Universidade Federal de Juiz de Fora

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Brasilio Alves Freitas

Introdução à Geometria Euclidiana Axiomática com o Geogebra

Juiz de Fora

2013

Brasilio Alves Freitas

Introdução à Geometria Euclidiana Axiomática com o Geogebra

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), na Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, na área de Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki

Juiz de Fora

2013

Freitas, Brasilio Alves.

Introdução à Geometria Euclidiana Axiomática com o Geogebra.
Brasilio Alves Freitas. - 2013.
61f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)
Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

1. Axiomas. 2. Geometria Euclidiana. 3. Geogebra.
I. Título.

Brasilio Alves Freitas

Introdução à Geometria Euclidiana Axiomática com o Geogebra

Dissertação aprovada pela Comissão Examinadora abaixo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática, pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal de Juiz de Fora.

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
(Orientador)
PROFMAT
Instituto de Ciências Exatas - UFJF

Prof. Dr. Rogério Casagrande
PROFMAT
UFJF

Prof. Dr. Mercio Botelho Faria
UFV

Juiz de Fora, 25 de março de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela beleza e perfeição na criação de tudo e de todos.

A Moreira e Lourdes, meus pais, pelo empenho em criar todos os filhos, com exemplo de retidão, respeito e moral.

A Geraldo, in memorian, e Mariinha, meus sogros, pela receptividade, confiança e amizade.

A Corália, meu amor, Ana Luísa e Pedro, frutos desse amor, pela compreensão das constantes ausências, apoio e incentivo a mim dispensados.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFJF, pelo acolhimento, paciência e dedicação durante esses dois anos, em especial, a um certo senhor Olímpio, que sempre sorridente me mostrou que a simplicidade é sempre o melhor caminho.

À CAPES, pelo apoio financeiro (concedendo bolsa de estudo).

Aos três valentes, que comigo pelejaram nessa 040, durante esse período.

RESUMO

Por conhecer a grande dificuldade dos alunos de Ensino Médio, da rede pública Estadual de Minas Gerais, em relação aos conceitos, demostrações e deduções básicas da Geometria Euclidiana plana, foi elaborado um pequeno roteiro de estudo dos axiomas que regem esses conteúdos e também uma introdução às construções geométricas básicas, utilizando os instrumentos euclidianos e o *software* gratuito GeoGebra. O desenvolvimento do trabalho trouxe como objetivo dotar os alunos do Ensino Fundamental, cursando oitavo ano (antiga sétima série), de uma compreensão gradual e intuitiva da geometria euclidiana plana, buscando, de forma fundamentada fixar os aspectos conceituais básicos que são extremamente necessários para estudos mais aprofundados em cursos posteriores. As atividades propostas no capítulo 4 foram criadas com o intuito de que o aluno, percorrendo os conceitos mostrados no capítulo 2, tenha oportunidade de abstrair-se literalmente e ou com recursos algébricos em um processo de demonstração das propriedades de diversas figuras geométricas.
Palavras-Chave: Axiomas; Geometria Euclidiana; Geogebra.

ABSTRACT

Knowing the great hardship high school students of Minas Gerais public school system have concerning the basic concepts, demonstrations and deductions of the Euclidean Geometry, a small study guide of the axioms that rule these contents was made, and also an introduction to the basic geometry constructions using the Euclidean instruments and the free *software* GeoGebra. The work's development brought as a goal to endow the middle school students, attending the eight year (the old seventh grade), a gradual and intuitive understanding of the Euclidian Geometry, trying to fix the basic conceptual aspects that are deeply necessary for further studies. The proposed activities on chapter four intend to give the student, going trough the concepts shown on chapter two, the opportunity to abstract on a descriptive way and/or use algebraic resources in a process of demonstration of many geometrical forms.
Key-words:Axioms; Euclidean Geometry; Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Diferentes autores têm afirmado que o ensino da geometria euclidiana continua relegado ao segundo plano, sobretudo na escola pública pois, os principais componentes do processo educativo (alunos, professores, autores de livros didáticos e pesquisadores) têm oscilado entre diversos modismos, desde o formalismo e suas demonstrações apoiadas pelo raciocínio lógico-dedutivo, passando pela algebrização, até chegar ao empirismo de poucos resultados.

Segundo [9], a Geometria no Ensino Fundamental não deve ser vista com uma lista completa de axiomas e conceitos. Deve, sim, ser capaz de convencer o aluno, por meios de argumentos precisos e claros, os quais poderão eventualmente valer-se de fatos aceitáveis que pertençam à experiência intuitiva e que possam ser provados em cursos mais avançados. A geometria está presente na natureza, nos objetos que usamos, nas brincadeiras infantis, nas construções, nas artes. À nossa volta podemos observar as mais diferentes formas geométricas. Muitas dessas formas fazem parte da natureza, outras já são resultados das ações do homem.

Segundo [6], a geometria ativa as estruturas mentais, possibilitando a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. O ensino de geometria, ao enfocar os aspectos topológico, projetivo e euclidiano, possibilita ao estudante conhecer e explorar o espaço onde vive, fazer descobertas, identificar as formas geométricas, além de contribuir para o desenvolvimento do pensamento crítico e autônomo.

A mesma autora, em [7], afirma também que a geometria pode ser considerada a parte da Matemática mais intuitiva, concreta e ligada à realidade (1999, p. 20).
No entanto, a escola, durante muito tempo, não procurou estimular de maneira suficiente nos alunos essa percepção da geometria, no mundo em que vivemos. Ao analisar a geometria, nas diversas modalidades de ensino, podemos observar que alguns alunos do ensino fundamental e médio, apresentam grandes dificuldades nesta área do conhecimento matemático.

No Brasil, alguns argumentos podem ser usados para tentar justificar essas dificuldades, pois pesquisas realizadas por vários autores, entre eles: [13] e [12] constataram um abandono do ensino da geometria nas aulas de matemática. Provavelmente, um dos motivos que levaram a esta ausência foi a falta de preparo do professor, em geometria, detectada após o movimento da Matemática Moderna no Brasil, na qual a Álgebra era mais enfatizada.

Nas últimas décadas, uma necessidade de modificações no ensino da geometria cresceu ao redor do mundo, devido às dificuldades encontradas e ao baixo desempenho mostrado por alunos secundários em geometria. Preocupados, professores pesquisadores têm desenvolvido maneiras que façam o aluno se interessar e envolver-se no estudo da geometria.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - (BRASIL, 1997, p. 55): "Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática, no ensino fundamental, pois, através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive".

Desta forma, ensinar conteúdos de geometria a partir das séries iniciais, tem como principal objetivo resolver problemas do cotidiano. Sendo, posteriormente, um suporte para compreensão das definições e demonstrações mais aprofundadas, em cursos mais adiantados.

Em seu prefácio, em [10], traz a seguinte afirmação de George Polya: "a primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar e a segunda é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar".

Essa fala de Polya sintetiza o atual estágio em que se encontra o ensino de geometria no Brasil, constatada por [13]: ..."a maioria dos professores de matemática não domina o assunto, o que acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer enfoque." E destacada por [12]: ... "ninguém pode ensinar bem aquilo que não conhece."

O ensino da geometria costuma ser muito desprivilegiado na educação básica, sendo muitas vezes o último conteúdo a ser abordado no ano letivo, isso quando há tempo para esta abordagem. Soma-se a essa mazela o fato de que os autores dos livros didáticos utilizam uma sequência não muito correta na distribuição dos conteúdos, sem a preocupação em formalizar e aprofundar os conhecimentos básicos, necessários ao pleno desenvolvimento dos alunos, para posterior entendimento das demonstrações deles decorrentes em questões mais avançadas. Além disso, muitos professores não têm segurança ao ensinar geometria, com seus axiomas e teoremas, muito menos sabem da existência de outras geometrias.

Um fator que poderia amenizar essa falha, durante as séries do Ensino Fundamental seria a introdução de construções geométricas simples. O professor poderia utilizar apenas os instrumentos de desenhos ditos euclidianos (régua, compasso e transferidor) e, nas escolas que possuem laboratório de informática, as construções poderiam ter o auxílio dos *softwares* de geometria dinâmica. Dentre vários existentes pode-se utilizar o GeoGebra por se tratar de *software* gratuito, na internet e de fácil aprendizado.

Trabalhando com alunos do Ensino Médio, na rede pública estadual, em Minas Gerais, tenho percebido um acentuado despreparo dos mesmos em relação aos conteúdos geométricos básicos. Essa falha que pode ser considerada gritante é resultado de um ensino deficitário, acumulado ao longo das séries do Ensino Fundamental.

Face a essa constatação, o presente trabalho tem como objetivo a construção de um pequeno modelo de estudos, a ser aplicado no oitavo ano do ensino fundamental, contendo, inicialmente de forma intuitiva, uma descrição dos principais axiomas da geometria euclidiana plana e uma introdução às construções de figuras geométricas usando os instrumentos euclidianos e o GeoGebra. Para finalizar são propostas atividades que visam a aplicação dos referidos axiomas na obtenção de resultados deles decorrentes.

1 PRELIMINARES

Neste capítulo é feito um pequeno relato histórico da geometria, ao longo do tempo, até chegar na importante contribuição de Euclides, com a publicação de "Os Elementos", no desenvolvimento da geometria plana. Mostra também a possibilidade de novas geometrias que surgiram através da interpretação e buscas por demonstrações do quinto postulado de Euclides.

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Segundo [5], as primeiras considerações do homem a respeito da geometria foram feitas observando a natureza, denominadas descobertas geométricas subconscientes.

De acordo com [2], afirmações sobre a origem da matemática, seja da aritmética, seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever.

É muito comum encontrarmos relatos em livros didáticos que a geometria surgiu às bordas do Nilo, devido às enchentes e à necessidade de medir a área das terras a serem redistribuídas entre aqueles que haviam sofrido prejuízos. Esta hipótese, segundo [10] tem sua origem nos escritos de Heródoto.

Por outro lado, segundo [15], Aristóteles afirma que a matemática surgiu em lugares nos quais as pessoas dispunham de lazer, razão que leva a crer que teria surgido primeiro no Egito, pois a casta dos sacerdotes tinha permissão para desfrutar de lazer.

Os povos mesopotâmicos e egípcios realizavam cálculos com medidas de comprimentos, áreas e volumes. Nas práticas de medida, os problemas geométricos são transformados em problemas numéricos. Sem dúvida, os primeiros matemáticos gregos praticavam uma geometria baseada em cálculos de medidas, como os povos antigos, pois segundo [2] os gregos não hesitavam, nada, em absorver elementos de outras culturas. Não há,contudo, uma documentação confiável que possa estabelecer a transição entre a Matemática mesopotâmica e egípcia e a Matemática grega.

Ainda segundo [15], um dos primeiros matemáticos gregos foi Tales de Mileto, que teria vivido nos séculos VII e VI a.E.C. e sido influenciado pelos mesopotâmicos e egípcios. Diz-se que um de seus feitos teria sido o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito, a partir da semelhança existente entre as razões desta altura, com sua sombra e, de sua própria altura com sua própria sombra.

Parece ser fato que, por volta do século V. a.E.C., seu nome era empregado em conexão com resultados geométricos. Além disso, Aristóteles menciona Tales, na Metafísica, como o fundador da filosofia. Esta honra, somada à circulação da referência a seu nome como geômetra, pode ter levado a se atribuir ao filósofo de Mileto importantes descobertas geométricas.

A Matemática pitagórica, datada da primeira metade do século V a.E.C., teria feito a transição entre as épocas de Tales e Euclides. Em [2], página 33, encontra-se uma frase escrita por Proclo onde ele afirma que Pitágoras, que veio depois de Tales, transformou a Matemática numa forma liberal de instrução, investigando os teoremas de modo imaterial e intelectual.

De acordo com [15], Pitágoras, influenciado pela Matemática egípcia, teria introduzido um tipo de Matemática abstrata na Grécia. A narrativa histórica tradicional enfatiza a transição do tipo de Matemática realizada pelos babilônios e egípcios, profundamente marcada por cálculos e algoritmos, para a Matemática teórica, praticada pelos gregos, fundada em argumentações consistentes e demonstrações.

Segundo [15], no final do século VII a.E.C., diversas realizações tecnológicas podem ter contribuído para o desenvolvimento da Matemática. Alguns termos de geometria já apareciam, por exemplo, na arquitetura. Há escritos técnicos do século VI a.E.C. tratando de problemas relacionados à astronomia e ao calendário. Neles intervinham alguns conceitos geométricos, como círculos e ângulos. Os enunciados geométricos aí contidos podem ter ficado conhecidos como sendo de Tales. No entanto, é difícil estabelecer as bases factuais destas afirmações.

De acordo com [2], Platão passou a criticar os geômetras por não empregarem critérios de rigor, desejáveis, nas práticas matemáticas. Sendo assim, ainda que não possamos dizer que a transformação dos fundamentos da Matemática grega é devida à Platão, ele expressa o descontentamento dos filósofos com os métodos empregados e articula o trabalho dos pensadores à sua volta para que se dediquem a formalizar os conceitos e técnicas utilizadas indiscriminadamente, na Matemática da época. Os membros da Academia debatiam o modo de descrever as disciplinas matemáticas, o que pode ter tido um papel na legitimação deste saber, em sua forma abstrata e na consolidação da posição da Matemática como uma disciplina do pensamento puro.

Segundo [15], os livros de história da Matemática reproduzem a lenda de que a descoberta dos incomensuráveis provocou uma crise nos fundamentos da Matemática grega. Esta lenda atribuída a um pitagórico, que também deve ter tido outras origens, contribuiu para a separação entre a geometria e a aritmética, a primeira, devendo se dedicar as grandezas geométricas e a segunda, aos números. Esta separação é um dos traços marcantes da geometria grega, ao menos na maneira como ela se disseminou com Euclides.

Ainda segundo [15], com Euclides, que viveu em torno de 300 a.E.C., a Matemática na Grécia parece ter adquirido uma configuração particular, passando a empregar enunciados geométricos gerais, que não envolvem somente procedimentos de medida. "Os Elementos" de Euclides representam, neste contexto, o resultado dos esforços de formalização da Matemática para apresentar uma geometria consistente e unificada que valesse para grandezas quaisquer, fossem elas comensuráveis ou incomensuráveis.

"Os Elementos" são formados por treze livros, escritos por volta do ano 300 a.E.C., que expõem resultados de tipos diversos, organizados sistematicamente, muitos deles atribuídos a outros geômetras, alguns anteriores a Euclides. Apesar disso, os Elementos não podem ser vistos apenas como uma compilação, pois, além de conterem resultados originais, propõem um tratamento sistemático e uniforme da Matemática grega básica.

Segundo [5], para os gregos, os elementos de uma ciência constituíam as proposições fundamentais, a partir das quais seria possível deduzir as outras. Ou seja, não tinham que ser enciclopédicos, mas mostrar uma escolha judiciosa do que seria apresentado. Por exemplo, nos "Elementos" de Euclides, não está demonstrado que as três alturas de um triângulo se encontram em um ponto, mas este teorema pode ser deduzido a partir de outros, mais básicos, demonstrados por Euclides.

De acordo com [2], "Os Elementos", consiste de treze volumes que contêm a maior parte da matemática conhecida na época. Trata-se de um texto sistemático, organizado segundo os critérios de rigor lógico-dedutivo, mas também de experiência intuitiva. O volume I trata de geometria plana e sua construção baseia-se em dez proposições, separadas em dois grupos: cinco foram classificadas como (noções comuns) axiomas e as outras como postulados. Aristóteles considerava que os axiomas consistiam basicamente em verdades aplicáveis a todas as ciências, enquanto que, os postulados eram verdades acerca da particular disciplina em estudo, como a geometria.

Os cinco axiomas eram:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa, são iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Os postulados eram:

1. Existe uma única reta contendo dois pontos dados.
2. Todo segmento de reta pode ser estendido indefinidamente em todas as direções.
3. Existe uma circunferência com quaisquer centro e raio dados.
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. Se uma reta intercepta outras duas retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se estendidas indefinidamente, interceptam-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Um sistema axiomático consiste num conjunto de verdades acerca de uma determinada realidade, organizado de tal forma que todos os conceitos são definidos a partir de alguns poucos conceito básicos, chamados termos primitivos, os quais não se define e são conhecidos intuitivamente. Esses conceitos são então, articulados por meio de algumas proposições primitivas, chamados axiomas, que não se demonstram, pois sua veracidade é evidente pela intuição que temos acerca do domínio em estudo. As demais proposições,os teoremas, são então obtidos por demonstração a partir dos axiomas.

Segundo [3], um sistema axiomático também deve satisfazer as três condições seguintes:

✓ ser consistente, ou seja, os axiomas não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas consequências;

✓ deve ser completo, no sentido de serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão;

✓ por fim, cada axioma deve ser independente dos demais, no sentido de que não é consequência deles, sob pena de ser supérfluo.

1.2 O QUINTO POSTULADO

"Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado, cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos." (5º postulado de Euclides)

Segundo [3], nota-se, à primeira vista, que a natureza do enunciado do quinto postulado é diferente da dos precedentes e só é usado à partir da definição 29 (quando uma reta corta duas paralelas, formam-se ângulos correspondentes iguais). Segundo a Definição 23, do volume I, dos "Elementos", retas paralelas são retas contidas num mesmo plano que, se prolongadas indefinidamente, não se interceptam, de modo que ele descreve exatamente uma situação em que duas retas não são paralelas.

Segundo [5], ainda na época dos gregos, algumas dúvidas foram levantadas quanto à colocação desse enunciado, como um postulado e não como uma proposição passível de demonstração. Dentre as tentativas gregas de prová-lo, destacam-se as de Ptolomeu e Proclo.

Em [3], encontramos a relação de outros famosos matemáticos que tentaram demonstrá-lo e deixaram nas suas obras referências relevantes sobre o assunto: Nasir Eddin All Tusin (1201 – 1274), John Wallis (1616 – 1703), Girolamo Sacheri (1667 – 1733), Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), Adrien Marie Legendre (1752 – 1833), Louis Bertrand (1731 – 1812) e Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855).

Ainda de acordo com [3], os primeiros a compreenderem que o quinto postulado de Euclides era indemonstrável e que se poderia, a partir de sua negação, construir geometrias novas e totalmente coerentes foram Gauss, Wolfgang Boylai (1775 - 1856), Nicolai Ivanovich Lobachevski (1792 – 1856) e Johann Bolyai (1802 – 1860), que chegaram às suas conclusões de forma independente um dos outros.

Para os gregos, principalmente para os seguidores de Platão, o espaço físico era uma entidade absoluta, a realização direta de um objeto platônico. A geometria Euclidiana era a ciência do espaço físico e, portanto, a única geometria possível e, certamente a verdadeira, constituía-se do estudo de propriedades das figuras geométricas mergulhadas nesse espaço.

Com as descobertas de Gauss, Lobachevski e Bolyai, não apenas a geometria Euclidiana deixou de ser a única possível, mas também deixou de ser aquela verdadeira. Pois segundo Poincaré, uma geometria não pode ser mais verdadeira do que a outra, poderá ser apenas mais cômoda.

Finalizou-se assim, uma época na história da matemática, que fora inaugurada dois milênios antes, originando-se uma transformação profunda, não apenas do pensamento matemático, mas também do pensamento teórico em geral, que acabaria por influenciar nossas concepções do universo e do mundo físico.

De acordo com [5], os trabalhos de Gauss, Lobachevski e Bolyai, principalmente, dos dois últimos, foram levados às suas devidas proporções, por Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), que deu início a um segundo período, no desenvolvimento das geometria Euclidianas e não-Euclidianas, período este caracterizado pelas investigações sob o ponto de vista do Cálculo Diferencial, em contraste com os métodos sintéticos previamente utilizados.

Segundo [2], a preocupação com a fundamentação da geometria, em bases sólidas, dominou a pesquisa matemática sobre o assunto, culminando com a reconstrução da geometria Euclidiana, por David Hilbert (1862 – 1943) o que, finalmente, encerrou a longa batalha com o quinto postulado de Euclides.

2 A GEOMETRIA AXIOMÁTICA EUCLIDIANA PLANA

Neste capítulo são apresentados axiomas, definições, teoremas e postulados que regem a geometria euclidiana plana. Esse conjunto de conhecimentos é básico para que os alunos tenham condição de entender demonstrações mais elaboradas, em cursos mais avançados.

Os conceitos geométricos são, aqui, apresentados sem uma preocupação excessiva com a formalização, visto que é dirigida a alunos do Ensino Fundamental. Sendo extremamente importante que as descobertas tenham um caráter gradual e de forma intuitiva.

As figuras elementares, no plano, são os pontos e as retas.

O plano é constituído de pontos e, as retas são subconjuntos destacados do plano.

Uma reta possui infinitos pontos e um plano contém infinitas retas.

Segundo [11], o ponto, a reta e o plano são denominados noções primitivas, pois não há necessidade de definição.

Para efeito de estudos, essas noções primitivas são denominados da seguinte forma:

- Ponto: letras latinas maiúsculas.

- Reta: letras latinas minúsculas.

- Plano: letras gregas minúsculas.

2.1 AXIOMAS DE INCIDÊNCIA

Axioma 2.1.1- Por um ponto qualquer do plano passam infinitas retas.

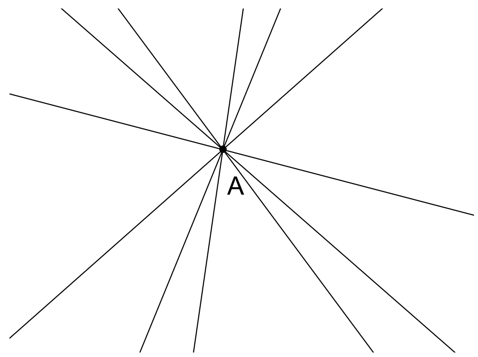
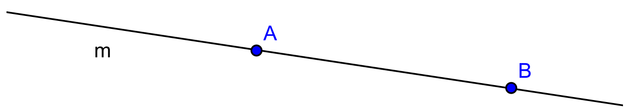


Figura 1: Retas que passam pelo ponto A

Axioma 2.1.2- Dois pontos distintos de um plano, determinam uma única reta.

Proposição: Duas retas distintas, de um mesmo plano, ou não se intersectam ou se intersectam em um único ponto.

Se as retas se intersectam são ditas concorrentes e quando não se intersectam são ditas paralelas.



$$m = \overleftrightarrow{AB}$$

Figura 2: Reta que passa pelos pontos A e B

Axioma 2.1.3- Dada uma reta qualquer de um plano, existem infinitos pontos que pertencem e infinitos pontos que não pertencem à essa reta. Os pontos B e E, da Figura 3, não pertencem à reta r.

Três pontos distintos de um plano que pertencem à uma mesma reta são ditos colineares. Na reta r, abaixo, os pontos A, C e D são colineares.

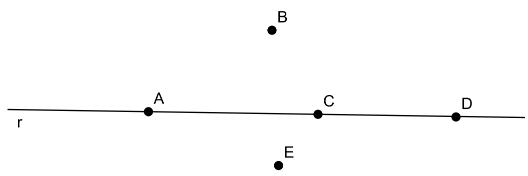


Figura 3: Pontos na reta e pontos fora da reta

Axioma 2.1.4- Um ponto qualquer sobre uma reta de um plano determina, sobre a reta, duas partes denominadas semirretas.

A semirreta possui origem, mas não possui fim.

Como a origem é comum e os sentidos são contrários as semirretas são ditas opostas.

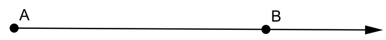


Figura 4: Semirreta AB

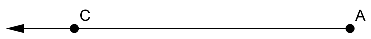


Figura 5: Semirreta AC

2.2 AXIOMA DE ORDEM

Axioma - Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles localiza-se entre os outros dois.

Definição: O conjunto constituído por dois pontos distintos A e B, sobre uma reta de um plano, e por todos os pontos que se encontram entre os dois é chamado segmento de reta AB. Os pontos A e B são denominados de extremidades do segmento.

Dado um segmento de reta AB existe um único ponto C, entre A e B, que divide o segmento AB em dois segmentos congruentes ($\overline{AC} \equiv \overline{CB}$).

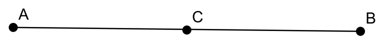


Figura 6: Segmento AB e ponto médio C

Um segmento de reta pode ser medido usando uma régua graduada em uma unidade de medida padronizada.

A medida de um segmento de reta é um número maior ou igual a zero. A medida é zero quando os dois pontos extremos são coincidentes.

Dois segmentos de reta de mesma medida são ditos congruentes.

Definição: Seja O um ponto qualquer do plano e $\overline{AB}$ um segmento de reta de medida r. Chama-se circunferência o conjunto de todos os pontos cuja distância até o ponto O seja igual à medida de $\overline{AB}$ = r. O valor de r é dito raio da circunferência.

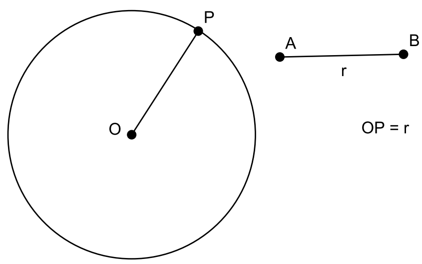


Figura 7: Circunferência de centro O e raio r

2.3 ÂNGULO

Definição 1- Duas semirretas de mesma origem formam duas regiões no plano.

Uma região é dita convexa e a outra não-convexa.

Cada uma dessas regiões são denominadas por ângulo.

Todo ângulo possui vértice (ponto A) e lados (semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$).

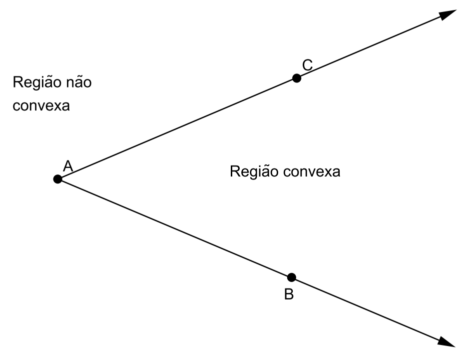


Figura 8: Regiões determinadas pelas semirretas AB e AC

Uma região é dita convexa, quando o segmento que une quaisquer dois de seus pontos estiver totalmente contido em seu interior.

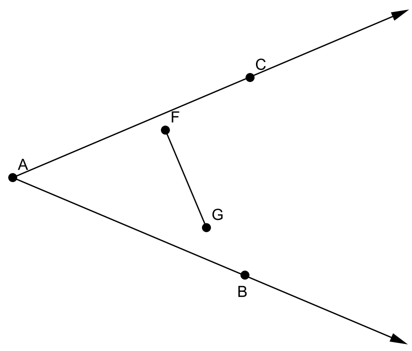


Figura 9: Região convexa formada entre as semirretas AB e AC

Uma região é dita não-convexa, quando existir segmento que une dois de seus pontos e este não estiver totalmente contido em seu interior.

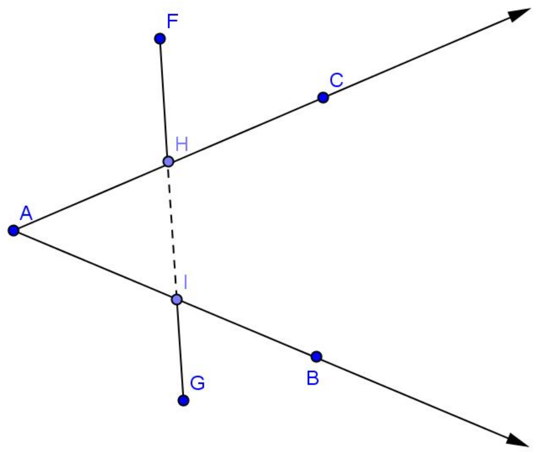


Figura 10: Região não-convexa formada entre as semirretas AB e AC

Definição 2- Um ângulo é medido em graus, cujo símbolo é (^{o}), com o auxílio de um instrumento denominado transferidor.

Todo ângulo possui uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, ele for constituído por duas semirretas coincidentes.

Dois ângulos de medidas iguais são congruentes.

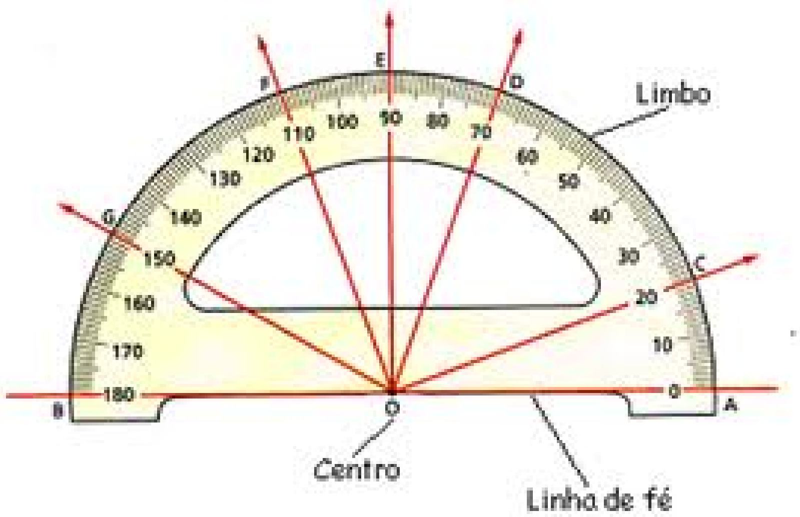


Figura 11: Transferidor - Fonte: www.portaldoprofessor.mec.gov.br - acessado em 25/02/2013

Definição 3- Dois ou mais ângulos que possuem um lado em comum são ditos ângulos consecutivos.

Dois ângulos consecutivos que não possuem pontos em comuns são ditos ângulos adjacentes.

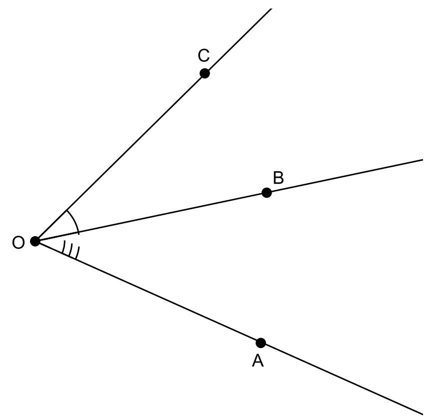


Figura 12: Ângulos consecutivos e adjacentes

Definição 4- Duas retas que se interceptam formam quatro ângulos opostos. Dois a dois eles são ditos ângulos opostos pelo vértice.

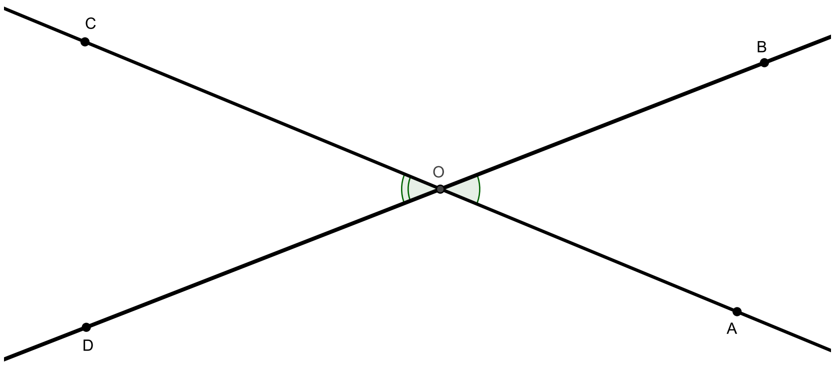


Figura 13: Retas concorrentes mostrando ângulos opostos pelo vértice

Definição 5- Dado um ângulo do plano existe uma única semirreta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes. Essa semirreta é denominada por bissetriz.

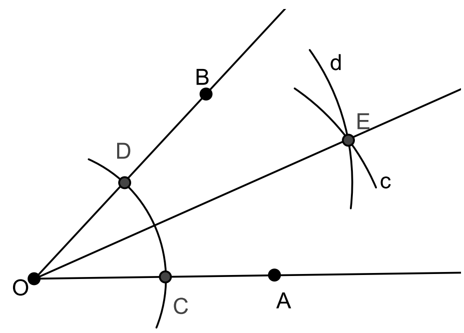


Figura 14: Bissetriz de um ângulo

2.3.1 Tipos de Ângulos

De acordo com a medida um ângulo possui diferentes classificações. Normalmente, compara-se a medida do ângulo, com um quarto de volta ou meia volta em torno de uma circunferência que possui 360^o.

a) ângulo raso ou de meia volta: quando é formado por duas semirretas opostas. A medida do ângulo raso é igual a 180^o.

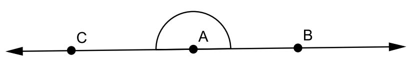


Figura 15: Ângulo raso

b) ângulo nulo: quando as duas semirretas (AB e AC) estiverem no mesmo sentido sobre a mesma reta. A medida do ângulo nulo é igual a 0^o.

Figura 16: Ângulo nulo

c) ângulos adjacentes suplementares: quando a soma de suas medidas for igual à medida de um ângulo raso, ou seja, for igual a 180^o.

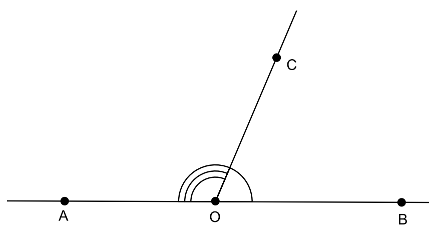


Figura 17: Ângulos suplementares

d) ângulo reto: ângulos adjacentes suplementares congruentes são ditos por ângulos retos, eles medem 90^o.

Duas retas que se intersectam formando ângulos retos são ditas perpendiculares. Sendo representadas pelo símbolo ($\perp$).

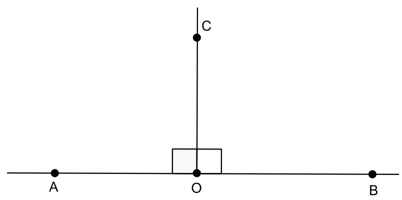


Figura 18: Ângulos retos

e) ângulo agudo: quando sua medida for maior que a de um ângulo nulo e menor que a de um ângulo reto.

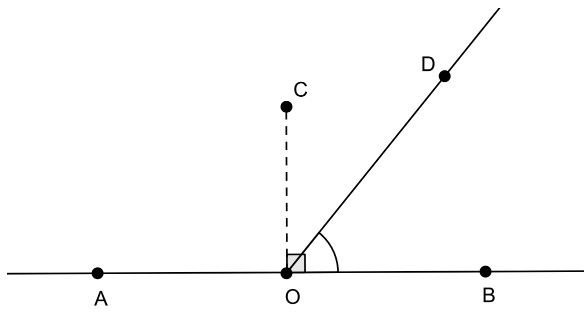


Figura 19: Ângulo agudo

f) ângulo obtuso: quando sua medida for maior que a de um ângulo reto e menor que a de um ângulo raso.

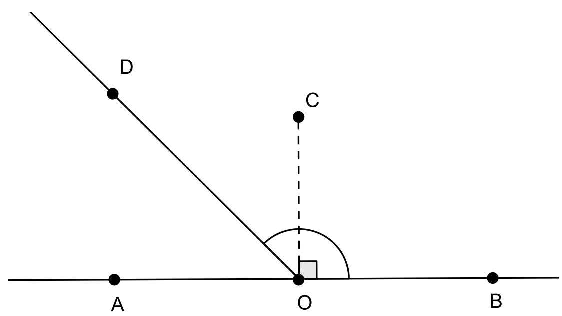


Figura 20: Ângulo obtuso

2.3.2 Ângulos Formados por Retas Paralelas e Uma Concorrente

Dadas três retas distintas $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{t}$ de um plano, se $\boldsymbol{r}$ for paralela à $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{t}$ for concorrente à $\boldsymbol{r}$ então, $\boldsymbol{t}$ também será concorrente à $\boldsymbol{s}$.

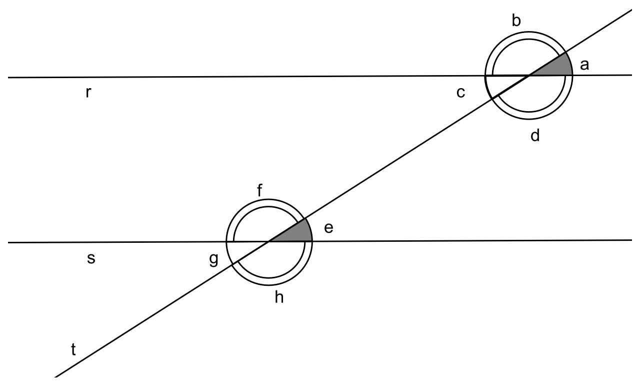


Figura 21: Par de paralelas cortadas por uma transversal

Na figura anterior temos que $\hat{a} = \hat{c}$; $\hat{b} = \hat{d}$; $\hat{e} = \hat{g}$; $\hat{f} = \hat{h}$ por serem opostos pelo vértice.

Os pares de ângulos $\hat{a}$ e $\hat{e}$; $\hat{b}$ e $\hat{f}$; $\hat{c}$ e $\hat{g}$; $\hat{d}$ e $\hat{h}$ são ditos correspondentes. Como as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são paralelas esses ângulos são congruentes.

Os pares de ângulos $\hat{c}$ e $\hat{e}$;$\hat{d}$ e $\hat{f}$ são ditos alternos internos.

Os pares de ângulos $\hat{a}$ e $\hat{g}$;$\hat{b}$ e $\hat{h}$ são ditos alternos externos.

Sabemos que $\hat{a} = \hat{c}$ e $\hat{a} = \hat{e}$ então, $\hat{c} = \hat{e}$. De maneira análoga podemos provar que se as retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são paralelas os pares de ângulos alternos são congruentes.

Os pares de ângulos $\hat{e}$ e $\hat{d}$; $\hat{c}$ e $\hat{f}$ são ditos colaterais internos.

Os pares de ângulos $\hat{a}$ e $\hat{h}$; $\hat{b}$ e $\hat{g}$ são ditos colaterais externos.

Temos que $\hat{a} + \hat{d} = 180^o$ e que $\hat{a} = \hat{e}$ então $\hat{e} + \hat{d} = 180^o$.

Usando esse procedimento para os outros pares de ângulos colaterais podemos provar que eles são suplementares.

2.4 POLÍGONOS

Definição 1- Quando dois segmentos de reta possuem uma extremidade em comum, eles são ditos segmentos consecutivos.

Quando dois segmentos consecutivos estão sobre a mesma reta, eles são ditos colineares.

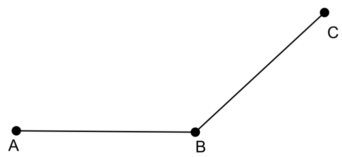


Figura 22: Segmentos consecutivos

Definição 2- Uma sequência de segmentos consecutivos não-colineares forma uma poligonal, que pode ser aberta ou fechada.

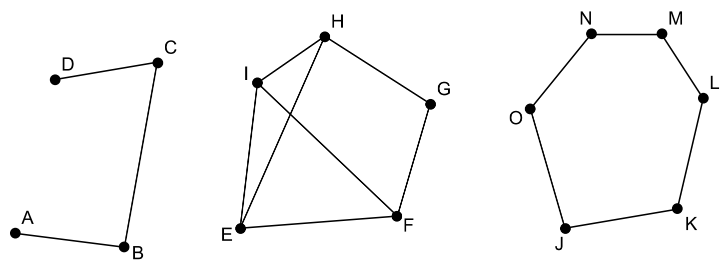


Figura 23: Poligonais

Definição 3- Uma poligonal fechada que não possui cruzamento entre seus segmentos é denominada polígono. Na figura anterior a poligonal JKLMNO forma um polígono.

Existem polígonos convexos e não-convexos.

Todo polígono possui:

- vértices (extremidades dos segmentos de reta);
- lados (segmentos de reta);
- ângulos internos (abertura entre dois segmentos consecutivos);
- ângulos externos (abertura entre o prolongamento de um lado e o lado consecutivo).

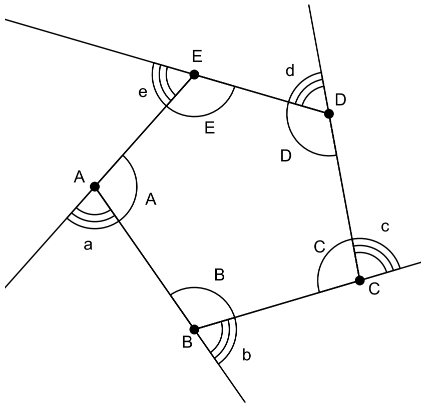


Figura 24: Polígono ABCDE

Na figura acima:

- os pontos A, B, C, D, E são os vértices;
- os segmentos $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$ são os lados;
- $\hat{A}$; $\hat{B}$; $\hat{C}$; $\hat{D}$; $\hat{E}$ são os ângulos internos;
- $\hat{a}$; $\hat{b}$; $\hat{c}$; $\hat{d}$; $\hat{e}$ são ângulos externos.

Em todo polígono, o número de vértices, de lados, de ângulos internos e de ângulos externos é o mesmo.

O segmento que une dois vértices não consecutivos de um polígono é dito diagonal.

Em um mesmo vértice, o ângulo interno e o externo são adjacentes suplementares.

O nome de um polígono é dado de acordo com o número de lados. Exemplos: triângulo (três lados); quadrilátero (quatro lados); pentágono (cinco lados).

Definição: Dois polígonos com mesmo número de lados, que possuem ângulos internos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais são ditos semelhantes.

Se os lados correspondentes forem congruentes, eles são ditos congruentes.

2.4.1 Triângulo

Definição: Um polígono que possui três lados é denominado triângulo. O triângulo é o único polígono que não possui diagonais.

Todo triângulo possui as seguintes condições de existência:

- Em todo triângulo, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180^o.
- Em todo triângulo, o maior ângulo é oposto ao maior lado.
- Em todo triângulo, a soma das medidas de dois lados é sempre maior que a medida do terceiro lado.

Um triângulo pode ser classificado quanto às medidas dos ângulos internos ou quanto às medidas dos lados.

Quanto às medidas dos ângulos internos podemos ter:

- triângulo acutângulo - os três ângulos são agudos.
- triângulo retângulo - possui um ângulo reto e dois ângulos agudos.
- triângulo obtusângulo - possui um ângulo obtuso e dois ângulos agudos.

Quanto às medidas dos lados, podemos ter:

- triângulo escaleno - os três lados possuem medidas diferentes.
- triângulo isósceles - dois lados possuem medidas congruentes.
- triângulo equilátero - os três lados possuem medidas congruentes.

Todo triângulo equilátero é acutângulo.

No triângulo isósceles, o lado de medida diferente é dito base, e o ângulo oposto à base é dito ângulo do vértice.

Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

2.4.2 Quadriláteros

Um polígono que possui quatro lados é denominado quadrilátero.

Em todo quadrilátero a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360^o.

Todo quadrilátero possui duas diagonais.

Definição: Os quadriláteros que possuem os dois pares de lados opostos paralelos são denominados paralelogramos.

Os lados e os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

Os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

As diagonais de um paralelogramo se intersectam no ponto médio.

O paralelogramo de ângulos internos congruentes, todos retos, é dito retângulo.

Em todo retângulo as diagonais são congruentes.

O paralelogramo cujos lados são congruentes é dito losango.

As diagonais do losango são bissetrizes dos ângulos internos e, são perpendiculares entre si.

O paralelogramo que possui ângulos internos congruentes e lados também congruentes é dito quadrado.

O quadrado possui as características do retângulo e do losango.

Definição: Os quadriláteros que possuem apenas um par de lados opostos paralelos são denominados por trapézio. Esses lados paralelos são as bases.

Em todo trapézio, ângulos consecutivos de bases diferentes são suplementares.

Trapézios que possuem dois ângulos retos são denominados trapézios retângulos.

Quando os lados não paralelos de um trapézio são congruentes ele é dito trapézio isósceles.

Os ângulos de uma mesma base do trapézio isósceles são congruentes.

As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

3 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Nesse capítulo são apresentadas as construções da bissetriz de um ângulo e do ponto médio de um segmento. Para ilustrar essas construções são apresentadas duas alternativas: com régua e compasso e com um software de geometria dinâmica.

Como na maioria das escolas Públicas Estaduais, em Minas Gerais, não há laboratórios de informática que esteja sempre a disposição, para uso durante as aulas, é apresentada a maneira clássica utilizando a régua e o compasso. Apesar de parecer fora de moda, as construções geométricas usando régua e compasso é de muita valia no processo de ensino-aprendizagem de geometria plana. Nesse treinamento é possível fixar vários conceitos básicos. Muitos professores não utilizam essa técnica por desconhecimento total do assunto.

Em seguida, é mostrada a opção do uso de um software de geometria dinâmica que pode simplificar muito essas construções. O *software* escolhido foi o GeoGebra, por ser gratuito, de fácil utilização que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. O GeoGebra possui todas as ferramentas tradicionais de um *software* de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Por outro lado, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

Segundo [8], as abordagens pedagógicas, com o uso de tecnologias digitais deve ser planejada de tal forma que a aprendizagem dos conceitos matemáticos, dos alunos, não dependa permanentemente do apoio dessas tecnologias.

3.1 COM RÉGUA E COMPASSO

Nessa seção são apresentadas algumas construções tradicionais. Essas construções foram retiradas e adaptadas das que constam em [1] e [16].

3.1.1 Construção do Ponto Médio de Um Segmento

Com a ponta seca do compasso centrada no ponto A e abertura um pouco maior do que a metade do segmento, traça-se dois arcos, um em cada lado do segmento. Sem alterar a abertura do compasso, muda-se a ponta seca para o ponto B e repete-se o processo anterior. Marca-se os pontos C e D, nas intersecções dos arcos. Em seguida, traça-se a reta $\overleftrightarrow{CD}$, marcando o ponto E, na intersecção entre o segmento e a reta. O ponto E é o ponto médio do segmento AB. A reta perpendicular $\overleftrightarrow{CD}$ é dita mediatriz do segmento AB.

Definição: Mediatriz é o lugar geométrico de todos os pontos que equidistam das extremidades de um segmento.

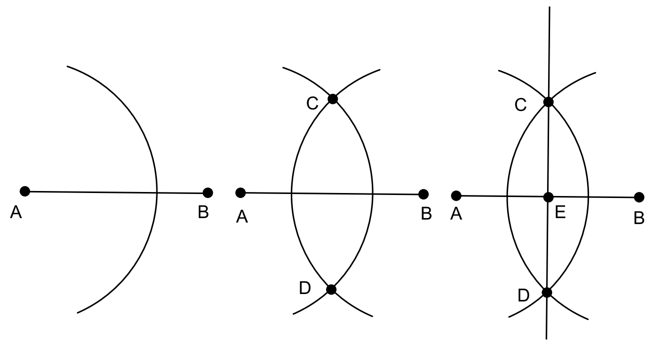


Figura 25: Construção da mediatriz e do ponto médio do segmento AB

Demostração: Se a reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz, então $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$. Logo o triângulo ABC é isósceles e, portanto, os ângulos da base são congruentes.

Os triângulos ACE e BCE são congruentes, pois $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{CE}$ é lado comum.

Portanto temos que $\overline{AE} \equiv \overline{BE}$. Assim temos que E é o ponto médio do segmento AB.

3.1.2 Construção de Uma Reta Paralela a Outra Reta

Dada uma reta r qualquer, do plano e um ponto P, fora de r, existe uma única reta s que passa por P e é paralela à reta r.

Construção da reta s: com o compasso centrado em P e uma abertura qualquer, traça-se um arco que intersecta a reta r em um ponto (A).

Sem alterar a abertura, centra-se o compasso no ponto A e traça-se outro arco que intersecta a reta r, em um ponto (B).

Novamente, sem alterar a abertura, centra-se o compasso no ponto B e traça-se um arco que intersecta o arco que passa por A, em um ponto (C).

Com o auxílio de uma régua, traça-se a reta $\overleftrightarrow{PC}$, que é paralela à reta r.

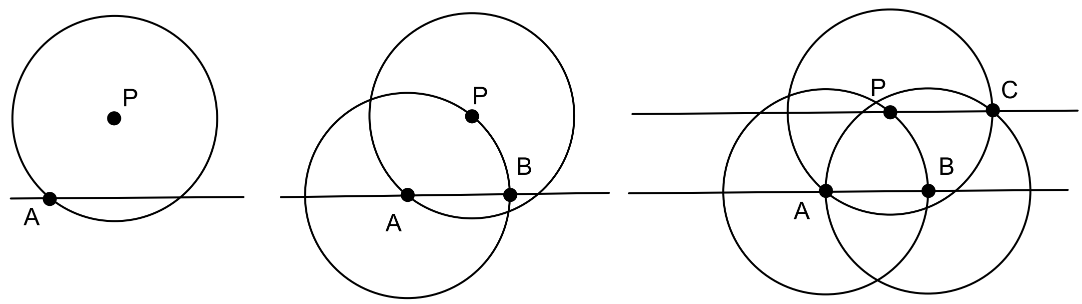


Figura 26: Construção de uma reta paralela à outra reta

Prova: Traçando os segmentos AB, BC, CP e PA formamos um quadrilátero. Como os círculos foram construídos usando o mesmo raio temos que os segmentos citados são todos congruentes, logo o quadrilátero é um losango. Como o losango é um paralelogramo, temos que os lados opostos são paralelos. Dessa forma concluí-se que as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{PC}$ são paralelas.

3.1.3 Construção de Uma Reta Perpendicular a Outra Reta

Dados uma reta r e um ponto P do plano, existe uma única reta s, que passa por P e é perpendicular à reta r.

Construção da reta s: com o compasso centrado em P e uma abertura qualquer, traça-se um arco que intersecta a reta r, em dois pontos (A e B).

Com uma abertura um pouco maior que a metade do segmento $\overline{AB}$, centra-se o compasso no ponto A e traça-se um arco. Com mesma abertura e centro em B, traça-se um arco que intersecta o anterior em um ponto (C).

Com o auxílio de uma régua, traça-se a reta $\overleftrightarrow{PC}$, que é perpendicular à reta r, pois essa reta é a mediatriz do segmento AB.

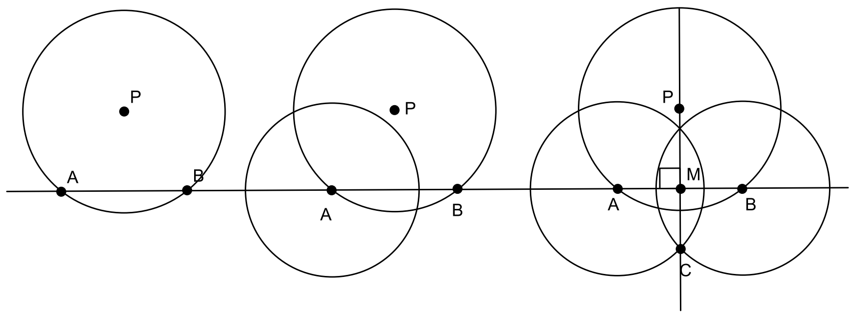


Figura 27: Construção de uma reta perpendicular à outra reta

3.1.4 Construção de Um Triângulo

Seja um triângulo ABC cujos lados medem $\overline{AB}$= c; $\overline{AC}$= b e $\overline{BC}$= a, de forma que a soma das medidas de dois desses segmentos seja sempre maior que a medida do terceiro segmento.

Traça-se uma das três medidas (a, b ou c), utilizando-se de uma régua e marca-se as extremidades do segmento, conforme a medida escolhida.

Como exemplo foi escolhido a medida a, logo foram marcados os pontos B e C.

Para construir o lado AB, traça-se a circunferência com centro em B e abertura do compasso correspondente à medida c.

Mudando a abertura do compasso para a medida b e a ponta seca para o ponto C, traça-se outra circunferência.

As duas circunferências traçadas terão dois pontos de intersecção, que serão marcados por A e A'. Cada ponto determina um triângulo distinto, com um lado em comum (lado BC). Esses dois triângulos são congruentes, pois as medidas dos três lados são congruentes.

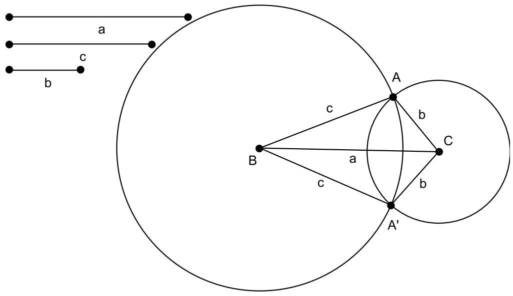


Figura 28: Construção de um triângulo

3.1.5 Construção de Um Paralelogramo

Seja um paralelogramo PQRS cujos lados medem PQ = a; RS = b.

Traça-se uma das duas medidas (a ou b), utilizando-se de uma régua e marca-se as extremidades do segmento conforme a medida escolhida.

Como exemplo foi escolhido a medida a, logo foram marcados os pontos P e Q.

Abre-se o compasso com medida igual a b e traça-se duas circunferências: C com centro em Q e C_1 com centro em P.

Nomeia-se por R um ponto qualquer da circunferência C, que não pertença ao segmento PQ. Centra-se o compasso, com abertura igual à medida a, nesse ponto e traça-se a circunferência C_2. As circunferências C_1 e C_2 terão dois pontos de intersecção, que serão marcados por S e T.

Desenha-se o quadrilátero PQRS traçando-se os segmentos PQ, QR, RS e SP. Esse quadrilátero é um paralelogramo.

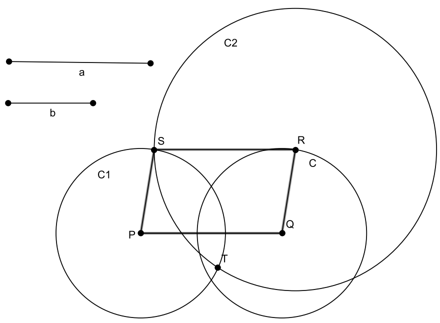


Figura 29: Construção de um paralelogramo

Justificativa: Os lados QR e SP são congruentes por serem os raios das circunferências C e C_1. Os lados PQ e RS são congruentes, pois são iguais ao segmento a. Sabemos que todo paralelogramo possui lados opostos congruentes. Portanto o quadrilátero PQRS é um paralelogramo.

3.1.6 Construção da Bissetriz de Um Ângulo

Dado um ângulo $A\widehat{O}B$, existe uma única semirreta denominada bissetriz, com origem no ponto O que divide esse ângulo em dois ângulos adjacentes congruentes.

Para construir a bissetriz devemos inicialmente centrar o compasso no ponto O, com uma abertura qualquer, e traçar um arco que encontrará os lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, nos pontos C e D, respectivamente.

Em seguida, centra-se o compasso com uma abertura qualquer, no ponto C e traça-se o arco c. Mudando o centro para o ponto D e conservando a abertura, traça-se o arco d.

Esses dois arcos se interceptarão no ponto E. Com o auxilio de uma régua, traça-se a semirreta $\overrightarrow{OE}$, que será a bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$.

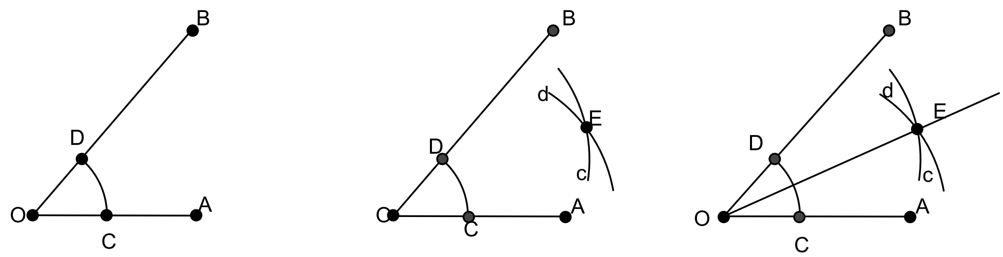


Figura 30: Construção da bissetriz de um ângulo

3.2 COM O GEOGEBRA

De forma geral, os ambientes de geometria dinâmica fornecem uma representação computacional para o plano euclidiano e suas ferramentas básicas são concebidas para reproduzir régua não graduada e compasso físicos - os chamados instrumentos euclidianos. Esta estrutura permite a simulação de construções geométricas que podem ser feitas com os instrumentos euclidianos, sendo que, nesses ambientes, as construções podem ser manipuladas de forma que as propriedades e relações dos objetos construídos sejam preservadas. A maior parte dos ambientes de geometria dinâmica incorpora ainda outros recursos, tais como traçado de lugares geométricos, representação de secções cônicas, coordenadas cartesianas e medidas aproximadas para comprimentos e áreas.

Segundo [8], em virtude das limitações inerentes ao software, as representações computacionais apresentam diferenças importantes em relação ao modelo matemático. No modelo matemático teórico, o plano euclidiano é completo e ilimitado. Por outro lado, nas representações em geometria dinâmica, lidamos sempre com uma região retangular formada por uma quantidade muito grande, porém finita de pixels.

Nas atividades propostas nesta seção, teremos como referência o *software* GeoGebra versão 4.2, encontrado gratuitamente na internet em http://www.geogebra.org.

O programa permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta e polígonos assim como permite inserir funções e alterar todos esses objetos dinamicamente, após a construção estar finalizada. Equações e coordenadas também podem ser inseridas diretamente no campo de entrada. O GeoGebra é capaz de lidar com variáveis e ainda oferecer comandos para se encontrar raízes de uma função. Com isto, o programa reúne as ferramentas tradicionais de geometria com outras mais adequadas à álgebra. Isto tem a vantagem didática de representar, ao mesmo tempo e em um único ambiente visual, as características geométricas e algébricas de um mesmo objeto.

Na figura abaixo temos a interface inicial do GeoGebra. Onde aparecem as opções do menu e os botões para acesso às ferramentas.

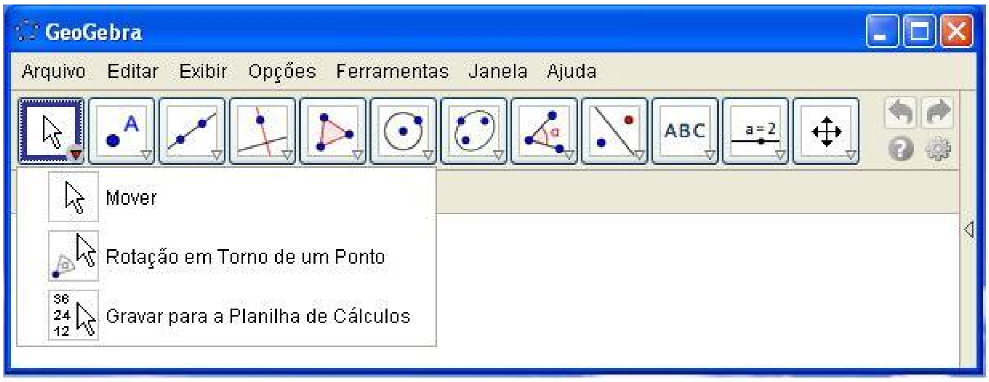


Figura 31: Interface do GeoGebra

3.2.1 Construção do Ponto Médio de Um Segmento

Após iniciar o GeoGebra escolha no botão de ferramentas ponto a opção novo ponto. Marque dois pontos distintos (A e B) na tela de desenhos. Acesse a ferramenta retas e escolha a opção segmento definido por dois pontos, clique no ponto A e depois no ponto B, determinando o segmento AB.

Depois, na ferramenta ponto, escolha a opção ponto médio ou centro. Desloque o cursor até o segmento e dê um clique sobre o mesmo. Imediatamente aparecerá o ponto C, que será o ponto médio de AB.

Figura 32: Ferramenta ponto médio no GeoGebra

3.2.2 Construção da Bissetriz de Um Ângulo

Após iniciar o GeoGebra escolha no botão de ferramentas ponto a opção novo ponto. Marque três pontos distintos (A, B e C) na tela de desenhos. Acesse o menu Editar e escolha a opção Propriedades fazendo surgir uma caixa de diálogo. Selecione o ponto C na lista da direita e na aba Básico troque o nome para O.

Acesse a ferramenta retas e escolha a opção semirreta definida por dois pontos, clique no ponto O e depois no ponto A, determinando a semirreta $\overrightarrow{OA}$. Repita a operação para os pontos O e B. Assim é construído o ângulo A$\widehat{O}$B.

Depois, no botão reta perpendicular, escolha a opção bissetriz. Desloque o cursor até o desenho e dê um clique em cada um dos pontos do ângulo. O segundo clique deve ser sempre sobre o vértice. Imediatamente aparecerá uma reta que passa no ponto O. Essa reta contém a bissetriz do ângulo A$\widehat{O}$B.

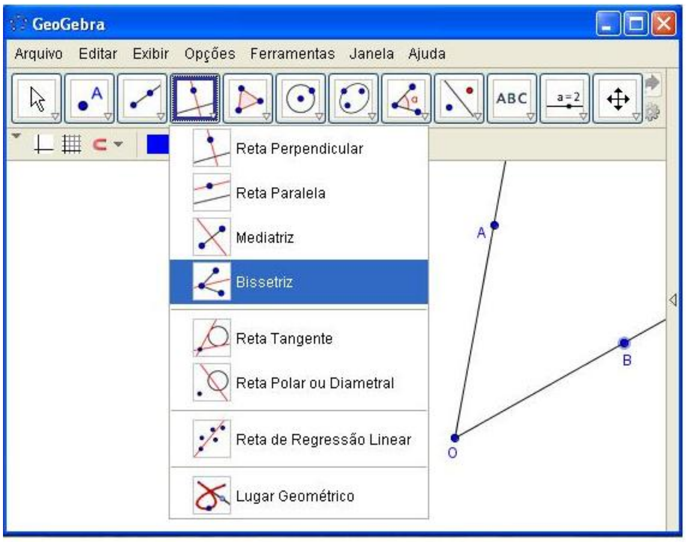


Figura 33: Ferramenta bissetriz no GeoGebra

3.2.3 Construção de Um Polígono

Após iniciar o GeoGebra acesse a opção polígono nos botões de ferramentas.

Desloque o cursor até a tela de desenhos e dê cliques sucessivos em locais distintos. Cada novo clique forma um lado da figura. Para fechar o polígono retorne ao ponto inicial e dê um clique sobre ele.

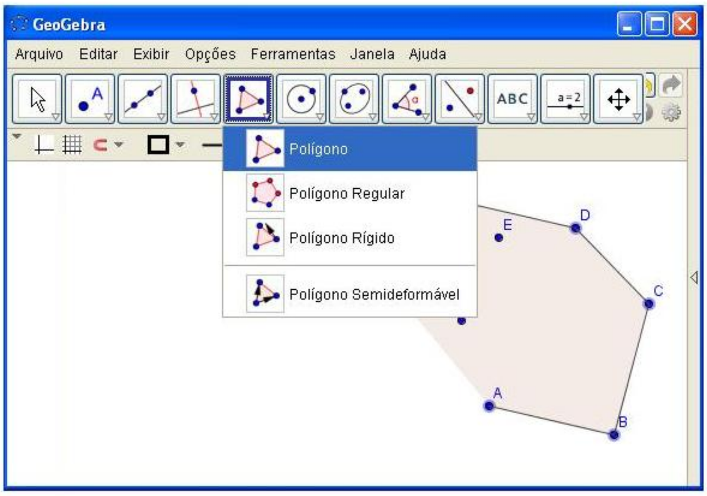


Figura 34: Ferramenta polígono no GeoGebra

4 ATIVIDADES

Nesse capítulo são apresentadas cinco atividades.

Em cada atividade estão descritos os objetivos, os materiais a serem usados, os conhecimentos que devem ser empregados, o grau de dificuldade e o tempo de duração estimado para realização da referida atividade.

Essas atividades visam avaliar qualitativamente a absorção, por parte do aluno, dos axiomas, definições e proposições colocadas no trabalho.

Deve-se atribuir às referidas atividades um caráter instigante e desafiador, retirando qualquer enfoque relacionado à conceito ou nota.

As possíveis respostas de cada atividade encontram-se no próximo capítulo.

1. Provar que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

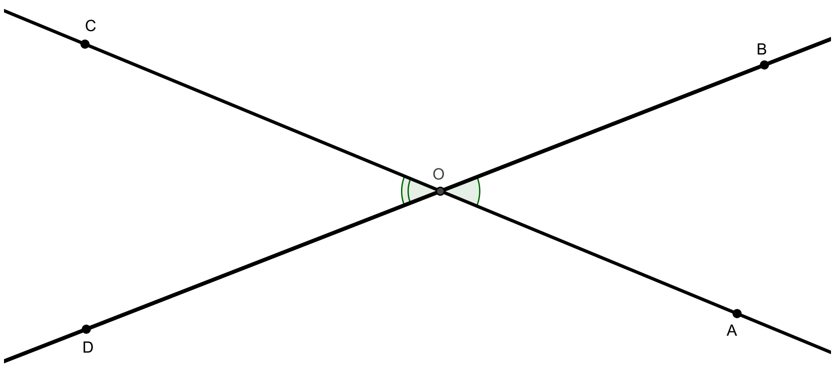


Figura 35: Ângulos opostos pelo vértice

Objetivos:

✓ Reconhecer ângulos opostos pelo vértice e ângulos adjacentes.

✓ Comprovar um teorema sem realizar medidas.

Materiais utilizados:

✓ Além de lápis e borracha é necessário o uso de régua para desenhar as retas concorrentes.

Conhecimentos empregados:

✓ Propriedades dos ângulos adjacentes suplementares.

✓ Manipulação de expressões algébricas.

✓ Uso da propriedade aditiva da igualdade.

Grau de dificuldade:

✓ Fácil, devido à simplicidade algébrica empregada.

Tempo de duração:

✓ Estimado em aproximadamente 5 minutos.

2. Provar que o triângulo isósceles possui os ângulos da base congruentes.

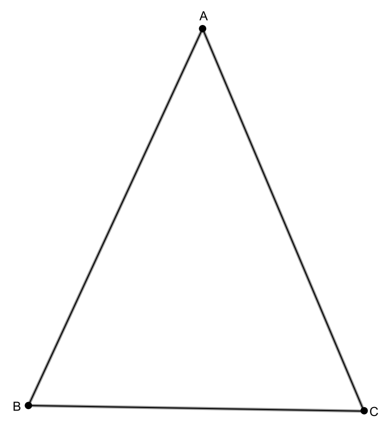


Figura 36: Triângulo isósceles

Objetivos:

✓ Reconhecer triângulo isósceles e seus elementos.

✓ Comprovar uma propriedade dos triângulos isósceles sem realizar medidas.

Materiais utilizados:

✓ Além de lápis e borracha é necessário o uso de uma régua graduada e compasso, para construir o triângulo e determinar o ponto médio da base ou a bissetriz do ângulo do vértice. Na ausência do compasso é interessante um par de esquadros.

Conhecimentos empregados:

✓ Construção de um triângulo isósceles.

✓ Determinação do ponto médio e da mediatriz de um segmento.

✓ Construção da bissetriz de um ângulo.

✓ Congruência de triângulos.

Grau de dificuldade:

✓ Essa atividade pode ser avaliada como fácil ou moderadamente difícil, pois pode requerer uma construção mais elaborada.

Tempo de duração:

✓ Estimado entre 5 e 10 minutos.

3. Mostrar que as diagonais de um paralelogramo cortam-se nos seus pontos médios.

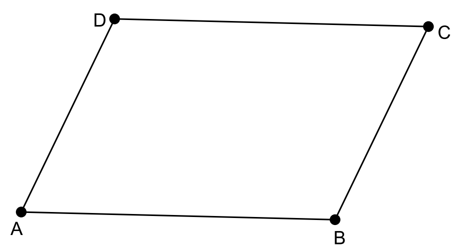


Figura 37: Paralelogramo

Objetivos:

✓ Reconhecer um paralelogramo e suas diagonais.

✓ Comprovar, com utilização de recursos algébricos, uma propriedade geral das diagonais dos paralelogramos.

Materiais utilizados:

✓ Além de lápis e borracha é necessário o uso de, pelo menos, uma régua graduada para construir o paralelogramo e traçar as diagonais. Podendo ser muito útil um par de esquadros e um compasso.

Conhecimentos empregados:

✓ Construção de um paralelogramo e de suas diagonais.

✓ Propriedade dos ângulos alternos.

✓ Congruência de triângulos.

Grau de dificuldade:

✓ Essa atividade pode ser avaliada como moderadamente difícil, pois requer uma construção mais elaborada.

Tempo de duração:

✓ Estimado entre 5 e 10 minutos.

4. Sendo AI e BI bissetrizes, mostre que o ângulo AIB é reto.

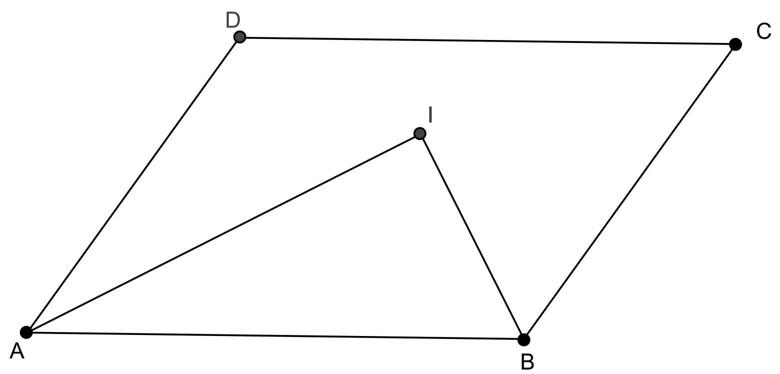


Figura 38: Paralelogramo com as bissetrizes dos ângulos A e B

Objetivos:

✓ Reconhecer um paralelogramo, seus ângulos internos e suas bissetrizes.

✓ Recordar a propriedade da bissetriz de um ângulo.

✓ Comprovar, com utilização de recursos algébricos, uma propriedade geral das bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo.

Materiais utilizados:

✓ Além de lápis e borracha é necessário o uso de uma régua graduada e compasso, para construir o paralelogramo e as bissetrizes de dois ângulos consecutivos. Seria interessante o uso de um par de esquadros.

Conhecimentos empregados:

✓ Construção de um paralelogramo e da bissetriz de um ângulo.

✓ Propriedade dos ângulos consecutivos de um paralelogramo.

✓ Propriedade dos ângulos alternos.

✓ Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Grau de dificuldade:

✓ Essa atividade pode ser avaliada como moderadamente difícil, pois requer uma construção mais elaborada.

Tempo de duração:

✓ Estimado entre 5 e 10 minutos.

5. Considere o trapézio da figura abaixo. Prove que os ângulos consecutivos de bases diferentes são suplementares.

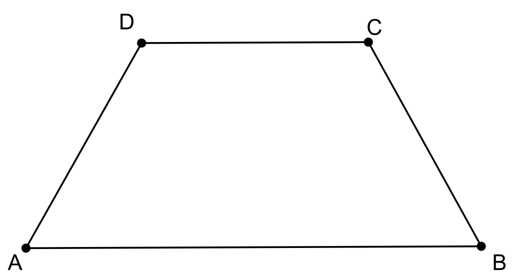


Figura 39: Trapézio ABCD

Objetivos:

✓ Reconhecer um trapézio, seus elementos e sua principal característica.

✓ Comprovar, com utilização de recursos algébricos, uma propriedade importante dos ângulos consecutivos de bases diferentes de um trapézio.

Materiais utilizados:

✓ Além de lápis e borracha é necessário o uso de uma régua para construir o trapézio e uma de suas diagonais.

Conhecimentos empregados:

✓ Construção de um trapézio e de uma de suas diagonais.

✓ Propriedade dos ângulos alternos.

✓ Propriedade dos ângulos colaterais.

✓ Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Grau de dificuldade:

✓ Essa atividade pode ser avaliada como fácil, devido à simplicidade algébrica empregada.

Tempo de duração:

✓ Estimado em 5 minutos.

5 COMENTÁRIOS DAS ATIVIDADES

ATIVIDADE 1 - Provar que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Devido à simplicidade, provavelmente, os alunos não encontrarão dificuldades na resolução dessa atividade. De forma geral, espera-se que as respostas tenham o *formato* de uma das que estão apresentadas abaixo.

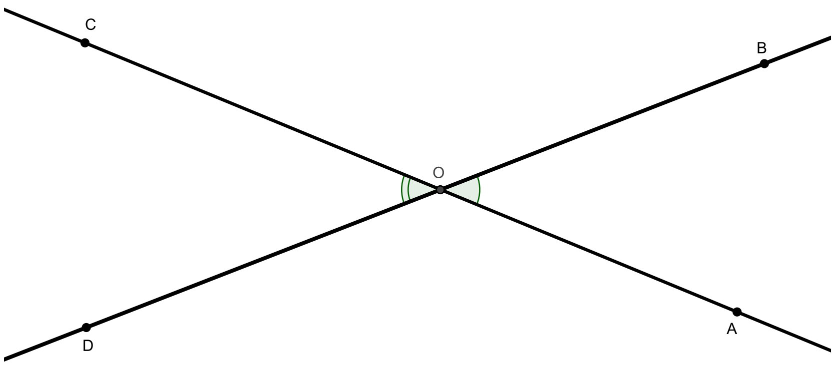


Figura 40: Atividade 1

RESPOSTA 1.1

Na figura temos que os ângulos A$\widehat{O}$B e B$\widehat{O}$C são adjacentes suplementares, assim como os ângulos B$\widehat{O}$C e C$\widehat{O}$D. Como a soma dos dois pares de ângulos citados é sempre 180^o e o ângulo B$\widehat{O}$C é comum às duas somas, podemos concluir que os ângulos opostos pelo vértice A$\widehat{O}$B e C$\widehat{O}$D são congruentes.

De forma análoga temos que os ângulos B$\widehat{O}$C e A$\widehat{O}$D também são congruentes.

RESPOSTA 1.2

Na figura temos:

$$\mathrm{A}\widehat{O}\mathrm{B} + \mathrm{B}\widehat{O}\mathrm{D} = 180^o$$
$$\mathrm{D}\widehat{O}\mathrm{C} + \mathrm{B}\widehat{O}\mathrm{D} = 180^o$$

Subtraindo membro a membro, as equações acima, temos:

$$\mathrm{A}\widehat{O}\mathrm{B} - \mathrm{D}\widehat{O}\mathrm{C} = 0$$
$$\mathrm{A}\widehat{O}\mathrm{B} = \mathrm{D}\widehat{O}\mathrm{C}$$

O que mostra que ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

A resposta 1.1, descreve uma possível prova que o aluno fará utilizando a forma dissertativa. Essa forma é, para muitos deles, mais simples, por não existir preocupação com manipulações nem com o rigor algébrico.

Na resposta 1.2 o recurso algébrico é simples. Requer apenas que o aluno utilize a equação para ângulos suplementares e, um recurso muito utilizado na resolução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas. Essa maneira é mais consistente e evidencia o domínio dos recursos algébricos elementares, pelo aluno.

ATIVIDADE 2 - Provar que o triângulo isósceles possui os ângulos da base congruentes.

Devido à simplicidade, provavelmente os alunos não encontrarão dificuldades na resolução dessa atividade. De forma geral espera-se que as respostas tenham o *formato* de uma das que estão apresentadas abaixo.

Além das duas respostas descritas abaixo, uma outra pode ser construída com a utilização da bissetriz do ângulo do vértice; não citada por ser equivalente à resposta 2.1.

RESPOSTA 2.1

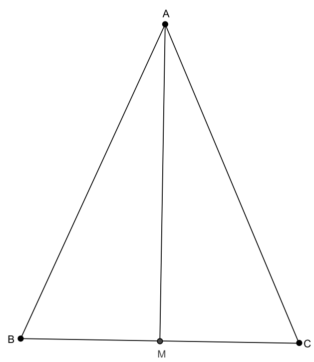


Figura 41: Atividade 2

Determina-se na figura o ponto médio (M) do lado BC (base do triângulo).

Temos que os triângulos AMC e AMB são congruentes, pois $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{BM} = \overline{CM}$ e $\overline{AM}$ é lado comum.

O ângulos A$\widehat{B}$M e A$\widehat{C}$M são correspondentes, pois são opostos ao lado comum $\overline{AM}$. Logo, eles são congruentes.

RESPOSTA 2.2

Sabemos que em todo triângulo o maior lado é oposto ao maior ângulo. Logo, lados iguais devem ser opostos a ângulos iguais. Como o triângulo ABC é isósceles e $\overline{AB} = \overline{AC}$, dizemos que ângulos opostos a esses lados são iguais, portanto $\widehat{B} = \widehat{C}$.

ATIVIDADE 3 - Mostrar que as diagonais de um paralelogramo cortam-se nos seus pontos médios.

Provavelmente os alunos encontrarão dificuldades na resolução dessa atividade, visto que é exigido, em uma das respostas, um pouco mais de critério na resolução. De forma geral espera-se que as respostas tenham o *formato* de uma das que estão apresentadas a seguir.

RESPOSTA 3.1

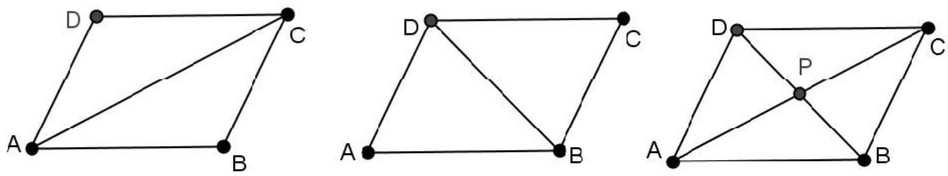


Figura 42: Atividade 3

Sabemos que os lados e ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

Traçando a diagonal $\overline{AC}$ temos que os triângulos ADC e CBA são congruentes pelo caso lado-lado-lado. Portanto D$\widehat{A}$C = B$\widehat{C}$A e C$\widehat{A}$B = A$\widehat{C}$D por estarem opostos a lado congruentes.

Traçando, agora, a diagonal $\overline{BD}$ temos que os triângulos ABD e CDB são congruentes. Portanto, A$\widehat{B}$D = C$\widehat{D}$D e A$\widehat{D}$B = C$\widehat{B}$D por estarem opostos a lado congruentes.

Analisando o paralelogramo com as duas diagonais traçadas temos que os ângulos formados em torno do ponto P são, dois a dois, opostos pelo vértice, logo são congruentes.

Portanto, temos que os triângulos APD e CPB são congruentes, pois possuem os três ângulos internos correspondentes congruentes e os lados $\overline{DA}$ e $\overline{BC}$, que são correspondentes, também são congruentes.

Concluímos que $\overline{PB} = \overline{PD}$; logo, P é ponto médio da diagonal $\overline{BD}$.

Usando a mesma argumentação temos que P também é ponto médio de $\overline{AC}$.

Dessa forma fica provado que as diagonais de um paralelogramo se intersectam no ponto médio.

RESPOSTA 3.2

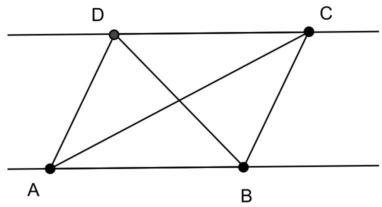


Figura 43: Atividade 3

Utilizando o paralelismo dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e traçando as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ temos que os pares de ângulos A$\widehat{B}$P e C$\widehat{D}$P são congruentes pois são alternos internos. Da mesma forma temos que B$\widehat{A}$P = D$\widehat{C}$P, pois também são alternos internos.

Sabemos que os ângulos A$\widehat{P}$B e = C$\widehat{P}$D são congruentes por serem opostos pelo vértice.

Logo, os triângulos APB e CPD são congruentes por terem ângulos internos congruentes e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que são correspondentes, também congruentes. Portanto, temos que $\overline{PB} = \overline{PD}$, logo P é ponto médio da diagonal $\overline{BD}$.

Como $\overline{PA} = \overline{PC}$ temos, também, que P é ponto médio de $\overline{AC}$.

Portanto, fica provado que as diagonais de um paralelogramo se intersectam no ponto médio.

ATIVIDADE 4 - Provar que o ângulo entre as bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo é reto.

Devido à simplicidade, provavelmente os alunos não encontrarão dificuldades na resolução dessa atividade. De forma geral espera-se que as respostas tenham o *formato* de uma das que estão apresentadas abaixo.

RESPOSTA 4.1

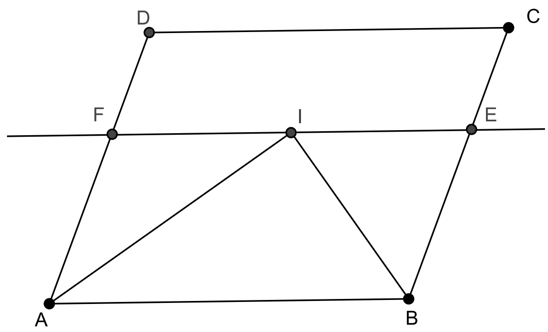


Figura 44: Atividade 4

Sabemos que os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares. Logo, na figura acima, $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^o$.

Como $\overline{AI}$ e $\overline{BI}$ são bissetrizes temos que:

$$\mathrm{B}\widehat{A}\mathrm{I} = \frac{A}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{A}\widehat{B}\mathrm{I} = \frac{B}{2}$$

$$\mathrm{B}\widehat{A}\mathrm{I} + \mathrm{A}\widehat{B}\mathrm{I} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{A+B}{2} = \frac{180}{2} = 90^o$$

Somando os ângulos do triângulo BIA e substituindo as expressões anteriores temos:

$$\mathrm{B}\widehat{A}\mathrm{I} + \mathrm{A}\widehat{B}\mathrm{I} + \mathrm{A}\widehat{I}\mathrm{B} = 180^o$$
$$90^o + \mathrm{A}\widehat{I}\mathrm{B} = 180^o$$
$$\mathrm{A}\widehat{I}\mathrm{B} = 90^o$$

Provando que o ângulo formado entre as bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo é reto.

RESPOSTA 4.2

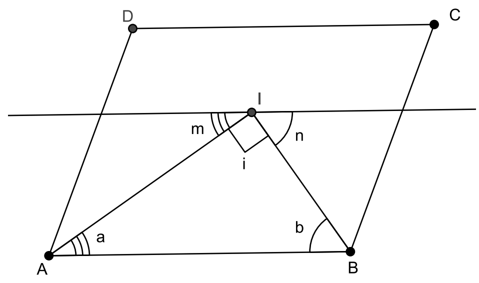


Figura 45: Atividade 4

Sabemos que os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares, portanto $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^o$.
Na figura temos que $\widehat{a} = \dfrac{A}{2}$ e $\widehat{b} = \dfrac{B}{2}$, pois $\overline{AI}$ e $\overline{BI}$ são bissetrizes.

Traçando, pelo ponto I, uma paralela ao lado $\overline{AB}$ temos pela, propriedade de retas paralelas cortadas por uma transversal que $\widehat{a} = \widehat{m}$ e $\widehat{b} = \widehat{n}$ por serem ângulos alternos internos.

Como $\widehat{m} + \widehat{i} + \widehat{n} = 180^o$, podemos escrever então que:

$$\widehat{a} + \widehat{i} + \widehat{b} = 180^o$$
$$\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{i} = 180^o$$

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \widehat{i} = 180^o$$

$$\frac{A+B}{2} + \widehat{i} = 180^o$$

$$90^o + \widehat{i} = 180^o$$
$$\widehat{i} = 90^o$$

Provando que o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo é reto.

ATIVIDADE 5 - Provar que os ângulos consecutivos de bases diferentes do trapézio são suplementares.

Devido à simplicidade, provavelmente os alunos não encontrarão dificuldades na resolução dessa atividade. De forma geral espera-se que as respostas tenham o *formato* de uma das que estão apresentadas abaixo.

RESPOSTA 5.1

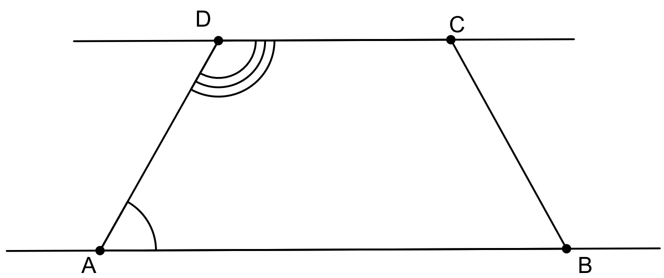


Figura 46: Atividade 5

Traçando as retas suportes dos lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e utilizando as propriedades dos ângulos formados por um par de retas paralelas intersectadas por uma transversal temos que, os ângulos internos $\widehat{A}$ e $\widehat{D}$ são colaterais, portanto são suplementares.

RESPOSTA 5.2

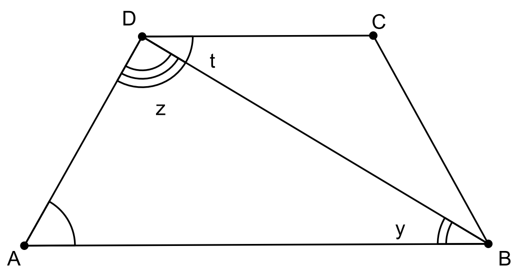


Figura 47: Atividade 5

Traçando a diagonal $\overline{BD}$ do trapézio temos, no triângulo ABD,

$$\widehat{A} + \widehat{y} + \widehat{z} = 180^o \text{ (I)}.$$

Como $\widehat{t}$ e $\widehat{y}$ são ângulos alternos temos que $\widehat{t} = \widehat{y}$.

Substituindo em (I):

$$\widehat{A} + \widehat{y} + \widehat{z} = 180^o$$
$$\widehat{A} + \widehat{t} + \widehat{z} = 180^o$$

Como $\widehat{t} + \widehat{z} = \widehat{D}$ teremos

$$\widehat{A} + \widehat{D} = 180^o$$

Portanto, os ângulos consecutivos de bases diferentes de um trapézio são suplementares.

CONCLUSÃO

O presente trabalho não tem a pretensão de ser comparado a um livro didático, no qual o autor dispõe de recursos e muito tempo para aprimorar a apresentação dos conteúdos e corrigir as possíveis falhas, além de contar com a opinião dos professores que se utilizam deste material.

Apesar das limitações, já citadas neste trabalho, é esperado que os alunos consigam um desenvolvimento bastante razoável nos conceitos básicos da geometria euclidiana plana.

Os conteúdos foram colocados de maneira simples, para que a absorção e compreensão tenha uma grande parcela do caráter intuitivo, que sempre se espera durante o processo de ensino aprendizagem de geometria.

Muitos pesquisadores afirmam que o conhecimento geométrico possui níveis diferenciados de compreensão, que cresce gradativamente com a qualidade dos estudos oferecidos.

Esses níveis vão do reconhecimento visual de uma figura geométrica (mais básico), passando pela identificação das propriedades, até chegar na fase de abstração, que torna possível compreender e demostrar teoremas.

Esse nível de capacidade em abstrair para solucionar um problema deve ser estimulado pelo professor, através de atividades que instigue o aluno a tentar compreender o que está sendo proposto e chegar à resposta desejada.

A proposta dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental sugere que o ensino de geometria enfatize a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e de se trabalhar explicações, argumentações e demonstrações. Além disso, o mencionado documento também ressalta a importância de se incorporar ao ensino os recursos das tecnologias da comunicação.

Estudos recentes indicam que alunos que passaram pela experiência de lidar com construções geométricas, representações dinâmicas de figuras e propriedades geométricas demonstraram uma evolução maior em relação à compreensão dos conceitos geométricos, assim, como suas justificativas à determinadas indagações conceituais melhoraram, demonstraram uma melhor apreensão dos conceitos.

Deve ser ressaltado que o uso da construção geométrica e da geometria dinâmica pode trazer uma importante contribuição para o currículo de matemática, tanto do Ensino Fundamental quanto do Médio, pois exigirá um maior planejamento das atividades, por parte do professor.

REFERÊNCIAS

[1] BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana. **Geometria Plana**, Rio de Janeiro: SBM, 1995.

[2] BOYER, C. B. História da Matemática, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. **Hist. Matemática**, São Paulo: Blücher, 1996.

[3] BRAZ, F. M. História da Geometria Hiperbólica. **Geometria Hiperbólica**, Belo Horizonte: UFMG, 2009.

[4] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 9. **Geometria Plana**, São Paulo: Atual Editora, 1996.

[5] EVES, H. História da Geometria; tradução Hygino H. Domingues, Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. **Hist. Geometria**, São Paulo: Atual Editora, 1992.

[6] FAINGUELERNT, E. K., O ensino de Geometria no 1^o e 2^o graus. **SBEM** A Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 4, p. 45-53, 1995.

[7] FAINGUELERNT, E. K., Representação e construção em Geometria. **Educação** Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

[8] GIRALDO, V.; PINTO MATOS, F. R.; SILVANI CAETANO, P. A. Recursos Computacionais no Ensino de Matemática. **Coleção Profmat** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[9] LIMA, E. L. Meu Professor de Matemática e outras histórias. **Matemática** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[10] LIMA, E. L. Medidas e formas em geometria. **Matemática** Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[11] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do ensino médio Vol. 2. **Matemática** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[12] LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **SBEM** A Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 4, p. 3-13, 1995.

[13] PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: Causas e consequências. **Educação** - Revista Zetetiké, São Paulo, ano I, n. 1, p. 7-17, 1993.

[14] Parâmetros Curriculares Nacional. **Matemática**, Brasília: MEC, 1997.

[15] ROQUE, T. M.; PITOMBEIRA, J. B. Tópicos de História da Matemática. **Coleção Profmat** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[16] WAGNER, E. Construções Geométricas. **Geometria**, Rio de Janeiro: SBM, 1993.