

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Paulo Roberto Fernandes Alves

Revelando a simetria de gauge do Modelo CFJ massivo através do formalismo  
Gauge Unfixing aprimorado

Juiz de Fora

2020

**Paulo Roberto Fernandes Alves**

**Revelando a simetria de gauge do Modelo CFJ massivo através do formalismo  
Gauge Unfixing aprimorado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr Jorge Ananias Neto

Coorientador: Prof. Dr Everton Murilo Carvalho de Abreu

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fernandes Alves, Paulo Roberto.

Revelando a simetria de gauge do Modelo CFJ massivo através do formalismo Gauge Unfixing aprimorado / Paulo Roberto Fernandes Alves. – 2020.

44 f.

Orientador: Jorge Ananias Neto

Coorientador: Everton Murilo Carvalho de Abreu

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física , 2020.

1. Gauge Unfixing. 2. Gauge Unfixing modificado. 3. Modelo Carroll-Field-Jackiw massivo. 4. Conversão de vínculos. 5. Simetrias de gauge. I. Ananias Neto, Jorge,II. Carvalho de Abreu, Everton, III. Título.

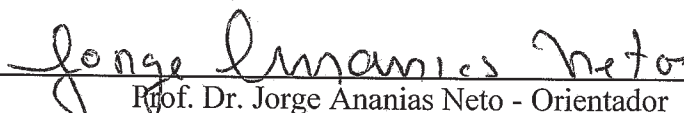
**Paulo Roberto Fernandes Alves**

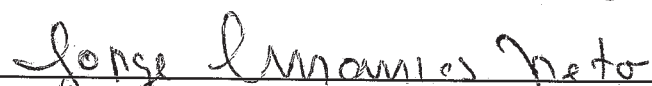
**“Revelando a Simetria de Gauge do Modelo CFJ Massivo através do Formalismo Gauge Unfixing aprimorado”.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Mestre em Física. Área de concentração: Física

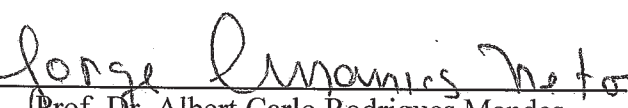
Aprovada em 22 de janeiro de 2021.

BANCA EXAMINADORA

  
Prof. Dr. Jorge Ananias Neto - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

  
Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu - Coorientador  
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ

  
Prof. Dr. Clifford Neves Pinto  
Universidade do estado do Rio de Janeiro - UERJ

  
Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes  
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Dedico esse trabalho a toda minha família, minha força exterior

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a toda minha família em especial meu pai José Luiz(in memoriam) e minha mãe Anelita, por todo o apoio e os ensinamentos para a vida.

A minha noiva Mayara Amanda, por todo apoio, por ter sido paciente e companheira mesmo nos momentos mais difíceis.

Aos meus irmãos, por sempre terem acreditado em mim.

Ao meu orientador Jorge Ananias Neto. Pela paciência, disposição, confiança e por todos os ensinamentos durante todo o curso de mestrado.

Ao meu coorientador Everton M.C. de Abreu. Pelos ensinamentos e pela disposição.

Ao meu amigo e professor Victor Otoyá, por sempre ter acreditado no meu potencial.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A todos que de forma direta ou indireta me apoiaram na conclusão do curso de mestrado. Meu sinceros agradecimento a todos! Obrigado!

"The amount of theoretical work ones has to cover before being able to solve problems of real practical value is rather large, but this circumstance is an inevitable consequence of the fundamental part played by transformation theory and is likely to become more pronounced in the theoretical physics of the future." (P.A.M. Dirac, do prefácio da primeira edição do livro *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, 1930).

## RESUMO

No presente trabalho de dissertação de mestrado, analisamos uma versão aprimorada do formalismo de Gauge Unfixing (GU) no modelo de Carroll-Field-Jackiw massivo, modelo esse que viola as invariâncias de Lorentz e de gauge, com o objetivo de revelar simetrias ocultas, e recuperar a invariância de gauge, que é um princípio fundamental do modelo padrão da física de partículas. Nesse processo, como é de costume, convertemos esse sistema com vínculos de segunda classe em um com vínculos de primeira classe, obtendo dois modelos invariantes de gauge. Verificamos que os parêntesis de Poisson das variáveis invariantes de gauge, obtidas por meio do formalismo GU, coincidem com os parêntesis de Dirac entre as variáveis originais de segunda classe do espaço de fase. Finalmente obtemos duas lagrangianas invariantes de gauge onde uma delas representa a forma de Stueckelberg. Também analisamos os aspectos gerais do modelo de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw massivo, como as equações de movimento, as ondas eletromagnéticas, modificadas pela presença do termo campo de fundo e o termo de Proca.

Palavras-chave: Gauge Unfixing. Gauge Unfixing aprimorado. Modelo Carroll-Field-Jackiw massivo.



## ABSTRACT

In the present dissertation work, we analyzed an improved version of gauge unfixing (GU) formalism in the massive Carroll-Field-Jackiw model, a model that violates Lorentz and gauge invariance, with the aim of revealing hidden symmetries, and recover gauge invariance, which is a fundamental principle of the standard model of particle physics. In this process, as usual, we convert this system with second-class constraints into one with first-class constraints, obtaining two invariant gauge models. We verified that the Poisson parentheses of the gauge invariant variables, obtained through the GU formalism, coincide with the Dirac parentheses between the original second class variables of the phase space. Finally we obtain two invariant Lagrangeans from gauge where one of them represents the form of Stueckelberg. We also analyzed the general aspects of the massive Maxwell-Carroll-Field-Jackiw model, such as the equations of motion, the electromagnetic waves, modified by the presence of the term background field and the Proca's term.

Keywords: Gauge Unfixing. Improved Gauge Unfixing. Carroll-Field-Jackiw model massive .

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFJ	Carroll-Field-Jackiw
LIV	Lorentz invariance violation
GU	Gauge unfixing
CPT	Charge, Parity and Time reversal symmetry
BFT	Batalin-Fradkin-Tyutin

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\{A, B\}_D$	Parentesis de Dirac.
$\{A, B\}$	Parentesis de Poisson.
$\epsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}$	Simbolo de Levi-Civita.
$\varepsilon$	Parâmetro infinitesimal associado às transformações de Gauge.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>O GAUGE UNFIXING . . . . .</b>	<b>13</b>
2.1	MÉTODO GU USUAL . . . . .	13
2.2	MÉTODO GAUGE UNFIXING MELHORADO . . . . .	14
2.2.1	Aplicação ao modelo Chern-Simons abeliano puro . . . . .	18
<b>3</b>	<b>MODELO CARROLL-FIELD-JACKIW MASSIVO . . . . .</b>	<b>22</b>
3.1	ASPECTOS CLÁSSICOS DO MODELO . . . . .	22
3.1.1	Equações de Maxwell modificadas . . . . .	22
3.1.2	Ondas eletromagnéticas . . . . .	23
3.1.3	Conservação da carga . . . . .	24
3.2	ESTRUTURA CANÔNICA DO MODELO . . . . .	24
<b>4</b>	<b>ADICIONANDO SIMETRIA DE GAUGE AO MODELO CFJ MASSIVO . . . . .</b>	<b>27</b>
4.1	Caso 1: $\pi_0$ como gerador de simetria . . . . .	27
4.2	Caso 2: $T_1$ como gerador de simetria . . . . .	31
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>37</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>39</b>
	<b>APÊNDICE A – FORMALISMO DE DIRAC PARA SISTE- MAS VINCULADOS . . . . .</b>	<b>41</b>
A.1	APLICAÇÃO A TEORIA DE MAXWELL . . . . .	42

## 1 INTRODUÇÃO

A covariância de Lorentz já foi exaustivamente testada e existem inúmeras evidências confirmadas com elevados níveis de precisão, que seja de fato uma simetria fundamental da natureza[1][9]. Entretanto uma questão figura em aberto: A covariância é uma simetria exata ou aproximada da natureza, *i.e.*, deve-se ainda verificar até que ponto esta simetria é válida. Isto equivale a impor limites máximos para uma eventual quebra da simetria de Lorentz [1][8]. O primeiro trabalho concebido no início da década de 1990 veio a partir de uma cooperação entre Sean M. Carroll, George B. Field e Roman Jackiw [8][9]. Estes propuseram um modelo teórico definido em (3+1) dimensões que foi concebido com base no eletromagnetismo de Maxwell mais um termo do tipo Chern-Simons,  $\epsilon_{\beta\alpha\rho\varphi} V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi}$ , no qual  $V^\beta$  é um campo de fundo vetorial constante. O termo de CFJ viola a simetria de Lorentz e CPT-ímpar(invariante perante a conjugação de carga, inversão de paridade e reversão temporal, exceto pela troca de sinais das equações do modelo) mas preserva a simetria de calibre [9] e é responsável por fornecer uma massa topológica [9] ao campo de calibre, alterando assim a taxa de espalhamento do fóton no vácuo [8]. Tipicamente, a simetria de Lorentz é quebrada pela presença do quadrivetor constante  $V^\mu = (v_0, \mathbf{V})$ , que introduz uma direção privilegiada no espaço-tempo [1][9].

Como dito anteriormente, um importante aspecto do Modelo CFJ é a simetria de gauge, o que na linguagem dos sistemas vinculados, via formalismo de Dirac demonstra que o modelo possui vínculos de primeira classe e portanto o parêntesis de Poisson desses vínculos é igual a zero. Por outro lado, quando adicionamos o termo de Proca Abeliano que concede uma massa  $m$  as excitações do campo  $A_\mu$ , teremos um modelo sem invariância de gauge e com dois vínculos de segunda classe, que são vínculos que possuem os parêntesis de Poisson não nulos entre si. Combinando a teoria CFJ com o modelo de Proca abeliano, temos um modelo em que tanto a invariância de Lorentz quanto a invariância de gauge são quebradas. Portanto, é possível descobrir as simetrias de gauge nesse novo modelo, tendo apenas que realizar a conversão desse sistema de segunda classe em um de primeira classe. Neste contexto, um formalismo que podemos mencionar é o Método de Batalin-Fradkin-Tuytin (BFT)[6], formulado com base em um espaço de fase estendido com a introdução de variáveis do tipo Wess-Zumino. Um outro formalismo com essa finalidade é o Gauge Unfixing(GU), onde todas as teorias de gauge são obtidas dentro do espaço de fase original das teorias com vínculos de segunda classe. O formalismo GU foi originalmente formulado por Mitra e Rajaraman[16] e continuado por Vytheeswaran[20]. Vale ressaltar que no método GU, não há a adição de variáveis extras ao espaço de fase, o que torna o procedimento extremamente útil.

O presente trabalho tem como objetivo principal revelar a simetria de gauge oculta do modelo massivo de Carroll-Field-Jackiw, além de discutir as implicações dessa nova simetria. Tal procedimento é realizado por meio do Formalismo GU aprimorado[2][3].

O método de GU aprimorado têm como principal diferença em relação ao GU usual, o fato de transformar diretamente as variáveis do espaço de fase e não as funções dessas variáveis. Além disso, também investigamos outros aspectos importantes do modelo, as equações de Maxwell modificadas e as equações de onda. O ponto de partida para todas essas investigações está na lagrangiana do modelo, formada pela combinação do termo do eletromagnetismo usual, o termo tipo Chern-Simons em  $(3+1)$  dimensões com o campo de fundo, e o termo de Proca. A organização da presente dissertação é feita da seguinte maneira, no capítulo 2 foi feita uma breve revisão dos métodos de Gauge Unfixing, usual e o aprimorado, para elucidar a diferença entre as duas ferramentas e suas bases teóricas, apresentando um exemplo de aplicação para o Gauge Unfixing modificado.

Posteriormente no capítulo 3, apresentamos alguns aspectos importantes do modelo, através da obtenção das equações de Maxwell modificadas, as equações de Onda e a estrutura canônica do modelo, com a obtenção do Momenta, da hamiltoniana Canônica, e os vínculos via procedimento de Dirac[12], foi também demonstrado que se trata de um sistema de Segunda classe, tornando possível a conversão para um sistema de primeira. No capítulo 4, foi utilizado o GU aprimorado para que obtivéssemos as variáveis do espaço de fase de primeira classe, o que possibilitou a construção das funções hamiltoniana e Lagrangiana de primeira classe, e por consequência, invariantes de gauge. Também foram obtidos os parêntesis de Poisson dessas novas variáveis para que fosse feita a comparação com os resultados obtidos pelo calculo dos parêntesis de Dirac[2][4] das variáveis originais. O capítulo em questão foi dividido em duas partes, onde na primeira foi usado um dos vínculos como gerador de simetria e o outro para construção das variáveis modificadas. Já na segunda parte invertemos a ordem dos vínculos. No capítulo 5, são apresentadas as principais conclusões da dissertação. Na presente dissertação foram usadas unidades naturais onde  $\hbar = c = 1$ .

## 2 O GAUGE UNFIXING

### 2.1 MÉTODO GU USUAL

Proposto por Mitra, Rajaraman, e Vytheeswaran[16][20], o método GU surge como uma alternativa elegante ao formalismo BFT [6], uma vez que não necessita da expansão do espaço de fase com variáveis extras. Para iniciar esse tratamento, deve-se considerar os vínculos de segunda classe do modelo a ser tratado, vínculos esses, obtidos via formalismo de Dirac para sistemas vinculados[12]. Caso existam mais de dois vínculos de segunda classe, deve-se verificar se temos um número par de restrições dessa natureza, em caso positivo, podemos apenas selecionar um par desses vínculos e prosseguir com o formalismo. Pode se escolher qualquer par de vínculos, desde que se possa formar com eles um par canônico conjugado. Se tivermos um número ímpar de vínculos de segunda classe, devemos combinar dois deles para que reste apenas um número par. A forma dessa combinação é livre, desde que a propriedade dos vínculos de segunda classe de possuir parêntesis de Poisson diferentes de zero seja respeitada[13][14]. Na subseção 2.2.1 é apresentado um caso onde temos mais de um par de vínculos de segunda classe.

Um dos dois vínculos deve ser usado como gerador de simetria e o outro usado na obtenção dos termos de fixação de gauge, fazendo com que a hamiltoniana de segunda classe seja modificada pelo vínculo escolhido como gerador de simetria, afim de que ela satisfaça a chamada Álgebra de primeira classe[2][3]. É importante mencionar que não existe uma regra para a escolha do gerador de simetria, dessa forma é interessante executar os cálculos para os dois casos e verificar o que fornece resultados mais interessantes.

Inicialmente deve-se considerar um sistema vinculado descrito por uma hamiltoniana de segunda classe  $H$  e um par de vínculos também de segunda classe,  $T_1$  e  $T_2$ . A ideia básica do formalismo GU está em selecionar um desses vínculos para ser o gerador de simetria, então, caso escolhamos  $T_1$  para fazer o papel de vínculo de primeira classe e gerador de simetria, é necessário redefini-lo na forma  $\tilde{T} \equiv \frac{T_1}{\Delta_{12}}$ , onde  $\Delta_{12} = \{T_1(x), T_2(y)\}$ . O segundo vínculo será descartado inicialmente, pois no momento seguinte o mesmo será usado na construção dos termos da série que corrigira a ausência da simetria de gauge. Dessa forma o parêntesis de Poisson entre  $\tilde{T}(x)$  e  $T_2(y)$  é  $\{\tilde{T}(x), T_2(y)\} = \delta^3(x - y)$ , logo  $\tilde{T}$  e  $T_2$  são conjugados canônicos. A hamiltoniana de segunda classe,  $H$ , deve ser modificada com o objetivo de satisfazer a álgebra de primeira classe, i.e.,  $\{\tilde{H}, \tilde{T}\} = 0$ , onde  $\tilde{H}$  é construído pela serie de potências em  $T_2$

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x) = & H(x) - \int d^3y T_2(y) \{\tilde{T}, H(x)\} \\ & + \frac{1}{2!} \int d^3y d^3z T_2(y) T_2(z) \{\tilde{T}, \{\tilde{T}(z), H(x)\}\} - \dots + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Essa hamiltoniana invariante de gauge,  $\tilde{H}$  pode ser escrita de forma elegante pela aplicação

de um operador projeção na hamiltoniana de segunda classe  $H$ [20][3]

$$\tilde{H} = e^{T_2 \tilde{T}_{op}} : H, \quad (2.2)$$

onde  $T_{op}H \equiv \{H(x), \tilde{T}(y)\}$ . E uma convenção importante a ser adotada, é que  $T_2$  deve vir antes do parêntesis de Poisson, pois o operador  $T_{op}$  não atuara em  $T_2$ . [3]. Para a obtenção da Lagrangiana invariante de gauge no método GU usual é usada a transformação de Legendre inversa  $\tilde{\mathcal{L}} = \pi_\mu \dot{A}^\mu - \tilde{\mathcal{H}}$ , onde  $\dot{A}_\mu$  deve ser obtido pela evolução temporal,  $\{A_\mu, \tilde{H}\}$ [16][20].

Com  $\tilde{H}$  obtido é possível encontrar de forma indireta o valor das variáveis invariantes de gauge se assumirmos que elas obedecem uma transformação do tipo  $\tilde{F} = F + \lambda$ , onde  $\lambda$  é o termo que corrige a ausência de simetria de gauge. Esse procedimento dificulta de certa forma a obtenção explícita das variáveis do espaço de fase que deveriam ser usadas nos parêntesis de Poisson para obtenção de novas relações de comutação. É nesse contexto que o método GU aprimorado é desenvolvido, uma vez que nele, as variáveis de primeira classe são modificadas diretamente, portanto são obtidas de maneira explícita, como será visto na seção 2.2.

## 2.2 MÉTODO GAUGE UNFIXING MELHORADO

O método GU aprimorado, assim como o usual, tem como principal vantagem em relação ao formalismo BFT[6], a não necessidade de inclusão de termos Wess-Zumino. Apesar de semelhantes o GU usual e o GU modificado diferem em um aspecto relevante. No primeiro corrigimos a variância de calibre diretamente na hamiltoniana de segunda classe. No segundo a modificação é feita nas variáveis do espaço de fase[2][3], como será apresentado mais a frente. Antes, é preciso que seja comprovada a validade desse procedimento. Para isso vamos considerar apenas as variáveis do espaço de fase original.

$$F = (\phi, \pi). \quad (2.3)$$

Na última seção foi apresentado o método onde o "gauging" do modelo é feito diretamente na função de segunda classe. Aqui o objetivo é construir essa função, fazendo esse "gauging" nas variáveis do espaço de fase. Denotando a função de primeira classe que desejamos construir

$$\tilde{F} = (\tilde{\phi}, \tilde{\pi}), \quad (2.4)$$

onde a função de primeira classe  $\tilde{F}$  é determinada em termos das variáveis originais do espaço de fase, pela imposição da condição variacional para sistemas de primeira classe[13].

$$\delta \tilde{F} = \varepsilon \{ \tilde{F}, \tilde{T} \} = 0, \quad (2.5)$$



onde  $\tilde{T}$  é o vínculo de segunda classe escolhido para ser o gerador de simetria e  $\varepsilon$  é um parâmetro infinitesimal. Usando a regra da cadeia para parêntesis de Poisson, temos que

$$\{\tilde{F}, \tilde{T}\} = \{\tilde{\phi}, \tilde{T}\} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\phi}} + \{\tilde{\pi}, \tilde{T}\} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\pi}}, \quad (2.6)$$

o que só é verdade se os parêntesis de Poisson contidos na segunda parte da igualdade, forem identicamente zero, o que já era esperado já que elas se tornaram variáveis de primeira classe. Consequentemente, conclui-se que é possível obter uma função invariante de gauge pela substituição

$$F(\phi, \pi) \rightarrow F(\tilde{\phi}, \tilde{\pi}) = \tilde{F}(\tilde{\phi}, \tilde{\pi}). \quad (2.7)$$

As variáveis invariantes de gauge são construídas, assim como as funções no GU usual[16][20], por meio de serie de potência integral em  $T_2$

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) + \int d^3y C_1(x, y) T_2(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) T_2(y) T_2(z) + \dots, \quad (2.8)$$

onde essa serie possui uma importante condição de contorno

$$\tilde{\phi}(x)(T_2 = 0) = \phi(x). \quad (2.9)$$

Essa condição (2.9) e a relação (2.7) mostram que, quando ao impor que o vinculo descartado  $T_2$ , seja igual a zero, obtemos o sistema de segunda classe original. Portanto, as relações (2.7) e (2.9) garantem a equivalência entre o modelo de primeira classe e o inicial, de segunda classe. Os coeficientes  $C_n$  na relação (2.8) são determinados pela condição variacional contida na expressão (2.5). Assim temos que

$$\delta \tilde{\phi}(x) = \delta \phi(x) + \delta \int d^3y C_1(x, y) T_2(y) + \delta \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) T_2(y) T_2(z) + \dots = 0,$$

resultando na expressão

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\phi}(x) = & \delta \phi(x) + \int d^3y \delta C_1(x, y) T_2(y) + \int d^3y C_1(x, y) \delta T_2(y) + \\ & + \int \int d^3y d^3z \delta C_2(x, y, z) T_2(y) T_2(z) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \delta T_2(y) T_2(z) \\ & + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \delta T_2(y) \delta T_2(z) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Os termos de ordem 1,2,3... n, devem ser identicamente zero, para que a variação de  $\phi$  seja zero. Os termos de ordem zero em  $T_2$

$$\delta \phi(x) + \int d^3y C_1(x, y) \delta T_2(y) = 0, \quad (2.11)$$

como  $\delta T_2 = \varepsilon \{T_2(y), \tilde{T}(x)\} = -\varepsilon \delta^3(y-x)$  e  $\delta \phi(x) = \varepsilon \{\phi(x), \tilde{T}(y)\}$ , que resulta em

$$\delta \phi(x) = \int d^3y C_1(x, y) \varepsilon \delta^3(y-x),$$

usando a propriedade de filtragem da função delta de Dirac, temos que o coeficiente  $C_1$  é dado por

$$C_1(x) = \frac{\delta \phi(x)}{\varepsilon}. \quad (2.12)$$

Os termos de ordem 1 em  $T_2$  são

$$\begin{aligned} & \int d^3y \delta C_1(x, y) T_2(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \delta T_2(y) T_2(z) + \\ & \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) T_2(y) \delta T_2(z) = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde  $\delta T_2(y) = \varepsilon \{T_2(y), \tilde{T}(x)\} = -\varepsilon \delta^3(y-x)$  e  $\delta T_2(z) = \varepsilon \{T_2(z), \tilde{T}(x)\} = -\varepsilon \delta^3(z-x)$ , então

$$\int d^3y \{\delta C_1(x, y) T_2(y) - 2\varepsilon C_2(x, y) T_2(y)\} = 0. \quad (2.14)$$

Essa integral só pode ser zero, caso o integrando também seja, o que implica em

$$\delta C_1(x, y) T_2(y) - 2\varepsilon C_2(x, y) T_2(y) = 0,$$

logo  $C_2(x, y)$

$$C_2(x, y) = \frac{\delta C_1(x, y)}{2\varepsilon} = \frac{\delta \delta \phi(x)}{2\varepsilon^2}. \quad (2.15)$$

Fazendo o mesmo procedimento para as ordens superiores de  $T_2$ , podemos obter uma relação para todos os coeficientes  $C_n$

$$C_n(x) = \frac{\delta^{(n)} \phi(x)}{n! \varepsilon^n}. \quad (2.16)$$

Agora é possível reescrever a expressão (2.8), já com os coeficientes  $C_n$

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(x) = & \phi(x) + \int d^3y \frac{\delta \phi(x)}{\varepsilon} T_2(y) \\ & + \int \int d^3y d^3z \frac{\delta \delta \phi(x)}{2\varepsilon^2} T_2(y) T_2(z) + \dots \\ & + \int \dots \int d^3y \dots d^3y_n \frac{\delta^{(n)} \phi(x)}{n! \varepsilon^n} T_2(y) \dots T_2(y_n). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sabendo que  $\delta \phi = \{\phi, \tilde{T}\}$ , e definindo a operação  $\tilde{\psi} \phi \equiv \{\phi, \tilde{T}\}$ , podemos definir o operador projeção

$$\mathbb{P} =: e^{\left[ \int d^3x T_2 \frac{\tilde{\psi}}{\varepsilon} \right]}, \quad (2.18)$$

o que permite que a variável modificada, agora de primeira classe, possa ser escrita da seguinte forma

$$\tilde{\phi} = e^{\left[ \int d^3x T_2 \frac{\tilde{\psi}}{\varepsilon} \right]} : \phi. \quad (2.19)$$

Devemos agora verificar, se essa forma de modificação das variáveis (por meio de uma série de potências do vínculo descartado) é coerente. Para isso consideremos dois campos genéricos,  $\tilde{F}(x)$  e  $\tilde{G}(x')$  de um sistema composto por dois vínculos de segunda classe  $T_1$  e  $T_2$  (gerador de simetria), com as seguintes formas

$$\tilde{F}(x) = F(x) + \int d^3y C_1(x, y) T_1(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) T_1(y) T_1(z) + \dots, \quad (2.20)$$

$$\tilde{G}(x') = G(x') + \int d^3y' C_1(x', y') T_1(y') + \int \int d^3y' d^3z' C_2(x', y', z') T_1(y') T_1(z') + \dots, \quad (2.21)$$

usando as expressões para os coeficientes  $C_n$  (2.16) da série, calculamos os parêntesis de Poisson entre (2.20) e (2.21)

$$\begin{aligned} \left\{ \tilde{F}(x), \tilde{G}(x') \right\} &= \left\{ F(x), G(x') \right\} + \int d^3y' \left\{ F(x), \frac{\delta G}{\varepsilon} T_1(y') \right\} \\ &+ \int d^3y' d^3z' \left\{ F(x), \frac{\delta \delta G}{2\varepsilon^2} T_1(y') T_1(z') \right\} + \dots \\ &+ \int d^3y \left\{ \frac{\delta F}{\varepsilon} T_1(y), G(x') \right\} + \int \int d^3y d^3y' \left\{ \frac{\delta F}{\varepsilon} T_1(y), \frac{\delta G}{\varepsilon} T_1(y') \right\} + \dots, \end{aligned} \quad (2.22)$$

que no limite  $T_1 \rightarrow 0$  se torna

$$\left\{ \tilde{F}(x), \tilde{G}(x') \right\}_{T_1 \rightarrow 0} = \left\{ F(x), G(x') \right\} + \int d^3y' \left\{ F(x), T_1(y') \right\} \frac{\delta G}{\varepsilon} + \int d^3y \frac{\delta F}{\varepsilon} \left\{ T_1(y), G(x') \right\}, \quad (2.23)$$

como  $\delta F = \varepsilon \left\{ F(x), \frac{T_2}{\{T_2, T_1\}} \right\}$ , levando a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \left\{ \tilde{F}(x), \tilde{G}(x') \right\}_{T_1 \rightarrow 0} &= \left\{ F(x), G(x') \right\} + \int d^3y' \left\{ F(x), T_1(y') \right\} \left\{ G(x'), \frac{T_2(y')}{\{T_2(x'), T_1(y')\}} \right\} \\ &+ \int d^3y \left\{ F(x), \frac{T_2(y)}{\{T_2(x), T_1(y)\}} \right\} \left\{ T_1(y), G(x') \right\}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \left\{ \tilde{F}(x), \tilde{G}(x') \right\}_{T_1 \rightarrow 0} &= \left\{ F(x), G(x') \right\} + \int d^3y' \frac{\left\{ F(x), T_1(y') \right\}}{\{T_2(x'), T_1(y')\}} \left\{ G(x'), T_2(y') \right\} \\ &+ \int d^3y \frac{\left\{ F(x), T_2(y) \right\}}{\{T_2(x), T_1(y)\}} \left\{ T_1(y), G(x') \right\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

A expressão (2.25) é a mesma obtida para os parenteses de Dirac de um sistema com dois vínculos de segunda classe, sendo assim também pode ser representada na forma

$$\left\{ \tilde{F}(x), \tilde{G}(x') \right\}_{T_1 \rightarrow 0} = \{F(x), G(x')\} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int d^3 y' \{F(x), T_i(y')\} (C_{ij})^{-1} \{G(x'), T_j(y')\}, \quad (2.26)$$

que é exatamente a definição dos parenteses de Dirac, o que nos permite concluir que  $\left\{ \tilde{F}(x), \tilde{G}(x') \right\}_{T_1 \rightarrow 0} = \{F(x), G(x')\}_D$  [3][18]. Assim, verificamos que na condição que estabelecemos, em que um dos vínculos será descartado ( $T_1 \rightarrow 0$ ), o formalismo GU aprimorado é totalmente compatível com o formalismo de Dirac para sistemas vinculados [12].

### 2.2.1 Aplicação ao modelo Chern-Simons abeliano puro

Para exemplificar o uso do método GU melhorado, será abordado o modelo Chern-Simons abeliano puro (CS) [3]. O modelo de CS, é um modelo em  $(2 + 1)$  dimensões, governado pela lagrangiana

$$L = \int d^2 x \frac{k}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho, \quad (2.27)$$

onde  $k$  é uma constante. A partir do formalismo de Dirac para sistemas vinculados [12] são obtidos os vínculos primários

$$\begin{aligned} T_0 &\equiv \pi_0 \approx 0 \\ T_i &\equiv \pi_i - \frac{k}{2} \epsilon_{ij} A^j \approx 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Usando a transformada de Legendre, a hamiltoniana canônica é

$$H_c = -k \int d^2 x A_0 \epsilon^{ij} \partial_i A_j. \quad (2.29)$$

e o vínculo secundário é dado por

$$T_3 \equiv k \epsilon^{ij} \partial_i A_j \approx 0. \quad (2.30)$$

Os vínculos,  $T_0, T_i$  e  $T_3$  são todos os vínculos do modelo. Os parêntesis de Poisson entre os pares de vínculos diferentes de zero são

$$\{T_i(x), T_3(y)\} = k \epsilon_{ji} \partial_j \delta^3(x - y), \quad (2.31)$$

$$\{T_i(x), T_j(y)\} = k \epsilon_{ij} \delta^3(x - y). \quad (2.32)$$

É possível notar que no modelo acima possuímos três vínculos de segunda classe, o que gera uma matriz  $C_{ab}$  3x3, com determinante zero, demonstrando que um dos vínculos é

supérfluo, portanto devemos eliminar um deles. É necessário então redefinir o vínculo da equação (2.30). A princípio, é sugerido a seguinte expressão

$$\tilde{T}_3 \equiv T_3 + \partial^i T_i = \partial^i \pi_i + \frac{k}{2} \epsilon^{ij} \partial_i A_j. \quad (2.33)$$

Agora podemos verificar uma mudança na estrutura de vínculos

$$\{T_i(x), \tilde{T}_3(y)\} = 0, \quad (2.34)$$

$$\{T_i(x), T_j(y)\} = k \epsilon_{ij} \delta^3(x - y) \quad (i, j = 1, 2), \quad (2.35)$$

$$\{T(x), T_3(y)\} = 0. \quad (2.36)$$

Conseqüentemente,  $T_0$  e  $\tilde{T}_3$  são vínculos de primeira classe e  $T_i(T_1, T_2)$  formam um par de vínculos de segunda classe. Escolhendo o gerador de simetria como

$$\tilde{T} = -\frac{T_1}{k} = -\frac{\pi_1}{k} + \frac{A_2}{2}, \quad (2.37)$$

onde se tem a seguinte álgebra  $\{\tilde{T}(x), T_2(y)\} = \delta^3(x - y)$ . O vínculo de segunda classe  $T_2 = \pi_2 + \frac{k}{2} A_1$  será descartado. As transformações de gauge geradas pelo gerador de simetria  $\tilde{T}$  são

$$\delta A_i = \varepsilon \{A_i(x), \tilde{T}(y)\} = -\frac{\varepsilon}{k} \delta_1^i \delta^3(x - y), \quad (2.38)$$

$$\delta \pi_i = \varepsilon \{\pi_i(x), \tilde{T}(y)\} = -\frac{\varepsilon}{2} \delta_i^2 \delta^3(x - y), \quad (2.39)$$

$$\delta T_2 = \varepsilon \{T_2(x), \tilde{T}(y)\} = -\varepsilon \delta^3(x - y). \quad (2.40)$$

O campo invariante de gauge  $\tilde{A}_i$  é construído através da expansão em  $T_2$ , i.e.,

$$\tilde{A}_i = A_i + b_1 T_2 + b_2 T_2^2 + \dots + b_n T_2^n. \quad (2.41)$$

Do princípio de variação mínima  $\delta \tilde{A}_i = 0$ , é possível calcular todos os termos de correção  $b_n$ . Para a correção do termo linear em  $T_2$  tem-se

$$\delta A_i + b_1 \delta T_2 = 0 \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{k} \delta_1^i \delta^3(x - y) - b_1 \varepsilon \delta^3(x - y) = 0 \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{k} \delta_1^i. \quad (2.42)$$

Para o termo quadrático, se obtêm  $b_2 = 0$ , deste que  $\delta b_1 = \varepsilon \{b_1, \tilde{T}\} = 0$ . Conseqüentemente, todos os termos de correção  $b_n$  para  $n \geq 2$  serão zero. Portanto, o campo invariante de gauge  $\tilde{A}_\mu$  será

$$\tilde{A}_0 = A_0, \quad \tilde{A}_i = A_i - \frac{1}{k} \delta_1^i T_2, \quad (2.43)$$

ou

$$\tilde{A}_0 = A_0, \quad (2.44)$$

$$\tilde{A}_1 = A_1 - \frac{1}{k} T_2, \quad (2.45)$$

$$\tilde{A}_2 = A_2, \quad (2.46)$$

onde pelo uso da eq. (2.38), é fácil mostrar que  $\delta\tilde{A}_\mu = 0$ . O campo invariante de gauge  $\tilde{\pi}_i$  será construído pela série de potências de  $T_2$

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i + c_1 T_2 + c_2 T_2^2 + \dots + c_n T_2^n. \quad (2.47)$$

Do princípio variacional  $\delta\tilde{\pi}_i = 0$ , o termo linear em  $T_2$  é

$$\delta\pi_i + c_1\delta T_2 = 0 \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2}\delta_i^2\delta^3(x-y) - c_1\varepsilon\delta^3(x-y) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}\delta_i^2. \quad (2.48)$$

Para o termo quadrático é obtido  $c_2 = 0$ , desde que  $\delta c_1 = \varepsilon\{c_1, \tilde{T}\} = 0$ . Consequentemente, todos os termos de correção  $c_n$  com  $n \geq 2$  serão zero. Portanto, o campo invariante de gauge  $\tilde{\pi}_i$  é

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i - \frac{1}{2}\delta_i^2 T_2, \quad (2.49)$$

ou

$$\tilde{\pi}_1 = \pi_1 \quad (2.50)$$

$$\tilde{\pi}_2 = \pi_2 - \frac{1}{2}T_2, \quad (2.51)$$

onde, pelo uso da eq. (2.39), é possível mostrar que  $\delta\tilde{\pi}_i = 0$ . Os parêntesis de Poisson dos campos invariantes de gauge serão

$$\{\tilde{A}^i(x), \tilde{A}^j(y)\} = \frac{1}{k}\epsilon^{ij}\delta^3(x-y), \quad (2.52)$$

$$\{\tilde{\pi}_i(x), \tilde{\pi}_j(y)\} = \frac{k}{4}\epsilon_{ij}\delta^3(x-y), \quad (2.53)$$

$$\{\tilde{A}^i(x), \tilde{\pi}_j(y)\} = \frac{1}{2}\delta_j^i\delta^3(x-y). \quad (2.54)$$

É possível observar que os parêntesis de Poisson das variáveis de primeira classe, Eqs. (2.52), (2.53) e (2.54), podem ser escritos como os parêntesis de Dirac das variáveis de segunda classe [19] desde que  $T_2 = 0$ . A hamiltoniana invariante de gauge, escrita apenas com as variáveis do espaço de fase, é obtida pela substituição de  $A_\mu$  por  $\tilde{A}^\mu$ , Eqs. (2.43) e (2.44), na hamiltoniana canônica, Eq. (2.29), de modo que

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= k \int d^2x \epsilon^{ij}\partial_i\tilde{A}^0 \tilde{A}_j = H_c + \int d^2x \partial^2 A_0 T_2 \\ &= \int d^2x [k\epsilon^{ij}\partial_i A_0 A_j + \partial^2 A_0 \pi_2 + \frac{k}{2}\partial^2 A_0 A_1]. \end{aligned} \quad (2.55)$$

É possível usar a condição de estabilidade de  $\pi_0$  ( $T_0 \equiv \pi_0$ )

$$\begin{aligned} \{\pi_0, \tilde{H}\} = 0 &\Rightarrow k\epsilon^{ij}\partial_i A_j + \partial^2 \pi_2 + \frac{k}{2}\partial^2 A_1 = k\epsilon^{ij}\partial_i A_j + \partial^2 T_2 = 0 \\ &\Rightarrow k\epsilon^{ij}\partial_i \tilde{A}_j = 0, \end{aligned} \quad (2.56)$$

então

$$\tilde{T}_3 \equiv k \epsilon^{ij} \partial_i \tilde{A}_j, \quad (2.57)$$

que é justamente o vínculo secundário, eq. (2.30), onde a substituição de  $A_i$  por  $\tilde{A}^i$ . A hamiltoniana invariante de gauge  $\tilde{H}$  e os vínculos  $T_0, \tilde{T}$  e  $\tilde{T}_3$  formam o conjunto com álgebra de primeira classe dado por [3]

$$\{\tilde{H}, \tilde{T}\} = 0, \quad (2.58)$$

$$\{\tilde{H}, T_0\} = \tilde{T}_3, \quad (2.59)$$

$$\{\tilde{H}, \tilde{T}_3\} = 0, \quad (2.60)$$

$$\{\tilde{T}, \tilde{T}_3\} = 0, \quad (2.61)$$

$$\{\tilde{T}, T_0\} = 0, \quad (2.62)$$

$$\{T_0, \tilde{T}_3\} = 0. \quad (2.63)$$

Para que os vínculos retornem a ser de segunda classe, basta apenas assumir  $T_2 = 0$ .

Finalmente, a lagrangiana invariante de gauge pode ser deduzida a partir da transformada de Legendre inversa  $\tilde{L} = \int d^2x (\tilde{\pi}_i \tilde{A}^i - \tilde{H})$ , com  $\tilde{H}$  é dado por eq. (2.55). A hamiltoniana invariante de gauge,  $\tilde{H}$ , deve obedecer a mesma forma funcional da Hamiltoniana canônica, eq. (2.29). Portanto, observando a transformação de Legendre inversa, é possível concluir que a lagrangiana de primeira classe obedece a mesma forma funcional da lagrangiana original. Logo, é intuitivo substituir as variáveis de primeira classe diretamente na lagrangiana  $\tilde{L} = \int d^2x \frac{k}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \tilde{A}_\mu \partial_\nu \tilde{A}_\rho$ . Usando as Eqs.(2.44), (2.45) e (2.46), a lagrangiana invariante de gauge, se torna

$$\begin{aligned} \tilde{L} = & \int d^2x \frac{k}{2} [A_0 \partial^1 A_2 - A_0 \partial^2 A_1 + \frac{1}{k} A_0 \partial^2 T_2 \\ & + A_1 \partial^2 A_0 - \frac{1}{k} T_2 \partial^2 A_0 - A_1 \partial^0 A_2 + \frac{1}{k} T_2 \partial^0 A_2 \\ & + A_2 \partial^0 A_1 - \frac{1}{k} A_2 \partial^0 T_2 - A_2 \partial^1 A_0]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

A equação de movimento gera uma relação para  $\partial^0 A_2$  dado por

$$\partial^0 A_2 = \{A_2, \tilde{H}\} = \partial^2 A_0. \quad (2.65)$$

Onde, usando eq. (2.65) na equação eq. (2.64), obtêm-se

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \int d^2x \frac{k}{2} \left[ A_0 \partial^1 A_2 - A_0 \partial^2 A_1 + A_1 \partial^2 A_0 - A_1 \partial^0 A_2 + A_2 \partial^0 A_1 - A_2 \partial^1 A_0 \right] \\ &= \int d^2x \frac{k}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu \partial^\nu A_\rho. \end{aligned} \quad (2.66)$$

É possível observar que a eq. (2.66), pode ser reduzida a lagrangiana original, eq. (2.27). A eq. (2.66) também é um resultado importante devido a ausência de termos extras na lagrangiana invariante de gauge e a transformação de gauge original  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$  certamente é mantida.

### 3 MODELO CARROLL-FIELD-JACKIW MASSIVO

#### 3.1 ASPECTOS CLÁSSICOS DO MODELO

No presente trabalho estudamos a eletrodinâmica de Maxwell combinada com o termo CFJ ( $\epsilon_{\beta\alpha\rho\varphi} V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi}$ ), e com o termo de Proca ( $m^2 A_\alpha A^\alpha$ ). No trabalho original [8], S.M Carrol, J. B. Field e Roman Jackiw adicionaram o termo tipo Chern-Simons à eletrodinâmica usual com o objetivo de estabelecer limites superiores para uma possível violação para a simetria de Lorentz. Busca essa baseada na observação de anomalias eletromagnéticas na luz emanada de Galaxias distantes como o fenômeno de birrefringência no vácuo [8]. Aqui serão obtidos aspectos clássicos tais como as equações de Maxwell modificadas e as equações de onda. A investigação desses aspectos é importante pois nos ajuda a entender como o termo de Proca e o termo CFJ alteram a dinâmica em relação a eletrodinâmica de Maxwell. A assinatura usada para os cálculos foi  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$ .

##### 3.1.1 Equações de Maxwell modificadas

A densidade lagrangiana, na presença do termo de fonte  $J_\alpha$  é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\nu} F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4} \epsilon_{\beta\alpha\rho\varphi} V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi} + m^2 A_\alpha A^\alpha + J_\alpha A^\alpha, \quad (3.1)$$

onde  $V_\beta = (v_0, \mathbf{V})$  é o chamado campo de fundo constante, responsável pela LIV. Da equação de Euler-Lagrange obtemos

$$\partial_\nu F^{\nu\alpha} + V_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta} + m^2 A^\alpha = -J^\alpha \quad (3.2)$$

$$\partial_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.3)$$

A eq. (3.2) é a equação de Maxwell modificada (forma tensorial) prevista pela eletrodinâmica de CFJ massiva. Verifica-se a presença explícita do campo  $V_\beta$  na eq. (3.2). A eq. (3.3) é a Identidade de Bianchi. Nestas equações, foram usadas as seguintes definições

$$F_{\nu\rho} = \partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu, \quad (3.4)$$

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\nu\rho} F_{\nu\rho}, \quad (3.5)$$

sendo  $F_{\nu\rho}$  o tensor de campo eletromagnético,  $\tilde{F}^{\alpha\beta}$  o tensor dual do campo eletromagnético e  $\epsilon^{\alpha\beta\nu\rho}$  o símbolo de Levy-Civita escrito em 4 dimensões. As equações (3.2) e (3.3) permitem obter a forma explícita das equações de Maxwell, escritas em termos dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , onde (3.2) dá origem as equações (3.6) e (3.7) e a equação (3.3) gera as equações (3.8) e (3.9)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{B} + m^2 A_0 = -\rho, \quad (3.6)$$



$$\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t E + v_0 \mathbf{B} - \mathbf{V} \times \mathbf{E} + m^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (3.9)$$

As Eqs.(3.6) e (3.7) são, respectivamente, as leis de Gauss (na qual  $\rho$  é a densidade de carga) e Ampère (na qual  $\mathbf{J}$  é a densidade de corrente) estendidas[1]. Por conta da presença dos campos de fundo, é impossível dissociar os campos elétrico e magnético. Nesta situação, uma densidade carga  $\rho$  será não somente fonte do campo elétrico, mas também do campo magnético. O que pode ser visto claramente observando à (3.6). De forma análoga podemos observar a mesma situação na eq. (3.7), onde a densidade de corrente  $\mathbf{J}$ , gera não somente campo magnético, mas também campo elétrico. E quando consideramos uma situação em que não existam fontes ( $\rho = 0$  e  $\mathbf{J} = 0$ ), é possível notar nas eq. (3.6) e (3.7) que campo magnético e elétrico atuam como fontes[1][9]. Outro aspecto importante reside no fato de que as equações (3.6) e (3.7), não são invariantes de gauge, devido a presença explícita do campo de gauge  $A^\mu = (A_0, \mathbf{A})$ [1].

### 3.1.2 Ondas eletromagnéticas

Como é sabido da eletrodinâmica usual, campos elétricos e magnéticos variáveis, se propagam através do espaço em forma de perturbações, denominadas ondas eletromagnéticas. O objetivo aqui é investigar os efeitos da quebra da S.L. e do termo de Proca também nas ondas eletromagnéticas e tais efeitos podem ser observados manipulando as equações (3.7) e (3.9) da seguinte forma

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B} - \partial_t E + v_0 \mathbf{B} - \mathbf{V} \times \mathbf{E} + m^2 \mathbf{A} = -\mathbf{J}), \quad (3.10)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}), \quad (3.11)$$

usando a identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

e as equações de campo modificadas (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9), na ausência de fontes ( $\rho = 0$  e  $\mathbf{J} = 0$ ), obtemos as equações de onda para os campos  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{E}$  respectivamente

$$(\square + m^2) \mathbf{B} + \mathbf{V}_0(\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{E}), \quad (3.12)$$

$$(\square + m^2) \mathbf{E} + \partial_t(\mathbf{V} \times \mathbf{E}) = \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{V}_0 \partial_t \mathbf{B}, \quad (3.13)$$

onde  $\square$  é o operador D'alembertiano. Nas equações de onda, da mesma forma que nas equações de campo, podemos notar a impossibilidade de separarmos  $\mathbf{B}$  de  $\mathbf{E}$ , um efeito claro da presença do campo de fundo  $V_\mu$ . O campo de fundo também concede outra característica importante as ondas eletromagnéticas do modelo, uma direção preferencial de propagação para os campos eletromagnéticos, uma clara manifestação da VSL. Outra importante consequência é a modificação que o termo de Proca provoca no operador de onda, uma vez que agora temos um operador tipo Klein-Gordon ( $\square + m^2$ ).

### 3.1.3 Conservação da carga

Sabemos que eventuais modificações feitas na eletrodinâmica usual, não podem violar alguns princípios básicos do eletromagnetismo, um desses princípios é a conservação da carga elétrica, que tem sua formulação matemática na equação de continuidade[2]

$$\partial_\mu J^\mu = \nabla \cdot \mathbf{J} + \partial_t \rho = 0. \quad (3.14)$$

Para obter a equação de continuidade, por meio das equações de Maxwell modificadas, devemos derivar com relação ao tempo a lei de Gauss (3.6)

$$\nabla \cdot (\partial_t \mathbf{E}) + \mathbf{V} \cdot (\partial_t \mathbf{B}) + m^2 \partial_t A_0 + \partial_t \rho = 0, \quad (3.15)$$

usando as equações (3.7), (3.8) e (3.9), chegamos a seguinte expressão

$$m^2(\partial_t A_0 + \nabla \cdot \mathbf{A}) + \partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (3.16)$$

os dois últimos termos da expressão (3.16) correspondem exatamente a equação de continuidade(3.14), o que nos leva a uma nova condição para a conservação da carga

$$\partial_t A_0 + \nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (3.17)$$

A equação (3.17) é chamada de calibre de Lorentz[9][10] e é uma das condições usadas para fixação de calibre nos modelos de eletrodinâmica com simetria de gauge. Sendo assim, notamos, que para que a carga se conserve dentro do modelo CFJ massivo uma nova condição surge, o calibre de Lorentz, logo dentro do modelo o Gauge já está fixado, característica de sistemas com vínculos de segunda classe e por essa razão devemos usar o formalismo de Gauge Unfixing.

## 3.2 ESTRUTURA CANÔNICA DO MODELO

Como já mencionado anteriormente, a eletrodinâmica CFJ massiva é composta pela eletrodinâmica de Maxwell mais os termos CFJ ( $\epsilon_{\beta\alpha\rho\varphi} V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi}$ ) e o termo de Proca

$(m^2 A_\alpha A^\alpha)$ . O primeiro termo (CFJ) é responsável pela violação de Lorentz e pela quebra de simetria CPT-Ímpar[1][9]. O segundo termo é o responsável por violar a simetria de gauge, o que nos diz que estamos lidando com um modelo com estrutura de vínculos de segunda classe, tornando viável a conversão para um sistema de primeira classe por meio do formalismo GU melhorado, no entanto, antes é necessário analisar a estrutura canônica do modelo, e tal análise começa na densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\nu}F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4}\epsilon_{\beta\alpha\rho\varphi}V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi} + m^2 A_\alpha A^\alpha, \quad (3.18)$$

de onde é possível calcular o momento canônico  $\pi^\mu$ :

$$\pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\alpha)} = F^{\alpha 0} + \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha 0\rho\varphi}V_\rho A_\varphi. \quad (3.19)$$

Rearranjando os termos usando a antissimetria de  $F^{\mu\nu}$  e  $\epsilon^{\alpha\beta\rho\varphi}$

$$\pi^\mu = -F^{0\mu} - \frac{1}{2}\epsilon^{0\mu\alpha\beta}V_\alpha A_\beta. \quad (3.20)$$

Da expressão do momento é obtido o parêntese de Poisson canônico

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x - y). \quad (3.21)$$

Na eq. (3.20) é fácil notar que  $\pi^0 = 0$ , uma vez que  $F^{00} = 0$  e  $\epsilon^{00\alpha\beta} = 0$ . Essa informação fornece o vínculo primário da teoria, uma vez que ele advém diretamente da definição do momento [12][17]. É possível então escreve-lo da seguinte forma  $T_0 \equiv \pi_0 \approx 0$ . (Dentro do formalismo de Dirac, o simbolo " $\approx$ " representa uma igualdade fraca, uma vez que  $\pi_0$  não será necessariamente zero dentro dos parêntesis de Poisson). O momento  $\pi^k$  é definido pela expressão

$$\pi_i = -(F_{0i} + \frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}V_j A_k) = -\dot{A}_i + \partial_i A_0 - \frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}V_j A_k. \quad (3.22)$$

Agora é necessário escrever a hamiltoniana canônica do modelo  $H_c$ , e tal procedimento deve ser realizado por meio da transformação de Legendre

$$H_c = \int d^3x \left\{ \dot{A}_\mu \pi^\mu - \mathcal{L} \right\}, \quad (3.23)$$

onde o  $\mathcal{L}$  corresponde a densidade lagrangiana descrita pela equação (3.1). Isso nos leva a seguinte expressão

$$\begin{aligned} H_c = \int d^3x \left\{ \dot{A}_0 \pi_0 - \dot{A}_i \pi_i - \frac{1}{4} (2F_{0i}F_{0i} + F_{ij}F_{ij}) \right. \\ \left. + \frac{1}{4}\epsilon_{0kij}V_0 A_k F_{ij} + \frac{1}{4}\epsilon_{0kij}V_k A_0 F_{ij} - \frac{1}{2}\epsilon_{0kij}V_k A_i F_{0j} + \right. \\ \left. - \frac{m^2}{2} (A_0^2 - A_i^2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

A hamiltoniana é uma função do espaço de fase, logo só pode conter variáveis desse espaço. Portanto variáveis exclusivamente do espaço de configurações ( $\partial_0 A_\mu$ ), devem ser removidas, e para isso devemos usar a expressão de momento (3.22) e a definição do campo elétrico em termos dos potenciais escalares e vetoriais ( $A_0, A_i$ )

$$E_i = F^{0i} = -\partial_i A_0 - \partial_0 A_i. \quad (3.25)$$

Substituindo  $\dot{A}_i = \partial_0 A_i$  na expressão (3.24), com o auxílio das expressões (3.22) e (3.25), obtemos a chamada hamiltoniana canônica do modelo de Carroll-Field-Jackiw massivo

$$\begin{aligned} H_c = \int dx^3 \left\{ \frac{1}{2}(\pi_k)^2 + A_0 \partial_k \pi_k + \frac{1}{4}(F_{jk})^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \pi_k \epsilon_{0kij} V_i A_j + \frac{1}{8} [\epsilon_{0kij} V_i A_j]^2 - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_0 A_k F_{ij} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k A_0 F_{ij} - \frac{m^2}{2} (A_0^2 - A_i^2) \right\}. \quad (3.26) \end{aligned}$$

Seguindo o procedimento de Dirac usual [12], deve-se introduzir a hamiltoniana primária ( $H_p$ ), formada pela adição da hamiltoniana canônica  $H_c$  com todos os vínculos primários,  $H_p = H_{can} + \int d^3x \lambda \pi_0$ , onde  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange. Pela teoria de sistemas vinculados, é sabido que os vínculos não evoluem no tempo [12][13][14], o que gera uma nova condição de consistência,  $\{T_0, H_p\} \approx 0$ , levando ao vínculo secundário  $T_1$ , onde  $T_0 = \pi_0$

$$T_1(x) = \{\pi_0(x), H_c(y)\} + \left\{ \pi_0(x), \int d^3y C(x, y) \pi_0(y) \right\} \approx 0, \quad (3.27)$$

que gera o vínculo secundário da teoria

$$T_1 = -\partial_k \pi_k - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k F_{ij} + m^2 A_0. \quad (3.28)$$

Para verificar a natureza dos vínculos da teoria, i.e., se são de segunda ou primeira classe, é necessário calcular os parêntesis de Poisson entre  $T_1$  e  $T_0$

$$\{T_0(x), T_1(y)\} = \left\{ \pi_0(x), -\partial_k \pi_k(y) - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k F_{ij}(y) + m^2 A_0(y) \right\} = -m^2 \delta^3(x-y), \quad (3.29)$$

Esse resultado (3.29) mostra que o modelo CFJ massivo possui uma estrutura de vínculos de segunda classe, característica relacionada a não existência da invariância de gauge.

## 4 ADICIONANDO SIMETRIA DE GAUGE AO MODELO CFJ MASSIVO

O nosso objetivo é recuperar a simetria de gauge do modelo CFJ massivo, por meio do método GU aprimorado[2][3][18]. Como já mencionado anteriormente, esse método se restringe a sistemas que possuam vínculos de segunda classe, o que foi provado na seção anterior.

Como ja mencionado na Introdução, esse capítulo foi dividido em duas seções, uma vez que o método GU aprimorado necessita que um dos vínculos seja usado como gerador de simetria e o outro, descartado inicialmente, seja usado na construção dos termos de fixação de calibre, i.e., teremos dois casos a serem estudados, o Caso 1 onde  $T_0$  será o gerador de simetria e o Caso 2 onde  $T_1$  será o gerador.

### 4.1 Caso 1: $\pi_0$ como gerador de simetria

Da equação (3.29) obtém-se  $\{T_0(x), T_1(y)\} = -m^2\delta^3(x-y)$ . Dessa forma é possível redefinir o vínculo  $T_0$  da seguinte forma

$$\tilde{T} = -\frac{T_0}{m^2}, \quad (4.1)$$

para que seja obtido o resultado

$$\{T_1(x), \tilde{T}(y)\} = -\delta^3(x-y). \quad (4.2)$$

A expressão (4.2) denota a variação de  $T_1$ , uma vez que as variáveis invariantes de gauge do espaço de fase,  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_i, \tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_i$ , podem ser construídas por meio de uma serie de potência de integrais em  $T_1$ . Para  $\tilde{A}_0$ , tem-se a seguinte série

$$\tilde{A}_0 = A_0 + \int d^3y C_1(x, y) T_1(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) T_1(y) T_1(z) + \dots \quad (4.3)$$

Todos os coeficientes,  $C_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  da série podem ser obtidos por meio da aplicação do princípio variacional à serie de  $\tilde{A}_0$

$$\delta\tilde{A}_0 = 0,$$

logo

$$\begin{aligned} \delta\tilde{A}_0 = & \delta A_0 + \int d^3y \delta C_1(x, y) T_1(y) + \\ & + \int d^3y C_1(x, y) \delta T_1(y) + \int \int d^3y d^3z \delta C_2(x, y, z) T_1(y) T_1(z) \\ & + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \delta T_1(y) T_1(z) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) T_1(y) \delta T_1(z) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Os termos da série devem ser agrupados de acordo com a sua potência em  $T_1$ , e esses termos devem ser individualmente zero, para que o princípio variacional seja atendido[13][14].

Tomando os termos com potência zero temos

$$\delta A_0 + \int d^3y C_1(x, y) \delta T_1(y) = 0. \quad (4.5)$$

A variação de  $T_1$  é

$$\delta T_1 = \varepsilon \{T_1, \tilde{T}\} = -\varepsilon \delta^3(x - y), \quad (4.6)$$

onde  $\tilde{T} = -\frac{T_0}{m^2}$ . Os resultados acima ao serem substituídos na expressão (4.5) resultam em

$$\delta A_0 - \int d^3y C_1(x, y) \varepsilon \delta^3(x - y) = 0, \quad (4.7)$$

onde quando usada a propriedade de filtragem da função delta de Dirac permite que se obtenha o valor de  $C_1$

$$C_1(x) = \frac{\delta A_0}{\varepsilon}. \quad (4.8)$$

Resultado esse que será usado na construção dos termos de fixação de gauge da variável.

Tomando os termos lineares em  $T_1$

$$\begin{aligned} & \int d^3y \delta C_1(x, y) T_1(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \delta T_1(y) T_1(z) + \\ & \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) T_1(y) \delta T_1(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde  $\delta T_1(y) = \varepsilon \{T_1(y), \tilde{T}(x)\} = -\varepsilon \delta^3(y - x)$  e  $\delta T_1(z) = \varepsilon \{T_1(z), \tilde{T}(x)\} = -\varepsilon \delta^3(z - x)$ .

Portanto

$$\int d^3y \{ \delta C_1(x, y) T_1(y) - 2\varepsilon C_2(x, y) T_1(y) \} = 0. \quad (4.10)$$

A integral acima só pode ser zero se o integrando entre as chaves também for

$$\delta C_1(x, y) T_1(y) - 2\varepsilon C_2(x, y) T_1(y) = 0. \quad (4.11)$$

Logo o coeficiente  $C_2$  pode ser expresso pela seguinte expressão

$$C_2 = \frac{\delta C_1(x, y)}{2\varepsilon} = \frac{\delta \delta A_0}{2\varepsilon^2} = \frac{1}{2\varepsilon^2} \varepsilon^2 \{ \{A_0, \tilde{T}\}, \tilde{T} \} = 0, \quad (4.12)$$

o que permite construir uma relação de recorrência para todos os  $C_n$ , dada por

$$C_n = \frac{\delta^{(n)} A_0}{n! \varepsilon^n}. \quad (4.13)$$

Vale ressaltar ainda que essa expressão é válida para o "gauging" de todas as variáveis do espaço de fase, desde que se substitua a variável na expressão pela que estiver sendo modificada no momento. Outro fato importante a ser mencionado é que  $C_n = 0$  para qualquer  $n \geq 2$ . Substituindo os resultados das expressões (4.8), (4.12), (4.13) em (4.3) temos que

$$\tilde{A}_0 = A_0 + \int d^3y \frac{\delta A_0}{\varepsilon} T_1(y), \quad (4.14)$$

onde  $\frac{\delta A_0}{\varepsilon} = \{A_0(y), \tilde{T}(x)\} = -\frac{1}{m^2}\delta^3(x-y)$ . O campo invariante de gauge  $\tilde{A}_0$  é denotado por

$$\tilde{A}_0 = A_0 - \frac{1}{m^2} \left\{ -\partial_k \pi_k - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k F_{ij} + m^2 A_0 \right\}, \quad (4.15)$$

simplicando essa expressão temos que

$$\tilde{A}_0 = \frac{1}{m^2} \left\{ \partial_k \pi_k + \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k F_{ij} \right\}. \quad (4.16)$$

A expressão (4.16) fornece a primeira variável invariante de gauge do modelo CFJ massivo. Um fato interessante nessa expressão é a não existência da variável original  $A_0$ , fato esse que mais a frente, impedirá que a covariância da lagrangiana do modelo seja recuperada[2]. Para  $A_i$ , tem-se a seguinte série

$$\tilde{A}_i = A_i + \int d^3y C_1(x, y) T_1(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) T_1(y) T_1(z) + \dots \quad (4.17)$$

Os coeficientes  $C_n$  da série, podem ser obtidos da mesma forma que no caso de  $A_0$ . Logo é usada a relação (4.13) para obtê-los

$$C_n = \frac{\delta^{(n)} A_i}{n! \varepsilon^n}. \quad (4.18)$$

Para  $n = 1$  será obtido o primeiro coeficiente da série

$$C_1 = \frac{\delta A_i}{\varepsilon} = \{A_i(x), \tilde{T}(y)\} = \left\{ A_i(x), -\frac{\pi_0(y)}{m^2} \right\} = 0. \quad (4.19)$$

Fica claro que os termos seguintes da série ( $C_2, C_3, \dots$ ) também serão nulos, o que implica na não modificação do campo  $\tilde{A}_i$ . Para  $\pi_0$  tem-se a seguinte série

$$\tilde{\pi}_0 = \pi_0 + \int d^3y C_1(x, y) T_1(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) T_1(y) T_1(z) + \dots, \quad (4.20)$$

onde os coeficientes vem dados pela relação

$$C_n = \frac{\delta^{(n)} \pi_0}{n! \varepsilon^n}. \quad (4.21)$$

Como  $\delta \pi_0 = \left\{ \pi_0(x), -\frac{\pi_0(x)}{m^2}(y) \right\} = 0$ , todos os coeficientes  $C_n$ , serão zero, o que implica na não modificação do campo  $\tilde{\pi}_0$ . Para  $\tilde{\pi}_i$ , os coeficientes  $C_n$  também serão zero, uma vez que  $\delta \pi_i = \left\{ \pi_i(x), -\frac{\pi_0(x)}{m^2}(y) \right\} = 0$ , dessa forma  $\tilde{\pi}_i$  também não será modificado, o que nos permite concluir que quando as variáveis tem variações iguais a zero ( $\delta G = 0$ ), temos obviamente uma variável de primeira classe, portanto que não carece de modificação. Logo as variáveis invariantes de gauge do modelo CFJ massivo ficam com a seguinte forma

$$\tilde{A}_0 = \frac{1}{m^2} \left\{ \partial_k \pi_k + \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k F_{ij} \right\}, \quad (4.22)$$

$$\tilde{A}_i = A_i, \quad (4.23)$$

$$\tilde{\pi}_0 = \pi_0, \quad (4.24)$$

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i. \quad (4.25)$$

Com as novas variáveis em mãos, agora é possível obter um importante resultado do modelo CFJ massivo, que são as novas relações comutação, dadas por

$$\begin{aligned} \{\tilde{A}_0(x), \tilde{A}_0(y)\} &= \{\tilde{\pi}_0(x), \tilde{\pi}_0(y)\} = \{\tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_0(y)\} \\ &= \{A_0(x), A_0(y)\}_{Dirac} = \{\pi_0(x), \pi_0(y)\}_{Dirac} = \{A_0(x), \pi_0(y)\}_{Dirac} = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\{\tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_i(y)\} = \{A_0(x), \pi_i(y)\}_{Dirac} = \frac{1}{2m^2} \epsilon_{0kil} V_k \partial_j \delta^3(x-y) \quad (4.27)$$

$$\{\tilde{A}_0(x), \tilde{A}_i(y)\} = \{A_0(x), A_i(y)\}_{Dirac} = \frac{1}{m^2} \partial_i \delta^3(x-y) \quad (4.28)$$

$$\{\tilde{A}_i(x), \tilde{\pi}_j(y)\} = \{A_i(x), \pi_j(y)\}_{Dirac} = \delta_{ij} \delta^3(x-y) \quad (4.29)$$

É importante ressaltar que em (4.27) e (4.28), surgem relações de não-comutatividade que com as variáveis originais não existiam, entretanto quando essas variáveis são modificadas via formalismo GU melhorado encontramos as mesmas relações encontradas quando usamos os parêntesis de Dirac[4][9] com as variáveis originais, o que demonstra a equivalência entre o formalismo de Dirac para sistemas vinculados[12] e o GU melhorado[2][3].

Outro importante aspecto a ser explorado é a construção das funções das variáveis modificadas que são a hamiltoniana e a lagrangiana. Essas novas funções podem ser obtidas pela substituição direta das variáveis originais por aquelas que foram resultado da aplicação do formalismo de GU aprimorado da seguinte forma

$$A_\mu, \pi_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu, \tilde{\pi}_\mu.$$

No presente caso, foi demonstrado que a única variável a ser modificada é  $A_0$ . Logo basta realizar a substituição  $A_0 \rightarrow \tilde{A}_0$ . Substituindo a expressão de  $\tilde{A}_0$  (4.16) na hamiltoniana canônica do modelo (3.26), temos

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{1}{2}(\pi_k^2) + \frac{1}{2m^2}(\partial_k \pi_k)^2 + \frac{1}{4m^2} \epsilon_{0ijk} V_k F_{jk} + \frac{1}{4}(F_{jk})^2 + \frac{1}{2} \pi_k \epsilon_{0kij} V_i A_j + \\ &+ \frac{1}{8}[\epsilon_{0kij} V_i A_j]^2 - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_0 A_k F_{ij} + \frac{1}{16m^2}[\epsilon_{0ijk} V_i F_{jk}]^2 + \frac{m^2}{2}(A_i)^2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

e que pode ser reescrita em uma forma mais elegante, em função do vínculo secundário(descartado),  $T_1$

$$\tilde{H} = H_c + \int d^3x \frac{T_1^2}{2m^2}. \quad (4.31)$$

E equação (4.31) é uma função de primeira classe e isso pode ser verificado por meio do calculo do parentese de Poisson da hamiltoniana modificada com o vinculo não descartado(o gerador de simetria  $\tilde{T}$ )

$$\{\tilde{H}, \tilde{T}\} = \{H_c, \tilde{T}\} + \int d^3x \left\{ \frac{T_1^2}{2m^2}, \tilde{T} \right\} = -\frac{T_1}{2m^2} + \frac{T_1}{2m^2} = 0. \quad (4.32)$$



a equação acima comprova que foi feita a conversão do sistema para um sistema de primeira classe, pois a definição de função de primeira classe é  $\{F, \tilde{T}\} \approx 0$ [13].

A lagrangiana invariante de gauge pode ser obtida por meio de sua forma funcional original (3.18), logo devemos realizar a substituição das variáveis invariantes de gauge pertencentes ao espaço de configurações diretamente na densidade lagrangiana inicial[2][3]. Assim, a densidade lagrangiana invariante de calibre pode ser inicialmente escrita com a seguinte forma

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}} = & -\frac{1}{4} \left( 2\tilde{F}_{0i}\tilde{F}_{0i} + \tilde{F}_{ij}\tilde{F}_{ij} \right) \\ & -\frac{1}{4} \left[ \epsilon^{0kij}V_0\tilde{A}_kF_{ij} - \epsilon^{0kij}V_k\tilde{A}_0\tilde{F}_{ij} + 2\epsilon^{0kij}V_k\tilde{A}_i\tilde{F}_{0j} \right] + \\ & + \frac{m^2}{2} \left[ \tilde{A}_0^2 - \tilde{A}_i^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Rescrevendo

$$\begin{aligned} \tilde{L} = \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2} \left( \partial_0 A_k - \partial_k \tilde{A}_0 \right) \left( \partial^0 A^k - \partial^k \tilde{A}^0 \right) - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V^0 A^k F^{ij} + \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V^k \tilde{A}^0 F^{ij} + \frac{1}{2} \epsilon_{0kij} V^k A^i \left( \partial^j \tilde{A}^0 - \partial^0 A^j \right) \right. \\ \left. + m^2 \tilde{A}_0 \tilde{A}^0 + m^2 A_i A^i \right\}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde os campos  $A_i$ ,  $\pi_0$ ,  $\pi_i$ , não sofrem modificações e  $\tilde{A}_0 = \frac{1}{m^2} \left\{ \partial_k \pi_k + \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k F_{ij} \right\}$ . Outro aspecto importante da equação (4.34), é que ela não pode ser reduzida a uma forma covariante devido a ausência explicita da variável  $A_0$ , o que não permite que recuperemos a forma de Stuckerberg[2][3][16]. Esse fato indica que embora tenhamos uma lagrangiana invariante de gauge, isso não pode ser confirmado de forma explícita por meio da transformação de gauge  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \lambda$ . Verificamos esse fato, pela própria estrutura da lagrangiana  $\tilde{L}$ , construída apenas por variáveis de primeira classe. Uma outra forma é averiguar essa invariância de gauge é nas equações de movimento geradas por  $\tilde{L}$ , o que não esta no escopo do presente trabalho.

## 4.2 Caso 2: $T_1$ como gerador de simetria

Na presente seção será feita a análise para o segundo caso do GU do modelo CFJ massivo, como ja mencionado anteriormente. Agora o vínculo que será usado como gerador de simetria será  $T_1$ , e  $T_0$  será utilizado na série de potências. Da equação (3.29), temos  $\{T_1(x), T_0(y)\} = m^2 \delta(x - y)$ . Logo  $T_1$  pode ser redefinido da seguinte forma

$$\tilde{T} = \frac{T_1}{m^2} = \frac{1}{m^2} \left\{ -\partial_k \pi_k - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k F_{ij} + m^2 A_0 \right\}, \quad (4.35)$$

para que  $\{\tilde{T}(x), T_0(y)\} = \delta(x - y)$ . Usando o mesmo procedimento aplicado na seção anterior é possível obter todas as variáveis de gauge. Começando por  $\tilde{A}_0$ , temos

$$\tilde{A}_0 = A_0 + \int d^3y C_1(x, y) \pi_0(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \pi_0(y) \pi_0(z) + \dots \quad (4.36)$$

Os coeficientes  $C_n$  podem ser determinados pela mesma relação obtida no Caso 1. Logo a relação para  $C_1$  é dada por

$$C_1 = \frac{\delta A_0(y)}{\varepsilon} = \{A_0(x), \tilde{T}(y)\} = 0.$$

Por consequência,  $C_2$  é dado por

$$C_2 = \frac{\delta^2 A_0(y)}{\varepsilon^2} = \left\{ \{A_0(x), \tilde{T}(y)\}, \tilde{T}(z) \right\} = 0.$$

É possível concluir que os coeficientes da equação (4.36) serão todos zero e portanto  $A_0$  não sofrerá modificações. Logo

$$\tilde{A}_0 = A_0. \quad (4.37)$$

Para  $\pi_0$ , temos

$$\tilde{\pi}_0 = \pi_0 + \int d^3y C_1(x, y) \pi_0(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \pi_0(y) \pi_0(z) + \dots \quad (4.38)$$

Usando a relação já conhecida para  $C_1$

$$C_1 = \frac{\delta \pi_0(x)}{\varepsilon} = \{\pi_0(x), \tilde{T}(y)\} = -\delta^3(x - y), \quad (4.39)$$

portanto  $C_2 = C_3 = \dots C_n = 0$ . Substituindo em (4.38)

$$\tilde{\pi}_0 = \pi_0 - \int d^3y \delta^3(x - y) \pi_0(y),$$

o que permite concluir que

$$\tilde{\pi}_0 = 0. \quad (4.40)$$

O resultado da expressão (4.40), demonstra a funcionalidade do método na conversão dos vínculos de segunda para primeira classe, pois agora, com as modificações geradas pelo GU melhorado  $\tilde{\pi}_0$ , deixa de ser um vínculo, agora ele é fortemente zero ( $\tilde{\pi}_0 = 0$ ) [2]. Podemos observar isso nos parentese de Poisson de  $\tilde{\pi}_0$  com qualquer quantidade

$$\{\tilde{\pi}_0(x), A(y)\} = 0. \quad (4.41)$$

Para  $A_i$ , temos

$$\tilde{A}_i = A_i + \int d^3y C_1(x, y) \pi_0(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x, y, z) \pi_0(y) \pi_0(z) + \dots \quad (4.42)$$

Como já mencionado anteriormente, a relação para  $C_n$  (4.13) é válida para todos os casos, desde que se use a variável correta. Para  $n = 1$  teremos

$$C_1 = \frac{\delta A_i(x)}{\varepsilon} = \{A_i(x), \tilde{T}(y)\} = -\frac{1}{m^2} \{A_i(x), \partial_k \pi_k\} = -\frac{1}{m^2} \partial_i \delta^3(x - y), \quad (4.43)$$

logo para  $C_2$

$$C_2 = \frac{\delta^{(2)} A_i}{2! \varepsilon^2} = \frac{\delta C_1}{2\varepsilon} = -\frac{1}{2m^2} \{\partial_i \delta^3(x - y), \tilde{T}(z)\} = 0. \quad (4.44)$$

portanto  $C_3 = \dots C_n = 0$ . Substituindo (4.43) em (4.42), obtêm-se

$$\tilde{A}_i = A_i - \frac{1}{m^2} \int d^3y \partial_i \delta^3(x-y) \pi_0(y),$$

onde se for usada a integração por partes e o teorema da divergência é possível recair na seguinte equação

$$\tilde{A}_i = A_i + \frac{1}{m^2} \int d^3y [\partial_i \pi_0(y)] \delta^3(x-y).$$

Logo,  $A_i$  adquire a seguinte forma

$$\tilde{A}_i = A_i + \frac{\partial_i \pi_0}{m^2}. \quad (4.45)$$

Para  $\pi_i$ , temos

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i + \int d^3y C_1(x,y) \pi_0(y) + \int \int d^3y d^3z C_2(x,y,z) \pi_0(y) \pi_0(z) + \dots \quad (4.46)$$

Usando novamente a relação para  $C_1$

$$C_1 = \frac{\delta \pi_i(x)}{\varepsilon} = \left\{ \pi_i(x), \tilde{T}(y) \right\} = - \left\{ \pi_i(x), \frac{1}{4m^2} \epsilon_{0klj} V_k F_{lj}(y) \right\}, \quad (4.47)$$

essa pode ser simplificada para a forma

$$C_1 = -\frac{1}{2m^2} \epsilon_{0kij} V_k \partial_j \delta^3(x-y), \quad (4.48)$$

Na simplificação na expressão (4.47) foi usada a propriedade de antissimetria por permutação de índices de  $\epsilon_{0ijk}$ , i.e.,  $\epsilon_{0ijk} = -\epsilon_{0ikj}$ . Da mesma forma que para as variáveis anteriores temos  $C_2 = C_3 = \dots C_n = 0$ . Logo é possível substituir o resultado (4.48) na expressão (4.46) o que permite que seja encontrada a nova variável  $\tilde{\pi}_i$

$$\tilde{\pi}_i = \pi_i + \frac{V_k}{2m^2} \epsilon_{0kil} \partial_l \pi_0. \quad (4.49)$$

Para a obtenção da equação (4.49) foi usada também a integração por partes e o teorema da divergência para a remoção da derivada da função delta ( $\partial_j \delta^3(x-y)$ ). Dessa forma, as novas variáveis são

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 &= A_0, \\ \tilde{A}_i &= A_i + \frac{\partial_i \pi_0}{m^2}, \\ \tilde{\pi}_0 &= 0, \\ \tilde{\pi}_i &= \pi_i + \frac{V_k}{2m^2} \epsilon_{0kil} \partial_l \pi_0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Com essas variáveis em mãos, é possível agora construir os parêntesis de Poisson da teoria

$$\begin{aligned} \left\{ \tilde{A}_0(x), \tilde{A}_0(y) \right\} &= \left\{ \tilde{\pi}_0(x), \tilde{\pi}_0(y) \right\} = \left\{ \tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_0(y) \right\} \\ &= \left\{ A_0(x), A_0(y) \right\}_{Dirac} = \left\{ \pi_0(x), \pi_0(y) \right\}_{Dirac} = \left\{ A_0(x), \pi_0(y) \right\}_{Dirac} = 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\left\{ \tilde{A}_0(x), \tilde{\pi}_i(y) \right\} = \left\{ A_0(x), \pi_i(y) \right\}_{Dirac} = \frac{1}{2m^2} \epsilon_{0kji} V_k \partial_j \delta^3(x-y) \quad (4.52)$$

$$\left\{ \tilde{A}_0(x), \tilde{A}_i(y) \right\} = \left\{ A_0(x), A_i(y) \right\}_{Dirac} = \frac{1}{m^2} \partial_i \delta^3(x-y) \quad (4.53)$$

$$\left\{ \tilde{A}_i(x), \tilde{\pi}_j(y) \right\} = \left\{ A_i(x), \pi_j(y) \right\}_{Dirac} = \delta_{ij} \delta^3(x-y) \quad (4.54)$$

Novamente é possível observar dois aspectos importantes, um deles é a equivalência entre o formalismo de Dirac para sistemas vinculados e o GU melhorado, uma vez que os resultados obtidos via parêntesis de Poisson das variáveis modificadas, são iguais aos obtidos por meio dos parêntesis de Dirac[2][9][4]. Novamente vemos surgir novas relações de não comutatividade como entre  $A_0$  e  $\pi_i$  e entre  $A_0$  e  $A_i$ [2]. Também é possível verificar que as relações (4.26) à (4.29) são as mesmas obtidas no Caso I, com  $T_0$  como gerador de simetria. Tal fato pode ser interpretado como uma equivalência entre os modelos encontrados nos dois casos.

O próximo passo é calcular as funções das novas variáveis,  $\tilde{H}(\tilde{A}_\mu, \tilde{\pi}_\mu)$  e  $\tilde{L}(\tilde{A}_\mu, \dot{\tilde{A}}_\mu)$ . Partindo da hamiltoniana modificada, os resultados do conjunto de equações (4.50) devem ser substituídos na expressão (3.26)

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \int dx^3 \left\{ \frac{1}{2}(\tilde{\pi}_k)^2 + \frac{1}{4}(\tilde{F}_{jk})^2 + \right. \\ \tilde{A}_0 \partial_k \tilde{\pi}_k + \frac{1}{2} \tilde{\pi}_k \epsilon_{0kij} V_i \tilde{A}_j + \frac{1}{8} [\epsilon_{0kij} V_i \tilde{A}_j]^2 - \\ \left. - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_0 \tilde{A}_k \tilde{F}_{ij} + \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k \tilde{A}_0 \tilde{F}_{ij} - \frac{m^2}{2} (\tilde{A}_0^2 - \tilde{A}_i^2) \right\}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \int dx^3 \left\{ \frac{1}{2}(\pi_k)^2 + A_0 \partial_k \pi_k + \frac{1}{4}(F_{jk})^2 + \frac{1}{2} \pi_k \epsilon_{0kij} V_i A_j + \right. \\ + \frac{1}{8} [\epsilon_{0kij} V_i A_j]^2 - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_0 A_k F_{ij} + \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k A_0 F_{ij} + \\ - \frac{m^2}{2} (A_0^2 - A_i^2) - \frac{1}{2m^2} \epsilon_{0kij} V_i \pi_k \partial_j \pi_0 - \frac{1}{4m^2} \epsilon_{0lkm} \epsilon_{0kij} A_j V_i V_l \partial_m \pi_0 + \\ + \frac{1}{4m^4} [\epsilon_{0klm} V_l \partial_m \pi_0]^2 - \frac{1}{4m^2} \epsilon_{0mkl} \epsilon_{0kij} V_i V_l A_j \partial_m \pi_0 + \frac{1}{8m^4} [\epsilon_{0kij} V_i \partial_j \pi_0]^2 + \\ \left. + \frac{1}{4m^2} \epsilon_{0kij} V_0 F_{ij} \partial_k \pi_0 + A_i \partial_i \pi_0 - \frac{1}{2m^2} [\partial_i \pi_0]^2 \right\}, \end{aligned}$$

o décimo e o décimo segundo termos se cancelam devido à propriedade de permutações de  $\epsilon_{0klm}$ , levando a

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \int dx^3 \left\{ \frac{1}{2}(\pi_k)^2 + A_0 \partial_k \pi_k + \frac{1}{4}(F_{jk})^2 + \frac{1}{2} \pi_k \epsilon_{0kij} V_i A_j + \right. \\ + \frac{1}{8} [\epsilon_{0kij} V_i A_j]^2 - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_0 A_k F_{ij} + \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k A_0 F_{ij} + \\ - \frac{m^2}{2} (A_0^2 - A_i^2) - \frac{1}{2m^2} \epsilon_{0kij} V_i \pi_k \partial_j \pi_0 + \\ + \frac{1}{4m^4} [\epsilon_{0klm} V_l \partial_m \pi_0]^2 + \frac{1}{8m^4} [\epsilon_{0kij} V_i \partial_j \pi_0]^2 + \\ \left. + \frac{1}{4m^2} \epsilon_{0kij} V_0 F_{ij} \partial_k \pi_0 + A_i \partial_i \pi_0 - \frac{1}{2m^2} [\partial_i \pi_0]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Escrevendo numa forma mais compacta temos

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \int dx^3 \left\{ \frac{1}{2} \tilde{\pi}_k \tilde{\pi}_k + A_0 \partial_k \tilde{\pi}_k + \frac{1}{4} F_{jk} F_{jk} + \frac{1}{2} \epsilon_{0kij} \tilde{\pi}_k V_i \tilde{A}_j \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \left[ \epsilon_{0kij} V_i \tilde{A}_j \right]^2 - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_0 \tilde{A}_k F_{ij} + \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k A_0 F_{ij} - \frac{m^2}{2} \left( A_0^2 - \tilde{A}_i^2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

As variáveis com "til" são as variáveis invariantes de gauge. A lagrangiana invariante de gauge pode ser obtida usando a mesma forma funcional da densidade lagrangiana original (3.18)[2][3], onde os campos iniciais  $(A_0, A_i)$ , de segunda classe são substituídos pelas novas variáveis (4.50) invariantes de gauge.

$$\tilde{L} = \int d^3x \left( -\frac{1}{4} \tilde{F}_{\alpha\nu} \tilde{F}^{\alpha\nu} - \frac{1}{4} \epsilon_{\beta\alpha\rho\varphi} V^\beta \tilde{A}^\alpha \tilde{F}^{\rho\varphi} + m^2 \tilde{A}_\alpha \tilde{A}^\alpha \right), \quad (4.58)$$

onde  $\tilde{F}_{\alpha\nu}$  na equação (4.58), é definido por

$$\tilde{F}_{\alpha\nu} = \partial_\alpha \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\alpha \quad (4.59)$$

usando a equação de movimento

$$\partial_0 \pi_0 = -\partial_k \pi_k - \frac{1}{4} \epsilon_{0kij} V_k F_{ij} + m^2 A_0 = 0, \quad (4.60)$$

podemos obter  $A_\mu$  na seguinte forma

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\mu &= A_\mu - \frac{1}{m^2} \partial_\mu \pi_0, \\ \tilde{A}_0 &= A_0 - \frac{1}{m^2} \partial_0 \pi_0, \\ \tilde{A}_i &= A_i + \frac{1}{m^2} \partial_i \pi_0, \end{aligned} \quad (4.61)$$

$F_{\alpha\nu}$  é um invariante de gauge, o que implica em

$$\tilde{F}_{\alpha\nu} = F_{\alpha\nu}. \quad (4.62)$$

Usando as equações (4.61) e (4.62), a lagrangiana invariante de gauge (4.58) pode ser escrita na forma

$$\tilde{L} = \int d^3x \left( -\frac{1}{4} F_{\alpha\nu} F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4} \epsilon_{\beta\alpha\rho\varphi} V^\beta (A^\alpha - \partial^\alpha \theta) F^{\rho\varphi} + \frac{m^2}{2} (A_\mu - \partial_\mu \theta) (A^\mu - \partial^\mu \theta) \right), \quad (4.63)$$

onde o  $\theta$  é definido por  $\theta \equiv \frac{\pi_0}{m^2}$ . Quando aplicamos a transformação  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \theta$ , podemos verificar que retornamos a lagrangiana original

$$\tilde{L} = \int d^3x \left( -\frac{1}{4} F_{\alpha\nu} F^{\alpha\nu} - \frac{1}{4} \epsilon_{\beta\alpha\rho\varphi} V^\beta A^\alpha F^{\rho\varphi} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \right), \quad (4.64)$$

onde o campo  $\theta$  é chamado de escalar de Stueckelberg. Logo notamos que tornamos  $L$  invariante perante as transformações de gauge desde que  $\Lambda \equiv \theta$ , condição que pode ser entendida como a fixação de gauge do modelo[14][13]. Essa lagrangiana é a mesma

encontrada por Vytheeswaran [20] para o modelo de Proca, somada ao termo que vem em consequência da Violação da Simetria de Lorentz(CFJ)[2].

Substituindo a nova expressão de  $\tilde{L}$  na equação de Euler-Lagrange, é possível obter a equação de movimento associada à ela

$$\partial_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\beta\nu\rho}V_\beta F_{\nu\rho} + m^2\tilde{A}^\mu = 0, \quad (4.65)$$

onde se aplicada a forma de  $\tilde{A}^\mu$  e a definição da transformação de gauge associada, retornamos a equação de movimento original

$$\partial_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\beta\nu\rho}V_\beta F_{\nu\rho} + m^2A^\mu = 0, \quad (4.66)$$

demonstrando que agora temos um modelo invariante perante a transformações de gauge do tipo  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu\Lambda$ , tanto em  $L$  quanto na equação de movimento, desde que  $\Lambda = \frac{\pi_0}{m^2}$ . Ainda vale ressaltar que todas as equações retornam a sua forma original pela condição de gauge ( $\pi_0 = 0$ )[17][20].

## 5 CONCLUSÃO

Em física teórica a construção de sistemas com invariância de gauge foi um dos aspectos mais relevantes de sua evolução e tornou possível a construção do Modelo Padrão da física de partículas. Em outras palavras, as teorias de gauge têm um papel relevante na discussão das interações físicas fundamentais. É importante mencionar que, devido a presença de simetrias esses sistemas invariantes gauge podem descrever os modelos teóricos em uma abordagem mais completa.

Na presente dissertação, foram analisados diversos aspectos do modelo CFJ massivo tais como, as equações de Maxwell modificadas, as equações de Onda e o aspecto mais relevante, foi a discussão sobre a invariância de gauge do modelo, causada pela presença do termo de Proca ( $m^2 A_\mu A^\mu$ ). Através do formalismo GU melhorado foi possível recuperar a invariância de gauge do modelo, uma vez que o método consiste em converter vínculos de segunda classe para primeira. Esses vínculos de primeira classe estão associados a sistemas com simetrias de gauge [2][13][14]. O formalismo também foi utilizado para revelar simetrias ocultas que residem dentro do modelo CFJ massivo. O método fornece esses resultados convertendo o modelo CFJ massivo, que é um sistema de segunda classe, em um de primeira classe, i.e., em um sistema invariante de calibre. Tal procedimento nos levou a dois modelos com hamiltonianas e lagrangianas distintas, mas com as relações de comutação entre as variáveis canônicas equivalentes. Vale mencionar ainda que a lagrangiana encontrada no Caso I possui problemas uma vez que não podemos notar a invariância de gauge de forma explícita, assim como ocorre no Caso II, entretanto essa simetria existe pois construímos  $\tilde{L}$  apenas com variáveis de primeira classe.

No Caso I ainda resta verificar se a modificação feita em  $L$  por meio do formalismo GU, afeta também as equações de movimento, o que poderá ser feito em um trabalho futuro. Já para  $\tilde{L}$  do Caso II não é necessário realizar esse procedimento, uma vez que conseguimos recuperar a forma original de  $L$  o que nos leva as mesmas equações de movimento do modelo original.

O formalismo tem a vantagem de não introduzir variáveis extras, portanto apenas as variáveis originais do espaço de fase são utilizadas o que leva a preservação dos graus de liberdade do sistema inicial, e tal fato poder ser verificado por meio da formula de contagem de graus de liberdade [2][13][14],  $N_{gl} = N_v - N_{sc} - 2N_{pc}$  onde  $N_{gl}$  é o número de graus de liberdade,  $N_v$  é o número total de variáveis canônicas e  $N_{sc}$  e  $N_{pc}$  são os números de vínculos de segunda e primeira classe, respectivamente. Outro importante aspecto a ser mencionado é que devido a obtenção direta das variáveis invariantes de gauge, foi possível recuperar de forma simples a lagrangiana e a hamiltoniana invariantes de gauge, uma vez que apenas fizemos uma substituição do tipo  $A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu$ . Portanto foram obtidas duas lagrangianas invariantes de gauge do modelo CFJ massivo (Casos I e II) e os resultados

obtidos foram coerentes.

Também foi demonstrado a eficiência do método quando através dos parêntesis de Poisson das variáveis modificadas foram obtidos os mesmos resultados de quando fazemos os cálculos usando o os parêntesis de Dirac das variáveis originais. Uma implicação importante na presente dissertação é a possibilidade se trabalhar com vários outros modelos teóricos com vínculos de segunda classe, tais como modelos não-abelianos e modelos com derivada de segunda ordem nos campos. Como já dito anteriormente, uma das vantagens do método é a não inclusão de variáveis extras como no métodos BFT[5][7], quando consideramos o método de Dirac o calculo da matriz  $C_{ab}$  inversa[12][17] pode ser trabalhoso, e que pode ser contornado por meio do formalismo GU melhorado.



## REFERÊNCIAS

- [1] Alves, P. R. F. & Otoya, V. J. V. ASPECTOS CLÁSSICOS DA ELETRODINÂMICA DE CARROLL-FIELD-JACKIW-Classical Aspects of Electrodynamics of Carroll-Field-Jackiw. *Multiverso: Revista Eletrônica do Campus Juiz de Fora-IF Sudeste MG*, **2016**, 1, 1-16
- [2] Alves, P. R. F.; Costa, C. N.; Abreu, E. M. C.; Neto, J. A. & Mendes, A. C. R. Revealing hidden symmetries and gauge invariance of the massive Carroll-Field-Jackiw model. *EPL (Europhysics Letters)*, IOP Publishing, **2020**, 131, 31004
- [3] Ananias Neto, J. An improved gauge unfixing formalism and the abelian pure chern simons theory. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, **2007**, 37, 1106-1110
- [4] Apaza, Y. S. Quantização de Dirac do modelo Maxwell-Carroll-Field-Jackiw. Universidade Federal de Juiz de Fora, Universidade Federal de Juiz de Fora, **2018**
- [5] Batalin, I. A. & Fradkin, E. Operational quantization of dynamical systems subject to second class constraints. *Nuclear Physics B*, Elsevier, **1987**, 279, 514-528
- [6] Batalin, I. & Tyutin, I. An infinite algebra of quantum Dirac brackets. *Nuclear Physics B*, Elsevier, **1992**, 381, 619-640
- [7] Batalin, I. A. & Tyutin, I. V. Existence theorem for the effective gauge algebra in the generalized canonical formalism with abelian conversion of second-class constraints. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, **1991**, 6, 3255-3282.
- [8] Carroll, S. M.; Field, G. B. & Jackiw, R. Limits on a Lorentz-and parity-violating modification of electrodynamics. *Physical Review D*, APS, **1990**, 41, 1231.
- [9] Casana, R.; Ferreira Jr, M. M. & Rodrigues, J. S. Lorentz-violating contributions of the Carroll-Field-Jackiw model to the CMB anisotropy. *Physical Review D*, APS, **2008**, 78, 125013
- [10] Das, A. Lectures on quantum field theory. World Scientific, **2020**
- [11] Deser, S.; Jackiw, R. & Templeton, S. Topologically Massive gauge Theories *Annals of Physics*. Elsevier BV, **2000**, 281, 409-449.
- [12] Dirac, P. A. M. Lectures on quantum mechanics Courier Corporation, **2001**, 2.
- [13] Henneaux, M. & Teitelboim, C. Quantization of gauge systems Princeton university press, **1994**
- [14] Henneaux, M.; Teitelboim, C. & Zanelli, J. gauge invariance and degree of freedom count. *Nuclear Physics B*, Elsevier, **1990**, 332, 169-188
- [15] Martinez-Fernandez, J. & Wotzasek, C. Constrained quantization of a topologically massive gauge theory in  $(2+ 1)$ -dimensions. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, Springer, **1989**, 43, 305-312
- [16] Mitra, P. & Rajaraman, R. New results on systems with second-class constraints. *Annals of Physics*, Elsevier, **1990**, 203, 137-156

- [17] Neto, J. B. Matemática Para Físicos com Aplicações: Vetores, Tensores e Spinors Livraria da Física, **2010**, 2
- [18] Neto, J. A. The Gauge Unfixing Formalism and the Solutions of the Dirac Bracket Commutators. arXiv preprint arXiv:0904.4711, **2009**
- [19] Park, M.-I. & Park, Y.-J. Note on the Abelian pure CS theory based on the improved BFT method. arXiv preprint hep-th/9711142, **1997**
- [20] Vytheeswaran, A. S. gauge invariances in the Proca model. International Journal of Modern Physics A, World Scientific, **1998**, 13, 765-778

## APÊNDICE A – FORMALISMO DE DIRAC PARA SISTEMAS VINCULADOS

Notando que o sistema apresenta graus de liberdade que não são independentes, o método de Dirac se desenvolve, basicamente, mantendo as equações de vínculo (e com isso, as variáveis dependentes) e no final do processo, essas equações de vínculos são anuladas.

Como a matriz jacobiana não é invertível no caso de sistemas vinculados, podemos definir uma nova hamiltoniana que leva em conta os vínculos primários. Esta hamiltoniana é chamada hamiltoniana primária

$$H_p = H_c + \lambda_r \phi_r, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\lambda_r$  são os **multiplicadores de Lagrange**.

Por questão de consistência, os vínculos da teoria deveriam ser independentes do tempo. Calculando a evolução temporal do vínculo primário

$$\dot{\phi}_r = \{\phi_r, H_p\} \quad (\text{A.2})$$

$$= \{\phi_r, H_c + \lambda_s \phi_s\} \quad (\text{A.3})$$

$$= \{\phi_r, H_c\} + \lambda_s \{\phi_r, \phi_s\} \quad (\text{A.4})$$

$$\approx 0.$$

Aqui, temos duas possibilidades: ou a equação (2.84) nos fornecerá os multiplicadores de Lagrange (isso ocorrerá quando  $\{\phi_r, \phi_s\} \neq 0$ ) ou pode acontecer de gerar uma nova equação de vínculo. Esse vínculo oriundo da evolução temporal do vínculo primário é chamado vínculo secundário. Em seguida, calcula-se a evolução temporal do vínculo secundário. Daí, será determinado o multiplicador de Lagrange ou um novo vínculo, chamado vínculo terciário. O processo continua até que se determine todos os multiplicadores de Lagrange.

Entretanto, pode acontecer da evolução temporal dos vínculos ser fracamente igual a zero e os multiplicadores de Lagrange não serem determinados. Neste caso, o método de Dirac prevê que podemos fixar o gauge e com isso gerar novas equações de vínculo [10][17]. A fixação do gauge tornará os vínculos de primeira classe em vínculos de segunda classe vínculos de primeira classe são vínculos que possuem parêntese de Poisson nulo com todos os outros vínculos da teoria. Por sua vez, vínculos de segunda classe são vínculos que não satisfazem essa condição. Tendo os vínculos de primeira classe sido transformados em vínculos de segunda classe, podemos obter a matriz de vínculos, invertê-la e calcular os parênteses de Dirac:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_a\} C_{ab}^{-1} \{\phi_b, B\} \quad (\text{A.5})$$

## A.1 APLICAÇÃO A TEORIA DE MAXWELL

Considere a seguinte densidade lagrangiana, que representa a teoria de Maxwell [10]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (\text{A.6})$$

Os momentos canônicos são:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} \quad (\text{A.7})$$

Assim, temos:

$$\pi^0 = -F^{00} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\pi^i = -F^{0i} = E \quad (\text{A.9})$$

Isso nos diz que a teoria tem o primeiro vínculo dado por:

$$\phi^1 = \pi^0 \approx 0. \quad (\text{A.10})$$

A densidade hamiltoniana canônica é

$$\mathcal{H} = \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\pi^2 + B^2) + \pi \cdot \nabla A_0. \quad (\text{A.11})$$

A hamiltoniana é:

$$H = \int d^3x \left( \frac{1}{2}(\pi^2 + B^2) + \pi \cdot \nabla A_0 \right). \quad (\text{A.12})$$

Integrando o segundo termo por partes e desprezando a divergência total, temos:

$$H = \int d^3x \left( \frac{1}{2}(\pi^2 + B^2) + A_0 \nabla \cdot \pi \right) \quad (\text{A.13})$$

A hamiltoniana primária é, adicionando o vínculo primário:

$$H_p = \int d^3x \left( \frac{1}{2}(\pi^2 + B^2) + A_0 \nabla \cdot \pi + \lambda_1 \pi^0 \right). \quad (\text{A.14})$$

, onde  $\lambda_1$  é o multiplicador da teoria.

Os parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas da teoria são:

$$\{A_\mu, A_\nu\} = \{\pi^\mu, \pi^\nu\} = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\{A_\mu, \pi^\nu\} = \delta_\mu^\nu \delta^{(3)}. \quad (\text{A.16})$$

Com o auxílio destes parênteses de Poisson, podemos calcular a evolução temporal do vínculo primário, requerindo que o vínculo seja independente do tempo:

$$\dot{\phi}^1 = \{\phi^1, H_p\} = \nabla \cdot \pi \approx 0. \quad (\text{A.17})$$

Portanto, temos um vínculo secundário na teoria dado por

$$\phi^2 = \nabla \cdot \pi \approx 0. \quad (\text{A.18})$$

Calculando a evolução temporal do vínculo secundário, obtemos:

$$\dot{\phi}^2 = \{\phi^2, H_T\} \approx 0 \quad (\text{A.19})$$

e o processo termina. Portanto, a teoria de Maxwell possui dois vínculos:

$$\phi^1 = \pi^0 \approx 0, \quad \phi^2 = \nabla \cdot \pi \approx 0. \quad (\text{A.20})$$

Estes dois vínculos são vínculos de primeira classe, pois

$$\{\phi^1, \phi^2\} = \{\pi^0, \nabla \cdot \pi\} = 0. \quad (\text{A.21})$$

O multiplicador de Lagrange  $\lambda_1$  permanece indeterminado. O método de Dirac prevê que podemos adicionar condições de fixação de calibre para transformar os vínculos de primeira classe em vínculos de segunda classe. Escolhendo o calibre de Coulomb,

$$\phi^4 = \nabla \cdot A \approx 0, \quad (\text{A.22})$$

podemos transformar os vínculos  $\phi^1$  e  $\phi^2$  em vínculos de segunda classe. Calculando a evolução temporal de  $\phi^4$ , temos:

$$\dot{\phi}^4 = \{\phi^4, H_T\} \quad (\text{A.23})$$

$$= \nabla^2 A_0 \approx 0 = \phi^3. \quad (\text{A.24})$$

Ao calcular os parênteses de Poisson de todos os vínculos da teoria, notamos que  $\phi^3$  e  $\phi^4$  transformam, respectivamente,  $\phi^1$  e  $\phi^2$  em vínculos de segunda classe:

$$\{\phi^1, \phi^3\} = \{\pi^0, \nabla^2 A_0\} = -\nabla_x^2 \delta^{(3)}(x - y) \quad (\text{A.25})$$

$$\{\phi^2, \phi^4\} = \{\nabla \cdot \pi, \nabla \cdot A\} = -\nabla_x^2 \delta^{(3)}(x - y). \quad (\text{A.26})$$

Tendo os vínculos de primeira classe sido transformados em vínculos de segunda classe, estamos aptos à calcular a matriz dos vínculos, dada por:

$$C^{ab} = \{\phi^a, \phi^b\} \quad (\text{A.27})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nabla_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_x^2 \\ \nabla_x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x - y). \quad (\text{A.28})$$

A inversa desta matriz é:

$$C^{ab} = \{\phi^a, \phi^b\} \quad (\text{A.29})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nabla_x^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_x^{-2} \\ -\nabla_x^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nabla_x^{-2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x-y), \quad (\text{A.30})$$

onde

$$\nabla_x^{-2} \delta^{(3)}(x-y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|} \quad (\text{A.31})$$

é a função de Green, com a condição de que os campos são nulos no infinito [10]. Obtida a inversa da matriz de vínculos, podemos calcular os parênteses de Dirac da teoria, os quais são:

$$\{A_i, A_j\}_D = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$\{A_i, \pi^j\}_D = \left( \delta_j^i - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) \delta^{(3)}(x-y) \quad (\text{A.33})$$

$$\{\pi^i, \pi^j\}_D = 0 \quad (\text{A.34})$$

Agora que os parênteses de Dirac da teoria foram obtidos, podemos igualar as equações de vínculo a zero, e a hamiltoniana da teoria se torna:

$$H_p = \int d^3x \left( \frac{1}{2} (\pi^2 + B^2) \right) \quad (\text{A.35})$$