉGIA PROPOSTA . . . . .	91
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>93</b>
6.1	CONCLUSÕES . . . . .	94
6.2	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	95
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>96</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Ao longo dos anos a área de engenharia estrutural tem procurado desenvolver ferramentas para a obtenção de projetos ótimos. Dentre as várias possibilidades de obtenção de projetos ótimos, pode-se mencionar a otimização estrutural. Na área de otimização estrutural procura-se construir uma ou mais funções objetivos que são capazes de representar, através de variáveis de projeto, uma série de medidas de eficiência/desempenho, com foco na minimização de custos e/ou na maximização do desempenho estrutural.

A determinação da melhor estrutura é um processo de tentativa e, geralmente, não garante que a solução ideal foi encontrada. Além disso, a fim de modelar o problema de uma forma mais realista, deve-se incluir também restrições nos modelos. Estas restrições em problemas de otimização de estruturas reticuladas, em geral, dizem respeito aos deslocamentos máximos dos nós, tensões normais nas barras, frequências de vibração, cargas críticas de flambagem, entre outras. Normalmente, essas restrições não estão explicitamente escritas e podem ser funções complexas em relação às variáveis de projeto. Devido a essa necessidade de modelar o problema de otimização estrutural da forma mais exata possível, desafios, tais como o alto custo computacional, começam a surgir.

Várias frentes de pesquisa foram desenvolvidas para lidar com essa questão. Uma delas está concentrada em desenvolver métodos de aproximação do cálculo da análise estrutural para a obtenção dos deslocamentos e tensões, tornando-se um grande foco em otimização estrutural (KEULEN; HAFTKA, 2004). Estes métodos de aproximação podem ser classificados, de acordo com Saitou *et al.* (2005), como metamodelos, modelos de ordem reduzida e métodos de reanálise.

Metamodelo é uma aproximação para o modelo de simulação em que necessita-se de um menor custo computacional. Pode ser: (i) uma simplificação do modelo de simulação, construído com hipóteses físicas ou numéricas menos rígidas, que também são denominados modelos de ordem reduzida (RASHEED; NI; VATTAM, 2005); ou (ii) construídos com base em um número limitado de elementos (banco de dados) resultantes de experimentos computacionais. Dentro dessa classificação pode-se mencionar Redes

Neurais Artificiais (CHENG; TITTERINGTON, 1994), Regressão Polinomial e Método Kriging (FORSBERG; NILSSON, 2005), (SAKATA; ASHIDA; ZAKO, 2003), Função de Base Radial (JIN; CHEN; SIMPSON, 2001; MECKESHEIMER *et al.*, 2001) e Metamodelo Baseado em Similaridade (FONSECA, 2009).

Métodos de reanálise, por outro lado, são uma classe de métodos que aproxima as respostas estruturais dos modelos modificados com base nos resultados de um único modelo. Na reanálise estrutural, pode-se destacar o método de aproximação combinada (KIRSCH, 2008) que baseia-se na redução do sistema de equações através de vetores base que aproximam o cálculo do vetor de deslocamento dos nós em termos de uma série binomial. Uma outra classe de métodos de reanálise são os métodos que se baseiam em aproximação por série de Taylor (CHOI; CHANG, 1994; YEH; VANCE, 1998).

Deve-se também mencionar Gao, Wang e Li (2013) que desenvolveram um método de reanálise global baseado em tempo adaptativo para problemas dinâmicos, Liu, Wu e Li (2014) que propuseram um método em que utilizam uma matriz de rigidez aumentada juntamente com o método de gradiente conjugado pré-condicionado. Nesta estratégia um pré-condicionador foi construído usando fatoração de Cholesky da matriz de rigidez inicial. E, Gao *et al.* (2015) que apresentaram um algoritmo de reanálise baseado na matriz em bloco para lidar com modificações locais; neste a matriz de rigidez é classificada em três partes: região influenciada, região modificada e região de interface. De acordo com Gao *et al.* (2015) o método gerou respostas precisas para grandes modificações com baixo custo computacional.

Com relação aos métodos para resolução de problemas de otimização estrutural, vários métodos estão sendo usados para obter a melhor solução do problema, desde métodos determinísticos, tais como os algoritmos de programação linear (YANG; CHUANG, 1994; KUMAR, 2000) até metaheurísticas. Em relação às metaheurísticas, pode-se mencionar Recozimento Simulado, Estratégias Evolutivas, Busca Tabu, Colônia de Formigas (HASANÇEBI *et al.*, 2010), PSO (TEMÜR; TÜRKAN; TOKLU, 2015) e Algoritmos Genéticos (HOLLAND, 1992) (utilizado neste trabalho), entre outros. Técnicas mais atuais como por exemplo, Otimização Baseada em Ensino-Aprendizagem (DEGERTEKIN; HAYALIOGLU, 2013; DEDE; AYVAZ, 2015), *Chaotic Swarming of Particles* (KAVEH

*et al.*, 2014), *Colliding Bodies* (KAVEH; MAHDAVI, 2014) também estão sendo usados para resolver problemas de otimização estrutural.

Um outro trabalho que merece destaque é o desenvolvido por Amir (2015) que usou Critério de Otimalidade para otimizar estruturas e além disso desenvolveu um procedimento eficiente de aproximação baseada em pré-condicionadores renovados. Na próxima seção serão apresentadas as justificativas e objetivos que norteiam o trabalho proposto.

## 1.2 JUSTIFICATIVA E OBJETIVO

Em problemas de otimização estrutural a avaliação da solução candidata pode resultar na resolução de um sistema de equações que representa a estrutura, segundo o modelo adotado. A resolução desse sistema pode demandar um alto custo computacional. Diante disso, este trabalho tem como objetivo o uso do método de reanálise por aproximação combinada (KIRSCH, 2008) para aproximar as soluções desse sistema de equações. Nesse método, a dimensão do sistema é reduzida para um número de vetores base previamente definido. Para definir esse número de vetores base deve-se seguir o que é proposto pela literatura ou usar uma estratégia adaptativa em que os vetores poderão sofrer alterações ao longo do processo de otimização.

Em vista disso, o principal foco deste trabalho está em desenvolver uma estratégia para combinar o uso de um Algoritmo Genético não-geracional com o método de reanálise por aproximação combinada. Visto que a maioria dos estudos desses métodos de reanálise focam na aplicação e precisão dos métodos, como por exemplo Leu (1998) que propôs um método de redução de bases para a análise dos elementos de contorno, Kirsch e outros que fizeram uma análise da acurácia do método de reanálise por aproximação combinada (KIRSCH; PAPALAMBROS, 2001b), cálculo da sensibilidade e a avaliação do erro (KIRSCH; BOGOMOLNI, 2004) sem abordar a questão da eficiência na otimização.

Pouca atenção está voltada ao desenvolvimento de métodos que melhorem o processo de otimização usando reanálise. Algumas frentes de pesquisa preocupam-se em criar novos métodos de otimização e outras preocupam-se em melhorar, analisar ou desenvolver métodos de reanálise. Até o momento, tem-se registrado o trabalho feito por Xu *et al.* (2010) em que foi proposto um esquema adaptativo para determinar o número de vetores

base ao longo de cada geração de um algoritmo genético geracional binário. E o trabalho feito por Sun *et al.* (2014), que apresentaram uma nova técnica adaptativa para o método de reanálise com aproximação combinada, neste método, o número mínimo de vetores base necessários é determinado com o uso do número de condicionamento da matriz de rigidez.

Dessa forma, optou-se neste trabalho por usar o método de reanálise por aproximação combinada (KIRSCH, 2008) para estruturas com comportamento linear e não-linear geométrico para aproximar a análise estrutural de cada solução candidata. Além disso, foi proposta uma técnica para definir de forma adaptativa o número de vetores base, que será necessário para aproximar cada análise estrutural, com o auxílio de informações geradas ao longo do processo de otimização em um algoritmo genético não-geracional. Nessa técnica é proposta uma mudança da matriz de rigidez de referência (inicial) ao longo do processo de otimização, pois, por melhor que seja a matriz de rigidez de referência escolhida, durante o processo de otimização, a diferença entre ela e a matriz de rigidez dos novos indivíduos gerados pelo algoritmo genético tende a aumentar.

Pensou-se nessa estratégia visto que, quanto menor for a diferença entre as matrizes de rigidez, melhor é a aproximação e mais rápida é a convergência do método (KIRSCH; PAPALAMBROS, 2001b; KIRSCH; BOGOMOLNI, 2004). Com isso, pretende-se reduzir o número de análises completas diminuindo o custo computacional global durante o processo de otimização. Pois, segundo Kirsch e Papalambros (2001b) o esforço computacional total em comparação com a análise completa da estrutura modificada pode ser reduzido em mais de 75%. Além disso, o método adaptativo proposto e analisado servirá também para que o usuário não precise se preocupar com a escolha do número de vetores base a ser usado.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Para melhor apresentação do trabalho proposto o texto está organizado da seguinte forma: Capítulo 2 apresentará as definições e características principais de problemas de otimização estrutural. Em seguida, neste mesmo capítulo, descreve-se alguns métodos de otimização estrutural dando ênfase ao Algoritmo Genético (AG) e detalhes das suas

características, como por exemplo, codificação, inicialização da população, função aptidão, seleção, operadores genéticos e esquema de reprodução serão apresentados. Nessa tese será utilizado uma representação cromossomial real. O AG é do tipo não-geracional, a seleção é do tipo “rank”. Na sequência, estratégias para o tratamento das restrições são apresentadas. Em especial o Método Adaptativo de Penalização (APM - *Adaptive Penalty Method*) (LEMONGE; BARBOSA, 2004) adotado nos problemas discutidos nessa tese.

O Capítulo 3 apresentará uma breve introdução sobre análise estrutural linear e não-linear geométrica. Em seguida, é feita uma revisão sobre os métodos de reanálise estrutural separados em 2 classes: métodos diretos e métodos aproximados. Entre os métodos aproximados uma atenção especial será dada ao método de reanálise por aproximação combinada (CA) (KIRSCH, 2008) que será utilizado na presente tese. A formulação deste método para um problema linear e não-linear será descrita e algumas considerações em relação ao CA serão apresentadas, como por exemplo, a convergência da série, a eficiência dos cálculos, entre outros.

No Capítulo 4 tem-se detalhada a estratégia proposta juntamente com as hipóteses que norteiam o desenvolvimento desta tese. Já no capítulo 5 encontram-se os resultados dos experimentos numéricos que validam as hipóteses definidas no Capítulo 4. Nestes experimentos as variáveis de projeto são as áreas ou dimensões das seções transversais das barras e os espaços de busca são discretos ou contínuos. Para todos os experimentos são feitas análises das estratégias com e sem o uso do método CA para chegar às conclusões que serão apresentadas no Capítulo 6.

Reforça-se que o objetivo e contribuição principal desta tese está em propor um método de reanálise adaptativa para um AG não-geracional em que altera-se a matriz de rigidez de referência ao longo do processo de otimização com o foco em diminuir o número de análises completas e reduzir o custo computacional.

## 2 OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL e ALGORITMO GENÉTICO

### 2.1 INTRODUÇÃO

Em projetos estruturais tem-se como objetivo fazer o uso mais eficiente do material, obtendo assim estruturas mais econômicas e ainda capazes de suportar as ações as quais são submetidas (estáticas, dinâmicas, terremoto, temperatura, etc) com segurança. A área que trata de encontrar esses projetos estruturais é a otimização estrutural. Esta é uma fusão de áreas da engenharia e matemática capaz de adicionar dados ao projeto além da experiência do projetista.

Sendo objeto de estudo de vários pesquisadores, a otimização estrutural teve início com MicheU (1904) que minimizou o volume de estruturas formadas por barras. Nesse período eram estudados apenas casos baseados em soluções analíticas. Mas somente por volta dos anos 50, após o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos e da Programação Linear é que foi possível o desenvolvimento de técnicas para resolver problemas de otimização estrutural.

A otimização estrutural pode ser dividida em: otimização dimensional, de forma e topológica. Na otimização dimensional a forma da estrutura se mantém inalterada durante o processo de otimização mudando apenas as áreas de seção transversal (variáveis de projeto). Na otimização de forma, almeja-se determinar a melhor forma dos contornos da estrutura, como por exemplo, o posicionamento dos nós de uma estrutura formada por barras. Tanto na otimização dimensional quanto na otimização de forma, nenhum elemento pode ser introduzido ou removido.

Em contrapartida, na otimização topológica a seleção da melhor topologia é um problema em que determina a melhor conectividade dos elementos e de suas características, podendo reduzir elementos dessa estrutura. Neste trabalho os experimentos serão feitos para otimização estrutural dimensional.

Para melhor entendimento sobre otimização estrutural, pode-se pensar em uma situação em que tem-se uma carga sendo aplicada em uma estrutura que possui um apoio fixo. Almeja-se encontrar a estrutura que executa essa tarefa da melhor forma possível.

Mas como definir o termo “melhor”? Pode-se considerar como melhor, a estrutura mais leve possível, ou seja, minimizar o peso da estrutura. Na maioria dos casos essas minimizações não podem ser realizadas sem qualquer restrição pois teria-se um problema de otimização sem uma solução que represente a realidade. Estas restrições em problemas de otimização estrutural de estruturas reticuladas geralmente consistem em tensões, deslocamentos, cargas críticas de flambagem, entre outras.

Com o propósito de melhorar a compreensão, algumas terminologias acerca de otimização estrutural podem ser descritas como segue (HAFTKA; GÜRDAL, 2012):

- Variáveis de projeto: Uma função ou vetor que faz parte da descrição do projeto, e que pode ser alterado durante a otimização, como por exemplo, a área da seção transversal de uma barra. As variáveis de projeto podem ser classificadas em variáveis contínuas ou discretas. Variáveis de projeto contínuas tem um intervalo de variação e podem ter qualquer valor dentro desse intervalo. Variáveis de projeto discretas podem ter apenas valores isolados a partir de uma lista de valores permitidos.
- Função Objetivo: A função usada para classificar projetos em problemas sem restrição. Para cada possível projeto, esta função retorna um número que indica o valor dele. Para problemas de otimização estrutural, peso, deslocamentos, tensões, frequências de vibração e cargas críticas de flambagem ou qualquer combinação destes podem ser utilizados como funções objetivo. Em um problema com mais de uma função objetivo dá-se o nome de otimização multiobjetivo.
- Restrição: são funções que representam algum limite que não pode ser ultrapassado, descrevem situações de projeto consideradas indesejáveis. Isto é, para um dado projeto tem-se uma função ou um vetor que representa a resposta da estrutura. Esta resposta normalmente deve ser limitada para representar o problema formulado o mais real possível, para isso, tem-se as restrições que podem ser o deslocamento máximo nos nós, a tensão máxima nas barras, entre outros.



## 2.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

A notação adotada nesta tese para variáveis de projeto, função objetivo e restrições está resumida na seguinte formulação do problema de otimização estrutural de estruturas reticuladas.

Denotando por  $x \in \mathfrak{R}^N$  o vetor de variáveis de projeto, um problema de otimização estrutural dimensional é dado por:

Encontrar um conjunto de áreas das seções transversais  $x = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$  que minimize o peso da estrutura, isto é:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \rho A_i l_i, \quad (2.1)$$

em que  $l_i$  é o comprimento do  $i$ -ésimo elemento da treliça,  $N$  é o número total de elementos e  $\rho$  é a densidade do material. O problema é geralmente sujeito a restrições de desigualdades  $g_p(x) \leq 0$ ,  $p = 1, 2, \dots, \bar{p}$  e, por vezes restrições de igualdade  $h_q(x) = 0$ ,  $q = 1, 2, \dots, \bar{q}$ . Além disso, as variáveis geralmente estão sujeitas a limites  $x_i^L \leq x_i \leq x_i^U$  em que  $L$  indica limite inferior e  $U$  indica limite superior.

As restrições mais comuns são deslocamentos e tensões. Para os deslocamentos tem-se:

$$\frac{|r_j|}{r_{max}} - 1 \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{p} \quad (2.2)$$

em que  $u_j$  é o deslocamento do  $j$ -ésimo grau de liberdade global, e  $u_{max}$  é o deslocamento máximo permitido. Da mesma forma, as restrições para as tensões são dadas por:

$$\frac{|\sigma_j|}{\sigma_{max}} - 1 \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{w} \quad (2.3)$$

em que  $\sigma_j$  é a tensão normal na barra, e  $\sigma_{max}$  é tensão máxima permitida. Restrições adicionais, tais como frequências de vibração e cargas críticas de flambagem também podem ser incluídas.

## 2.3 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

Inúmeros métodos de otimização estrutural foram desenvolvidos ao longo dos anos. Uma das maneiras de classificar esses métodos seria pela natureza determinística ou não-determinística do algoritmo de busca (KARGUPTA; GOLDBERG, 1995). Nos algoritmos

determinísticos, dada uma determinada entrada, o algoritmo apresenta a mesma saída e exigem pelo menos a primeira derivada da função objetivo em relação às variáveis de projeto.

Os principais problemas em usar métodos determinísticos são: apresentam dificuldades em encontrar soluções ótimas globais, necessitam que as funções objetivo sejam diferenciáveis e são pouco eficazes em tratar problemas de otimização multi-objetivo. Como exemplo de algoritmos determinísticos usados em otimização estrutural pode-se destacar (FLOUDAS, 2013): Branch and Bound, Decomposição Primal-Dual, entre outros.

Em contrapartida, em algoritmos não-determinísticos, dada uma determinada entrada ele terá uma saída com uma dada probabilidade. As vantagens dos algoritmos não-determinísticos em relação aos determinísticos são: não requerem que a função objetivo seja contínua e diferenciável, trabalham tanto com parâmetros contínuos quanto com discretos, não necessitam de formulações complexas ou reformulações para o problema, não há, em geral, restrições fortes quanto ao ponto de partida dentro do espaço de busca da solução.

Como exemplos de algoritmos não-determinísticos usados em otimização estrutural pode-se destacar: Evolução Diferencial (HO-HUU *et al.*, 2015), Colônia de Formigas (ANGELO; BERNARDINO; BARBOSA, 2015), Recozimento Simulado (LAMBERTI, 2008), Algoritmos inspirados nos vagalumes (YANG, 2013), Busca Harmônica (LEE; GEEM, 2004) e por último, mas não menos importante, Algoritmo Genético (LAGAROS; PAPADRAKAKIS; KOKOSSALAKIS, 2002). Sendo Algoritmo Genético o método utilizado nessa tese, detalhes sobre o mesmo serão mostrados na próxima seção.

## 2.4 ALGORITMO GENÉTICO

Os Algoritmos Genéticos (AG's) foram desenvolvidos por John Holland, em 1975, os objetivos de sua pesquisa estavam voltados em abstrair, explicar rigorosamente os processos adaptativos dos sistemas naturais e criar programas de computador para simular sistemas artificiais, mantendo os mecanismos importantes dos sistemas naturais (GOLBERG, 1989).

Algoritmos Genéticos podem ser definidos como procedimentos de busca baseados

na genética e seleção natural das espécies. Assim como acontece no meio ambiente, em um AG, existe um grupo de soluções candidatas, conhecidas como indivíduos, que competem entre si para garantir sua própria sobrevivência e assegurar que suas características sejam passadas adiante, através da nova geração (GOLBERG, 1989).

Basicamente, um algoritmo genético apresenta cinco aspectos fundamentais quando usado para resolver um problema (GOLDBERG; HOLLAND, 1988): (i) uma codificação genética de soluções para o problema; (ii) um procedimento para criar uma população inicial de soluções; (iii) uma função de avaliação que retorna a aptidão de cada indivíduo; (iv) operadores genéticos que manipulam a codificação dos pais durante o processo de reprodução, dando origem a novos indivíduos; (v) parâmetros a serem utilizados no algoritmo, durante os processos de reprodução e mutação.

No Algoritmo 1 ilustra-se um pseudocódigo de um AG genérico.

---

**Algoritmo 1** Pseudocódigo de um AG genérico

---

- 1: Inicializa a população
  - 2: Avalie indivíduos na população
  - 3: **repita**
  - 4:     Selecione indivíduos para reprodução
  - 5:     Aplique operadores de recombinação e mutação
  - 6:     Avalie indivíduos na população
  - 7:     Selecione indivíduos para sobreviver
  - 8: **até** critério de parada satisfeito
- 

#### 2.4.1 Codificação

A representação do cromossomo ou codificação é fundamental para o algoritmo genético. Esta consiste em uma maneira de representar possíveis soluções para o problema. A escolha de uma representação é arbitrária e, quanto mais adequada for ao problema, maior a qualidade dos resultados obtidos.

Os AG's não trabalham sobre as soluções candidatas propriamente ditas, mas sobre suas representações. Para representar essas soluções candidatas, destacam-se dois procedimentos, a codificação binária com vetores de tamanho fixo sobre o alfabeto  $\{0, 1\}$ ; e a codificação real, baseada diretamente em vetores de valores reais. Ambas as codificações são amplamente usadas para uma variedade de problemas. Neste trabalho, usou-se a codificação real.

### 2.4.2 Inicialização da população

A inicialização da população determina o processo de criação das soluções candidatas para o primeiro ciclo do algoritmo. Tipicamente, os elementos que constituem a população inicial são escolhidos aleatoriamente, dentro de um espaço de busca definido em cada experimento.

### 2.4.3 Função Aptidão

A função de aptidão ou função custo é a maneira utilizada pelos AG's para determinar a qualidade de um indivíduo como solução do problema em questão. Melhor dizendo, é uma nota dada à solução candidata na resolução do problema, capaz de informar a qualidade da solução candidata.

De forma geral, a função aptidão  $F(x)$ , para um problema de otimização com restrição, pode ser definida da seguinte forma:

$$F(x) = f(x) + penal(x) \quad (2.4)$$

onde  $f(x)$  é a função objetivo e  $penal(x)$  é conhecida como uma função penalização. Caso o problema não tenha restrição, a função aptidão será a própria função objetivo. Se a penalização for considerada, alguma restrição terá sido violada.

Não é trivial tratar problemas com restrição, devido à dificuldade de definir a função de penalização. Mais adiante, neste texto serão abordadas algumas estratégias para tratamento de restrições.

### 2.4.4 Seleção

A seleção é responsável por escolher as soluções candidatas (indivíduos), que servirão de pais para o processo de reprodução. Ela simula o mecanismo de seleção natural, em que pais mais capazes geram mais filhos. Não obstante, é possível que pais menos aptos também possam gerar descendentes, o que pode ser proveitoso durante a evolução. Então, na seleção, deve-se privilegiar os indivíduos com a melhor função aptidão, sem desprezar completamente aqueles indivíduos com função de avaliação pior.

Neste trabalho, optou-se por usar o método de seleção por *ranking* linear, em que é criada uma lista ordenada das soluções candidatas e os primeiros colocados no *rank* possuem maior chance de reprodução.

#### 2.4.5 Operadores Genéticos

Neste item serão abordados os operadores de recombinação e mutação. Por comodidade usa-se, neste texto, o termo em inglês *crossover*, para representar recombinação.

O operador crossover tem como finalidade escolher partes do “material genético dos pais” para produzir o cromossomo “filho”. Existem várias formas de se fazer o crossover, escolheu-se aqui o Wright’s Heuristic Crossover (WRIGHT, 1991) aplicado com probabilidade igual a 0,8. Neste operador é definido um número aleatório *nrand* no intervalo  $[0, 1[$ . Entre os cromossomos selecionados (*pai1* e *pai2*), escolhe-se o de maior aptidão, por exemplo *pai1* e em seguida determina cada variável *i* do cromossomo do filho da seguinte forma:

$$x_i = nrand(pai1_i - pai2_i) + pai1_i$$

em que  $x_i$  é a *i*-ésima componente do indivíduo gerado.

O operador mutação é utilizado após a aplicação do operador de recombinação com o objetivo de introduzir diversidade nos novos indivíduos gerados. Este foi aplicado com uma probabilidade igual a 0,2. Neste trabalho optou-se por usar a mutação randomica (MICHALEWICZ, 1996) em que escolhe-se aleatoriamente um elemento no cromossomo e seu valor é determinado também aleatoriamente em um intervalo definido.

#### 2.4.6 Esquema de reprodução

Os dois esquemas de reprodução mais encontrados na literatura são conhecidos como Geracional e Não-Geracional (Steady-State) e serão explicados nesta tese.

O AG geracional possui como principal característica a substituição total da população a cada geração, com a desvantagem da possibilidade de perda de material genético de boa qualidade. Para evitar isso, muitas vezes, adota-se um processo de seleção elitista, mantendo-se parte dos melhores indivíduos da geração anterior. O Algoritmo 2 representa o pseudocódigo desse esquema.

---

**Algoritmo 2** Pseudocódigo de um AG Geracional
 

---

- 1: Inicialize a população P aleatoriamente
  - 2: Avalie indivíduos na população P
  - 3: **repita**
  - 4:     Copie os melhores indivíduos de P para P'
  - 5:     **repita**
  - 6:         Selecione 2 indivíduos em P
  - 7:         Aplique o operador de recombinação com probabilidade  $p_c$
  - 8:         Aplique o operador de mutação com probabilidade  $p_m$
  - 9:         Insira novos indivíduos em P'
  - 10:     **até** população P' completa
  - 11:     Avalie indivíduos na população P'
  - 12:      $P \leftarrow P'$
  - 13: **até** critério de parada satisfeito
- 

De maneira diferente do “geracional”, o algoritmo “steady-state” deixa de existir a noção de gerações e os pais passam a competir com os filhos por um lugar na população. Geralmente são gerados apenas 1 ou 2 indivíduos de cada vez. A cada nova criação desses indivíduos são feitas novas avaliações. Se os novos indivíduos forem melhores que os piores, terão direito à sobrevivência e os piores serão eliminados. Essa seria uma “política de inserção” tradicional, sendo possível outras variações. Pode-se, por exemplo, inserir somente indivíduos que tenham aptidões superiores que a da mediana, inserir indivíduos nos lugares dos piores pais ou pais mais próximos, etc. O Algoritmo 3 representa o pseudocódigo do Algoritmo Genético Não-Geracional (*Steady-State Genetic Algorithm - SSGA*).

---

**Algoritmo 3** Pseudocódigo de um SSGA
 

---

- 1: Inicialize a população P aleatoriamente
  - 2: Avalie indivíduos na população P
  - 3: Ordene a população P de acordo com a fitness
  - 4: **repita**
  - 5:     Selecione indivíduo(s) para reprodução
  - 6:     Aplique operador genético
  - 7:     Avalie indivíduo(s) gerado(s)
  - 8:     Selecione indivíduo  $x$  para sobreviver
  - 9:     **se** ( $x$  é melhor que o pior elemento de P) **então**
  - 10:         Elimina o pior elemento de P
  - 11:         Insira  $x$  em P de acordo com seu “ranking”
  - 12:     **fimse**
  - 13: **até** critério de parada satisfeito
-

## 2.5 PROBLEMAS COM RESTRIÇÕES

Metaheurísticas bioinspiradas são usadas para resolver problemas, originalmente, sem restrições. Não existe um mecanismo direto para incorporar nos algoritmos as informações sobre a viabilidade das soluções candidatas no processo evolutivo.

Dessa forma, um dos tópicos bastante explorado em problemas com restrições diz respeito ao tratamento de restrições, visto que a maior parte dos problemas reais oriundos das diversas áreas apresentam restrições. Encontra-se na literatura um considerável número de estratégias propostas para esse fim. Estas podem ser agrupadas em várias categorias, de acordo com o tipo de algoritmo, tipo de restrições (lineares ou não lineares), tipo de problema, etc.

É possível classificar as técnicas para tratamento de restrições como diretas (interiores), quando somente indivíduos viáveis são considerados, ou como indiretas (exteriores), quando ambos indivíduos viáveis ou inviáveis são considerados durante o processo de busca. As técnicas chamadas de diretas englobam: i) operadores genéticos com características especiais; ii) o uso de decodificadores especiais; iii) técnicas que usam algum tipo de reparo e, mais drasticamente, iv) “pena de morte” para as soluções inviáveis. As técnicas diretas são, geralmente, dependentes dos problemas (exceto a “pena de morte”). Uma discussão mais aprofundada sobre essas técnicas pode ser encontrada em (SHOENAUER; MICHALEWICZ, 1996; KOZIEL; MICHALEWICZ, 1999; LIEPINS; POTTER, 1991; ORVOSH; DAVIS, 1994).

As técnicas indiretas englobam: i) Multiplicadores de Lagrange; ii) o uso da função aptidão e as informações sobre as violações em uma otimização multi-objetivo; iii) o uso de técnicas especiais de seleção e; iv) a definição de que qualquer indivíduo inviável terá o valor de sua aptidão diminuído assumindo aqui maximização. As referências (ADELI; CHENG, 1994; BARBOSA, 1999; SURRY; RADCLIFFE, 1997; RUNARSSON; YAO, 2000; COELLO, 2002; MEZURA-MONTES; COELLO, 2011; DATTA; DEB, 2015), descrevem várias dessas abordagens.

### 2.5.1 Utilização de funções de penalização

Geralmente, um problema com restrições (PCR) pode ser transformado em um problema sem restrições (PSR) pela associação de uma função de penalização. Essas funções são incorporadas à função objetivo gerando uma única função a ser otimizada. O caso mais simples é a utilização de funções de penalizações estáticas, associadas a um parâmetro de penalização que atua sobre as restrições violadas. No entanto, a determinação e ajuste desse parâmetro é uma tarefa bastante árdua, que pode demandar bastante tempo em função da complexidade do problema em questão.

A função objetivo de um problema com restrição PCR modificada em um problema sem restrição PSR, pode ser colocada na seguinte forma:  $F(x) = f(x) + penal(x)$ . Na maioria dos métodos, a parcela  $penal(x)$  é simplesmente um parâmetro, uma função ou um conjunto de funções de penalização, que diferem entre si, de acordo com o método e a maneira em que são aplicados às soluções ineficazes.

Na sequência será dado destaque a um método adaptativo de penalização proposto por Barbosa e Lemonge (2002) e aplicado em problemas de otimização estrutural em Lemonge e Barbosa (2004). Mais recentemente uma análise das variantes foi publicado em Lemonge, Barbosa e Bernardino (2015) e uma variante deste método será adotada no tratamento das restrições dos problemas analisados nesta tese.

Outras técnicas adaptativas de penalização podem ser encontradas em (FARMANI; WRIGHT *et al.*, 2003; LIN; WU, 2004; TESSEMA; YEN, 2006; WANG *et al.*, 2009; COSTA; SANTO; OLIVEIRA, 2013; VINCENTI; AHMADIAN; VANNUCCI, 2010; MONTEMURRO; VINCENTI; VANNUCCI, 2013). No livro Datta e Deb (2015) uma revisão crítica, disponível no capítulo 1, das técnicas adaptativas de penalização em computação evolucionista é feita. Neste, identificou-se os principais conceitos utilizados no processo de adaptação, bem como as deficiências constatadas, sugerindo a continuação dos trabalhos, a fim de aumentar a compreensão de tais técnicas.

### 2.5.2 Método Adaptativo de Penalização - APM

Em Barbosa e Lemonge (2002), foi proposto um método (APM - Adaptive Penalty Method) para um AG geracional sem qualquer tipo de parâmetro a ser definido pelo



usuário. Esse esquema foi desenvolvido, baseado nas informações obtidas da população, tais como a média da função objetivo e o nível de violação de cada restrição durante o processo evolutivo.

Nesse método, a função aptidão é definida como:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \text{ é factível,} \\ h(x) + \sum_{j=1}^m k_j v_j(x) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.5)$$

em que

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) > \langle f(x) \rangle, \\ \langle f(x) \rangle & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.6)$$

e  $\langle f(x) \rangle$  é a média da função objetivo na população atual. O parâmetro de penalização definido em cada geração é dado por:

$$k_j = |\langle f(x) \rangle| \frac{\langle v_j(x) \rangle}{\sum_{l=1}^m [\langle v_l(x) \rangle]^2} \quad (2.7)$$

e  $\langle v_l(x) \rangle$  é a violação média da  $l$ -ésima restrição da população atual. E  $m = \bar{p} + \bar{w}$ .

Denotando por  $pop$  o tamanho da população, tem-se:

$$k_j = \frac{|\sum_{i=1}^{pop} f(x_i)|}{\sum_{l=1}^m [\sum_{i=1}^{pop} v_l(x_i)]^2} \sum_{i=1}^{pop} v_j(x_i) \quad (2.8)$$

A ideia do método é obter coeficientes de penalização que devem ser distribuídos de forma que aquelas restrições mais difíceis de serem atendidas tenham um valor mais alto de coeficiente de penalização. Todos os passos do método podem ser obtidos em Barbosa e Lemonge (2002).

O procedimento proposto por Barbosa e Lemonge (2002), originalmente concebido para um AG geracional, foi estendido para um AG não-geracional (BARBOSA; LEMONGE, 2003), em que, a cada “geração”, geralmente apenas um ou dois novos indivíduos são introduzidos na população. Mais tarde foram introduzidas variantes do APM no que diz respeito à definição do parâmetro de penalização  $k_j$  (BARBOSA; LEMONGE, 2008) e ampliada para o AG não-geracional e apresentados em Lemonge, Barbosa e Bernardino (2012), em que

$$h(x) = \begin{cases} f(x_{pior}), & \text{se não há nenhum indivíduo factível na população,} \\ f(x_{melhor\ factível}) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$k_j = |h(x)| \frac{\langle v_j(x) \rangle}{\sum_{l=1}^m [\langle v_l(x) \rangle]^2} \quad (2.10)$$

Neste trabalho, o APM monotônico com coeficientes de penalização calculados através da Eq. (2.5) e (2.9) é adotado, e  $k_j$  (parâmetro de penalização) não podem ter seu valor reduzido ao longo do processo evolutivo, ou seja:

$$k_j = \max(k_j^{novo}, k_j^{atual}) \quad (2.11)$$

## 2.6 SÍNTESE DO CAPÍTULO 2

Este capítulo apresentou as definições e características principais de problemas de otimização estrutural. Apresentou também alguns métodos de otimização estrutural com especial atenção aos algoritmos genéticos, sendo apresentado cada item usado no AG como por exemplo, codificação, inicialização da população, função aptidão, seleção, operadores, entre outros. Nesse capítulo também foram apresentadas estratégias para tratamento das restrições em problemas de otimização e, em especial, o Método Adaptativo de Penalização adotado no mecanismo de busca dos problemas discutidos nesta tese.

### 3 REANÁLISE ESTRUTURAL

#### 3.1 INTRODUÇÃO

A análise estrutural é uma das principais partes para a formulação e solução de qualquer problema estrutural. O objetivo da análise de uma dada estrutura é determinar as forças internas, tensões e deslocamentos sob aplicação de diferentes carregamentos. A fim de avaliar a resposta da estrutura é necessário estabelecer um modelo que represente o comportamento estrutural sob a aplicação das cargas.

Sendo assim, uma das primeiras questões a serem colocadas quando se está resolvendo um problema de análise estrutural é a classificação da estrutura em relação à geometria, características elásticas do material e ações aplicadas. O modo como a estratégia de resolução será formulada e aplicada depende das simplificações feitas a cada tipo de problema.

Primeiramente, deve-se verificar se a análise será estática ou dinâmica. O outro aspecto a ser verificado é o tipo de estrutura. Estas podem ser classificadas quanto à sua geometria como reticuladas, laminares ou sólidas. As estruturas reticuladas, usadas aqui, são as constituídas por barras em que as dimensões transversais são muito menores do que os comprimentos das barras.

Também deve-se verificar se a análise é linear ou não-linear. O primeiro caso, análise linear, tem-se que os deslocamentos calculados são muito pequenos, admitindo-se que não existe influência na modificação da geometria da estrutura na distribuição dos esforços e das tensões, isto é, todo o estudo é feito com base na geometria inicial indeformada. Se esta hipótese não puder ser aceita, a análise é não-linear geométrica. É também frequente considerar que, ao nível do material que constitui a estrutura, a relação entre tensões e deformações é linear. Se esta hipótese não puder ser aceita, a análise é não-linear material.

Neste trabalho os experimentos serão guiados para análise estática de estruturas reticuladas com comportamento linear e não-linear geométrico.

### 3.1.1 Descrição do Problema de Análise Estrutural Linear Estática

Um problema de análise estrutural pode ser representado pelas equações de equilíbrio 3.1.

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{R} \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez, que pode ser calculada através do método de elementos finitos,  $\mathbf{r}$  é o vetor deslocamento a ser calculado e  $\mathbf{R}$  é o de ações externas (BATHE, 2006). Em termos práticos, a matriz  $\mathbf{K}$  é geralmente construída pela soma das contribuições de cada barra ou elementos finitos em relação a um determinado sistema global.

As matrizes locais dos elementos são construídas considerando o tipo de estrutura que está sendo analisada. Na treliça considera-se que as barras estão conectadas entre si de tal forma que somente forças axiais (e, conseqüentemente deformações axiais) estão presentes. Desta forma a matriz do elemento é escrita em função somente dos deslocamentos nodais, das propriedades do material, área das seções transversais e comprimento da barra. Em relação ao pórtico considera-se uma superposição geralmente desacoplada dos elementos de barra e viga. Nesta estrutura as barras são agrupadas por conexões rígidas e portanto forças axiais e transversais bem como momentos fletores estão presentes em cada membro. Desta forma a matriz do elemento é escrita em função dos deslocamentos (translações e rotações) (REDDY, 1993).

### 3.1.2 Descrição do Problema de Análise Estrutural Não-Linear

Em contrapartida, a análise não-linear de estruturas é normalmente realizada através de processo iterativo, devido a linearização, em que as forças externas  $\mathbf{R}$  são introduzidas por etapas e a solução do conjunto de equações não-lineares é conseguida através da resolução de equações lineares para sucessivos valores de um parâmetro de carga ou deslocamento, de tal modo que a solução obtida por um determinado parâmetro de carga é usada para calcular os deslocamentos  $\mathbf{r}$  dos parâmetros seguintes. O esquema de iteração mais frequentemente utilizado para a solução das equações não-lineares é o método de Newton-Raphson (BATHE, 2006; LEVY; SPILLERS, 2013). Começando com a análise linear, primeiro calcula-se os deslocamentos iniciais  $\mathbf{r}_0$  pelas equações lineares:

$$\mathbf{K}_0\mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_0 \quad (3.2)$$

em que  $\mathbf{K}_0$  é a matriz de rigidez elástica e  $\mathbf{R}_0$  é o vetor de cargas.

O vetor força residual  $\delta\mathbf{R}$  e a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$  são definidos da seguinte forma:

$$\delta\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_I \quad (3.3)$$

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G \quad (3.4)$$

em que  $\mathbf{R}_I$  é o vetor de forças internas e  $\mathbf{K}_G$  é a matriz de rigidez geométrica.

O vetor deslocamento  $\delta\mathbf{r}$  referente ao vetor força residual é calculado para a geometria deformada

$$\mathbf{K}_T\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{R} \quad (3.5)$$

Começando com o deslocamento inicial  $\mathbf{r}_0$ , o deslocamento é atualizado iterativamente por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r} \quad (3.6)$$

redefinindo  $\mathbf{r}_0$  como o deslocamento atualizado do ciclo anterior.

O método de Newton-Raphson pode ser enumerado da seguinte forma, conforme já descrito e utilizado em Silva (2011):

1. Fazer a análise linear da estrutura e obter os deslocamentos para o primeiro passo de carga;
2. Atualizar as coordenadas dos nós da estrutura considerando os deslocamentos do passo anterior;
3. Calcular os esforços internos nas barras;
4. Calcular, em cada nó, a resultante dos esforços internos nas direções globais dos eixos da estrutura;
5. Calcular o vetor de desequilíbrio entre as ações externas aplicadas e as calculadas no passo anterior;
6. Montar a matriz de rigidez geométrica da estrutura que irá compor o sistema de equações de equilíbrio. Checar o determinante da matriz tangente.

6.1. Se negativo, ocorrerá perda de estabilidade e os deslocamentos e ações correntes internas nos membros calculados no passo de carga anterior são multiplicados por um fator de 100. Sendo assim, essa solução candidata terá seus deslocamentos aumentados consideravelmente o que acarretará uma penalização alta e, provavelmente terá uma posição desfavorável no *ranking* da população.

6.2. Se não, a estrutura será analisada, considerando o vetor de desequilíbrio. Novos incrementos de deslocamento serão obtidos;

7. Atualizar as coordenadas;

8. Repetir os passos de 3 a 7, até que o vetor de desequilíbrio atenda a tolerância de erro ou o número de iterações estabelecidas.

## 3.2 MÉTODOS DE REANÁLISE ESTRUTURAL

Inúmeros trabalhos têm sido publicados e neles foram feitas várias revisões abrangentes sobre métodos de reanálise, como por exemplo, (ARORA, 1976), (KASSIM; TOPPING, 1987) e (BARTHELEMY; HAFITKA, 1993). Os vários métodos existentes podem ser classificados em duas grandes categorias: métodos diretos e métodos aproximados. Os métodos diretos, geram soluções exatas e aplicáveis a situações em que uma parte relativamente pequena da estrutura foi alterada, já os métodos aproximados, geram soluções aproximadas, em que a precisão depende do tipo de alteração da estrutura. Estes são geralmente adequados para situações em que as mudanças ocorrem em vários pontos da estrutura.

### 3.2.1 Métodos Diretos

Métodos diretos são eficientes para pequenas mudanças na matriz de rigidez. Em particular, estes métodos são aplicáveis a situações em que uma parte relativamente pequena da estrutura foi alterada e as alterações na matriz de rigidez podem ser representadas por uma pequena sub-matriz (por exemplo, nos casos em que as seções transversais de apenas alguns membros são alteradas). Os métodos diretos são ineficientes quando a sub-matriz de alterações do sistema da matriz de rigidez contém muitos termos modificados em relação a matriz de rigidez completa.

Esses são geralmente baseados nas fórmulas de Sherman-Morrison (SHERMAN; MORRISON, 1950) e Woodbury (WOODBURY, 1950) para a atualização da inversa de uma matriz. Revisões bibliográficas sobre esses métodos são dadas em Householder (1957), Hager (1989) e Akgün, Garcelon e Haftka (2001). Um levantamento histórico abrangente da origem dessas fórmulas é apresentado em (HAGER, 1989). Vários métodos para calcular a resposta modificada devido a mudanças na estrutura foram propostos no final dos anos sessenta e início dos anos setenta. A maioria desses métodos é melhorada com base na identidade Sherman-Morrison, como por exemplo, (CARPENTER; HATCH; SACK, 1967) e (KIRSCH, 1981). Akgün, Garcelon e Haftka (2001) demonstraram-se que vários métodos de reanálise podem ser vistos como variantes destas fórmulas.

### 3.2.2 Métodos Aproximados

Métodos aproximados são adequados para casos de mudanças em grande parte ou em toda a estrutura. Estes métodos têm sido usados na otimização estrutural para reduzir o número de análises exatas e o custo computacional total durante o processo de solução. A redução do custo computacional, por sua vez, permite a solução de problemas que demandam um grande esforço computacional. Em geral, os seguintes fatores são considerados na escolha de um método de reanálise aproximado para uma aplicação específica:

- A precisão dos cálculos (a qualidade das aproximações);
- O esforço computacional envolvido (a eficiência do método);
- A generalidade de aplicação.

A qualidade dos resultados e o custo dos cálculos são normalmente dois fatores conflitantes. Isto é, melhores aproximações são muitas vezes obtidas com um maior esforço computacional. Os métodos de aproximação podem ser divididos em (BARTHELEMY; HAFTKA, 1993; KIRSCH, 1993b) :

- Aproximações locais, usam a primeira ordem da expansão por Série de Taylor ou a expansão em série binomial sobre um determinado ponto. Aproximações locais

são calculadas com base em informações de um único ponto. Estes métodos são muito eficientes, mas eles só são eficazes para pequenas mudanças nas variáveis de projeto. Para grandes alterações no projeto a precisão das aproximações muitas vezes se deteriora e os resultados podem tornar-se sem sentido. Isso é, as aproximações são válidas somente na vizinhança de um ponto. Para melhorar a qualidade dos resultados, as áreas recíprocas da seção transversal, isto é, o inverso da área, foram assumidas como variáveis de projeto (SCHMIT; FARSHI, 1974). A forma combinada das aproximações diretas e recíprocas também foi desenvolvida (JR; HAFTKA, 1979) mas verificou-se que a aproximação combinada das aproximações diretas e recíprocas tende a ser menos precisa do que a aproximação direta ou a aproximação recíproca. Uma possibilidade para melhorar a qualidade dos resultados é considerar aproximações de segunda ordem (FLEURY, 1989), mas esta aumenta consideravelmente o esforço computacional.

- Aproximações globais chamados também aproximações multipontos, como por exemplo, superfície de resposta ou métodos de base reduzida (HAFTKA *et al.*, 1987; UNAL *et al.*, 1996; FOX; MIURA, 1971; NOOR, 1994). Nos métodos de superfície de resposta (UNAL *et al.*, 1996; SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI; HAFTKA, 1997), as funções de resposta são substituídas por funções simples (funções polinomiais), que são ajustadas com os dados calculados em um conjunto selecionado de pontos do projeto. A utilização de métodos de superfície de resposta foi limitada aos problemas com um número relativamente pequeno de variáveis de projeto. No método de base reduzida (FOX; MIURA, 1971; NOOR, 1994), a resposta de um sistema com um grande número de graus de liberdade é aproximado por uma combinação linear de alguns vetores base pré-selecionados. A questão básica quando usa-se métodos de base reduzida é a escolha apropriada do conjunto de vetores base. Uma limitação para este método é que o cálculo dos vetores base exige diversas análises exatas da estrutura para o projeto, gerando assim um grande esforço computacional. Em resumo, aproximações globais requerem muito esforço computacional, particularmente em problemas com um grande número de variáveis de projeto.
- Aproximações combinadas, nesta abordagem tenta-se dar qualidades globais para



aproximações locais. Isto pode ser conseguido considerando termos de aproximações locais (séries) como vetores base em uma expressão global (base reduzida). Tem sido evidenciado que esta escolha de vetores base fornece resultados precisos. A vantagem é que a eficiência de aproximações locais e o melhoramento da qualidade das aproximações globais são combinados para obter um procedimento de solução eficaz. Este método adotado nessa tese será discutido com mais detalhes na próxima seção.

### 3.3 REANÁLISE POR APROXIMAÇÃO COMBINADA

Este tipo de reanálise é baseado no método por aproximação combinada desenvolvido por Kirsch (2002). Este método é adequado para vários modelos de análise (linear, não-linear, estático e dinâmico), diferentes tipos de estruturas e todos os tipos de variáveis de projeto (seção transversal, material, geométrica, topológica). Os cálculos são baseados em resultados de uma análise exata simples. O esforço computacional geralmente é bem menor que o gerado na realização de uma análise completa.

Os métodos de reanálise destinam-se a analisar com eficiência estruturas que são modificadas ao longo da execução de um problema de otimização ou ao longo das mudanças no projeto. O objetivo de Kirsch (2003a) é avaliar a resposta estrutural para tais mudanças sem resolver o conjunto completo de equações modificadas.

Segundo Kirsch (2003a) as etapas são simples e os procedimentos de processamento computacional definidos podem ser acoplados de forma trivial aos sistemas de elementos finitos. Alguns resultados típicos foram apresentados nos exemplos numéricos de Kirsch (2003a), Kirsch, Bogomolni e Sheinman (2006).

A abordagem considerada por Kirsch (2003a) é baseada no método de aproximação combinada (CA) desenvolvido por ele em 2002 (KIRSCH, 2002). Nesta abordagem, os termos da série binomial são utilizados como vetores base em uma expressão reduzida. A vantagem é que aproximações locais eficientes (expansão de série) e aproximações globais precisas (o método de base reduzida) são combinadas para gerar procedimentos com solução eficaz.

Os primeiros estudos do método CA foram publicados no início dos anos 90

(KIRSCH, 1991; KIRSCH, 1993c; KIRSCH, 1993a). A eficácia desse método foi comprovada para mudanças nas seções transversais de elementos, bem como para modificações na geometria e na topologia (KIRSCH, 1995; KIRSCH; LIU, 1997). Tem sido mostrado que usando aproximações de baixa ordem pode-se obter resultados exatos para grandes mudanças nas variáveis de projeto.

Recentemente ficou evidenciado que para alterações topológicas (KIRSCH; PAPALAMBROS, 2001c) e mudanças geométricas (KIRSCH; PAPALAMBROS, 2001a) pode-se obter soluções exatas e precisas. O método CA tem sido aplicado com êxito tanto em problemas com pequenas modificações nas estruturas quanto em problemas com modificações moderadamente grandes.

Resultados precisos como vistos em (KIRSCH, 2003a; KIRSCH; BOGOMOLNI; SHEINMAN, 2006) são obtidos por aproximações de baixa ordem em projetos que sofreram mudanças significativas ao longo das execuções. É possível melhorar a precisão, considerando aproximações de ordem superiores, e em certos casos podem ser obtidas soluções exatas.

As principais vantagens do método de aproximação combinada descritas em (KIRSCH, 2000; KIRSCH, 2002; KIRSCH, 2003b) podem ser resumidas, como segue:

- Generalidade. Vários modelos de análise, diferentes tipos de estruturas e todos os tipos de mudanças na estrutura podem ser considerados. As modificações podem ser de diferentes graus, variando entre alterações em apenas alguns elementos ou alterações em todos os elementos da estrutura. Também, alterações do modelo estrutural propriamente dito podem ser consideradas.
- Precisão. Aproximações precisas podem ser alcançadas por mudanças significativas em estruturas de grande escala. Vários meios podem ser utilizados para melhorar a precisão dos resultados, incluindo a consideração de termos de alta ordem e os procedimentos de ortogonalização de Gram-Schmidt. Em muitos casos deve-se ortonormalizar os vetores bases usando ortogonalização de Gram-Schmidt pois a matriz reduzida  $\mathbf{K}_R = \mathbf{r}_B^T \mathbf{K} \mathbf{r}_B$  tende a ser mal-condicionada quando muitos vetores bases são usados. Para o método de reanálise por aproximação combinada o método

de ortogonalização de Gram-Schmidt foi proposto originalmente por Leu e Huang (1998). Com isso, a precisão da aproximação é melhorada conseguindo bons resultados quando a série binomial diverge. Em contrapartida tem-se um custo extra para ortonormalizar os vetores bases.

- **Eficiência.** Os cálculos são baseados nos resultados de uma única análise exata. O número de operações algébricas e do esforço computacional total são geralmente muito menores do que aqueles necessários para realizar uma análise completa das estruturas modificadas.
- **Flexibilidade.** O custo dos cálculos e a precisão dos resultados podem ser controladas pelo grau de simplificação ou sofisticação considerada e da quantidade de informações utilizadas. Dependendo do problema a ser resolvido, várias versões simples e eficazes para a abordagem podem ser consideradas. Por outro lado, vários meios sofisticados podem ser utilizados para melhorar a precisão das aproximações à custa de um maior esforço computacional.
- **Facilidade de implementação.** As etapas de solução são simples, a abordagem pode ser facilmente utilizada com os sistemas gerais de elementos finitos, e os cálculos são baseados em expressões analíticas simples.

### 3.3.1 Reanálise para o Caso Linear

#### 3.3.1.1 Formulação do Problema

Conforme descrito em (KIRSCH, 2003a), um problema de reanálise pode ser formulado como:

Dada uma estrutura inicial, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}_0$  e o vetor de carregamento  $\mathbf{R}_0$  correspondente, o cálculo dos deslocamentos  $r_0$  são efetuados pela equação de equilíbrio

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{r}_0 = \mathbf{R}_0 \quad (3.7)$$

em que a matriz de rigidez positiva definida  $\mathbf{K}_0$  normalmente é dada pela forma decomposta na Equação (3.8)

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{U}_0^T \mathbf{U}_0, \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{U}_0$  é a matriz triangular superior.

Assumindo uma alteração na estrutura e correspondentes mudanças  $\Delta\mathbf{K}_0$  e  $\Delta\mathbf{R}_0$  na matriz de rigidez e vetor de carregamento respectivamente. A matriz de rigidez modificada  $\mathbf{K}$  e o vetor de carregamento modificado  $\mathbf{R}$  são dados pelas Equações 3.9 e 3.10

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}_0 \quad (3.9)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \Delta\mathbf{R}_0 \quad (3.10)$$

Os elementos da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  são em geral funções explícitas das variáveis de projeto. As alterações  $\Delta\mathbf{K}_0$  estão em função dos membros das seções transversais, da propriedade do material, da geometria e da topologia da estrutura. Em geral, as mudanças  $\Delta\mathbf{R}$  também estão em função das variáveis de projeto. Porém, os elementos do vetor de carga  $\Delta\mathbf{R}_0$ , geralmente são considerados independentes dessas variáveis, isto é,  $\Delta\mathbf{R}_0 = 0$ . Não considera-se aqui as variações das cargas externas que atuam sobre a estrutura, como por exemplo, cargas de vento, mudanças na geometria da estrutura e peso-próprio da estrutura.

O objetivo da reanálise é calcular de forma eficiente e precisa o deslocamento  $\mathbf{r}$  da estrutura modificada sem resolver um conjunto completo de equações modificadas da análise.

$$\mathbf{R} = (\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}_0)\mathbf{r} \quad (3.11)$$

Uma vez que os deslocamentos foram avaliados, as tensões e as ações internas são facilmente calculadas usando as relações explícitas de deslocamento-tensão e deslocamento-ações internas. Assim o método de reanálise essencialmente substitui a resolução formal das equações da análise estrutural.

### 3.3.1.2 Solução pelo método de Aproximação Combinada

A análise linear por aproximação combinada (CA) é discutida em detalhes por Kirsch, Kocvara e Zowe (2002). O procedimento para solução é descrito como segue.

Assume-se que o deslocamento  $\mathbf{r}$  do novo projeto pode ser aproximado por uma combinação linear de  $s$  vetores base linearmente independentes pré-selecionados:  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2,$

$\dots, \mathbf{r}_s$ :

$$\mathbf{r} = y_1 \mathbf{r}_1 + y_2 \mathbf{r}_2 + \dots + y_s \mathbf{r}_s, \quad (3.12)$$

em que Kirsch, Kocvara e Zowe (2002) assumiram-se que  $s$  é bem menor que o número de graus de liberdade  $n$ , i.e.,  $s \ll n$  e que  $\mathbf{r}_B$  é uma matriz de vetores base  $n \times s$  e  $\mathbf{y}$  é um vetor de coeficientes a serem determinados:

$$\mathbf{r}_B = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s\}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{y}^T = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}, \quad (3.14)$$

As equações modificadas da análise são agora aproximadas por um pequeno sistema de equações de novos  $\mathbf{y}$  desconhecidos. Substituindo 3.9 e 3.12 em 3.11 e pre-multiplicando por  $\mathbf{r}_B^T$  tem-se o sistema  $s \times s$

$$\mathbf{r}_B^T \mathbf{K} \mathbf{r}_B \mathbf{y} = \mathbf{r}_B^T \mathbf{R} \quad (3.15)$$

Introduzindo a notação

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{r}_B^T \mathbf{K} \mathbf{r}_B, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{R}_R = \mathbf{r}_B^T \mathbf{R} \quad (3.17)$$

e substituindo 3.16 e 3.17 em 3.15, tem-se

$$\mathbf{K}_R \mathbf{y} = \mathbf{R}_R \quad (3.18)$$

Os vetores base  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s$  são determinados da seguinte forma. Considerando a Equação (3.11) e rearranjando esta equação tem-se:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{r} = \mathbf{R} - \Delta \mathbf{K}_0 \mathbf{r} \quad (3.19)$$

Escrevendo a Equação (3.19) como uma relação recorrente:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{R} - \Delta \mathbf{K}_0 \mathbf{r}^{(k)} \quad (3.20)$$

em que  $\mathbf{r}^{(k+1)}$  é o valor de  $\mathbf{r}$  após o  $k$ -ésimo ciclo. Assumindo como valor inicial  $\mathbf{r}^{(0)} = 0$  pode-se obter a série como segue:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{I} - \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 - \dots) \mathbf{r}_1 \quad (3.21)$$

em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. A matriz  $\mathbf{B}$  e o vetor  $\mathbf{r}_1$  são definidos por

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}_0 \quad (3.22)$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{R} \quad (3.23)$$

Desta forma, os três primeiros termos da série são dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{R} \\ \mathbf{r}_2 &= -\mathbf{B} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{B}^2 \mathbf{r}_1 = -\mathbf{B} \mathbf{r}_2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Podendo ser os termos da série calculados por uma relação recorrente, obtendo assim a série de vetores base.

$$\mathbf{r}_{i+1} = -\mathbf{B} \mathbf{r}_i \quad (3.25)$$

As etapas para obter o novo deslocamento com a reanálise por aproximação combinada é explicado a seguir:

1. Calcular a matriz de rigidez modificada  $\mathbf{K}$  pela Equação (3.9). Uma vez que o valor inicial  $\mathbf{K}_0$  já é dado, este passo envolve somente o cálculo de  $\Delta \mathbf{K}_0$ .
2. Calcular os vetores bases por  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{R}$  e  $\mathbf{r}_{i+1} = -\mathbf{B} \mathbf{r}_i$ . Uma vez que  $\mathbf{K}_0$  é dado pela análise inicial na forma decomposta, o cálculo dos vetores bases envolvem somente substituições progressivas e regressivas.
3. Calcular a matriz de rigidez e o vetor de cargas reduzido por  $\mathbf{K}_R = \mathbf{r}_B^T \mathbf{K} \mathbf{r}_B$  e  $\mathbf{R}_R = \mathbf{r}_B^T \mathbf{R}$ .
4. Calcular o vetor de coeficientes  $\mathbf{y}$  resolvendo  $\mathbf{K}_R \mathbf{y} = \mathbf{R}_R$ . Uma vez que o número de vetores base  $s$  é bem menor que o número de graus de liberdade  $n$ , sendo assim será resolvido apenas um sistema menor  $s \times s$  em vez calcular a solução exata por um sistema grande  $n \times n$ .
5. Calcular o deslocamento final por  $\mathbf{r} = y_1 \mathbf{r}_1 + y_2 \mathbf{r}_2 + \dots + y_s \mathbf{r}_s$ .

## 3.3.1.3 Exemplo

Em (KIRSCH; PAPALAMBROS, 2001a) encontra-se um experimento numérico feito com uma treliça de 10-barras em que o carregamento  $P = 100$  Kips foi aplicado conforme Figura 1. Este exemplo tem como objetivo mostrar a acurácia do método de aproximação combinada apenas para uma modificação na matriz. Kirsch e Papalambros (2001a) obteve resultados com 2, 3, 4 e 5 bases de vetores conforme visto na tabela 1. Nesta tabela pode ser encontrado resultados precisos com um número pequeno de vetores base.

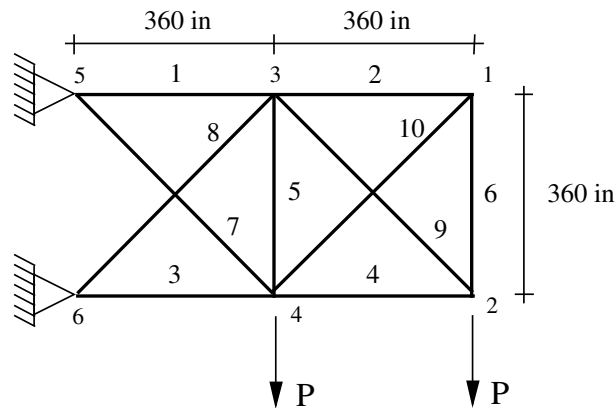


Figura 1 – Treliça de 10 barras.

Tabela 1 – Deslocamentos exatos e aproximados para a treliça de 10 barras (KIRSCH; KOCVARA; ZOWE, 2002) separados por número de vetores bases

nó	2 bases	3 bases	4 bases	5 bases	Completo
1	-0.89	-0.98	-0.99	-0.98	-0.98
	3.77	3.87	3.89	3.90	3.90
2	0.50	0.52	0.52	0.52	0.52
	1.53	1.46	1.48	1.49	1.49
3	0.71	0.76	0.77	0.77	0.77
	3.56	3.63	3.64	3.65	3.65
4	-0.54	-0.55	-0.55	-0.55	-0.55
	1.71	1.64	1.62	1.62	1.62

Através da Tabela 1 é possível observar que com apenas 3 vetores base conseguiu-se fazer a reanálise com uma boa aproximação.

### 3.3.2 Reanálise para o Caso Não-Linear Geométrico

Nesta seção soluções aproximadas para as equações de equilíbrio serão apresentadas. Os procedimentos apresentados pretendem reduzir o número de fatorações da matriz durante a análise não-linear. Primeiramente considera-se uma análise não-linear da estrutura de referência com o cálculo de  $M$  matrizes de rigidez fatorada ( $M$  é por exemplo o número de passos de cargas) da matriz de rigidez de referência  $\mathbf{K}_{ref}^m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ). Assumindo uma alteração na estrutura e correspondentes mudanças  $\Delta\mathbf{K}_0$  na matriz de rigidez elástica, o vetor força residual  $\delta\mathbf{R}$  e a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$  são agora definidas como:

$$\delta\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \Delta\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_I \quad (3.26)$$

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G \quad (3.27)$$

Definindo as mudanças  $\Delta\mathbf{K}$  e  $\Delta\mathbf{R}$  como sendo

$$\Delta\mathbf{R} = -\mathbf{R}_I = \delta\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 \quad (3.28)$$

$$\Delta\mathbf{K} = \Delta\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_G = \mathbf{K}_T - \mathbf{K}_0 \quad (3.29)$$

Substituindo 3.29 em 3.5 tem-se

$$(\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K})\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{R} \quad (3.30)$$

Para resolver 3.5 pelo método CA assume-se que os deslocamentos  $\delta\mathbf{r}$  são aproximados por uma combinação linear de  $s$  vetores base linearmente independentes pré-selecionados:  $\delta\mathbf{r}_1, \delta\mathbf{r}_2, \dots, \delta\mathbf{r}_s$ :

$$\delta\mathbf{r} = y_1\delta\mathbf{r}_1 + y_2\delta\mathbf{r}_2 + \dots + y_s\delta\mathbf{r}_s = \delta\mathbf{r}_{BY} \quad (3.31)$$

As equações modificadas da análise são agora aproximadas por um pequeno sistema de equações de novos  $\mathbf{y}$  desconhecidos. Substituindo 3.31 em 3.5 e pre-multiplicando por  $\mathbf{r}_B^T$  tem-se o sistema  $s \times s$

$$\delta\mathbf{r}_B^T \mathbf{K}_T \delta\mathbf{r}_{BY} = \delta\mathbf{r}_B^T \delta\mathbf{R} \quad (3.32)$$

Introduzindo a notação

$$\mathbf{K}_R = \delta\mathbf{r}_B^T \mathbf{K}_T \delta\mathbf{r}_B, \quad (3.33)$$



$$\mathbf{R}_R = \delta \mathbf{r}_B^T \delta \mathbf{R} \quad (3.34)$$

e substituindo 3.33 e 3.34 em 3.32, tem-se

$$\mathbf{K}_R \mathbf{y} = \mathbf{R}_R \quad (3.35)$$

Os vetores base  $\delta \mathbf{r}_1, \delta \mathbf{r}_2, \dots, \delta \mathbf{r}_s$  são determinados do seguinte modo. Considere a Equação (3.11) e rearranjando esta equação tem-se:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{r} = \mathbf{R} - \Delta \mathbf{K}_0 \mathbf{r} \quad (3.36)$$

As etapas a serem seguidas para a obtenção do novo deslocamento com a reanálise não-linear por aproximação combinada são as mesmas da reanálise linear por aproximação combinada.

### 3.3.2.1 Considerações em relação ao Método de Newton Raphson

Nos experimentos realizados neste trabalho, foi implementado o método de Newton Raphson em conjunto com o método de aproximação combinada (KIRSCH, 2003a). Nesta estratégia, a matriz de rigidez tangente foi alterada a cada iteração de cada passo de carga, mas não foi fatorada pois esta foi aproximada pela matriz de referência através do método de aproximação combinada. Outra forma de aproximar a matriz tangente seria através da utilização do método de Newton Raphson Modificado em que a matriz de rigidez tangente mantém-se constante a cada iteração alterando-se apenas a cada passo de carga onde ocorre a fatoração da matriz.

Ambas as estratégias aproximam o cálculo do deslocamento em relação a uma matriz. No método de Newton Raphson com aproximação combinada utiliza-se uma matriz de referência  $\mathbf{K}_0$  para cada passo de carga, enquanto que no método de Newton Raphson Modificado utiliza-se a matriz de rigidez tangente inicial em cada passo de carga. Sendo assim o número de passos de carga ou iteração é geralmente maior quando comparado com a resolução utilizando o método de Newton Raphson Completo. Para verificar o impacto dessas alterações (isto é, número de iterações e de passos de carga) na resolução do problema, um exemplo de um pórtico com comportamento não-linear descrito na Figura 2 foi analisado com as três estratégias: Newton Raphson Completo, Newton Raphson com aproximação combinada e Newton Raphson Modificado.

A Tabela 2 mostra os deslocamentos do nó 1 na direção vertical. Nesta tabela é possível observar que o método de Newton Raphson com aproximação combinada obteve um resultado bem próximo do método de Newton Raphson Completo com o mesmo número de passos de carga, alterando apenas o número de iterações. Já no método de Newton Raphson Modificado um número maior de passos de carga e iterações foi necessário sendo que o resultado não foi tão preciso.

Dessa forma, o método de Newton Raphson com aproximação combinada pode ser uma estratégia alternativa e computacionalmente mais eficiente que o método de Newton Raphson Modificado pois possui uma característica similar a este (embora conceitualmente diferentes), que é a não fatoração da matriz de rigidez a cada iteração.

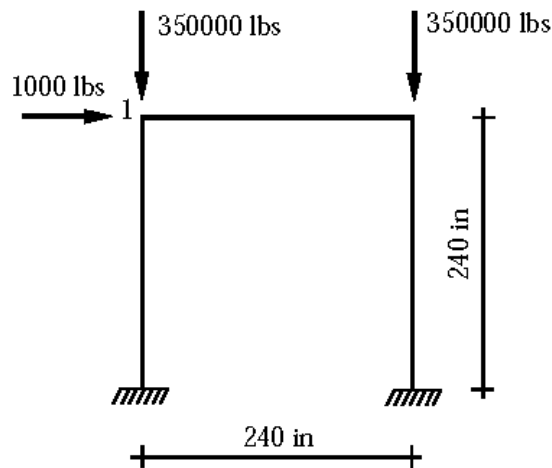


Figura 2 – Pórtico de 3 Barras.

Tabela 2 – Deslocamentos na direção y do nó 1 para o Pórtico de 3 barras - Comparação dos Métodos.

Método	# Passo de Carga	# Iterações	Deslocamento em y
Newton Raphson	10	3	1,172
Newton Raphson + CA	10	10	1,174
Newton Raphson Modificado	15	50	1,231

### 3.3.3 Convergência da Série

A série de vetores base da Equação (3.25) converge se e somente se (KIRSCH, 2008)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{B}^k = \mathbf{0} \quad (3.37)$$

que por sua vez a condição será alcançada se e somente se

$$\rho(\mathbf{B}) < 1 \quad (3.38)$$

em que  $\rho(\mathbf{B})$  é o raio espectral (módulo do autovalor de maior módulo) da matriz  $\mathbf{B}$ . Um critério suficiente para a convergência da série é

$$\|\mathbf{B}\| \leq 1 \quad (3.39)$$

em que  $\|\mathbf{B}\|$  é uma norma de  $\mathbf{B}$ , como por exemplo a norma infinita.

Observa-se que para grandes valores nos elementos de  $\Delta\mathbf{K}$ , ou seja a matriz de rigidez atual ( $\mathbf{K}$ ) bem diferente da matriz de rigidez inicial ( $\mathbf{K}_0$ ), gerando assim grandes valores nos elementos de  $\mathbf{B}$  o critério de convergência pode não ser satisfeito.

### 3.3.4 Escolha da matriz $\mathbf{K}_0$

Conforme descrito por Amir *et al.* (2012) a matriz de rigidez de referência deve ser mais rígida do que a matriz a ser calculada pelo método de aproximação combinada. Pensando em um cenário em que tem-se duas matrizes  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$ , sendo  $\mathbf{K}_1$  mais rígido que  $\mathbf{K}_2$ , a norma de  $\mathbf{B}$  será menor se  $\mathbf{K}_1$  for considerada como matriz de referência. Uma consequência importante da convergência da série definida pela Equação (3.38) é que, em cenários de projeto que envolvem mais de duas estruturas, escolhendo-se como opção a “mais rígida” como a estrutura de referência esta será uma escolha muito eficaz porque a convergência é garantida para todas as avaliações das outras estruturas. Se  $\mathbf{K}_2$  fosse escolhida como matriz de referência, a convergência ainda poderia ser alcançada, mas com dependência da magnitude de  $\Delta\mathbf{K}$ . No entanto, é esperado que a convergência fique mais lenta.

Mas a questão é como identificar a estrutura mais rígida em um cenário estocástico. Neste cenário as áreas das seções transversais podem aumentar ou diminuir durante

o processo de otimização e fica difícil definir quem possui norma maior ou menor. Além disso, escolher a estrutura mais rígida como  $\mathbf{K}_0$  no cenário estocástico não é necessariamente a escolha mais eficiente para algumas avaliações. Na verdade, a magnitude média de  $\Delta\mathbf{K}_0$  espera-se ser menor se a estrutura escolhida como referência for a intermediária.

Em outras palavras, a norma de  $\mathbf{B}$  depende da norma de  $\mathbf{K}_0$  e de  $\Delta\mathbf{K}_0$  por isso, é difícil prever quais projetos de referência acabarão por levar à convergência mais rápida quando todo o conjunto de projetos é considerado. A limitação de usar o projeto intermediário como referência é que a convergência não é garantida quando o projeto avaliado é mais rígido. Enquanto usando o projeto mais rígido como referência tem-se a convergência para todos os projetos. Além disso, erros maiores podem ser obtidos quando se avalia um projeto que é mais rígido do que o de referência.

### 3.3.5 Eficiência dos Cálculos

Conforme descrito em Kirsch (2003c) o número de operações algébricas e o esforço computacional total envolvidos no método CA são geralmente bem menores comparados com uma análise completa de uma estrutura modificada. O número aproximado de operações (fatoração e substituições progressivas e regressivas) necessárias para resolver uma análise completa é  $n^3/3 + n^2$ , em que  $n$  é o número de graus de liberdade. O número aproximado de operações necessárias para resolver a análise pelo método CA é  $3n^2s + ns^2 + s^3/3$  em que  $s$  é o número de vetores base.

Na Figura 3  $\eta$  é a razão entre o número de operações algébricas de uma análise completa e o número de operações algébricas com o método CA. Neste gráfico é possível identificar que para valores abaixo de 1 a análise completa é mais eficiente. Deve-se ressaltar que nas avaliações acima não considerou-se matrizes armazenadas em banda.

Dessa forma a mesma análise pode ser feita considerando matrizes em banda conforme Figura 4 e 5. Dado que número aproximado de operações necessárias para resolver uma análise completa é  $1/2n^2 + 2nm_k$ , em que  $m_k$  é a banda da matriz de rigidez (considerada aqui  $m_k = n^{1/2}$  e  $m_k = n^{3/2}$  para estruturas 2D e 3D respectivamente). O número aproximado de operações necessárias para resolver a análise pelo método CA é  $s^3 + 2(s - 1)nm_k$ .

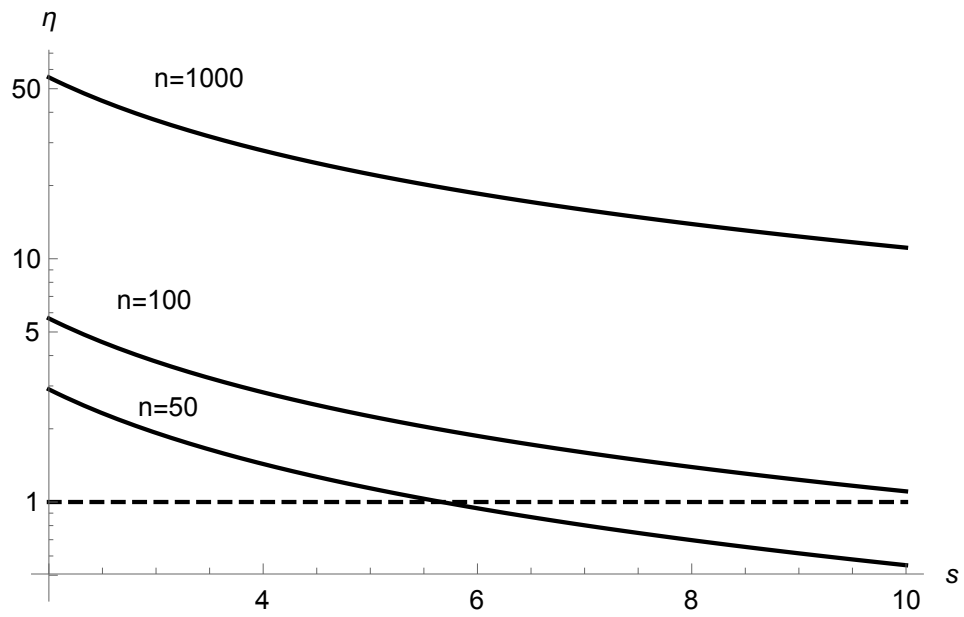


Figura 3 – Relação entre o número de operações algébricas  $\eta$

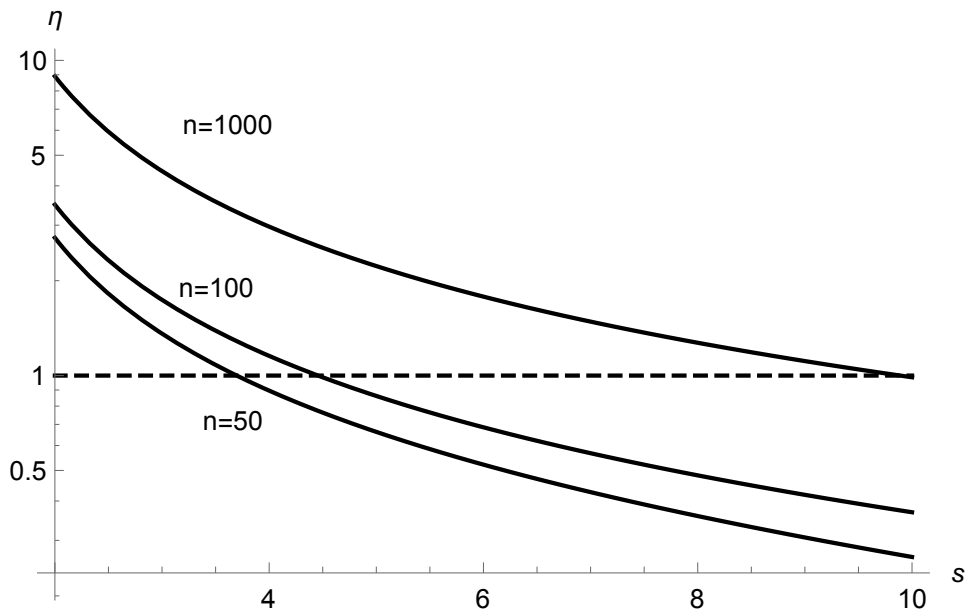


Figura 4 – Relação entre o número de operações algébricas  $\eta$  para estrutura 2D armazenada em banda

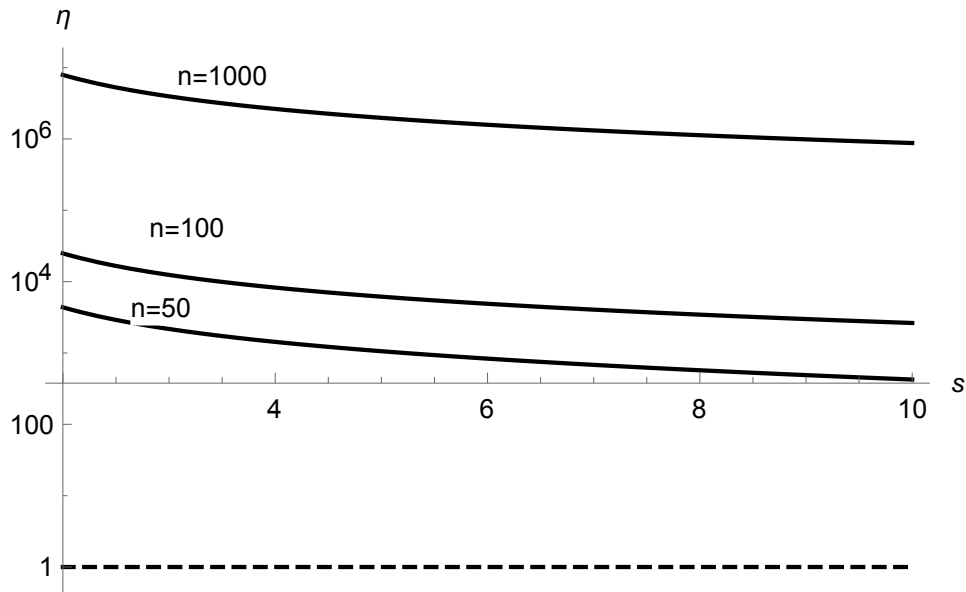


Figura 5 – Relação entre o número de operações algébricas  $\eta$  para estrutura 3D armazenada em banda

Pode-se destacar que independente da estratégia para o armazenamento da matriz, isto é, matriz cheia ou matriz em banda, o método CA mostrou-se eficiente. Além disso, deve-se ressaltar que um número pequeno de vetores base é necessário para obter resultados com uma boa acurácia. Para problemas de pequena escala com mudanças moderadas ( $\Delta\mathbf{K}$  com valores pequenos para os elementos da matriz) dois ou três vetores base são suficientes. No que diz respeito aos problemas de escala moderada com grandes mudanças ( $\Delta\mathbf{K}$  com valores grandes para os elementos da matriz), cinco a dez vetores base podem ser necessários, e para problemas de grande escala, dez a vinte são suficientes (XU *et al.*, 2010). Conforme Kirsch (2002), para 5 – 6, vetores base o esforço computacional total com o método CA pode ser reduzido em mais de 75% quando comparado com a análise de uma estrutura modificada.

### 3.4 SÍNTESE DO CAPÍTULO 3

Neste capítulo foi apresentada uma breve introdução sobre análise linear e não linear geométrica. Foi feita uma revisão sobre os métodos de reanálise estrutural, em especial, o método de reanálise por aproximação combinada que foi utilizado nessa tese. Além disso foi descrito a formulação deste método para um problema linear e não-linear geométrico e foram feitas algumas considerações em relação ao CA.

## 4 ESTRATÉGIA PROPOSTA

No método de reanálise por aproximação combinada, um sistema de dimensões  $n \times n$  é reduzido a outro com dimensões  $s \times s$ , tal que  $s \ll n$ . Uma das perguntas que pode surgir naturalmente é: quantos vetores base  $s$  são necessários para obter uma aproximação precisa para o vetor deslocamento da estrutura atual? Conforme já descrito anteriormente, existem alguns valores recomendados pela literatura para estimar este parâmetro. Mas, como ainda não existe uma metodologia para definir o número de vetores base a ser usado, Xu *et al.* (2010) e Sun *et al.* (2014) desenvolveram técnicas específicas para resolver este problema.

Xu *et al.* (2010) propuseram um método em que o número de vetores base é alterado durante o processo de otimização usando um AG Geracional. Neste método, o número de vetores base é alterado a cada geração analisando-se o número de sucessos que o método de reanálise obteve durante a geração atual. Sun *et al.* (2014) desenvolveram uma metodologia que determina o menor número de vetores base necessários para uma determinada estrutura, este método baseia-se no número de condição-K e na norma espectral da matriz de rigidez.

Seguindo a mesma diretriz desenvolvida por Xu *et al.* (2010) de escolha adaptativa, durante o processo de otimização, para a quantidade de vetores base, esta tese propõe um método de reanálise adaptativo para um AG *steady-state*. Matematicamente, o esquema adaptativo proposto é apresentado da seguinte forma:

$$s = \begin{cases} s_{inicial} \\ s - 1, & \text{se } E_M \leq 0.001 \\ s + 1, & \text{se } E_M > 0.001 \end{cases} \quad (4.1)$$

em que, o valor de 0,001 foi escolhido com base no trabalho de Xu *et al.* (2010),  $s_{inicial}$  é o número de vetores base inicial, para este valor optou-se por usar o valor recomendado na literatura para iniciar o processo de adaptação,  $s$  é o número de vetores base e este será limitado a um  $s_{max}$  que é definido de acordo com o tamanho do problema (isto é, pequeno, médio ou de grande porte) e  $E_M$  é o erro quadrático médio calculado como:

$$E_M = \sqrt{\frac{1}{n_{ind}} \sum_{ind=1}^{n_{ind}} (erro_{ind})^2} \quad (4.2)$$

em que  $n_{ind}$  é o número total de indivíduos e  $erro_{ind}$  é o erro de cada indivíduo, que é calculado pela Equação 4.3 para análise linear e pela Equação 4.4 para análise não-linear.

$$erro_{ind} = \frac{\|\mathbf{K}\mathbf{r} - \mathbf{R}\|_2}{\|\mathbf{R}\|_2} \quad (4.3)$$

$$erro_{ind} = \frac{\|\mathbf{R}_I - \mathbf{R}\|_2}{\|\mathbf{R}\|_2} \quad (4.4)$$

O valor de  $E_M$  é calculado quando o número de indivíduos inserido na população ( $n_{inser}$ ) é igual ou superior a um valor pré-definido. No caso de  $erro_{ind} > 0,001$ , o vetor deslocamento é calculado pelo sistema linear completo, isto é, sem utilizar a reanálise, e um novo  $\mathbf{K}_0$  é obtido. Sendo assim, a estrutura atual será a estrutura inicial (referência) para os procedimentos de reanálise subsequentes.

Esta estratégia de alterar a matriz de rigidez ao longo do processo de otimização faz com que sejam mantido valores pequenos para os elementos de  $\Delta\mathbf{K}$ . Com isso, não existirão problemas para populações mais diversificadas, pois ao longo da convergência do AG espera-se que os indivíduos estejam mais próximos uns dos outros. E, com essa estratégia mantem-se os valores dos elementos de  $\Delta\mathbf{K}$  pequenos, garantindo a convergência da série conforme descrito no Capítulo 3.

As etapas do método de reanálise adaptativo para otimização estrutural utilizando um Algoritmo Genético Não-Generacional são descritos no Algoritmo 4. Os trechos marcados representam as modificações necessárias para a implementação da estratégia adaptativa. Determinados trechos são repetidos para enfatizar o uso destes na estratégia proposta.

#### 4.1 HIPÓTESES PARA IMPLEMENTAÇÃO DA REANÁLISE ADAPTATIVA PARA ALGORITMO GENÉTICO NÃO-GERACIONAL

As hipóteses para o desenvolvimento da reanálise adaptativa para um Algoritmo Genético Não-Generacional são:

- A análise completa, isto é a análise com a matriz  $n \times n$  tem um custo  $C_C$ .
- A reanálise por aproximação combinada, isto é com a matriz  $s \times s$  tem um custo  $C_R$ .



---

**Algoritmo 4** Pseudocódigo de um AG steady-state com reanálise adaptativa (*ninser* é um contador do número de indivíduos inseridos na população, *popsiz*e é o tamanho da população.)

---

```

1: Inicializar a população
2: Calcular a função objetivo
3: */Cálculo das restrições usando método de reanálise/*
4: Calcular a matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{atual}$ 
5: Calcular os vetores base  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s$  (Eq. 3.23 e Eq.3.25)
6: Calcular a matriz de rigidez e o vetor de cargas reduzido (Eq. 3.16 e Eq. 3.17)
7: Calcular o vetor de coeficientes  $\mathbf{y}$  (Eq. 3.15)
8: Calcular o vetor deslocamento final  $\mathbf{r}$  (Eq. 3.12)
9: Calcular  $erro_{ind}$  (Eq.4.3)
10: se  $erro_{ind} \geq 0.001$  então
11:   Calcular restrição usando análise completa
12:    $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_{atual}$ 
13: fim se
14: se não há nenhum elemento factível então
15:   H = pior valor da função objetivo
16: senão
17:   H = valor da função objetivo do melhor indivíduo factível
18: fim se
19: Calcular coeficientes de penalização
20: Calcular valores de aptidão
21: ninser = 0
22: repita
23:   Selecionar operador genético
24:   Escolher um pai(s)
25:   Gerar descendente
26:   Calcular a função objetivo
27:   */Cálculo das restrições usando método de reanálise/*
28:   Calcular a matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{atual}$ 
29:   Calcular os vetores base  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s$  (Eq. 3.23 e Eq.3.25)
30:   Calcular a matriz de rigidez e o vetor de cargas reduzido (Eq. 3.16 e Eq. 3.17)
31:   Calcular o vetor de coeficientes  $\mathbf{y}$  (Eq. 3.15)
32:   Calcular o vetor deslocamento final  $\mathbf{r}$  (Eq. 3.12)
33:   Calcular  $erro_{ind}$  (Eq.4.3)
34: se  $erro_{ind} \geq 0.001$  então
35:   Calcular restrição usando análise completa
36:    $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_{atual}$ 
37: fim se
38: Avaliar a aptidão do novo descendente
39: Escolher o melhor descendente
40: se descendente é o novo melhor elemento factível então
41:   atualizar os coeficientes de penalização e os valores de aptidão
42:   população é classificada
43:   ninser = 0
44: fim se
45: se descendente é melhor do que o pior na população então
46:   pior é removido
47:   descendente é inserido com classificação adequada
48:   ninser = ninser + 1
49: fim se
50: se ninser/popsize  $\geq r$  então
51:   atualiza os coeficientes de penalização e os valores de aptidão
52:   Calcular  $E_M$  (Eq. 4.2)
53: se  $E_M \leq 0.001$  então
54:    $s = s - 1$ 
55: senão
56:   se  $s < s_{max}$  então
57:      $s = s + 1$ 
58:   fim se
59: fim se
60: população é classificada
61: ninser = 0
62: fim se
63: até número máximo de avaliação é atingido

```

---

- O custo total da etapa de uma execução em relação à avaliação das restrições é dada por:

$$C_T = N_C C_C + N_R C_R \quad (4.5)$$

sendo  $N_C$  o número de avaliações com análise completa e  $N_R$  o número de avaliações com reanálise por aproximação combinada.

- A razão  $\eta_T$  entre a estratégia convencional  $C_T^{conven}$  com a estratégia usando reanálise por aproximação combinada  $C_T^{CA}$  é dada por:

$$\eta_T = \frac{C_T^{CA}}{C_T^{conven}} \quad (4.6)$$

Considerando a acurácia do método de reanálise por aproximação combinada, optou-se por avaliar todos os indivíduos por reanálise e caso estes atinjam um erro acima do permitido, executa-se uma análise completa. Sendo assim, toda simulação será feita com reanálise e em algumas vezes será necessário a análise completa. Espera-se que com a estratégia de mudança da matriz de rigidez ao longo do processo de otimização têm-se um número menor de análises completas realizadas.

Com isso pretende-se responder às seguintes perguntas:

- O custo computacional com o uso da estratégia proposta é menor?
- É possível obter resultados melhores, ou seja, com menor peso e com menor custo computacional, usando a estratégia proposta?
- A alteração da matriz de rigidez ao longo do processo de otimização influencia no resultado e, além disso, faz com que seja preciso realizar um número menor de análises completas comparado com a simulação feita com a matriz de referência (inicial) fixa?
- A estratégia proposta comparada com o uso de vetores base fixo definidos na literatura é melhor?

Em suma, o objetivo deste trabalho é desenvolver uma estratégia de reanálise adaptativa para um Algoritmo Genético Não-Generacional em que os problemas analisados são

problemas de otimização estrutural que demandam grande esforço computacional. O foco está direcionado em melhorar o desempenho do AG e proporcionar melhores resultados possíveis, com um número fixo de avaliações por reanálise com aproximação combinada, para cada experimento comparado com a estratégia convencional (Algoritmo Genético não-geracional com análise do sistema completo).

## 5 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, um Algoritmo Genético Não-Generacional com codificação real foi usado para minimizar o peso de estruturas reticuladas com comportamento linear ou não-linear geométrico. As variáveis de projeto podem ser discretas ou contínuas. Os operadores genéticos utilizados com suas respectivas probabilidades já foram descritos no Capítulo 2.

Para validar a estratégia proposta, seis problemas da literatura são apresentados. Nesta tese, estes problemas foram classificados em três classes baseados no número de graus de liberdade: problemas de menor escala (abaixo de 20 graus de liberdade), problemas de escala intermediária (de 20 a 100 graus de liberdade) e problemas de grande escala (acima de 100 graus de liberdade). Para problemas de menor escala avalia-se o Exemplo 1 que é uma Treliça de 10 Barras, em problemas de escala intermediária tem-se os Exemplos de 2 e 3, Treliça de 52 Barras e o Pórtico de 3 Barras, respectivamente. Já para os problemas de grande escala tem-se os Exemplos de 4 a 6, sendo eles, Domo 120 Barras, Pórtico de 70 Barras e Treliça de 200 Barras respectivamente.

O Exemplo 1 - Treliça de 10 Barras será analisado apenas com a estratégia proposta (com  $n_{\text{inser}}=2$  para o método de reanálise adaptativa) e comparado com o melhor resultado encontrado por Lemonge, Barbosa e Bernardino (2015). Esta análise servirá apenas para validar a acurácia do método. Lembrando que o  $\eta$ , conforme Figura 3, para problemas de menor escala mostra que o número de operações realizadas com reanálise é superior ao número de operações realizadas com a estratégia convencional, ou seja, com análise completa.

Os exemplos de 2 a 6 serão analisados utilizando-se 6 estratégias além das referências (LEMONGE; BARBOSA; BERNARDINO, 2015) ou (SILVA, 2011). As estratégias analisadas para todos os experimentos usam um Algoritmo Genético Não-Generacional. Segue abaixo a nomenclatura e a descrição de cada estratégia:

1. SSGA: o cálculo das restrições é feito com o sistema completo para todos os indivíduos;

2. SSGA-F $\mathbf{K}_0$ C: o cálculo das restrições é feito usando reanálise porém o número de vetores base será fixo e a matriz de referência ( $\mathbf{K}_0$ ) é mantida inalterada ao longo de todo o processo de otimização;
3. SSGA-F $\mathbf{K}_0$ V: o cálculo das restrições é feito usando reanálise porém o número de vetores base será fixo e a matriz de rigidez é alterada sempre que o erro gerado pelo método de reanálise for maior que o erro aceitável;
4. SSGA-A $\mathbf{K}_0$ C: o cálculo das restrições é feito usando o método de reanálise adaptativa porém a matriz de referência ( $\mathbf{K}_0$ ) é mantida inalterada ao longo de todo o processo de otimização;
5. Proposto2: o cálculo das restrições é feito usando o método de reanálise adaptativa proposto no Capítulo 4 com o valor do  $ninser = 2 \times popsize$  para a estratégia de reanálise adaptativa.
6. Proposto3: o cálculo das restrições é feito usando o método de reanálise adaptativa proposto no Capítulo 4 com o valor do  $ninser = 3 \times popsize$  para a estratégia de reanálise adaptativa.

As estratégias acima são comparadas através da análise do peso da estrutura e do tempo gasto para execução dos experimentos. Os melhores resultados em cada experimento estão indicados em negrito. Todos os resultados do histórico do peso em relação ao tempo são normalizados (%) pelo tempo gasto na estratégia SSGA.

Para padronizar os experimentos em todas as estratégias, definiu-se a matriz de rigidez de referência ( $\mathbf{K}_0$ ) como sendo a matriz obtida quando tem-se a estrutura em que as áreas das seções transversais são iguais e estas áreas têm o valor médio das áreas do espaço de busca. Além disso, para cada experimento em que se faz uso da reanálise iniciou-se com o número de vetores base sugerido pela literatura.

Cada experimento terá calculado os intervalos de confiança, em relação aos resultados (com 95% de confiança), para cada uma das estratégias utilizadas. Os intervalos de confiança são uma maneira de calcular uma estimativa para a média e pode funcionar como um teste de hipótese. O objetivo é construir um intervalo de confiança para a mé-

dia com uma probabilidade de 95% (nível de confiança) de que este intervalo contenha o verdadeiro valor da média. Sendo assim, através destes dados vai ser possível verificar se existe uma diferença entre as médias obtidas em cada estratégia analisada. Para ajudar nessa análise, o Box Plot é usado para comparar graficamente as estratégias com respeito à média, à dispersão e à distribuição das mesmas.

### 5.1 EXEMPLO 1 - TRELIÇA DE 10 BARRAS

A Treliza de 10 Barras descrita na Figura 6 é um problema teste bem conhecido para minimização de peso. Neste problema, o espaço de busca adotado foi contínuo e as áreas da seção transversal variam de 0,1 a 35 in<sup>2</sup>. As restrições de tensão e deslocamento são 25 ksi e 2 in (nas direções  $x$  e  $y$ ) respectivamente. A densidade do material é 0,1 lb/in<sup>3</sup>, o Módulo de Elasticidade é  $E = 10^4$  ksi e o carregamento na direção vertical é de 100 kips aplicados nos nós 2 e 4. Foram feitas 80000 avaliações em 20 rodadas independentes. O  $s_{inicial}$  adotado é igual a 2 e por ser um problema de pequeno porte adotou-se um  $s_{max} = 4$ .

Os resultados são comparados na Tabela 3. A estratégia Proposto2 obteve um peso igual a 5060,89 lbs que, comparado aos resultados obtidos por Lemonge, Barbosa e Bernardino (2015), apresenta uma pequena diferença de 0,02 lbs acima ( $5060,89 \times 5060,87$ ). Com essa pequena diferença pode-se mostrar que o método proposto possui uma boa precisão. Sendo esta estrutura um exemplo classificado dentro dos problema de pequeno porte, não é possível validar a eficiência do método de reanálise.

### 5.2 EXEMPLO 2 - TRELIÇA DE 52 BARRAS

O segundo exemplo considera a minimização do peso de uma treliça de 52 Barras conforme Figura 7. As condições de carregamento são definidas como: 100 kN aplicado na direção positiva do eixo  $x$  nos seguintes nós 17, 18, 19 e 20 e 200 kN aplicado na direção positiva do eixo  $y$  nos seguintes nós 17, 18, 19 e 20. A treliça possui as seguintes propriedades: Módulo elasticidade igual a  $2.07 \times 10^5$  MPa e densidade igual a 7860 kg/m<sup>3</sup>. Os 52 elementos da treliça são classificados em 12 grupos conforme Tabela 4 e os valores das áreas da seção transversal estão na Tabela 5. A tensão máxima nas barras é 18

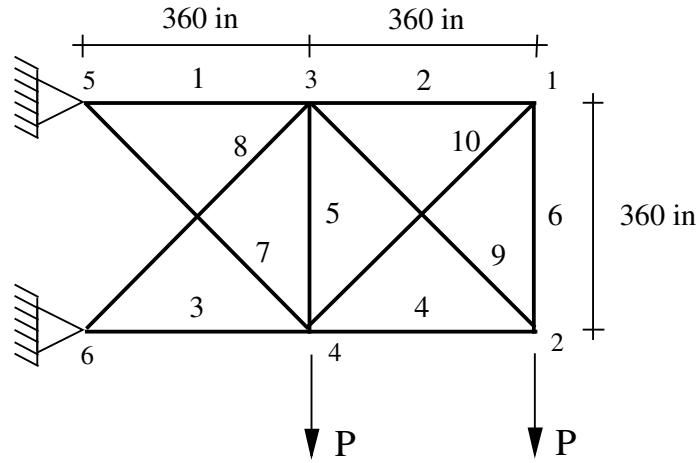


Figura 6 – Treliça de 10 Barras.

Tabela 3 – Comparação dos melhores resultados para Treliça 10 Barras. \*ACp - % Análise Completa \*\*nfe - Número de Avaliações com Reanálise. \*\*\* (LEMONGE; BARBOSA; BERNARDINO, 2015)

$A_i$	Ref***	Proposto2
1	30.46	30.52
2	0.10	0.10
3	23.28	23.18
4	15.20	15.23
5	0.10	0.10
6	0.55	0.55
7	7.45	7.46
8	21.02	21.03
9	21.55	21.54
10	0.10	0.10
W(lbs)	<b>5060.87</b>	5060.89
% ACp*	100	18
nfe**	80000	80000

MPa e o deslocamento máximo dos nós é igual a 2 mm. Os resultados obtidos com uma população igual a 200 indivíduos e 20000 avaliações para 30 rodadas independentes estão descritos na Tabela 6. Iniciou-se com o número de vetores base igual a 3, isto é,  $s_{inicial} = 3$  e o  $s_{max} = 8$ . A área da seção transversal escolhida para a matriz de referência foi 2341,191 mm<sup>2</sup> que corresponde a área 32 da Tabela 5.

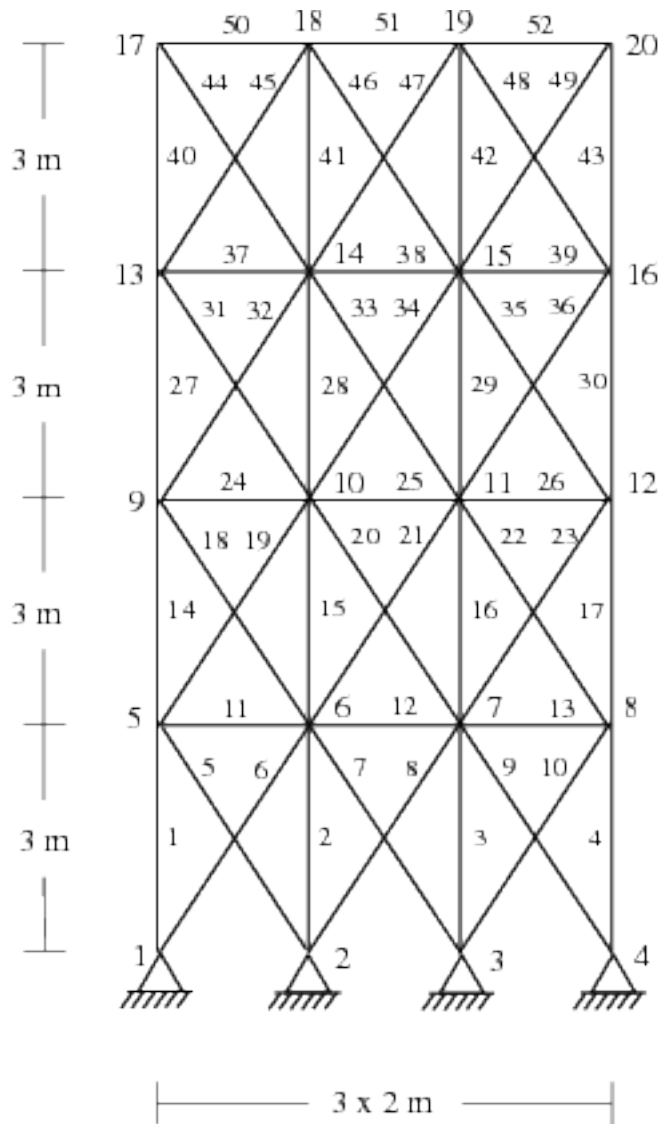


Figura 7 – Treliça de 52 Barras.

Conforme Tabela 6, o melhor resultado foi encontrado com a estratégia Proposto2 em que foi obtido um peso de 1903,366 kg. Nesta estratégia foram feitas 18% de análises completas, ou seja, alterou-se a matriz de rigidez em 3600 avaliações. Seu  $\eta_t$  foi de 135% gerando um custo 35% acima do custo do SSGA. Todas as estratégias em que usou-se reanálise com exceção da estratégia SSGA-AK<sub>0</sub>C foi possível obter um resultado igual



Tabela 4 – Classificação dos membros da Treliça de 52 Barras.

Grupo	Membros
1	1, 2, 3, 4
2	5, 6, 7, 8, 9, 10
3	11, 12, 13
4	14, 15, 16, 17
5	18, 19, 20, 21, 22, 23
6	24, 25, 26
7	27, 28, 29, 30
8	31, 32, 33, 34, 35, 36
9	37, 38, 39
10	40, 41, 42, 43
11	44, 45, 46, 47, 48, 49
12	50, 51, 52

(estratégia SSGA-FK<sub>0</sub>C) ou melhor (estratégias SSGA-FK<sub>0</sub>V, SSGA-AK<sub>0</sub>C, Proposto3, Proposto2) quando comparado com a estratégia SSGA. Cabe ressaltar que quando obtido um resultado igual ao SSGA (estratégia SSGA-FK<sub>0</sub>C) foram requeridas 100% de análises completas.

Apesar da estratégia Proposto2 ter alcançado um custo 35% acima, quando comparado com a estratégia SSGA, observa-se que na Figura 8 e na Figura 9 o menor peso encontrado nessa estratégia é obtido com aproximadamente 75% do custo da estratégia SSGA. Com isso, a estratégia Proposto2 torna-se competitiva quando não limitado a um orçamento fixo (20000 avaliações com reanálise) para todas as estratégias, pois convergiu para um resultado melhor (1903,366 kg × 1912,875 kg) mais rapidamente. Outra observação a ser feita é que o número de análises completas foi menor quando usou-se as estratégias Proposto3 e Proposto2, isto é, 18% de análises completas.

Em relação a evolução do número de vetores base ao longo da execução que gerou o melhor resultado, para as 6 estratégias, mostrado na Figura 10, observa-se que as aproximações feitas na reanálise para a estratégia Proposto2, estratégia que obteve o menor resultado, tiveram os vetores base variando entre 6 a 8 para a maioria das avaliações.

Em relação a Tabela 7, que descreve as estatísticas desse experimento, pode ser observado que os melhores resultados foram obtidos com a estratégia Proposto2, onde conseguiu-se obter o menor melhor resultado (1903,366 kg) e o menor dos piores resultado

Tabela 5 – Valores Discretos para a Treliça de 52 Barras.

Seção	$mm^2$	Seção	$mm^2$
1	71.613	33	2477.414
2	90.968	34	2496.769
3	126.451	35	2503.221
4	161.290	36	2696.769
5	198.064	37	2722.575
6	252.258	38	2896.768
7	285.161	39	2961.284
8	363.225	40	3096.768
9	388.386	41	3206.445
10	494.193	42	3303.219
11	506.451	43	3703.218
12	641.289	44	4658.055
13	645.160	45	5141.925
14	792.256	46	5503.215
15	816.773	47	5999.998
16	940.000	48	6999.986
17	1008.385	49	7419.340
18	1045.159	50	8709.660
19	1161.288	51	8967.724
20	1283.868	52	9161.272
21	1374.191	53	9999.980
22	1535.481	54	10322.560
23	1690.319	55	10903.204
24	1696.771	56	12129.008
25	1858.061	57	12838.684
26	1890.319	58	14193.520
27	1993.544	59	14774.164
28	2019.351	60	15806.420
29	2180.641	61	17096.740
30	2238.705	62	18064.480
31	2290.318	63	19354.800
32	2341.191	64	21612.860

(3075,195 kg).

Tabela 6 – Comparação entre os melhores resultados obtidos para a treliça de 52 Barras. \*ACp - % Análise Completa \*\*nfe - Número de Avaliações com Reanálise \*\*\*(LEMONGE; BARBOSA; BERNARDINO, 2015) \*\*\*\*AK<sub>0</sub> - número de vezes em que a matriz de rigidez foi alterada.

$A_i$	SSGA	SSGA FK <sub>0</sub> C	SSGA FK <sub>0</sub> V	SSGA AK <sub>0</sub> C	Proposto3	Proposto2	Ref***
1	4658,055	4658,055	4658,055	4658,055	4658,055	4658,055	4658,055
2	1161,288	1161,288	1161,288	1161,288	1161,288	1161,288	1161,288
3	285,161	285,161	363,225	252,258	494,193	363,225	285,161
4	3303,210	3303,210	3303,219	3703,218	3303,219	3303,219	3303,219
5	940,000	940,000	940,000	940,000	940,000	940,000	940,000
6	641,289	641,289	792,256	363,225	363,225	641,289	645,160
7	2238,705	2238,705	2238,705	2290,318	2238,705	2238,705	2238,705
8	1045,159	1045,159	1008,385	1008,385	1045,159	1008,385	1008,385
9	494,193	494,193	388,386	252,258	494,193	494,193	641,289
10	1283,868	1283,868	1283,868	1535,481	1283,868	1283,868	1283,868
11	1161,288	1161,288	1161,288	1045,159	1161,288	1161,288	1161,288
12	641,289	641,289	494,193	388,386	641,289	494,193	506,451
W(kg)	1912,875	1912,875	1905,496	1915,202	1909,619	<b>1903,366</b>	1907,383
AK <sub>0</sub>	0	0	11600	0	3600	3600	-
% ACp*	100	100	58	94	18	18	100
nfe**	20000	20000	20000	20000	20000	20000	20000
$\eta_t\%$	100	225	185	180	135	135	-

Tabela 7 – Comparação Estatística para a Treliça de 52 Barras.

Estatística	SSGA	SSGA FK <sub>0</sub> C	SSGA FK <sub>0</sub> V	SSGA AK <sub>0</sub> C	Proposto3	Proposto2
melhor	1912,874	1912,874	1905,496	1915,202	1909,619	<b>1903,366</b>
mediana	2256,123	2256,123	2263,021	2256,123	<b>2233,184</b>	2289,647
média	2300,787	2300,787	<b>2293,240</b>	2305,862	2304,033	2307,165
desvio padrão	286,415	286,415	292,417	<b>283,075</b>	294,602	292,028
pior	3087,824	3087,824	3087,824	3087,824	3087,824	<b>3075,195</b>

Para verificar a variabilidade/dispersão dos resultados obtidos com as 6 estratégias, foram calculados os intervalos de confiança para cada estratégia conforme Tabela

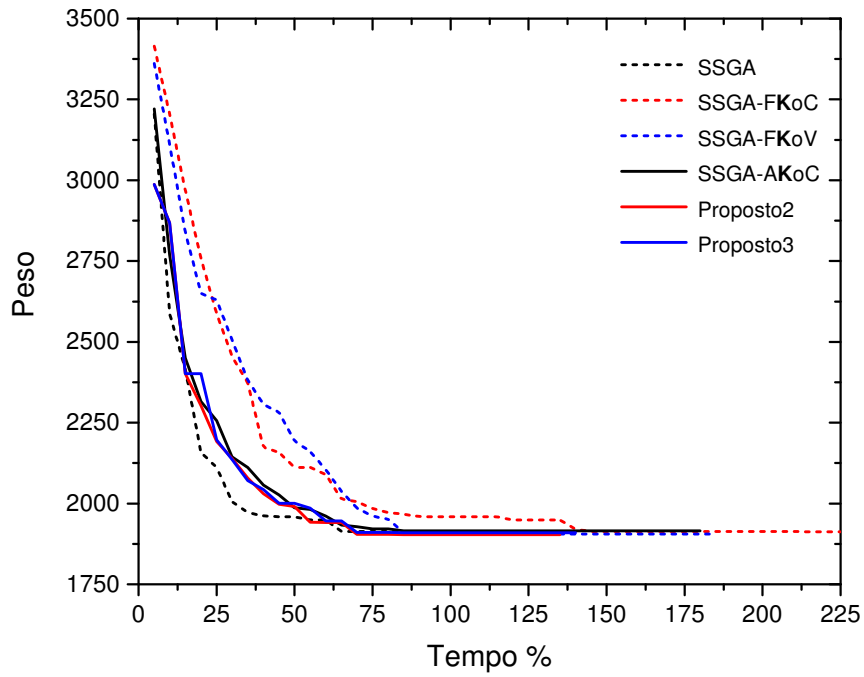


Figura 8 – Histórico do Peso em Relação ao Tempo - Treliça de 52 Barras.

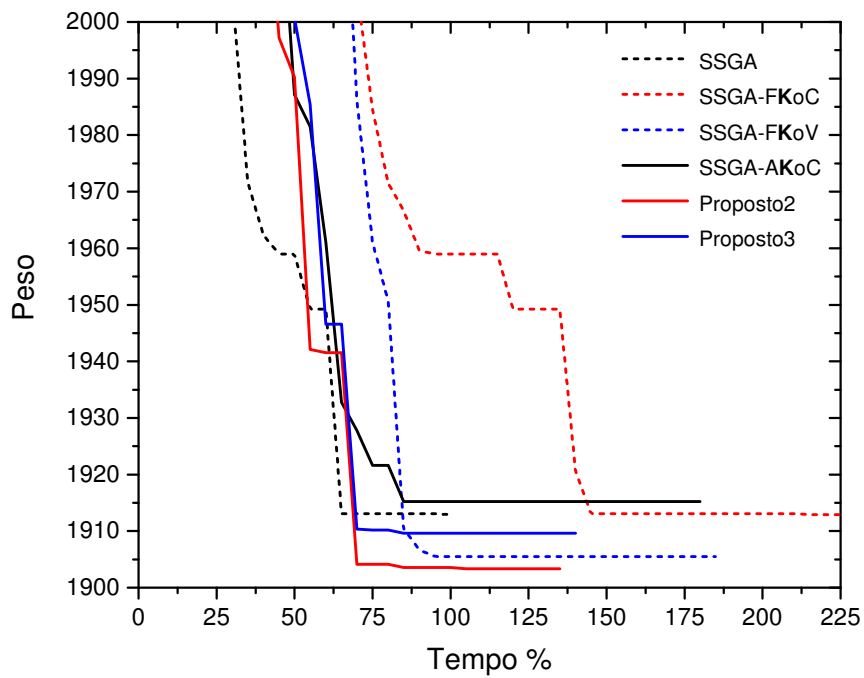


Figura 9 – Histórico do Peso em Relação ao Tempo (Zoom) - Treliça de 52 Barras.

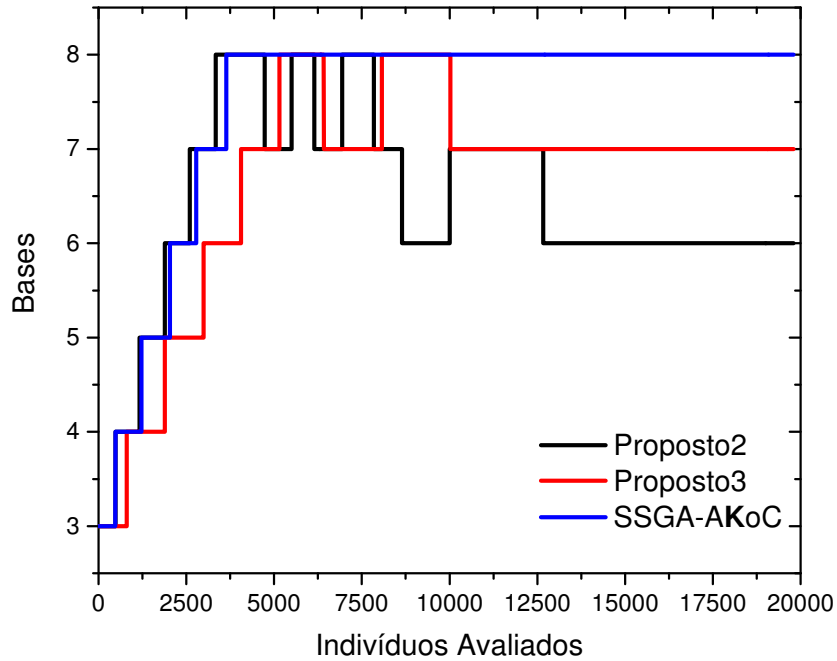


Figura 10 – Evolução do Número de Vetores Base ao Longo da Execução do AG para o Melhor Resultado - Treliça de 52 Barras.

8 e Figura 11. Nota-se que comparando duas a duas estratégias tem-se uma grande superposição dos intervalos, isto é, os intervalos de confiança se sobrepõem e as médias de cada experimento estão dentro dos intervalos de confiança opostos. Com por exemplo o intervalo de confiança da estratégia SSGA que está entre 2194,771 e 2406,802 possui a média da estratégia Proposto2 (2304,033) que tem como intervalo de confiança 2201,149 para limite inferior e 2413,180 para o limite superior. Isto implica que, em relação às médias, provavelmente não existe diferença entre as 6 estratégias.

Tabela 8 – Intervalo de Confiança para a Treliça de 52 Barras.

Estratégia	Média	Limite Inferior	Limite Superior
SSGA	2300,787	2194,771	2406,802
SSGA-FK <sub>0</sub> C	2300,787	2194,771	2406,802
SSGA-FK <sub>0</sub> V	2293,240	2187,225	2399,256
SSGA-AK <sub>0</sub> C	2305,862	2194,771	2406,802
Proposto2	2304,033	2201,149	2413,180
Proposto3	2307,165	2198,017	2410,048

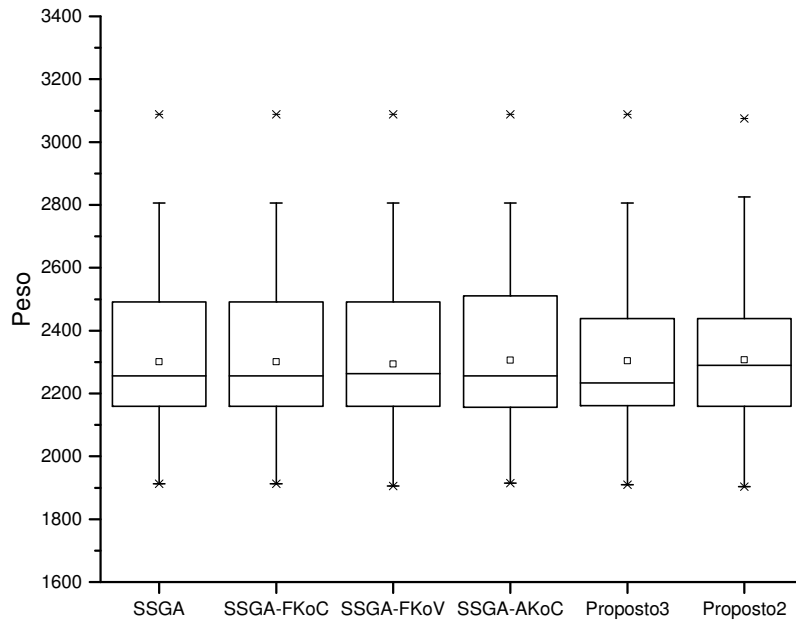


Figura 11 – Box Plot para o Intervalo de Confiança - Treliça de 52 Barras.

### 5.3 EXEMPLO 3 - PÓRTICO DE 3 BARRAS

O pórtico plano mostrado na Figura 12 é formado por 3 barras, onde são aplicadas cargas verticais de 350000 lbs e uma carga horizontal de 1000 lbs, como indicado na Figura 2. Esta estrutura é baseada no experimento discutido em (ELIAS, 1986). As variáveis de projeto são as dimensões das seções transversais das barras, consideradas como retangulares, sendo  $D_1$  a dimensão ortogonal ao plano da estrutura e  $D_2$  a dimensão paralela ao plano da estrutura. Para a escolha das áreas da seção transversal utilizou-se a Tabela 9 com 128 possibilidades de escolha.

O algoritmo genético foi executado em 30 rodadas independentes com 1600 avaliações com reanálise. No Método de Newton Raphson adotaram-se 10 passos de carga com 10 iterações limitando a um erro de  $10^{-4}$  em cada iteração. Todas as barras foram discretizadas em 6 elementos finitos, totalizando uma malha de 18 elementos para toda a estrutura. O Módulo de Elasticidade, a Massa Específica e o deslocamento máximo ad-

missível são  $3 \times 10^7$  psi,  $0.1 \text{ lb/in}^3$  e  $3 \text{ in}$ , respectivamente. Nesta estrutura foi encontrado um comportamento não-linear conforme descrito em (SILVA, 2011).

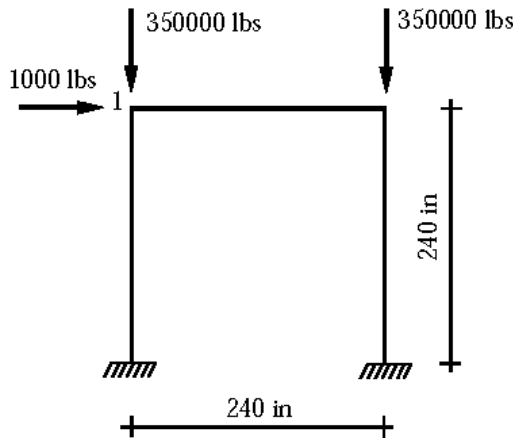


Figura 12 – Pórtico de 3 Barras.

A Tabela 10 mostra os melhores resultados obtidos na otimização. Todas as estratégias obtiveram os mesmos resultados (5032,00 lbs). O que difere entre as estratégias são o  $\eta_t$ , o número de análises exatas e o número de mudanças na matriz de rigidez. Como por exemplo, as estratégias que não alteram a matriz de referência ao longo do processo de otimização (SSGA-FK<sub>0</sub>C e SSGA-AK<sub>0</sub>C) foi necessário resolver 90% das avaliações com análises completas. Em contrapartida, as estratégias, SSGA-FK<sub>0</sub>V, Proposto3 e Proposto2 não chegam a realizar nem 1% de análises completas. Menos de 10 mudanças na matriz de referência fizeram com que essas estratégias realizassem um percentual menor de análises completas.

Em relação ao  $\eta_t$ , todas as estratégias que resolvem o sistema com reanálise, SSGA-FK<sub>0</sub>C, SSGA-FK<sub>0</sub>V, SSGA-AK<sub>0</sub>C, Proposto3 e Proposto2, tiveram seu valor superior a 100%. Mesmo nas estratégias em que usou-se um percentual pequeno de análise completa, como por exemplo, a estratégia Proposto3 que usou apenas 0,12% de análises completas teve um  $\eta_t$  igual a 102%. Isso ocorreu por causa do número de iterações requeridas no método de reanálise. Para o Newton Raphson Completo usou-se em média 3 iterações para o Newton Raphson com reanálise foram necessárias 10 iterações, aumentando assim o custo computacional. Essa diferença do número de iterações se deve ao fato que no método de Newton Raphson com reanálise a solução do sistema referente à matriz de rigidez tangente é aproximada pelo método de reanálise por aproximação combinada.

Tabela 9 – Tabela com os valores discretos - Pórtico de 3 Barras.

Dimensão	in	Dimensão	in	Dimensão	in	Dimensão	in
1	0,5	33	6,9	65	13,3	97	20,1
2	0,7	34	7,1	66	13,5	98	20,5
3	0,9	35	7,3	67	13,7	99	20,9
4	1,1	36	7,5	68	13,9	100	21,3
5	1,3	37	7,7	69	14,1	101	21,7
6	1,5	38	7,9	70	14,3	102	22,1
7	1,7	39	8,1	71	14,5	103	22,5
8	1,9	40	8,3	72	14,7	104	22,9
9	2,1	41	8,5	73	14,9	105	23,3
10	2,3	42	8,7	74	15,1	106	23,7
11	2,5	43	8,9	75	15,3	107	24,1
12	2,7	44	9,1	76	15,5	108	24,5
13	2,9	45	9,3	77	15,7	109	24,9
14	3,1	46	9,5	78	15,9	110	25,3
15	3,3	47	9,7	79	16,1	111	25,7
16	3,5	48	9,9	80	16,3	112	26,1
17	3,7	49	10,1	81	16,5	113	26,5
18	3,9	50	10,3	82	16,7	114	26,9
19	4,1	51	10,5	83	16,9	115	27,3
20	4,3	52	10,7	84	17,1	116	27,7
21	4,5	53	10,9	85	17,3	117	28,1
22	4,7	54	11,1	86	17,5	118	28,5
23	4,9	55	11,3	87	17,7	119	28,9
24	5,1	56	11,5	88	17,9	120	29,3
25	5,3	57	11,7	89	18,1	121	29,7
26	5,5	58	11,9	90	18,3	122	30,1
27	5,7	59	12,1	91	18,5	123	30,5
28	5,9	60	12,3	92	18,7	124	30,9
29	6,1	61	12,5	93	18,9	125	31,3
30	6,3	62	12,7	94	19,1	126	31,7
31	6,5	63	12,9	95	19,3	127	32,1
32	6,7	64	13,1	96	19,5	128	32,5

Em relação a Figura 13 é possível verificar que as estratégias usaram na maioria das avaliações 2 vetores base.

#### 5.4 EXEMPLO 4 - DOMO 120 BARRAS

O domo de 120 barras, mostrado na Figura 14, é comumente usado na literatura (SAKA; ULKER, 1991), (EBENAU; ROTSSCHAFFER; THIERAUF, 2005) e (CAPRI-



Tabela 10 – Comparação entre os melhores resultados obtidos para o Pórtico de 3 Barras. \*ACp - % Análise Completa \*\*nfe - Número de Avaliações com Reanálise \*\*\*(SILVA, 2011) \*\*\*\*AK<sub>0</sub> - número de vezes em que a matriz de rigidez foi alterada.

$D_i$	SSGA	SSGA FK <sub>0</sub> C	SSGA FK <sub>0</sub> V	SSGA AK <sub>0</sub> C	Proposto3	Proposto2	Ref****
1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
2	23,3	23,3	23,3	23,3	23,3	23,3	23,3
W(lbs)	<b>5032,0</b>	<b>5032,0</b>	<b>5032,0</b>	<b>5032,0</b>	<b>5032,0</b>	<b>5032,0</b>	<b>5032,0</b>
AK <sub>0</sub>	0	0	6	0	2	2	0
% ACp*	100	90	0,38	90	0,12	0,13	100
nfe**	1600	1600	1600	1600	1600	1600	1600
$\eta_t$ %	100	140	102	140	102	102	-

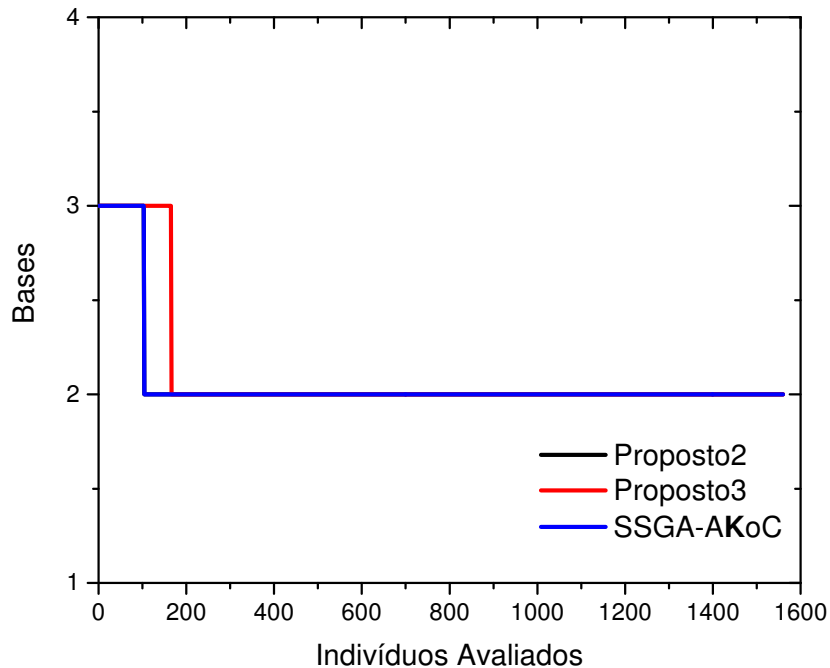


Figura 13 – Evolução do Número de Vetores Base ao Longo da Execução do AG para o Melhor Resultado - Pórtico de 3 Barras.

LES *et al.*, 2007). Este domo está submetido a um carregamento vertical de 60 kN no nó 1, de 30 kN nos nós de 2 a 13 e 10 kN nos nós de 14 a 37. É um problema de minimização de peso em que as áreas das seções transversais das barras são as variáveis de projeto discreta escolhida a partir de um conjunto de 64 seções tubulares, apresentadas na Tabela 11. A densidade do material é  $7,85 \times 10^{-5}$  kN/cm<sup>3</sup> e Módulo de Elasticidade igual a 21000 kN/cm<sup>2</sup>. As restrições referem-se aos deslocamentos máximos limitados a 2 cm,

nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . As barras do domo estão agrupadas em 7 grupos definidos conforme mostrado na Figura ??, que se repete ao redor do eixo- $z$ . Foram feitas 1200 avaliações com reanálise em 30 execuções independentes, em que o  $s_{inicial}$  escolhido foi igual a 6 e o  $s_{max}$  igual a 12. A área da seção transversal escolhida para a matriz de referência foi de 11,20 cm<sup>2</sup>.

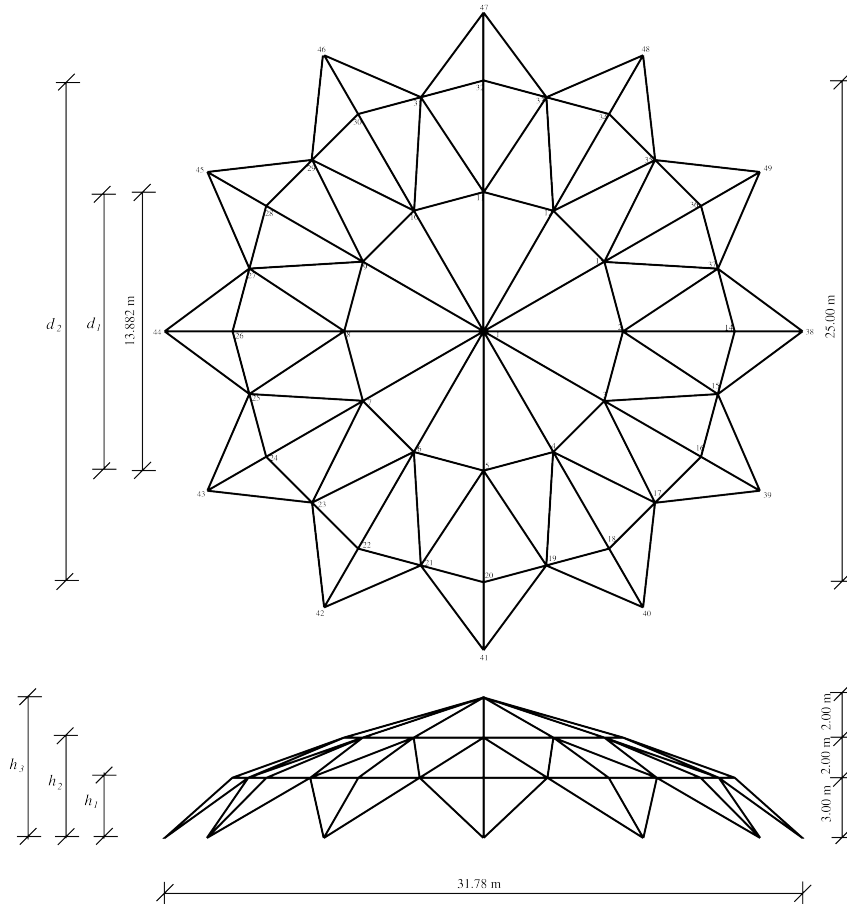


Figura 14 – Domo de 120 Barras.

#### 5.4.1 Análise Linear

Neste exemplo o Domo de 120 Barras será analisado para o caso linear. Na Tabela 12 estão descritos os melhores resultados obtidos com as 6 estratégias. Pode-se observar que o melhor resultado (109,89 kN) foi obtido nas estratégias em que a matriz de referência sofre alteração ao longo das execuções, sendo elas, SSGA-FK<sub>0</sub>V, Proposto3, Proposto2. Estas estratégias usaram em média 20% de análises completas. Em contrapartida as estratégias que não alteram a matriz de referência precisaram de mais de 50% de análises completas, gerando assim um custo de 20% a mais quando comparado com a estratégia

Tabela 11 – Tabela para valores discretos - Domo de 120 barras.

Area	cm <sup>2</sup>	Área	cm <sup>2</sup>	Área	cm <sup>2</sup>	Área	cm <sup>2</sup>
1	1,53	33	13,80	17	5,87	49	26,40
2	1,68	34	7,84	18	4,14	50	33,10
3	1,82	35	8,62	19	4,53	51	40,70
4	1,98	36	9,65	20	5,06	52	25,70
5	2,19	37	10,70	21	5,57	53	32,10
6	2,38	38	13,20	22	6,80	54	40,30
7	2,54	39	16,30	23	5,23	55	49,70
8	2,81	40	11,20	24	5,74	56	61,20
9	3,07	41	12,50	25	6,41	57	29,60
10	3,40	42	13,90	26	7,07	58	37,10
11	3,73	43	17,20	27	8,69	59	46,70
12	3,25	44	21,40	28	6,67	60	57,70
13	3,60	45	13,70	29	7,33	61	71,20
14	3,94	46	15,40	30	8,20	62	33,60
15	4,39	47	17,10	31	9,06	63	42,10
16	4,83	48	21,20	32	11,20	64	53,10

SSGA. Vale ressaltar que o melhor resultado foi obtido com uma redução de 25% do tempo, mas observando-se o Gráfico 15 pode-se identificar que esse ganho seria em torno de 60% se o número de avaliações com reanálise não fosse fixo.

Tabela 12 – Comparação entre os melhores resultados obtidos para o Domo de 120 Barras - Análise Linear. \*ACp - % Análise Completa \*\*nfe - Número de Avaliações com Reanálise \*\*\*\*AK<sub>0</sub> - número de vezes em que a matriz de rigidez foi alterada.

$A_i$	SSGA	SSGA FK <sub>0</sub> C	SSGA FK <sub>0</sub> V	SSGA AK <sub>0</sub> C	Proposto3	Proposto2
1	29,60	26,40	32,10	26,40	32,10	32,10
2	40,30	40,70	49,70	40,70	49,70	49,70
3	21,20	21,40	25,70	21,40	25,70	25,70
4	17,10	17,10	15,40	17,10	15,40	15,40
5	29,60	26,40	21,20	26,40	21,20	21,20
6	17,20	25,70	15,40	25,70	15,40	15,40
7	17,10	17,10	17,10	17,10	17,10	17,10
W(kN)	110,48	110,21	109,89	110,21	<b>109,89</b>	<b>109,89</b>
AK <sub>0</sub>	0	0	840	0	264	240
% ACp*	100	70	22	56	22	20
nfe**	1200	1200	1200	1200	1200	1200
$\eta_t$ %	100	120	85	120	85	85

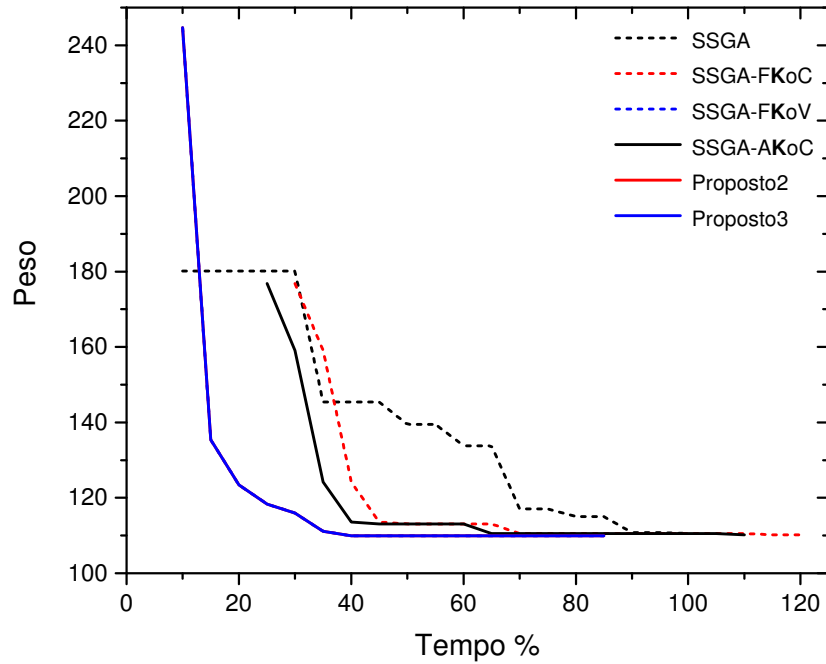


Figura 15 – Histórico do Peso em Relação ao Tempo - Domo de 120 Barras - Análise Linear.

Em relação à evolução do número de vetores base ao longo da execução dos melhores resultados, mostrado na Figura 16, pode-se observar que o melhor resultado foi encontrado com o maior número de avaliações realizadas com 6 e 7 vetores base.

Na Tabela 13 pode ser identificado que a estratégia que possui os menores valores é a estratégia SSGA, que obteve a menor mediana (114,15), a menor média (116,43), o menor desvio padrão (6,01) e o melhor dos piores resultados (133,48).

Tabela 13 – Comparação Estatística para o Domo de 120 Barras Análise Linear.

Estatística	SSGA	SSGA FK <sub>0</sub> C	SSGA FK <sub>0</sub> V	SSGA AK <sub>0</sub> C	Proposto3	Proposto2
melhor	110,48	110,21	109,89	110,21	<b>109,89</b>	<b>109,89</b>
mediana	<b>114,15</b>	118,71	120,75	119,41	120,75	120,75
média	<b>116,43</b>	120,64	123,64	120,94	123,64	123,64
desvio padrão	<b>6,01</b>	7,79	9,03	7,85	9,03	9,13
pior	<b>133,48</b>	135,15	148,32	135,15	148,72	150,83

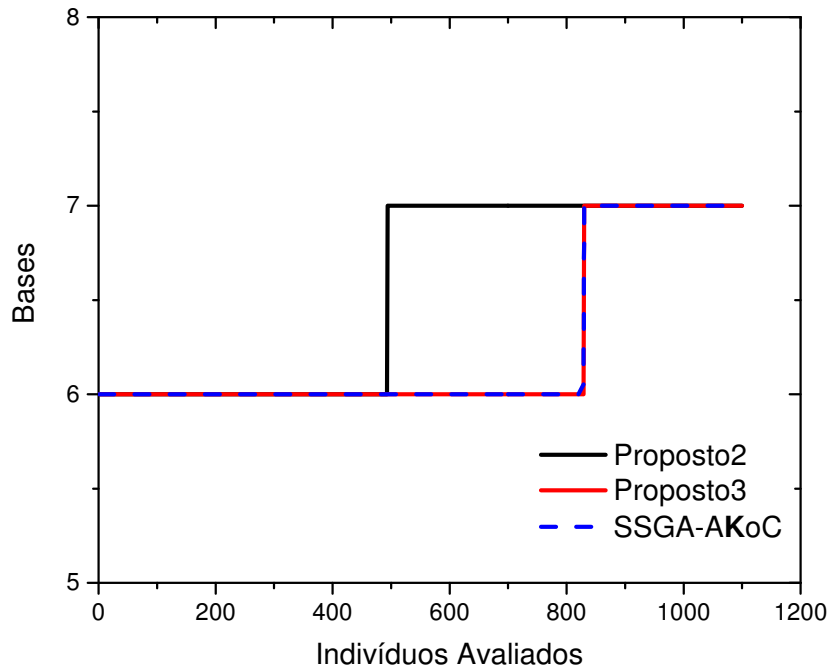


Figura 16 – Evolução do Número de Vetores Base ao Longo da Execução do AG para o Melhor Resultado - Domo de 120 Barras Análise Linear.

Tabela 14 – Intervalo de Confiança para Domo de 120 Barras - Análise Linear.

Estratégia	Média	Limite Inferior	Limite Superior
SSGA	116,43	113,42	119,44
SSGA-FK <sub>0</sub> C	120,64	117,57	123,70
SSGA-FK <sub>0</sub> V	123,64	120,57	126,70
SSGA-AK <sub>0</sub> C	120,94	117,88	124,00
Proposto2	123,59	120,53	126,65
Proposto3	123,64	120,57	126,70

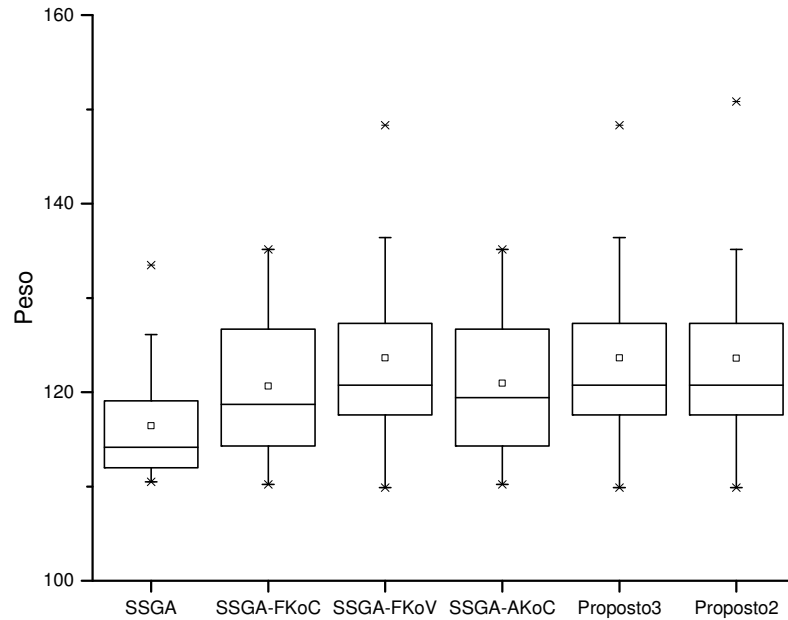


Figura 17 – Box Plot para o Intervalo de Confiança - Domo de 120 Barras - Análise Linear.

Na Tabela 14 encontra-se os intervalos de confiança calculados para cada estratégia da mesma forma que aconteceu no Exemplo 2 pode-se notar que os intervalos de confiança se sobrepõem e as médias de cada experimento estão dentro dos intervalos de confiança opostos. Pode ser visto na Figura 17 que estas estratégias apresentam neste caso média entre 110 e 140.

#### 5.4.2 Análise Não-linear

Nesta seção o Domo de 120 Barras será analisado considerando não-linearidade geométrica. Os parâmetros do método de Newton Raphson foram definidos como sendo 8 passos de carga com 8 iterações limitando o erro a cada iteração para  $10^{-4}$ . A Tabela 15 mostra os resultados encontrados na otimização.

Tabela 15 – Comparação entre os melhores resultados obtidos para o Domo de 120 Barras - Análise Não-Linear. \*ACp - % Análise Completa \*\*nfe - Número de Avaliações com Reanálise, \*\*\*\*AK<sub>0</sub> - número de vezes em que a matriz de rigidez foi alterada.

$A_i$	SSGA	SSGA FK <sub>0</sub> C	SSGA FK <sub>0</sub> V	SSGA AK <sub>0</sub> C	Proposto3	Proposto2
1	7,07	7,07	7,07	7,07	7,07	7,07
2	1,53	1,53	1,53	1,53	1,53	1,53
3	1,53	1,53	1,53	1,53	1,53	1,53
4	1,68	1,68	1,68	1,68	1,68	1,68
5	4,53	4,53	4,53	4,53	4,53	4,53
6	40,70	40,70	40,70	40,70	40,70	40,70
7	3,40	3,40	3,40	3,40	3,40	3,40
W(kN)	<b>32,08</b>	<b>32,08</b>	<b>32,08</b>	<b>32,08</b>	<b>32,08</b>	<b>32,08</b>
AK <sub>0</sub>	0	0	996	0	996	960
% ACp*	100	33	83	33	83	80
nfe**	1200	1200	1200	1200	1200	1200
$\eta_t\%$	100	150	250	150	255	250

Todas as seis estratégias obtiveram o mesmo resultado (32,08 kN). O que difere nessas estratégias é o custo computacional e o número de análises completas executadas. Essa estrutura teve perda de estabilidade em 1,5% das estruturas avaliadas e essas tiveram seus deslocamentos e ações internas nos membros calculados em relação ao passo anterior. As estruturas que tiveram perda de estabilidade foram penalizadas fortemente pois o valor dos deslocamentos foram amplificados por um fator de 100 conforme descrito no Capítulo 3. Todas as estratégias que mudam a matriz de rigidez ao longo do processo de otimização tiveram maior percentual de execuções completas em relação às estratégias que mantiveram a matriz de rigidez fixa. Como, por exemplo, a estratégia Proposto3 usou um percentual de 83% de análises completas, em contrapartida, as estratégias que não alteram a matriz de referência ao longo do processo de otimização foram requeridas apenas 33% de análises completas. Isso se dá pelo fato de que as estruturas de referência ficaram menos rígidas do que as estruturas a serem calculadas, gerando assim um erro maior e por consequência tendo que ser executada mais análises completas.

Além disso, na Figura 18 pode-se verificar que a maioria dos indivíduos avaliados eram ineficazes, pois foi obtido o primeiro resultado factível já com 60% do tempo de execução para o caso convencional e das 30 execuções apenas 18 obtiveram indivíduos factíveis as outras 12 execuções obtiveram apenas indivíduos ineficazes.

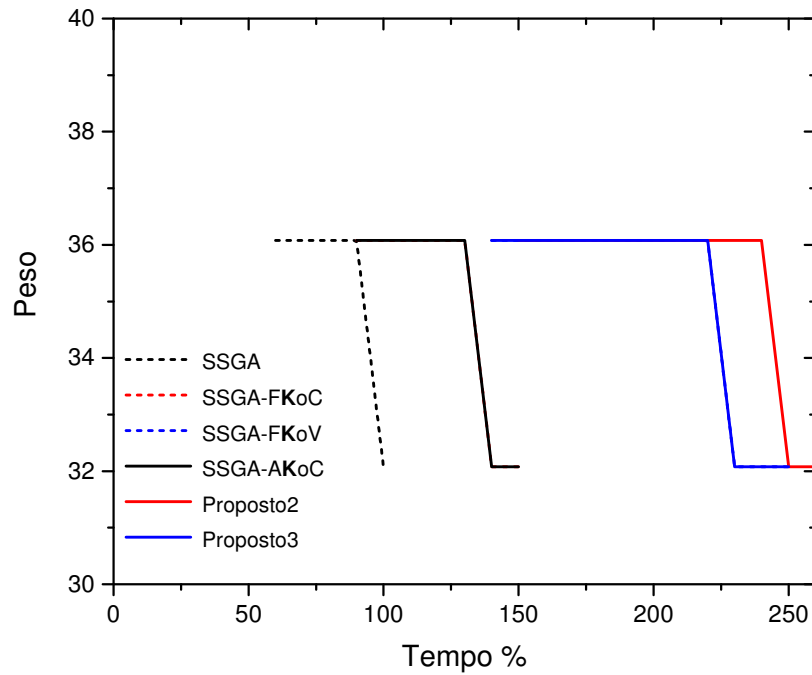


Figura 18 – Histórico do Peso em Relação ao Tempo - Domo de 120 Barras - Análise Não-Linear.

Em relação a evolução do número de vetores base ao longo da execução que gerou o melhor resultado nas 6 estratégias analisadas, mostrado na Figura 19, pode-se observar que os indivíduos avaliados por reanálise tiveram a sua solução aproximada por 6 vetores base na maioria das avaliações.

Em relação à variabilidade das soluções, na Figura 17 e na Tabela 17 novamente ocorre a sobreposição dos intervalos de confiança e a média de cada estratégia está dentro do intervalo de confiança da estratégia oposta. Sendo assim, pode-se dizer que não existe diferença entre as 6 estratégias em relação à média.

Na Tabela 16 pode-se destacar que a estratégia que obteve os melhores resultados foi a estratégia SSGA. Esta conseguiu o valor da média (101,01) e desvio padrão (48,88) menores quando comparados com as outras 5 estratégias.



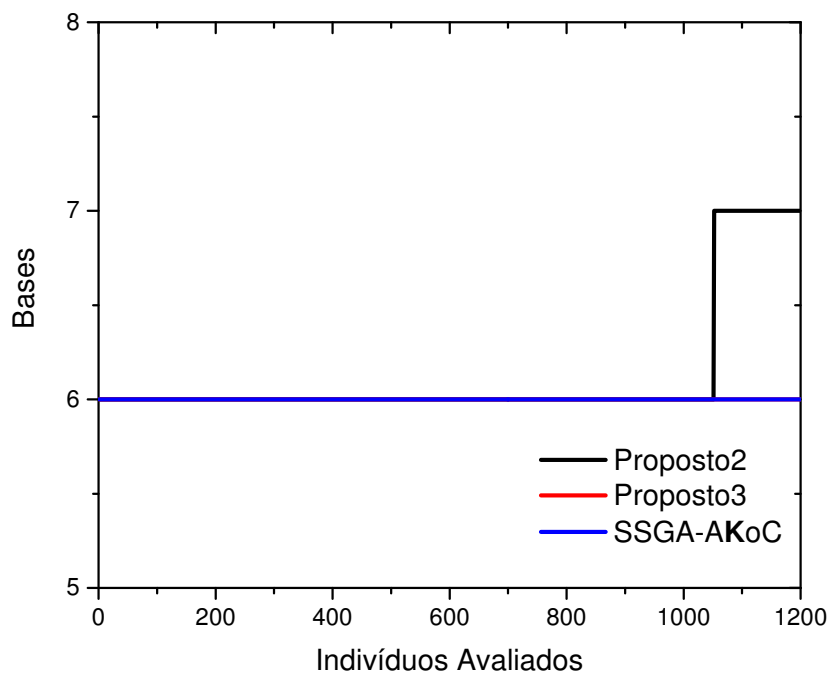


Figura 19 – Evolução do Número de Vetores Base ao Longo da Execução do AG para o Melhor Resultado - Domo de 120 Barras - Análise Não-Linear.

Tabela 16 – Comparação Estatística para o Domo de 120 Barras - Análise Não-Linear.

Estatística	SSGA	SSGA FK <sub>0</sub> C	SSGA FK <sub>0</sub> V	SSGA AK <sub>0</sub> C	Proposto3	Proposto2
melhor	<b>32,08</b>	<b>32,08</b>	<b>32,08</b>	<b>32,08</b>	<b>32,08</b>	<b>32,08</b>
mediana	<b>94,85</b>	<b>94,85</b>	<b>94,85</b>	<b>94,85</b>	<b>94,85</b>	<b>94,85</b>
média	<b>101,01</b>	101,66	101,47	100,58	101,41	101,27
desvio padrão	<b>48,83</b>	49,14	49,05	49,91	49,028	48,87
pior	<b>235,03</b>	<b>235,03</b>	<b>235,03</b>	<b>235,03</b>	<b>235,03</b>	<b>235,03</b>

Tabela 17 – Intervalo de Confiança para Domo de 120 Barras - Análise Não-Linear.

Estratégia	Média	Limite Inferior	Limite Superior
SSGA	101,01	78,09	123,92
SSGA-FK <sub>0</sub> C	101,66	78,74	124,57
SSGA-FK <sub>0</sub> V	101,47	78,55	124,38
SSGA-AK <sub>0</sub> C	101,75	78,84	124,67
Proposto2	101,27	78,35	124,19
Proposto3	101,41	78,50	124,33

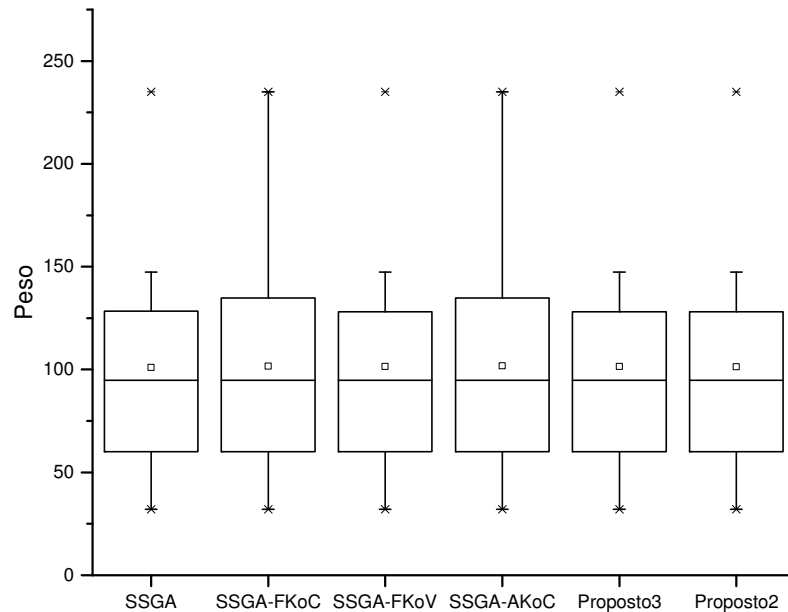


Figura 20 – Box Plot para o Intervalo de Confiança - Domo 120 Barras Análise Não-Linear.

## 5.5 EXEMPLO 5 - PÓRTICO PLANO DE 70 BARRAS

Este exemplo trata-se de um pórtico plano, mostrado na Figura 21 que possui 70 barras. As variáveis de projeto são as áreas das seções transversais e o espaço de busca é discreto. Estas variáveis são selecionadas a partir de um conjunto de 64 seções retiradas do AISC - American Institute of Steel Construction conforme Tabela 18.

A estrutura está submetida a um carregamento, conforme ilustrado na Figura 21. As propriedades do material são Módulo de Elasticidade igual a  $3 \times 10^7$  psi, massa específica de  $0,1 \text{ lb/in}^3$ . Os deslocamentos máximos são limitados a  $0,5 \text{ in}$ , nas direções  $x$  e  $y$ .

As barras da estrutura foram agrupadas em 7 grupos para os pilares e 3 grupos para as vigas definidos como: pilares: grupo 1: barras 1 a 6, grupo 2: barras 7 a 12, grupo 3: barras 13 a 18, grupo 4: barras 19 a 24, grupo 5: barras 25 a 30 grupo 6: barras 31 a 36 e, finalmente, grupo 7: 37 a 42; vigas: grupo 1: barras 43 a 52, grupo 2: barras 53 a 60 e grupo 3: barras 61 a 70. Para o método de Newton Raphson, 10 passos de carga com 6 iterações foi usado limitando o número de iterações a um erro de  $10^{-4}$ .

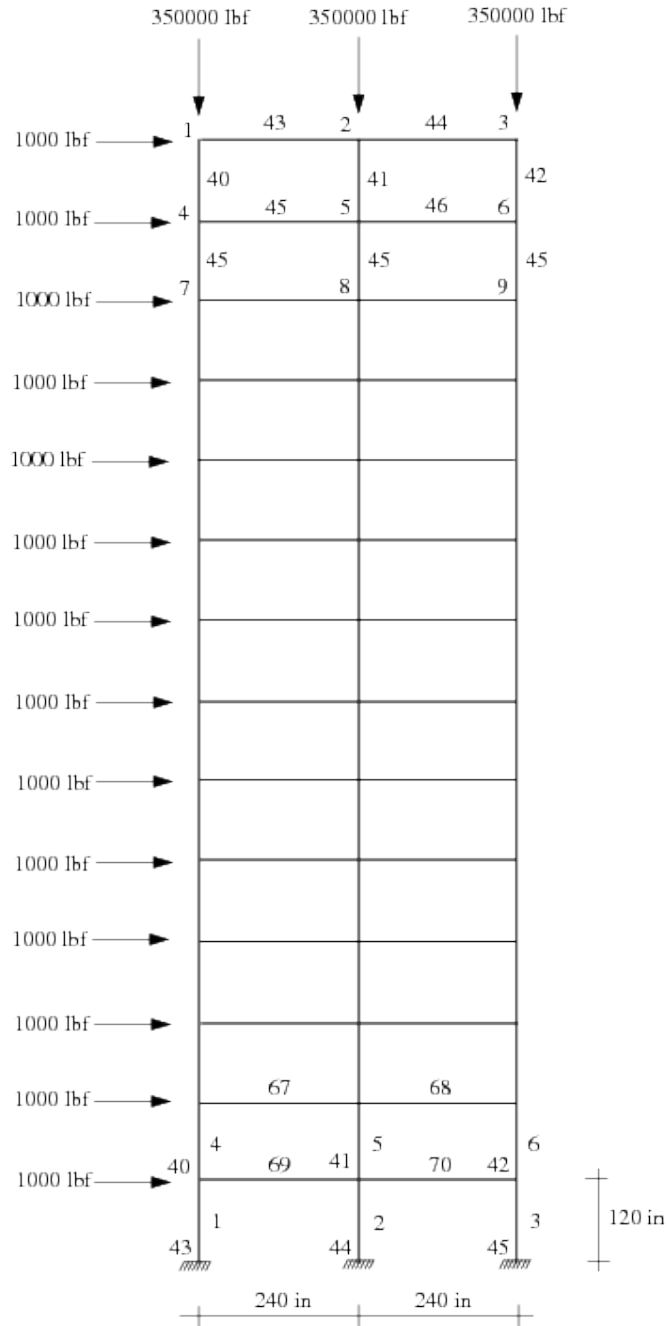


Figura 21 – Pórtico Plano de 70 barras.

A Tabela 19 mostra os resultados obtidos, com a otimização usando cada uma das estratégias citadas no início do capítulo. Os resultados foram obtidos com 2800 avaliações com reanálise para 30 rodadas independentes. Iniciou-se com o número de vetores base igual a 8, i.e.,  $s_{inicial} = 8$  e o  $s_{max} = 12$ . A área da seção transversal escolhida para a matriz de referência foi  $27,3 \text{ in}^2$  para as vigas e  $51,8 \text{ in}^2$  para os pilares.

Tabela 18 – Sub-conjunto extraído das Tabelas AISC para seções do tipo “W” com 64 possibilidades

Índice	Perfil	Índice	Perfil	Índice	Perfil	Índice	Perfil
1	W18X60	17	W21X101	33	W14X38	49	W14X193
2	W18X65	18	W21X111	34	W14X43	50	W14X211
3	W18X71	19	W21X122	35	W14X48	51	W14X233
4	W18X76	20	W21X132	36	W14X53	52	W14X257
5	W18X86	21	W21X147	37	W14X61	53	W14X283
6	W18X97	22	W24X55	38	W14X68	54	W14X311
7	W18X106	23	W24X62	39	W14X74	55	W14X342
8	W18X119	24	W24X68	40	W14X82	56	W14X370
9	W21X44	25	W24X76	41	W14X90	57	W14X398
10	W21X50	26	W24X84	42	W14X99	58	W14X426
11	W21X57	27	W24X94	43	W14X109	59	W14X455
12	W21X62	28	W24X104	44	W14X120	60	W14X500
13	W21X68	29	W24X117	45	W14X132	61	W14X550
14	W21X73	30	W24X131	46	W14X145	62	W14X605
15	W21X83	31	W24X146	47	W14X159	63	W14X665
16	W21X93	32	W24X162	48	W14X176	64	W14X730

Tabela 19 – Comparação entre os melhores resultados obtidos para o Pórtico de 70 Barras. \*ACp - % Análise Completa \*\*nfe - Número de Avaliações com Reanálise, \*\*\*(SILVA, 2011), \*\*\*\*AK<sub>0</sub> - número de vezes em que a matriz de rigidez foi alterada.

$A_i$	SSGA	SSGA FK <sub>0</sub> C	SSGA FK <sub>0</sub> V	SSGA AK <sub>0</sub> C	Proposto3	Proposto2	Ref***
$Ap_1$	32,0	56,8	46,7	62,0	51,8	42,7	42,7
$Ap_2$	51,8	46,7	62,0	35,3	46,7	35,3	42,7
$Ap_3$	42,7	46,7	38,8	51,8	35,3	38,8	42,7
$Ap_4$	46,7	35,3	38,8	32,0	51,8	38,8	38,8
$Ap_5$	56,8	46,7	38,8	46,7	38,8	38,8	38,8
$Ap_6$	38,8	29,1	32,0	42,7	35,3	51,8	38,8
$Ap_7$	29,1	35,3	35,3	29,1	32,0	38,8	38,8
$Av_1$	13,0	13,0	13,0	16,7	16,2	13,0	16,2
$Av_2$	18,2	16,2	16,2	16,2	16,7	16,2	18,2
$Av_3$	21,1	20,0	16,2	16,2	18,2	18,2	16,2
W(lbs)	32887,20	32385,60	31171,20	32577,60	32464,80	<b>31118,40</b>	31668,0
AK <sub>0</sub> ****	0	0	56	0	56	56	-
ACp*	100	18	2	2	2	2	100
nfe**	2800	2800	2800	2800	2800	2800	2800
$\eta_t\%$	100	100	80	80	80	80	-

O melhor resultado foi encontrado com a estratégia Proposto2 em que foi obtido um peso de 31118,40 lbs. Nesta estratégia foram realizadas apenas 2% de análises completas e a matriz de rigidez foi alterada em 56 avaliações. Seu  $\eta_t$  foi de 80% gerando um custo 20% abaixo do custo do SSGA. Em todas as estratégias com reanálise foi possível obter resultados melhores quando comparado com a estratégia SSGA.

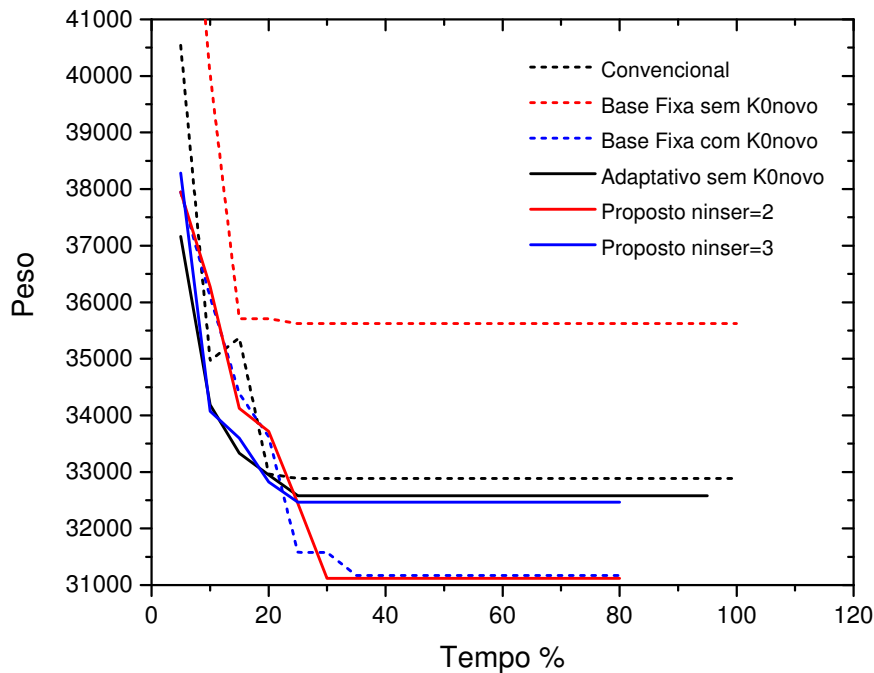


Figura 22 – Histórico do Peso em Relação ao Tempo - Pórtico de 70 Barras.

Em relação à evolução do número de vetores base ao longo da execução que gerou o melhor resultado, mostrado na Figura 23, pode-se observar que o melhor resultado foi encontrado com o maior número de avaliações realizadas com 6 vetores base.

Tabela 20 – Comparação Estatística para o Pórtico de 70 Barras.

Estatística	SSGA	SSGA FK <sub>0</sub> C	SSGA FK <sub>0</sub> V	SSGA AK <sub>0</sub> C	Proposto3	Proposto2
melhor	32887,2	32385,6	31171,2	32577,6	32464,8	<b>31118,4</b>
mediana	35676,0	35407,2	35442,0	35320,8	<b>35288,4</b>	35548,8
média	36070,0	35745,9	35605,4	35496,2	<b>35252,6</b>	35813,7
desvio padrão	1903,7	1993,2	2030,2	1778,6	<b>1750,8</b>	2037,1
pior	40761,6	40293,6	39816,0	<b>39187,2</b>	39364,8	39364,8

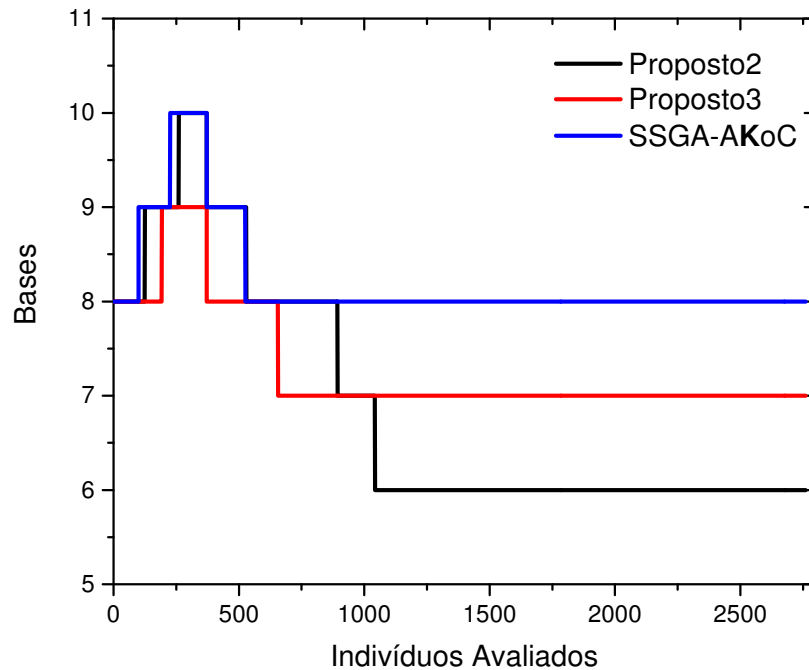


Figura 23 – Evolução do Número de Vetores Base ao Longo da Execução do AG para o Melhor Resultado - Pórtico de 70 Barras.

Em relação à Tabela 20 pode-se observar que os melhores resultados foram obtidos com a estratégia Proposto3, que obteve melhores resultados para média, mediana, desvio padrão e pior. Perdendo apenas para o menor melhor resultado encontrado com a estratégia Proposto2. A Figura 24 pode ser usada para comparar visualmente a variabilidade entre as estratégias. Nela observa-se que a média e mediana estão bem próximas.

Analisando a Tabela 21 e a Figura 24 observa-se novamente que os intervalos de confiança se sobrepõem e as médias de cada experimento estão dentro dos intervalos de confiança opostos e provavelmente em um teste estatístico para comparar essas médias indicaria que não existe diferença entre as 6 estratégias. Sendo assim, pode-se dizer que diferença entre as 6 estratégias, em relação à média, tem como diferença apenas o custo computacional.

Tabela 21 – Intervalo de Confiança para o Pórtico de 70 Barras.

Estratégia	Média	Limite Inferior	Limite Superior
SSGA	36070,64	35379,09	36762,18
SSGA-FK <sub>0</sub> C	35745,92	35054,37	36437,46
SSGA-FK <sub>0</sub> V	35605,44	34913,89	36296,98
SSGA-AK <sub>0</sub> C	35496,24	34804,69	3618,78
Proposto2	35813,76	35122,21	36505,30
Proposto3	35252,64	34561,094	35944,18

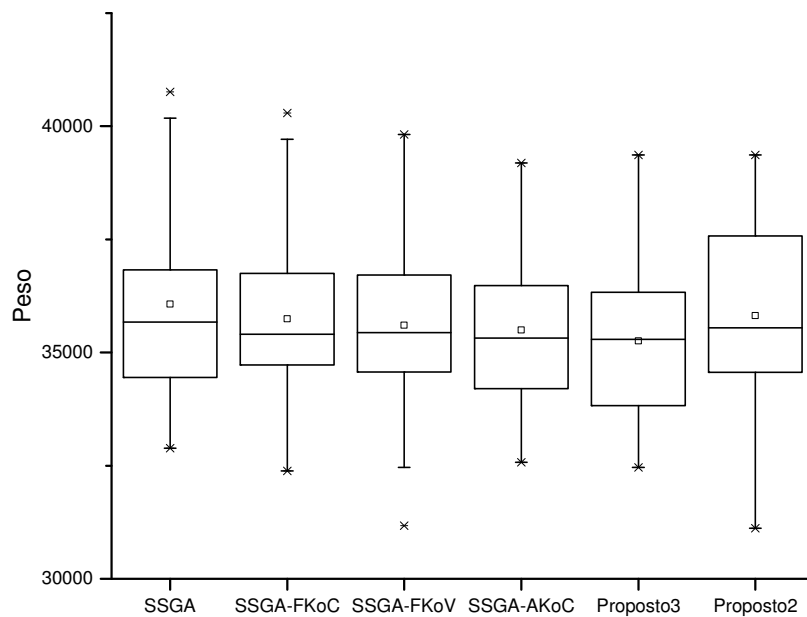


Figura 24 – Box Plot para o Intervalo de Confiança - Pórtico de 70 Barras.

## 5.6 EXEMPLO 6 - TRELIÇA DE 200 BARRAS

Este último exemplo também considera a minimização do peso de uma Treliça de 200 Barras descrita na Figura 25. Esta treliça foi proposta por Belegundu (1982). Este problema tem como objetivo determinar a área da seção transversal de cada barra que minimize o peso da estrutura. É um problema contínuo em que o espaço de busca para as áreas da seção transversal estão entre 0.1 e 30 in. Esta treliça foi projetada em função de três condições de carregamento independentes e com restrição de tensão em seus membros. As três condições de carregamento são:

- (1 ) 1 kip atuando na direção horizontal  $x$  positiva para os nós 1, 6, 15, 20, 34, 43, 48, 57, 62, e 71;
- (2) 10 kips atuando na direção vertical  $y$  negativa direction para os nós 1, 2, . . . , 6, 8, 10, 12, 14, 15, . . . , 20, 22, 24, 25, . . . , 73, 74 e 75;
- (3) condições 1 e 2 atuando juntas.

Aragón, Esquivel e Coello (2010) propuseram que os 200 elementos da treliça são classificados em 29 grupos de acordo com a Tabela 22 e as tensões normais máximas de cada elemento é limitada em 10 ksi para membros com tração e compressão. O Módulo de Elasticidade e a massa específica são  $3 \times 10^7$  psi e  $0,283 \text{ lb/in}^3$ , respectivamente. Na Tabela 23 estão descritos os resultados obtidos, com a otimização usando cada uma das estratégias citadas no início do capítulo. Os resultados foram obtidos com 32000 avaliações com reanálise para 30 execuções independentes. Iniciou-se com o número de vetores base igual a 5, i.e.,  $s_{inicial} = 5$  e o  $s_{max} = 10$ . A área da seção transversal escolhida para a matriz de referência foi  $15,05 \text{ in}^2$ .

Na Tabela 23 é possível observar que a estratégia Proposto3 obteve o menor peso (28170,01 lbs) comparado com as outras estratégias. Além disso, esta mesma estratégia conseguiu esse resultado com um  $\eta_t$  igual a 90%, isto é, o tempo gasto para essa estratégia foi menor em 10% quando comparado com a estratégia SSGA. Apesar de ter havido um ganho, este percentual foi menor do que o esperado para este tipo de estrutura. Isso ocorreu devido a estrutura ter 3 carregamentos independentes sendo necessário o cálculo dos vetores base e resolver a matriz reduzida  $\mathbf{K}_R$  para cada um dos carregamentos. Testou-se a mesma estrutura com apenas um carregamento para as estratégias SSGA e Proposto3 e o ganho obtido foi de aproximadamente 35%.

O percentual de análises completas para a estratégia Proposto3 (estratégia que obteve o melhor resultado) foi de 30% e a quantidade de alterações na matriz de rigidez foi de 9600. Este percentual foi maior do que os percentuais encontrados nos exemplos anteriores para esta estratégia, com exceção do Domo de 120 Barras Não-Linear. Uma



Tabela 22 – Agrupamento das Barras para a Treliça de 200 Barras.

Group	Members
1	1, 2, 3, 4
2	5, 8, 11, 14, 17
3	19, 20, 21, 22, 23, 24
4	18, 25, 56, 63, 94, 101, 132, 139, 170, 177
5	26, 29, 32, 35, 38
6	6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 27, 28, 30, 31, 33, 34, 36, 37
7	39, 40, 41, 42
8	43, 46, 49, 52, 55
9	57, 58, 59, 60, 61, 62
10	64, 67, 70, 73, 76
11	44, 45, 47, 48, 50, 51, 53, 54, 65, 66, 68, 69, 71, 72, 74, 75
12	77, 78, 79, 80
13	81, 84, 87, 90, 93
14	95, 96, 97, 98, 99, 100
157	102, 105, 108, 111, 114
16	82, 83, 85, 86, 88, 89, 91, 92, 103, 104, 106, 107, 109, 110, 112, 113
17	115, 116, 117, 118
18	119, 122, 125, 128, 131
19	133, 134, 135, 136, 137, 138
20	140, 143, 146, 149, 152
21	120, 121, 123, 124, 126, 127, 129, 130, 141, 142, 144, 145, 147, 148, 150, 151
22	153, 154, 155, 156
23	157, 160, 163, 166, 169
24	171, 172, 173, 174, 175, 176
25	178, 181, 184, 187, 190
26	158, 159, 161, 162, 164, 165, 167, 168, 179, 180, 182, 183, 185, 186, 188, 189
27	191, 192, 193, 194
28	195, 197, 198, 200
29	196, 199

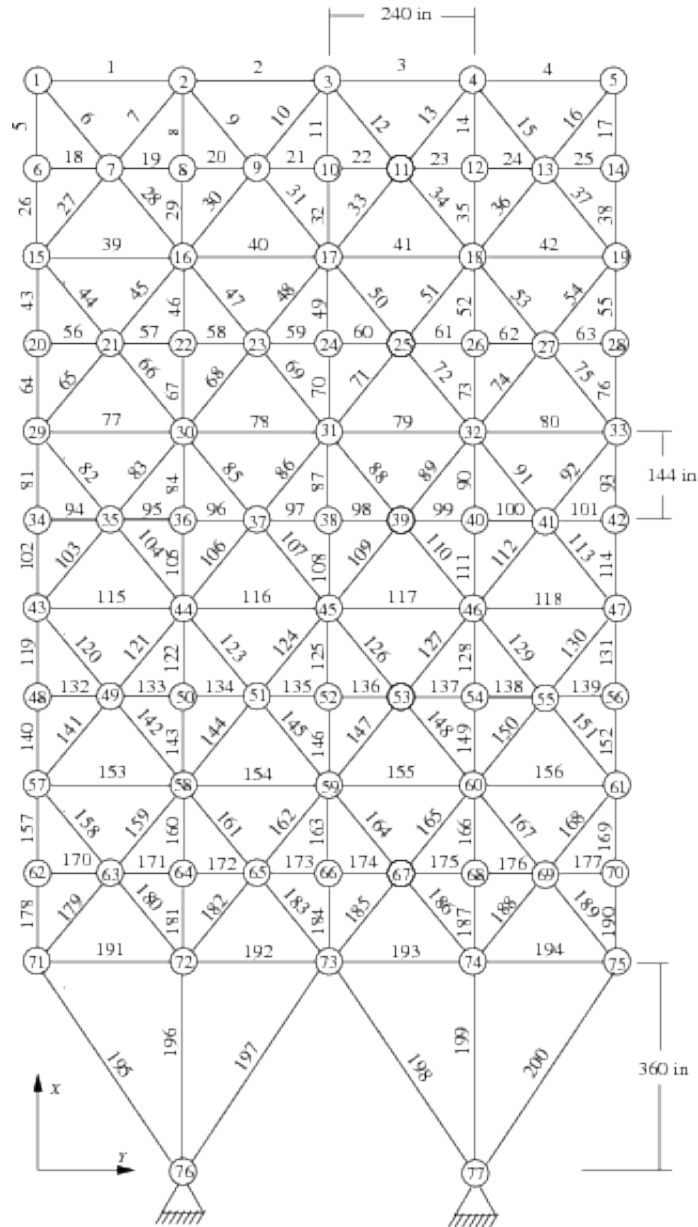


Figura 25 – Treliça de 200 Barras.

explicação para isso é que este exemplo possui um número de variáveis de projeto bem maior do que os exemplos analisados anteriormente, como por exemplo, o Domo de 120 Barras tem 7 áreas de seção transversal e a Treliça de 200 Barras tem 29 áreas de seção transversal.

Em relação à evolução do número de vetores base ao longo da execução que gerou o melhor resultado, conforme Figura 10, pode-se observar que a maioria das análises foram feitas entre 9 e 10 vetores base.

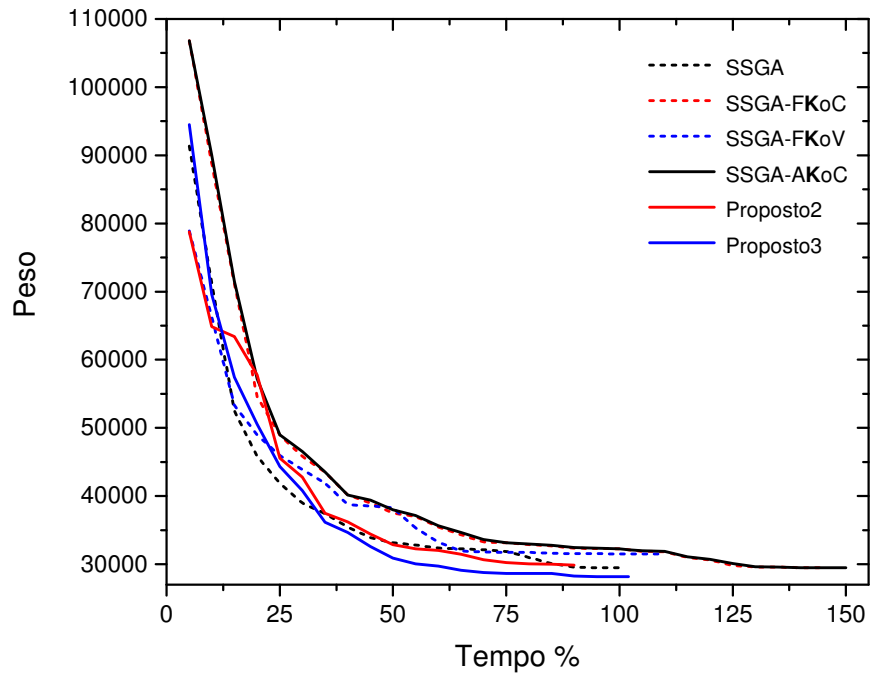


Figura 26 – Histórico do Peso em Relação ao Tempo - Treliça de 200 Barras.

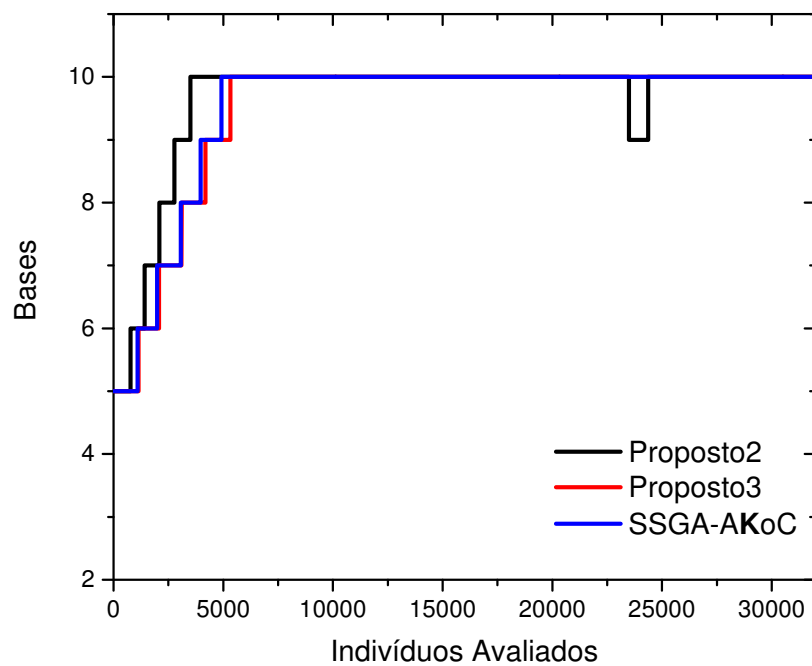


Figura 27 – Evolução do Número de Vetores Base ao Longo da Execução do AG para o Melhor Resultado - Treliça de 200 Barras.

Tabela 23 – Comparação entre os melhores resultados obtidos para a Treliza de 200 Barras.  
 \*ACp - % Análise Completa \*\*nfe - Número de Avaliações com Reanálise \*\*\*(LE-MONGE; BARBOSA; BERNARDINO, 2015) \*\*\*\*AK<sub>0</sub> - número de vezes em que a matriz de rigidez foi alterada.

$A_i$	SSGA	SSGA FK <sub>0</sub> C	SSGA FK <sub>0</sub> V	SSGA AK <sub>0</sub> C	Proposto3	Proposto2	Ref****
1	0,10	0,10	0,71	0,10	0,10	0,10	0,10
2	1,97	1,97	4,35	1,97	1,69	1,48	0,90
3	0,10	0,10	0,92	0,10	0,10	0,59	0,10
4	0,38	0,38	0,29	0,38	0,18	0,10	0,12
5	2,21	2,21	5,82	2,21	2,29	4,04	2,89
6	0,18	0,18	0,10	0,18	0,37	0,27	0,10
7	0,10	0,10	0,44	0,10	0,11	0,10	0,10
8	4,04	4,04	4,06	4,04	3,54	3,05	4,42
9	2,29	2,29	0,32	2,29	0,10	0,10	0,41
10	5,42	5,42	10,37	5,42	4,11	3,88	4,13
11	0,37	0,37	0,36	0,37	0,44	0,84	1,42
12	1,42	1,42	0,24	1,42	0,1	0,92	0,1
13	5,19	5,19	5,51	5,19	5,35	4,51	5,58
14	0,10	0,10	0,10	0,10	0,1	0,82	0,14
15	8,43	8,43	6,99	8,43	6,52	5,75	6,97
16	0,66	0,66	0,95	0,66	0,51	1,93	0,91
17	1,99	1,99	1,06	1,99	0,24	1,12	0,21
18	7,76	7,76	7,57	7,76	7,53	7,69	8,82
19	0,13	0,13	0,10	0,13	1,33	0,10	0,10
20	8,68	8,68	8,73	8,68	8,53	8,69	8,78
21	1,60	1,60	1,27	1,60	1,80	0,89	0,90
22	0,13	0,13	0,23	0,13	0,1	0,78	1,81
23	11,35	11,35	10,84	11,35	10,99	10,52	10,69
24	1,78	1,78	0,44	1,78	3,03	0,84	0,15
25	12,50	12,50	11,48	12,50	12,36	11,35	11,62
26	1,83	1,83	1,53	1,83	2,25	2,14	2,60
27	5,50	5,50	9,88	5,50	3,97	7,23	6,36
28	10,56	10,56	11,72	17,90	11,10	12,32	11,19
29	14,95	14,95	13,66	14,95	15,17	14,27	14,70
W (lbs)	29468,65	29468,65	31431,91	29468,65	<b>28170,01</b>	29868,25	29309,47
AK <sub>0</sub> ****	0	0	14400	0	9600	12480	0
% ACp*	100	100	45	100	30	39	100
nfe**	32000	32000	32000	32000	32000	32000	32000
$\eta_t$ %	100	148	115	155	90	105	-

Em relação à Tabela 24 pode ser observado que os melhores resultados foram obtidos com a estratégia Proposto3, em que obteve um melhor menor resultado igual a 28170,01 e uma mediana igual a 56662,75.

Tabela 24 – Comparação estatística para a Treliça de 200 Barras.

Estatística	SSGA	SSGA FK <sub>0</sub> C	SSGA FK <sub>0</sub> V	SSGA AK <sub>0</sub> C	Proposto3	Proposto2
melhor	29468,65	29468,65	31431,90	29468,65	<b>28170,01</b>	29868,25
mediana	51206,13	51206,13	<b>48820,73</b>	51206,13	51023,12	52342,59
média	57868,24	57868,24	<b>56622,75</b>	57868,24	57327,15	58070,05
desvio padrão	22668,15	22668,15	23093,56	22668,15	22806,85	<b>22369,51</b>
pior	<b>107838,11</b>	<b>107838,11</b>	109617,51	107838,11	109809,805	109621,50

Por fim analisando a Tabela 25 e a Fig.28 pode-se dizer que, quando as médias são comparadas no intervalo de confiança, não existe diferença entre as 6 estratégias.

Tabela 25 – Intervalo de Confiança para a Treliça de 200 Barras.

Estratégia	Média	Limite Inferior	Limite Superior
SSSGA	57744,13	49525,56	65962,71
SSGA-FK <sub>0</sub> C	57868,24	49649,66	66086,82
SSGA-FK <sub>0</sub> V	56622,75	48404,17	64841,33
SSGA-AK <sub>0</sub> C	58009,94	49791,36	66228,52
Proposto2	58070,05	49851,47	66288,63
Proposto3	57327,15	49108,57	65545,73

## 5.7 SÍNTESE DOS RESULTADOS COM A ESTRATÉGIA PROPOSTA

Na Tabela 26 é possível observar uma relação a quantidade de variáveis de projeto com o percentual de análise completa realizada. Como por exemplo, para a Treliça de 10 Barras e a Treliça de 52 Barras, que tem 10 e 12 variáveis de projeto respectivamente, foram requeridas 18% de análises completas; já no problema do Pórtico de 3 Barras, que tem 2 variáveis de projeto, foram requeridas 2% de análises completas. E em um problema com 29 variáveis de projeto, como é o caso da Treliça de 200 Barras, foram requeridas 30% de análises completas. É possível verificar que das estratégias propostas a que obteve maior sucesso foi a estratégia Proposta2.

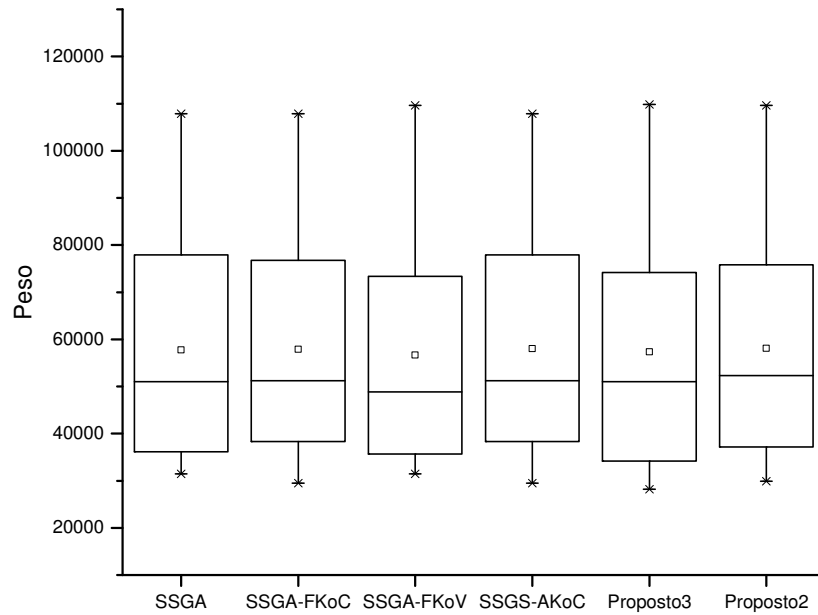


Figura 28 – Box Plot para o Intervalo de Confiança - Treliça 200 Barras.

Experimento	Melhor Resultado	# Variáveis de Projeto	%ACp	Classificação
Treliça 10 Barras	Proposto2	10	18	Pequeno
Treliça 52 Barras	Proposto2 e Proposto3	12	18	Médio
Pórtico 3 Barras	Proposto2	2	2	Médio
Domo 120 Barras Linear	Proposto2 e Proposto3	7	20	Grande
Domo 120 Barras Não-Linear	Proposto2 e Proposto3	7	80	Grande
Pórtico 70 Barras	Proposto2	10	2	Grande
Treliça 200 Barras	Proposto3	29	20	Grande

Tabela 26 – Síntese dos Resultados

## 6 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

A presente tese teve como objetivo o desenvolvimento de uma estratégia de reanálise adaptativa para um AG não geracional, em que a matriz de rigidez de referência foi alterada ao longo do processo de otimização. Esta proposta foi motivada pelo fato de que quanto menor for o valor de  $\Delta\mathbf{K}_0$  melhor será a convergência da série. Além disso, por ser uma estratégia adaptativa, não é necessário definir qual o melhor número de vetores base requerido para cada experimento.

Nesta tese foram discutidos problemas de otimização estrutural de estruturas reticuladas com comportamento linear ou não-linear geométrico. Para resolver o problema de otimização foi utilizado um algoritmo genético do tipo não-geracional. Os problemas de otimização referiram-se à minimização do peso em que as variáveis de projeto dizem respeito às características das seções transversais das barras (área ou dimensões das seções transversais). Foi apresentado um resumo das estratégias para tratamento das restrições em problemas de otimização com restrições e em especial o APM adotado nos problemas discutidos nesta tese.

Os problemas analisados receberam um enfoque mais acadêmico, mas de extrema importância para o desenvolvimento e validação da estratégia proposta. Para caracterizar melhor os mesmos de forma real, outros aspectos deverão ser contemplados. Para tanto, é preciso considerar outros tipos de restrições como limites referentes a cargas críticas, tensões de flambagem, outras restrições de estabilidade, restrições geométricas que não permitem, por exemplo, que um pilar de um nível superior tenha seção maior que a de um nível inferior, combinações de carregamento previstos em normas e assim por diante.

Este trabalho não teve como foco os ajustes dos parâmetros do AG através de tentativas exaustivas de ajustes dos mesmos, foram usados os valores dos parâmetros definidos na literatura. Também não foram exploradas as possibilidades de ajustes dos parâmetros do método de Newton Raphson, como por exemplo, o número dos passos de cargas.

## 6.1 CONCLUSÕES

Foram analisadas 6 estruturas classificadas como pequeno, médio e de grande porte em que o número de variáveis de projeto está entre 2 e 29. A maioria dos problemas, exceto o Domo de 120 Barras - Análise Não-Linear, o percentual de análise completa requerida foi menor quando usou-se uma das estratégias propostas, isto é, Proposto2 e Proposto3, vindo a reforçar a hipótese definida no Capítulo 4.

Em relação ao tempo gasto normalizado  $\eta_t$  foi possível observar que com a estratégia proposta este foi menor para os exemplos do Domo de 120 Barras, o Pórtico de 70 Barras e a Treliça de 200 Barras. Observa-se que o ganho foi obtido em estruturas em que o grau de liberdade está acima de 100. Em contrapartida, em estruturas de médio porte, como é o caso da Treliça de 52 Barras, se não escolher finalizar o algoritmo genético com um número de reanálise fixo, também seria possível ter um ganho no  $\eta_t$ . Nessa treliça o melhor resultado, com a estratégia Proposto2, foi alcançada com 70% do custo computacional do SSGA, tendo assim um ganho de 30%.

Já nos problemas Pórtico de 3 Barras e Domo de 120 Barras Não-Linear, esperava-se um ganho no custo em relação ao SSGA e uma redução no percentual de análise completa. No entanto, em relação ao Pórtico de 3 Barras, obteve-se um percentual pequeno de 2% de análises completas. Em contrapartida, o custo  $\eta_t$  foi maior devido ao número de iterações requeridas no método de Newton Raphson com a estratégia proposta ter sido maior que o número de iterações requeridas no método de Newton Raphson com a estratégia SSGA, sendo 10 e 3 iterações para cada passo de carga respectivamente. Isso ocorreu porque o método de Newton Raphson com a estratégia proposta aproxima o resultado da análise usando o método de reanálise por aproximação combinada e com isso teve uma convergência mais lenta e precisou de mais iterações que o método de Newton Raphson com a estratégia SSGA.

Em relação ao Domo de 120 Barras com análise não-linear, foram requeridas em média 80% de análises completas e gastou-se mais tempo para resolver este problema em relação ao SSGA. Isso ocorreu pelo fato de que a estrutura de referência ficou menos rígida na estratégia proposta quando comparada com a estrutura a ser calculada. Gerando um erro maior durante o processo de reanálise tendo uma convergência mais lenta.



Em resumo, o método proposto obteve melhores resultados na maioria dos problemas analisados. Além disso, a estratégia se mostrou eficiente computacionalmente, sendo esta, uma estratégia promissora em problemas de otimização estrutural que demandam um alto custo computacional.

As limitações identificadas para a estratégia proposta são descritas a seguir: i) as questões para resolver problemas na convergência da série não foram tratadas; ii) em casos de mais de um carregamento independente o método poderá perder a eficácia; e iii) em problemas que a estrutura de referência será menos rígida que a estrutura a ser calculada pode-se ter uma convergência mais lenta da série tendo a necessidade de mais análises completas.

## 6.2 TRABALHOS FUTUROS

As perspectivas para trabalhos futuros incluem:

- Testar estruturas maiores e verificar a necessidade de implementar a estratégia de re-análise com ortogonalização de Gram Shimidt para resolver estruturas que poderão ter problemas na convergência da série.
- Considerar otimização de forma e topologia de estruturas reticuladas.
- Testar outras técnicas de reanálise ou até mesmo propor técnicas combinadas.
- Implementar e testar a técnica proposta para problemas multi-objetivo.
- Testar a estratégia proposta em problemas dinâmicos.

## REFERÊNCIAS

- ADELI, H.; CHENG, N.-T. Augmented Lagrangian Genetic Algorithm for Structural Optimization. *Journal of Aerospace Engineering*, v. 7, n. 1, p. 104–118, January 1994.
- AKGÜN, M. A.; GARCELON, J. H.; HAFTKA, R. T. Fast exact linear and non-linear structural reanalysis and the sherman–morrison–woodbury formulas. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 50, n. 7, p. 1587–1606, 2001.
- AMIR, O. Revisiting approximate reanalysis in topology optimization: on the advantages of recycled preconditioning in a minimum weight procedure. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 51, n. 1, p. 41–57, 2015.
- AMIR, O. *et al.* Efficient reanalysis techniques for robust topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 245, p. 217–231, 2012.
- ANGELO, J. S.; BERNARDINO, H. S.; BARBOSA, H. J. Ant colony approaches for multiobjective structural optimization problems with a cardinality constraint. *Advances in Engineering Software*, Elsevier, v. 80, p. 101–115, 2015.
- ARAGÓN, V. S.; ESQUIVEL, S. C.; COELLO, C. A. C. A modified version of a t-cell algorithm for constrained optimization problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 84, n. 3, p. 351–378, 2010.
- ARORA, J. S. Survey of structural reanalysis techniques. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 102, n. 4, p. 783–802, 1976.
- BARBOSA, H. A coevolutionary genetic algorithm for constrained optimization problems. In: *Proc. of the Congress on Evolutionary Computation*. Washington, DC, USA: [s.n.], 1999. p. 1605–1611.
- BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. An adaptive penalty scheme in genetic algorithms for constrained optimization problems. In: *Proc. of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO)*. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann, 2002.
- BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. An adaptive penalty scheme for steady-state genetic algorithms. In: *Genetic and Evolutionary Computation (GECCO)*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2003, (Lecture Notes in Computer Science, v. 2723). p. 718–729.
- BARBOSA, H. J. C.; LEMONGE, A. C. C. An adaptive penalty method for genetic algorithms in constrained optimization problems. *Frontiers in Evolutionary Robotics*, I-Tech Education, Austria, v. 34, 2008.
- BARTHELEMY, J.-F.; HAFTKA, R. T. Approximation concepts for optimum structural design—a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 5, n. 3, p. 129–144, 1993.
- BATHE, K.-J. *Finite element procedures*. [S.l.]: Klaus-Jurgen Bathe, 2006.

- BELEGUNDU, A. *A study of mathematical programming methods for structural optimization*. Tese (Doutorado) — Department of Civil and Environmental, USA, 1982.
- CAPRILES, P. *et al.* Rank-based ant colony algorithms for truss weight minimization with discrete variables. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 26, n. 6, p. 553–576, 2007.
- CARPENTER, W.; HATCH, G.; SACK, R. Modification of elements in the displacement method. *AIAA Journal*, v. 5, n. 9, p. 1708–1710, 1967.
- CHENG, B.; TITTERINGTON, D. M. Neural networks: A review from a statistical perspective. *Statistical science*, JSTOR, p. 2–30, 1994.
- CHOI, K. K.; CHANG, K.-H. A study of design velocity field computation for shape optimal design. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, v. 15, n. 4, p. 317–341, 1994.
- COELLO, C. A. C. Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: a survey of the state of the art. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 191, n. 11, p. 1245–1287, 2002.
- COSTA, L.; SANTO, I. E.; OLIVEIRA, P. An adaptive constraint handling technique for evolutionary algorithms. *Optimization*, Taylor & Francis, v. 62, n. 2, p. 241–253, 2013.
- DATTA, R.; DEB, K. *Evolutionary Constrained Optimization*. [S.l.]: Springer, 2015.
- DEDE, T.; AYVAZ, Y. Combined size and shape optimization of structures with a new meta-heuristic algorithm. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 28, p. 250–258, 2015.
- DEGERTEKIN, S.; HAYALIOGLU, M. Sizing truss structures using teaching-learning-based optimization. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 119, p. 177–188, 2013.
- EBENAU, C.; ROTSSCHAFFER, J.; THIERAUF, G. An advanced evolutionary strategy with an adaptive penalty function for mixed-discrete structural optimisation. *Advances in Engineering Software*, v. 36, p. 29–38, 2005.
- ELIAS, Z. *Theory and methods of structural analysis*. [S.l.]: John Wiler & Sons, 1986.
- FARMANI, R.; WRIGHT, J. *et al.* Self-adaptive fitness formulation for constrained optimization. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 7, n. 5, p. 445–455, 2003.
- FLEURY, C. First and second order convex approximation strategies in structural optimization. *Structural Optimization*, Springer, v. 1, n. 1, p. 3–10, 1989.
- FLOUDAS, C. A. *Deterministic global optimization: theory, methods and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 37.
- FONSECA, L. G. *Algoritmos Genéticos Assistidos por Metamodelos Baseados em Similaridade*. Tese (Doutorado) — Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional/LNCC, Petrópolis, Brasil, 2009.

- FORSBERG, J.; NILSSON, L. On polynomial response surfaces and kriging for use in structural optimization of crashworthiness. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 29, n. 3, p. 232–243, 2005.
- FOX, R.; MIURA, H. An approximate analysis technique for design calculations. *AIAA Journal*, v. 9, n. 1, p. 177–179, 1971.
- GAO, G. *et al.* An exact block-based reanalysis method for local modifications. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 158, p. 369–380, 2015.
- GAO, G.; WANG, H.; LI, G. An adaptive time-based global method for dynamic reanalysis. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 48, n. 2, p. 355–365, 2013.
- GOLBERG, D. E. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. *Addion wesley*, v. 1989, 1989.
- GOLDBERG, D. E.; HOLLAND, J. H. Genetic algorithms and machine learning. *Machine learning*, Springer, v. 3, n. 2, p. 95–99, 1988.
- HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. *Elements of structural optimization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 11.
- HAFTKA, R. T. *et al.* Two-point constraint approximation in structural optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 60, n. 3, p. 289–301, 1987.
- HAGER, W. W. Updating the inverse of a matrix. *SIAM review*, SIAM, v. 31, n. 2, p. 221–239, 1989.
- HASANÇEBI, O. *et al.* Comparison of non-deterministic search techniques in the optimum design of real size steel frames. *Computers & structures*, Elsevier, v. 88, n. 17, p. 1033–1048, 2010.
- HO-HUU, V. *et al.* An improved constrained differential evolution using discrete variables (d-icde) for layout optimization of truss structures. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, 2015.
- HOLLAND, J. H. Genetic algorithms. *Scientific American*, v. 267, n. 1, p. 66–72, 1992.
- HOUSEHOLDER, A. S. A survey of some closed methods for inverting matrices. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, SIAM, v. 5, n. 3, p. 155–169, 1957.
- JIN, R.; CHEN, W.; SIMPSON, T. W. Comparative studies of metamodelling techniques under multiple modelling criteria. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 23, n. 1, p. 1–13, 2001.
- JR, J. H. S.; HAFTKA, R. T. Preliminary design of composite wings for buckling, strength, and displacement constraints. *Journal of Aircraft*, v. 16, n. 8, p. 564–570, 1979.
- KARGUPTA, H.; GOLDBERG, D. E. Black box optimization: Implications of search. *University of Illinois, Urbana-Champaign*, Citeseer, 1995.

- KASSIM, A. A.; TOPPING, B. Static reanalysis: a review. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 113, n. 5, p. 1029–1045, 1987.
- KAVEH, A.; MAHDAVI, V. Colliding bodies optimization: A novel meta-heuristic method. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 139, p. 18–27, 2014.
- KAVEH, A. *et al.* Chaotic swarming of particles: a new method for size optimization of truss structures. *Advances in Engineering Software*, Elsevier, v. 67, p. 136–147, 2014.
- KEULEN, F. V.; HAFTKA, R. Special issue on approximations in optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer–Verlag, v. 27, n. 5, p. 301–302, 2004. ISSN 1615-147X.
- KIRSCH, U. *Optimum structural design: concepts, methods, and applications*. [S.l.]: McGraw-Hill Companies, 1981.
- KIRSCH, U. Reduced basis approximations of structural displacements for optimal design. *AIAA journal*, v. 29, n. 10, p. 1751–1758, 1991.
- KIRSCH, U. Approximate reanalysis methods. *PROGRESS IN ASTRONAUTICS AND AERONAUTICS*, AMERICAN INST OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS, v. 150, p. 103–103, 1993.
- KIRSCH, U. *Structural optimization*. [S.l.]: Springer, 1993.
- KIRSCH, U. *Structural optimization: Fundamentals and applications*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin, 1993. v. 3.
- KIRSCH, U. Improved stiffness-based first-order approximations for structural optimization. *AIAA Journal*, v. 33, n. 1, p. 143–150, 1995.
- KIRSCH, U. Combined approximations—a general reanalysis approach for structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 20, n. 2, p. 97–106, 2000.
- KIRSCH, U. *Design-oriented analysis of structures: a unified approach*. [S.l.]: Springer, 2002. v. 95.
- KIRSCH, U. Design-oriented analysis of structures-unified approach. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 129, n. 3, p. 264–272, 2003.
- KIRSCH, U. Design-oriented analysis of structures-unified approach. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 129, n. 3, p. 264–272, 2003.
- KIRSCH, U. A unified reanalysis approach for structural analysis, design, and optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 25, n. 2, p. 67–85, 2003.
- KIRSCH, U. *Reanalysis of structures: a unified approach for linear, nonlinear, static and dynamic systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008. v. 151.

- KIRSCH, U.; BOGOMOLNI, M. Error evaluation in approximate reanalysis of structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 28, n. 2-3, p. 77–86, 2004.
- KIRSCH, U.; BOGOMOLNI, M.; SHEINMAN, I. Nonlinear dynamic sensitivities of structures using combined approximations. *AIAA journal*, v. 44, n. 11, p. 2765–2772, 2006.
- KIRSCH, U.; KOČVARA, M.; ZOWE, J. Accurate reanalysis of structures by a preconditioned conjugate gradient method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 55, n. 2, p. 233–251, 2002.
- KIRSCH, U.; LIU, S. Structural reanalysis for general layout modifications. *AIAA journal*, v. 35, n. 2, p. 382–388, 1997.
- KIRSCH, U.; PAPALAMBROS, P. Y. Accurate displacement derivatives for structural optimization using approximate reanalysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 190, n. 31, p. 3945–3956, 2001.
- KIRSCH, U.; PAPALAMBROS, P. Y. Exact and accurate reanalysis of structures for geometrical changes. *Engineering with Computers*, Springer, v. 17, n. 4, p. 363–372, 2001.
- KIRSCH, U.; PAPALAMBROS, P. Y. Exact and accurate solutions in the approximate reanalysis of structures. *AIAA journal*, v. 39, n. 11, p. 2198–2205, 2001.
- KOZIEL, S.; MICHAŁEWICZ, Z. Evolutionary algorithms, homomorphous mappings, and constrained parameter optimization. *Evolutionary Computation*, v. 7, n. 1, p. 19–44, 1999.
- KUMAR, A. V. A sequential optimization algorithm using logarithmic barriers: applications to structural optimization. *Journal of Mechanical Design*, American Society of Mechanical Engineers, v. 122, n. 3, p. 271–277, 2000.
- LAGAROS, N. D.; PAPADRAKAKIS, M.; KOKOSSALAKIS, G. Structural optimization using evolutionary algorithms. *Computers & structures*, Elsevier, v. 80, n. 7, p. 571–589, 2002.
- LAMBERTI, L. An efficient simulated annealing algorithm for design optimization of truss structures. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 86, n. 19, p. 1936–1953, 2008.
- LEE, K. S.; GEEM, Z. W. A new structural optimization method based on the harmony search algorithm. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 82, n. 9, p. 781–798, 2004.
- LEMONGE, A. C.; BARBOSA, H. J.; BERNARDINO, H. S. Variants of an adaptive penalty scheme for steady-state genetic algorithms in engineering optimization. *Engineering Computations*, Emerald Group Publishing Limited, v. 32, n. 8, p. 2182–2215, 2015.
- LEMONGE, A. C. C.; BARBOSA, H. J. C. An adaptive penalty scheme for genetic algorithms in structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 59, n. 5, p. 703–736, 2004.

- LEMONGE, A. C. C.; BARBOSA, H. J. C.; BERNARDINO, H. S. A family of adaptive penalty schemes for steady-state genetic algorithms. In: IEEE. *Evolutionary Computation (CEC), 2012 IEEE Congress on.* [S.l.], 2012. p. 1–8.
- LEU, L.-J. A reduction method for boundary element reanalysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 178, n. 1, p. 125–139, 1998.
- LEU, L.-J.; HUANG, C.-W. A reduced basis method for geometric nonlinear analysis of structures. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, International Association for Shell and Spatial Structures, v. 39, n. 2, p. 71–76, 1998.
- LEVY, R.; SPILLERS, W. R. *Analysis of geometrically nonlinear structures.* [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- LIEPINS, G. E.; POTTER, W. D. A Genetic Algorithm Approach to Multiple-Fault Diagnosis. In: DAVIS, L. (Ed.). *Handbook of Genetic Algorithms.* New York, New York: Van Nostrand Reinhold, 1991. cap. 17, p. 237–250.
- LIN, C.-Y.; WU, W.-H. Self-organizing adaptive penalty strategy in constrained genetic search. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 26, n. 6, p. 417–428, 2004.
- LIU, H.; WU, B.; LI, Z. Preconditioned conjugate gradient method for static reanalysis with modifications of supports. *Journal of Engineering Mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 141, n. 2, p. 04014111, 2014.
- MECKESHEIMER, M. *et al.* Metamodeling of combined discrete/continuous responses. *AIAA journal*, v. 39, n. 10, p. 1950–1959, 2001.
- MEZURA-MONTES, E.; COELLO, C. A. C. Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: past, present and future. *Swarm and Evolutionary Computation*, Elsevier, v. 1, n. 4, p. 173–194, 2011.
- MICHALEWICZ, Z. *Genetic algorithms+ data structures= evolution programs.* [S.l.]: springer, 1996.
- MICHEU, A. M. the limits of economy of material in frame structure [j]. *Philosophical Magazine*, v. 8, n. 6, p. 589–597, 1904.
- MONTEMURRO, M.; VINCENTI, A.; VANNUCCI, P. The automatic dynamic penalisation method (adp) for handling constraints with genetic algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 256, p. 70–87, 2013.
- NOOR, A. K. Recent advances and applications of reduction methods. *Applied Mechanics Reviews*, American Society of Mechanical Engineers, v. 47, n. 5, p. 125–146, 1994.
- ORVOSH, D.; DAVIS, L. Using a Genetic Algorithm to Optimize Problems with Feasibility Constraints. In: *Proceedings of the First IEEE Conference on Evolutionary Computation.* [S.l.]: IEEE Press, 1994. p. 548–553.
- RASHEED, K.; NI, X.; VATTAM, S. Comparison of methods for developing dynamic reduced models for design optimization. *Soft Computing*, Springer, v. 9, n. 1, p. 29–37, 2005.

- REDDY, J. N. *An introduction to the finite element method*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1993. v. 2.
- RUNARSSON, T. P.; YAO, X. Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, v. 4, n. 3, p. 284–294, September 2000.
- SAITOU, K. *et al.* A survey of structural optimization in mechanical product development. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 5, n. 3, p. 214–226, 2005.
- SAKA, M.; ULKER, M. Optimum design of geometrically non-linear space trusses. *Computers and Structures*, v. 41, p. 1387–1396, 1991.
- SAKATA, S.; ASHIDA, F.; ZAKO, M. Structural optimization using kriging approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 192, n. 7, p. 923–939, 2003.
- SCHMIT, L. A.; FARSHI, B. Some approximation concepts for structural synthesis. *AIAA journal*, v. 12, n. 5, p. 692–699, 1974.
- SHERMAN, J.; MORRISON, W. J. Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, p. 124–127, 1950.
- SHOENAUER, M.; MICHALEWICZ, Z. Evolutionary computation at the edge of feasibility. In: RECHENBERG, H.-M. V. W. E. I.; SCHWEFEL, H.-P. (Ed.). *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN IV*. Berlin: Springer-Verlag, 1996. v. 1141, p. 245–254. LNCS.
- SILVA, M. M. *Otimização de estruturas reticuladas incluindo nao-linearidade geométrica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2011.
- SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, J.; HAFTKA, R. T. Multidisciplinary aerospace design optimization: survey of recent developments. *Structural optimization*, Springer, v. 14, n. 1, p. 1–23, 1997.
- SUN, R. *et al.* New adaptive technique of kirsch method for structural reanalysis. *AIAA journal*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 52, n. 3, p. 486–495, 2014.
- SURRY, P. D.; RADCLIFFE, N. J. The COMOGA Method: Constrained Optimisation by Multiobjective Genetic Algorithms. *Control and Cybernetics*, v. 26, n. 3, 1997.
- TEMÜR, R.; TÜRKAN, Y. S.; TOKLU, Y. C. Geometrically nonlinear analysis of trusses using particle swarm optimization. In: *Recent Advances in Swarm Intelligence and Evolutionary Computation*. [S.l.]: Springer, 2015. p. 283–300.
- TESSEMA, B.; YEN, G. G. A self adaptive penalty function based algorithm for constrained optimization. In: IEEE. *Evolutionary Computation, 2006. CEC 2006. IEEE Congress on*. [S.l.], 2006. p. 246–253.
- UNAL, R. *et al.* Approximation model building and multidisciplinary design optimization using response surface methods. *AIAA paper*, p. 96–4044, 1996.



- VINCENTI, A.; AHMADIAN, M. R.; VANNUCCI, P. Bianca: a genetic algorithm to solve hard combinatorial optimisation problems in engineering. *Journal of Global Optimization*, Springer, v. 48, n. 3, p. 399–421, 2010.
- WANG, Y. *et al.* Constrained optimization based on hybrid evolutionary algorithm and adaptive constraint-handling technique. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 37, n. 4, p. 395–413, 2009.
- WOODBURY, M. A. Inverting modified matrices. *Memorandum report*, Princeton University Princeton, NJ, v. 42, p. 106, 1950.
- WRIGHT, A. H. Genetic algorithms for real parameter optimization. *Foundations of genetic algorithms*, v. 1, p. 205–218, 1991.
- XU, T. *et al.* An adaptive reanalysis method for genetic algorithm with application to fast truss optimization. *Acta Mechanica Sinica*, Springer, v. 26, n. 2, p. 225–234, 2010.
- YANG, R.; CHUANG, C. Optimal topology design using linear programming. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 52, n. 2, p. 265–275, 1994.
- YANG, X.-S. Multiobjective firefly algorithm for continuous optimization. *Engineering with Computers*, Springer, v. 29, n. 2, p. 175–184, 2013.
- YEH, T.-P.; VANCE, J. M. Applying virtual reality techniques to sensitivity-based structural shape design. *Journal of Mechanical Design*, American Society of Mechanical Engineers, v. 120, n. 4, p. 612–619, 1998.