UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Rosilene Pereira de Oliveira Corrêa

Construções Geométricas: uma proposta de ensino utilizando régua, compasso e dobraduras

Juiz de Fora

2020

Rosilene Pereira de Oliveira Corrêa

Construções Geométricas: uma proposta de ensino utilizando régua, compasso e dobraduras

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Júnior

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Corrêa, Rosilene Pereira de Oliveira.
Construções Geométricas : uma proposta de ensino utilizando régua, compasso e dobraduras / Rosilene Pereira de Oliveira Corrêa. – 2020.
82 f. : il.

Orientador: Nelson Dantas Louza Júnior
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2020.

1. Construções Geométricas. 2. Régua e Compasso. 3. Dobraduras. I. Louza Júnior, Nelson Dantas, orient. II. Título.

Rosilene Pereira de Oliveira Corrêa

Construções Geométricas: uma proposta de ensino utilizando régua, compasso e dobraduras

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 06 de agosto de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Nelson Dantas Louza Junior

Prof. Dr. Nelson Dantas Louza Júnior - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Nelson Dantas Louza Junior

Prof. Dr. William Versolati França
Universidade Federal de Juiz de Fora

Nelson Dantas Louza Junior

Prof. Dr. Alex Farah Pereira
Universidade Federal Fluminense

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, fonte de infinita sabedoria, por me capacitar ao longo deste curso.

Agradeço à minha mãe, pelo incentivo desde sempre.

Agradeço aos meus familiares, por compreender minhas ausências.

Agradeço aos meus colegas de classe, pelo companheirismo e pela disposição em ajudar.

Agradeço ao professor Dr. Nelson Dantas Louza Júnior, meu orientador,e aos demais professores que contribuíram para meu crescimento profissional.

Agradeço a CAPES, pois o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço a todos que acreditam e torcem pelo meu sucesso profissional.

RESUMO

O presente trabalho discorre sobre a importância das atividades de construções geométricas para desenvolvimento dos discentes em Geometria. Nesta perspectiva, inicialmente, é feito um levantamento sobre o que a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe, como conteúdos essenciais, nas competências de Geometria sobre construções geométricas nos anos finais do Ensino Fundamental. A partir das diretrizes da BNCC, é feito uma análise de três coleções de livros didáticos de Matemática, destinados aos anos finais do Ensino Fundamental, sobre sua adequação às orientações da Base Nacional Comum Curricular. Além disso, o trabalho apresenta as construções geométricas que fazem parte do rol de orientações da BNCC, acrescentada de outras de relevância na consolidação do conteúdo. E, por fim, é sugerido uma proposta de atividades de construções geométricas com a utilização de dobraduras, apresentando o uso de dobraduras como forma auxiliar e diversificada de se trabalhar com as construções geométricas.

Palavras-chave: Construções geométricas. Régua e compasso. Dobraduras.

ABSTRACT

The present work discusses the importance of geometric construction activities for the development of students in Geometry. In this perspective, initially, a survey is made about what the Cammon Base National Curriculum (BNCC) proposes, as essential contents, in the skills of Geometry on geometric constructions in the final years of Elementary School. Based on the BNCC guidelines, an analysis is made of three collections of Mathematics textbooks, destined for the final years of Elementary School, on their adequacy to the guidelines of the Common Base National Curricular. In addition, the work presents the geometric constructions that are part of the list of guidelines of the BNCC, added by others of relevance in the consolidation of the content. Finally, a proposal for geometric construction activities with the use of folds is suggested, presenting the use of folds as an auxiliary and diversified way of working with geometric constructions.

Keywords: Geometric constructions. Ruler and compass. Folds.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Despertar o interesse dos alunos pelos objetos de estudos propostos em sala de aula é um desafio diário para os profissionais de educação. Para impulsionar suas potencialidades, é necessário, muito além de apresentar um conteúdo contextualizado, apresentar o conteúdo de forma atrativa, para que o aluno alcance o objetivo que é a construção do conhecimento. Nessa perspectiva, uma boa estratégia no ensino da matemática é trabalhar com diferentes metodologias para que cada um seja contemplado na sua individualidade, oferecendo ferramentas que facilite a aprendizagem e proporcionando um ambiente motivador, em que o aluno se sinta integrado e disponível à aprendizagem.

Segundo Fita, Tapia (2015), existem três condições necessárias para que ocorra uma aprendizagem mais significativa possível de um determinado conteúdo pelo aluno: a primeira delas é a significatividade lógica do material utilizado; a segunda é a significatividade psicológica, ou seja, a importância de partir de um ponto tendo em vista o que o aluno já tem interiorizado sobre o determinado assunto; e o terceiro é o fator motivacional, o qual contribui para uma participação ativa do aluno. Para estes autores o aluno motivado "deve estar disposto a realizar o esforço necessário que toda aprendizagem requer" (FITA, TAPIA, 2015, p. 71).

O presente trabalho propõe a utilização das construções geométricas como um recurso facilitador de ensino-aprendizagem de alguns conteúdos de Geometria. E, além da construção com régua e compasso, que é tradicionalmente mais usada, ele apresenta a construção com auxílio de dobraduras como uma forma alternativa de se trabalhar com as construções geométricas.

A justificativa de escolha do tema parte de duas problemáticas: o primeiro surge de experiências vivenciadas em sala de aula por cerca de oito anos de regência de turma no ensino da Matemática, lecionando desde o Ensino Fundamental ao Ensino Médio de uma escola pública, que demonstraram que os alunos possuem deficiência nos conhecimentos relacionados a Geometria; e a segunda relaciona-se a supervalorização dos recursos tecnológicos em detrimento ao uso de recursos tradicionais e válidos, como o uso da régua e do compasso em atividades de construções. Mas é importante que fique claro que não está sendo atribuído à tecnologia a característica de ser um problema e isto será evidenciado nos parágrafos que seguem.

As dificuldades com os conteúdos de Geometria podem estar relacionadas a diversos fatores, mas destacaremos o fato de que muitas vezes a álgebra ocupa uma posição superior em relação à geometria numa escala de importância de conteúdos, investindo-se muito tempo em uma, de tal forma que a outra deixa de ser apreciada como deveria. E, na realidade, não existem conteúdos mais importantes, todos juntamente contribuem para a formação dos alunos preparados para o desempenho de seu papel em sociedade, dando-lhes a oportunidade de uma educação efetiva.

É inegável as contribuições da tecnologia à sociedade e, em se tratando de educação, não poderia ser diferente. Contudo, o que queremos destacar é que o não uso de recursos tecnológicos, como softwares, não limita o conhecimento e, para isso, basta observar quantas descobertas ocorreram no passado quando os recursos eram precários. Sendo assim, utilizar os recursos tradicionais é uma forma de valorizar o processo da concepção do conhecimento. E sob outra perspectiva, quando as escolas não podem ofertar uma sala de informática, uma vez que essa é uma realidade de muitas escolas, podemos recorrer aos recursos tradicionais, como, no caso das construções geométricas, a construção com régua e compasso.

Santana, Santos (2018) elaboraram um artigo com relatórios a partir de uma atividade proposta aos alunos, em que se ofereciam a um grupo recursos digitais e, a outro grupo, recursos tradicionais. Suas considerações finais concorrem para o entendimento que recursos tradicionais são válidos. Veja:

> [...] considera-se que o uso adequado de recursos digitais no contexto educacional pode melhorar o desempenho dos estudantes da Educação Básica em domínios específicos do conhecimento, no entanto, o uso de recursos tradicionais favorece também, o desenvolvimento do raciocínio lógico, a interação social e o trabalho colaborativo, isso revela que, aplicação de jogos com abordagem tradicional (não digital) pode apresentar resultados positivos e não devem ser desconsiderados no processo de formação educacional dos estudantes da educação básica. (SANTANA, SANTOS, p. 80)

Em suma, o objetivo desse trabalho é mostrar a relevância da construção geométrica para assimilação e aprendizagem de alguns conteúdos de geometria. A construção com régua e compasso é uma maneira de aproximar definições apresentadas pelos livros didáticos de forma prática, tornando-se mais concreto e acessível ao aluno. Ademais essa construção também pode proporcionar uma aula diferenciada, tornando-se mais atrativa aos alunos. A utilização de dobraduras nas construções geométricas é um recurso pedagógico diversificado, que possibilita uma forma alternativa de despertar o interesse do aluno, para que haja maior eficácia da aprendizagem. As dobraduras em oficinas podem trabalhar, além dos conteúdos matemáticos, a cooperação em grupo, a coordenação motora e um momento de descontração.

A metodologia utilizada na pesquisa foi basicamente documental, da qual dedicamos o primeiro capítulo para tratar da construção geométrica relacionando-a às propostas apresentadas pela BNCC. O segundo foi dedicado a apresentar e definir os conceitos geométricos básicos, necessários para a compreensão das construções geométricas propriamente ditas no seu terceiro capítulo, o qual intitulamos de “Construções Elementares”. No quarto capítulo, abrimos um espaço para ampliação das linhas limítrofes quanto à construção geométrica, demonstrando a possibilidade de resolver equações algébricas com o uso da régua e do compasso. Por fim, chegamos ao capítulo final, que ampliou as possibilidades relacionadas às construções geométricas, propondo a realização de construções através de dobraduras.

Num primeiro momento, analisamos a importância das orientações da Base Nacional Comum Curricular para o desenvolvimento de uma educação justa e igualitária e, mais especificamente, identificamos quais eram os conteúdos de geometria por ano escolar em que seria possível aplicar a construção geométrica com régua e compasso. Em seguida, analisamos três coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental para verificar se os mesmos estavam de acordo com as novas recomendações da BNCC quanto à construção geométrica.

A seguir, foi apresentado o passo a passo de algumas construções geométricas elementares, base para construções mais complexas. Foram consideradas construções elementares a construção de: retas paralelas e perpendiculares, a localização do ponto médio, a mediatriz, a bissetriz e o círculo.

A construção de expressões algébricas também foi abordada, considerando ser uma atividade muito explorada no livro de geometria do Curso do Profmat, curso para qual este trabalho se destina.

Após algumas sugestões de atividades mais complexas, consideramos importante abordar a construção geométrica com o auxílio das dobraduras, pois é sempre importante explorar os diversos recursos pedagógicos disponíveis e diferenciados para que se contemple as diferentes formas de aprendizagem dos discentes.

Por fim, salientamos a importância de diferenciar aprendizagem de memorização, pois o conteúdo memorizado logo é esquecido, e a aprendizagem que acontece em atividades práticas é mais fácil de ser relembrada quando necessária, pois o que observamos hoje é a existência de diversos concursos/provas que exigem do indivíduo um amplo domínio da geometria. Desta forma, o presente trabalho preocupa-se com a preparação dos discentes em estudos e conquistas posteriores.

2 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR E AS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) é um documento que contém normas que formam um conjunto de aprendizagens consideradas essenciais para a formação do aluno ao longo da Educação Básica. A preocupação em se fixar conteúdos essenciais já se fazia presente na Constituição Federal em seu artigo 210 (BRASIL, 1988): “Serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais”. No entanto, determinar o que seriam os conteúdos mínimos foi motivo de muitas discussões ao longo da formulação da BNCC.

A primeira versão da BNCC começou a ser discutida no ano de 2015, e essa discussão ocorreu de forma colaborativa e democrática, por meio de consulta pública online, conduzida pelo Ministério da Educação. A BNCC surgiu da necessidade de melhorias da educação brasileira, para promoção de uma educação de qualidade, justa e igualitária, visto que devido, principalmente, à grande extensão territorial do Brasil, cada região poderia trabalhar com aprendizagens diferentes em anos específicos da Educação Básica. A grande proposta deste projeto é que a educação oferecida em instituições educacionais públicas ou privadas, em qualquer região, tenham a BNCC como parâmetro no planejamento dos conhecimentos a serem trabalhados em cada ano da Educação Básica, diminuindo assim, as desigualdades educacionais.

No ano de 2016, iniciou-se outra discussão relacionada à BNCC em busca de melhorar seu primeiro texto, identificando possíveis pontos frágeis do documento. Em março de 2016, foi encerrada a consulta online da primeira versão com mais de 12 milhões de contribuições da sociedade civil, professores, escolas, organizações do terceiro setor e entidades científicas. Em 2017, a segunda versão da BNCC foi homologada com as partes da Educação Infantil e do Ensino Fundamental; e este foi o documento que utilizamos para uma breve análise dos conhecimentos que foram considerados indispensáveis aos alunos nos anos finais do Ensino Fundamental na disciplina de Matemática e, mais especificamente, no campo da Geometria.

Como o objetivo principal deste capítulo é identificar o que a BNCC considera essencial no tocante a construção geométrica, destacaremos um trecho de seu texto onde é demonstrado a importância da experimentação para a aprendizagem da Matemática. A mera apresentação de fórmulas aos alunos gera um tipo de aprendizagem passageira, e a manipulação das informações geométricas por meio das construções podem tornar o conteúdo mais interessante, concreto e atingível.

> Apesar de a Matemática ser, por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados, é de fundamental importância também considerar o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática. (BRASIL, 2017, p. 265)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) são outros documentos elaborados pelo

Governo Federal que visam a melhoria da educação e que precedem a BNCC. Os PCNs foram utilizados como ponto de partida para a elaboração da BNCC e também propõem a utilização da construção geométrica com régua e compasso na assimilação do conhecimento pelo aluno, sendo mais objetivo ao tratar da construção geométrica, sugerindo ao professor explorar a atividade da construção geométrica com régua e compasso como método de visualização de propriedades e formulação de outras relações.

> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. (PCN - 5 a 8 série pag. 51)

2.1 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR E AS COMPETÊNCIAS NO CAMPO DA GEOMETRIA

Este capítulo tem por objetivo identificar os conteúdos, no campo da Geometria, que foram considerados essenciais, segundo a BNCC, nos anos finais do Ensino Fundamental. E dentre os conteúdos sinalizados como mínimos, serão destacados aqueles em que essa norma sugere o uso da construção geométrica com o auxílio da régua e do compasso.

Na BNCC, os conhecimentos matemáticos foram divididos em cinco unidades temáticas, a saber: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e medidas; e Probabilidade e Estatística. Nesta etapa, nos ateremos ao que a BNCC propõe na unidade temática da Geometria para cada ano da segunda etapa do Ensino Fundamental, destacando os conteúdos que podem ser trabalhados com o recurso da construção geométrica por meio de régua e compasso.

No 6º Ano, os objetivos de conhecimentos propostos na unidade temática de Geometria são: Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados; Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas); Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados; Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas; Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares.

Na primeira série da etapa final do Ensino Fundamental, já obtemos conteúdos em que podem ser inseridos em atividades que utilizem a construção geométrica com régua e compasso. Pode-se propor ao aluno a construção de retas paralelas e perpendiculares, pedindo ao discente que utilize a mediatriz de forma intuitiva na construção de retas paralelas com distâncias predeterminadas.

Os conhecimentos propostos na BNCC para o 7º Ano em Geometria são: Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem; Simetrias de translação, rotação e reflexão; A circunferência como lugar geométrico; Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal; Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos; Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero.

No 7º Ano, dois tópicos relevantes para se trabalhar com o auxílio de régua e compasso é a construção da circunferência a partir de um raio dado e a construção de triângulos, em especial o triângulo equilátero.

No penúltimo ano do Ensino Fundamental, foram considerados como conhecimentos essenciais em Geometria os seguintes itens: Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros; Construções geométricas: ângulos de 90^o, 60^o, 45^o e 30^o e polígonos regulares; Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas; Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação.

No 8º Ano, foi a primeira vez que o termo construção geométrica foi citado de forma tão clara, mas não é para menos, são muitos os conhecimentos que podem ser desenvolvidos com os alunos na área de Geometria com os instrumentos régua e compasso. Nesta etapa, é proposto aos alunos que encontrem o ponto médio de um segmento e tomem conhecimento da mediatriz como lugar geométrico. Outro segmento de reta importante a ser trabalhado nesse ano é a bissetriz. E aprofundando um pouco mais nestas habilidades, ainda pode ser proposto ao aluno que construa essas retas em um triângulo qualquer com a finalidade de que eles conheçam lugares geométricos importantes em um triângulo, que é o circuncentro e o incentro.

Um outro recurso importante que deve ser utilizado na construção de ângulos é o transferidor, mas os discentes podem também aprender a transportar um ângulo dado com o auxílio da régua e do compasso.

No último ano do Ensino Fundamental, os conhecimentos pretendidos são os seguintes: Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal; Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo; Semelhança de triângulos; Relações métricas no triângulo retângulo; Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração; Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais; Polígonos regulares; Distância entre pontos no plano cartesiano; Vistas ortogonais de figuras espaciais.

Um tópico interessante nesses conhecimentos é a competência dos “polígonos regulares”, pois na sua habilidade - “Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.” (BRASIL, 2017, p. 319) - a BNCC sugere que utilizemos régua e compasso na construção de um polígono regular a partir de uma medida de lado dado, sugere ainda o uso de softwares.

Finalizamos esta seção salientando a importância da utilização da construção geométrica como método de contribuição no desenvolvimento do conhecimento do aluno no campo da Geometria, pois até para utilização de softwares é necessário que o aluno tenha habilidade e intuição no manejo da régua e do compasso.

2.2 A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR E OS LIVROS DIDÁTICOS

Os livros didáticos são recursos que auxiliam alunos e professores no processo de ensino-aprendizagem, pois estes contribuem para o desenvolvimento de uma aula com mais agilidade, possibilitando ao aluno o acesso a um conjunto de informações bem organizados sobre diversos conteúdos propostos. Desta forma, com o livro, pode-se ter um maior aproveitamento do tempo, visto que os alunos podem ocupar-se das atividades propostas por eles, otimizando o tempo em sala de aula.

Nesta seção, nos dedicaremos a analisar três coleções de livros didáticos destinados ao segundo segmento do Ensino Fundamental, com enfoque em verificar se eles abordam as construções geométricas consideradas essenciais pelas normas da BNCC.

As coleções tomadas para pesquisa foram os livros utilizados no material de divulgação do Programa Nacional do Livro Didático 2020, oferecidos às escolas para escolha e adoção do livro didático que serão utilizados nos anos de 2020, 2021 e 2022. Seguem as referências das coleções utilizados nesta análise:

a) A conquista da matemática: 6º ao 9º ano: ensino fundamental: anos finais / José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci. - 4. ed. - São Paulo: FTD 2018;

b) Apoema: matemática: 6º ao 9º ano. ensino fundamental: anos finais / Adilson Longen. - 1. ed. - São Paulo: Editora do Brasil, 2018. - [Coleção Apoema];

c) Matemática realidade e tecnologia: 6º ao 9º ano. ensino fundamental: anos finais / Joamir Roberto de Souza. - 1. ed.- São Paulo: FDT, 2018.

A seguir, traremos quadros, organizadas por ano, com os conteúdos de Geometria que foram considerados essenciais pela BNCC e que se referem à construção geométrica. Quando o livro propuser o item investigado, indicaremos com o sinal “×” e, quando não, deixaremos a célula vazia.

Quadro 1 - Competências e habilidades do 6º ano

	A conquista da matemática	Apoema: matemática	Matemática realidade e tecnologia
Construção de retas	×	×	×
Construção de ângulos	×	×	×
Construção de retas paralelas	×	×	×
Construção de retas perpendiculares	×	×	×

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Observando o quadro, nota-se que os três livros destinados ao 6º ano selecionados trazem a construção de reta, ângulos, retas paralelas e retas perpendiculares, como indicam a Base Nacional Comum Curricular. Mas salientamos que os três livros sugerem a construção usando régua, esquadro e transferidor, o compasso não é mencionado.

Quadro 2 - Competências e habilidades do 7º ano

	A conquista da matemática	Apoema: matemática	Matemática realidade e tecnologia
Transferência de medidas	×		×
Construção do triângulo	×		×
Construção da circunferência	×		×

Fonte: Elabora pelo autor 2020

No 7º ano, os livros didáticos começam a propor o uso do compasso. O livro “Apoema: matemática” não traz nenhuma construção geométrica, já os livros “A conquista da matemática” e “Matemática realidade e tecnologia” trabalham a transferência de medidas de segmentos para uma reta suporte e a construção de triângulos e circunferências com o auxílio da régua e do compasso.

Quadro 3 - Competências e habilidades do 8º ano

	A conquista da matemática	Apoema: matemática	Matemática realidade e tecnologia
Ponto médio		×	×
Construção da mediatriz		×	×
Construção da bissetriz		×	×
Circuncentro e incentro			×
Construção de polígonos regulares	×	×	×

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Analisando esses três livros, podemos observar que eles estão se adaptando ao que a BNCC propõe. O livro do 8º ano “Matemática realidade e tecnologia” apresentou todas as construções averiguadas, mas sua construção de polígonos utiliza-se somente de régua e transferidor. O livro “Apoema:Matemática” é o que traz as construções mais bem detalhadas, ele apresenta um capítulo intitulado de “Construções Geométricas”, e nesse capítulo ele ainda sugere construções com o auxílio do software Geogebra.

O livro do 8º ano da coleção “A conquista da Matemática” é bem completo nas suas definições, ele apresenta os lugares geométricos importantes do triângulo como o ortocentro, incentro, baricentro e o circuncentro, no entanto, não propõe suas construções.

Quadro 4 - Competências e habilidades do 9º ano

	A conquista da matemática	Apoema: matemática	Matemática realidade e tecnologia
Construção de polígonos regulares	×	×	×

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

O livro “A conquista da matemática” propõe a construção somente com régua e transferidor.

Com essa análise, podemos observar que a BNCC tem contribuído significativamente para um sistema de educação mais sólido e unificado. Apesar dos livros terem abordagens e ênfases distintas, todos, na competência de construção, estão de acordo com o que a Base Nacional Comum Curricular propõe.

3 CONCEITOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS

As definições de alguns elementos matemáticos na Geometria nos parecem tão óbvias que sentimos dificuldade em defini-los de maneira formal. Um exemplo disso é quando solicitamos ao aluno que defina o que é uma reta, ou o que é uma circunferência, ou o que são retas paralelas. No fundo, sabemos que ele tem a ideia do que seja, mas tem a dificuldade em expressar por via que não seja a própria figura. E de fato, existem conceitos em Matemática que não necessitam de definição formal, como por exemplo a definição de um ponto.

Apesar da maioria ter uma boa ideia do que vem a ser um ponto, uma reta, um triângulo, uma circunferência e outros; neste capítulo, apresentaremos algumas definições formais de elementos básicos da Geometria, com o objetivo de mostrar ao possível futuro leitor as definições destes elementos, que serão exaustivamente utilizados ou serão objetivos das construções nos capítulos posteriores.

3.1 OS CONCEITOS PRIMITIVOS

Inicialmente, trataremos dos conceitos tomados como primitivos, que são conceitos que não necessitam de uma definição formal. É o que acontece com o ponto, a reta e o plano.

3.1.1 **O ponto**

Um ponto determina uma posição no espaço. Um ponto é uma noção primitiva pela qual outros conceitos são definidos.

Figura 1 – Ponto P no espaço

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

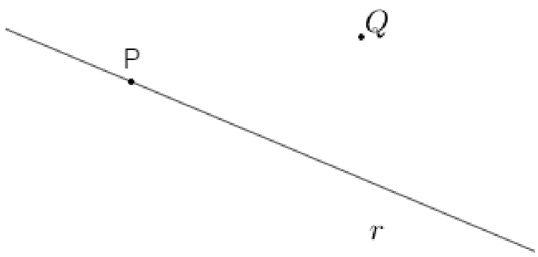
3.1.2 **A reta**

A reta é um conjunto de pelo menos dois pontos alinhados.

Em relação a uma reta e um ponto dado, há duas possibilidades: o ponto está sobre a reta ou o ponto está fora dela, como veremos a seguir.

Dado uma reta r e um ponto P, só há duas possibilidades, P pertence a reta r $(P \in r)$ ou P não pertence a reta r $(P \notin r)$. Na imagem que segue, $P \in r$ e $Q \notin r$.

Figura 2 – Posições relativas entre o ponto e a reta



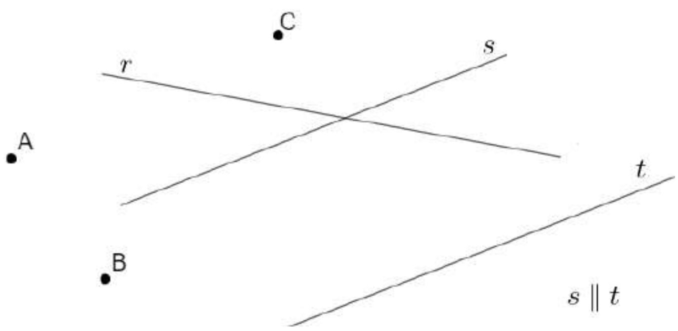
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Ademais, dizemos que três pontos são colineares quando estão na mesma reta.

3.1.3 O plano

Quanto ao plano, temos que quaisquer três pontos pertencem a um plano. Assim, três pontos não-colineares $(A, B$ e $C)$, uma reta e um ponto fora desta reta $(r$ e $A)$, duas retas concorrentes $(r$ e $s)$ e duas retas paralelas distintas $(s$ e $t)$ determinam um plano.

Figura 3 – Pontos e reta no plano

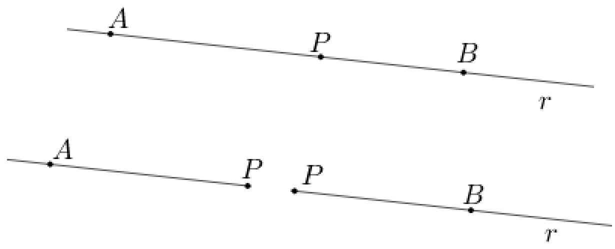


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3.1.4 A semirreta e um segmento de reta

i) Dado uma reta r e os pontos A, B e P pertencentes a r, e com P localizado entre A e B. O ponto P divide a reta r em duas partes. E cada uma das partes determinam uma semirreta com origem em P: as semirretas são $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$.

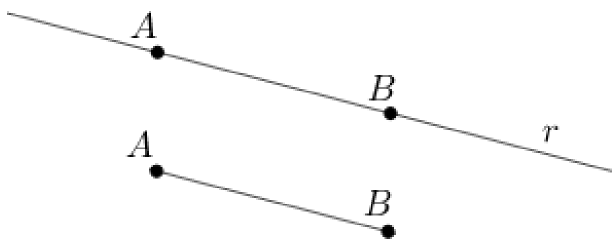
Figura 4 – Semirretas



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

ii) Dado dois pontos A e B sobre uma reta r, o segmento $\overline{AB}$ é a porção da reta r situada entre A e B.

Figura 5 – Segmento de reta



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

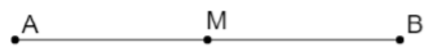
3.2 DEFINIÇÕES DE CONCEITOS ELEMENTARES

Nesta seção, iniciaremos as definições formais de conceitos elementares na Geometria.

3.2.1 **O ponto médio**

Dados dois pontos A e B sobre uma reta r, o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ é o ponto deste segmento que o divide em dois segmentos de mesmo comprimento. Simbolicamente, temos que $\overline{AM} = \overline{MB} = \dfrac{1}{2}\overline{AB}$.

Figura 6 – Ponto médio

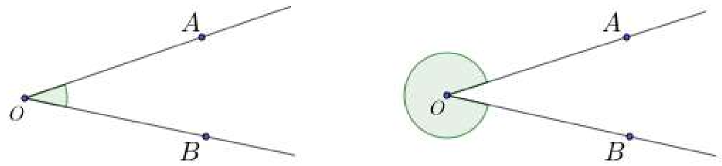


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3.2.2 O ângulo

Dados, no plano, um ponto O e duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Figura 7 – Regiões angulares no plano



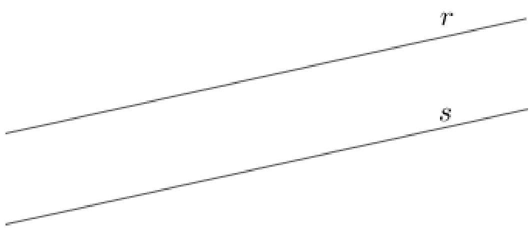
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Denominamos esse ângulo formado de $A\hat{O}B$ ou $\angle AOB$.

3.2.3 Retas paralelas

Dadas as retas r e s coplanares (pertencentes a um mesmo plano), dizemos que as retas r e s são retas paralelas, e denotamos $r \parallel s$, se r e s não têm pontos em comum.

Figura 8 – Retas paralelas

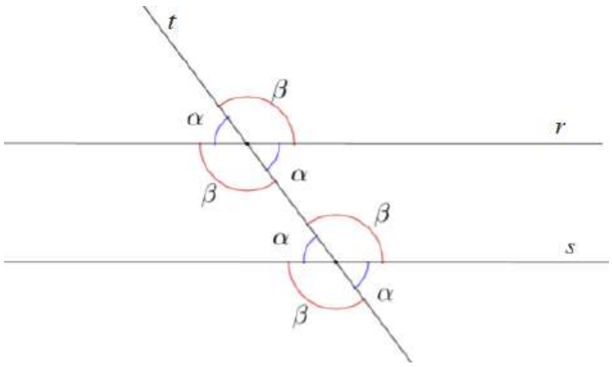


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3.2.4 Retas paralelas cortadas por uma transversal

Proposição 3.1 *Se duas retas paralelas r e s são cortadas por uma reta transversal t, então todos os pares de ângulos alternos (ou correspondentes) são formados por ângulos congruentes. Neste caso, os pares de ângulos colaterais são formados por ângulos suplementares.*

Figura 9 – Retas paralelas cortadas por uma transversal

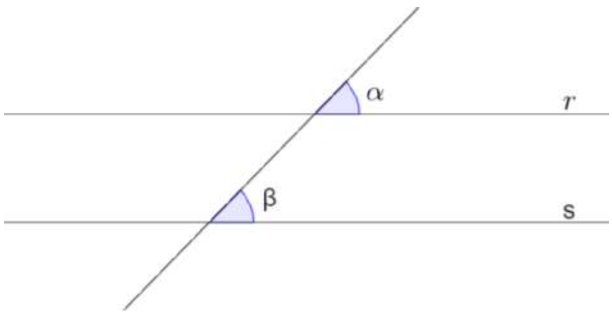


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

A demonstração desta proposição pode ser acessada no material teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana: Retas Cortadas por uma Transversal (PARENTE, p.1) - no Portal da Obmep.

Proposição 3.2 *Sejam r, s, α e β como na Figura 10. Se $\alpha = \beta$, então as retas r e s são paralelas.*

Figura 10 – Retas paralelas cortadas por uma transversal



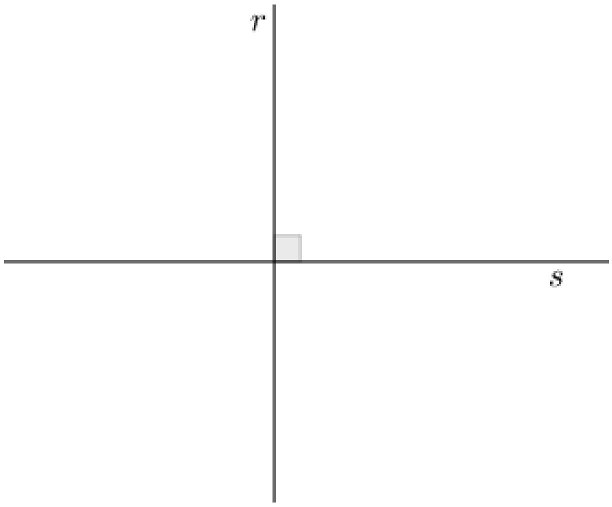
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

A demonstração desta proposição pode ser verificada no livro - Geometria Euclidiana Plana (BARBOSA, p.59) - Proposição 63.

3.2.5 **Retas perpendiculares**

Dadas duas retas r e s no plano, dizemos que r e s são perpendiculares se as retas r e s possuem um ponto em comum e formam nesse ponto um ângulo de 90^o. Escrevemos $r \perp s$.

Figura 11 – Retas perpendiculares



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3.3 QUADRILÁTEROS ESPECIAIS

Faz-se necessário definirmos dois quadriláteros com propriedades importantes para compreensão de demonstrações posteriores.

3.3.1 O paralelogramo

Um quadrilátero convexo é um paralelogramo se possuir lados opostos paralelos. Segue suas propriedades, sendo as demonstrações encontradas no livro do Muniz Neto (2013), nas páginas 52, 53 e 56.

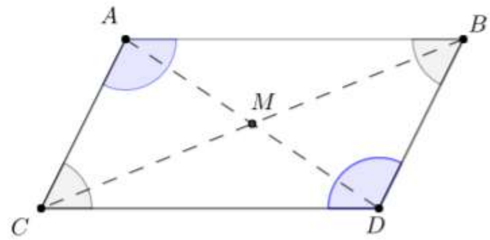
Dado um paralelogramo $ABCD$ com diagonais AD e BC, temos as seguintes propriedades:

i) Os lados AB e CD são paralelos e congruentes, assim também como os lados AC e BD.

ii) Os seus ângulos internos opostos possuem a mesma medida, ou seja, $\angle BAC = \angle BDC$ e $\angle ACD = \angle ABD$.

iii) Embora suas diagonais AD e BC possam ter comprimentos diferentes, elas se intersectam nos seus respectivos pontos médios, logo, $\overline{AM} = \overline{MD}$ e $\overline{BM} = \overline{MC}$.

Figura 12 – Paralelogramo



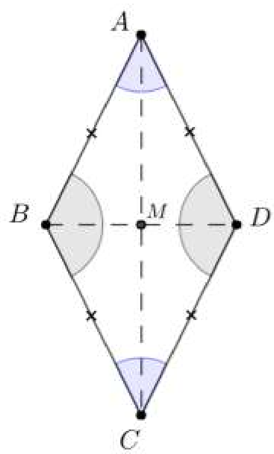
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3.3.2 **O losango**

Um quadrilátero convexo é um losango se todos os seus lados são congruentes. Visto que, em um losango, os pares de lados opostos são formados por segmentos congruentes, concluímos que todo losango é, em particular, um paralelogramo.

Outra definição para losango proposta por Neto (2009) : "Um paralelogramo é um losango se, e só se, tiver diagonais perpendiculares." (NETO, 2009, p.66)

Figura 13 – Losango



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

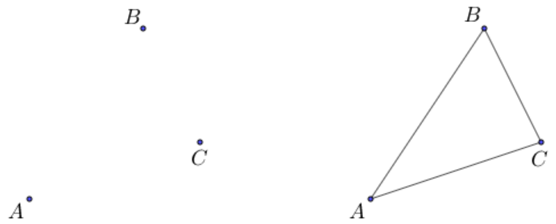
3.4 TRIÂNGULOS E SEUS LUGARES GEOMÉTRICOS

Nesta seção, definiremos o triângulo e seus lugares geométricos, a saber, baricentro, ortocentro, incentro e circuncentro.

3.4.1 O triângulo

Sejam A, B e C pontos não colineares. A região delimitada pelos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é chamada de triângulo. Dizemos que A, B e C são os vértices do triângulo ABC.

Figura 14 – Triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

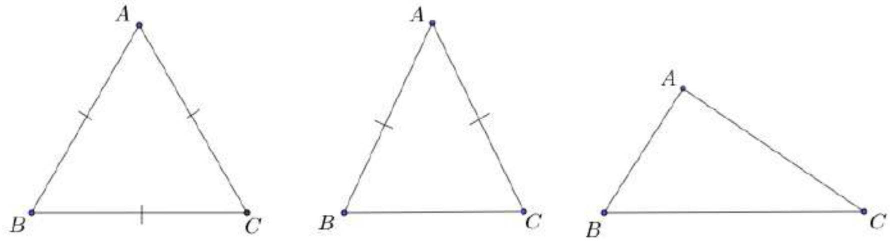
Os triângulos podem ser classificados em relação aos comprimentos de seus lados, como veremos a seguir. Um triângulo ABC é denominado:

i) Equilátero quando $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$, isto é, todos os seus lados são iguais;

ii) Isósceles quando tem pelo menos dois lados iguai;

iii) Escaleno quando não tem nenhum lado igual.

Figura 15 – Respectivamente, os triângulos equilátero, isósceles e escaleno

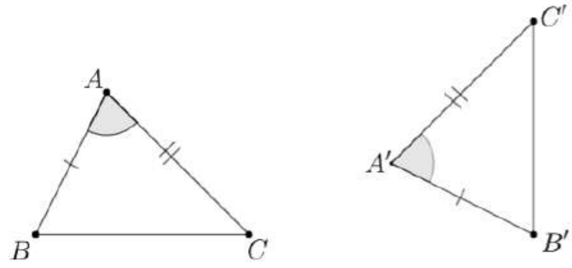


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Outro ponto relevante para compreensão de demonstrações posteriores a ser destacado são os casos de congruências de triângulos. Para tanto, dizemos que um triângulo ABC é congruente a um outro triângulo se, e somente se, esses possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados correspondentes de mesmo comprimento. Logo, dois triângulos são congruentes quando satisfazem qualquer um dos três seguintes casos:

Proposição 3.3 *Caso LAL (lado, ângulo, lado) - Se os triângulos ABC e $A'B'C'$ são tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\angle BAC = \angle B'A'C'$, então $ABC \cong A'B'C'$.*

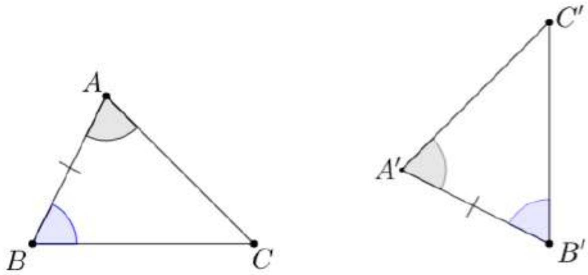
Figura 16 – Caso de congruência: LAL



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Proposição 3.4 *Caso ALA (ângulo, lado, ângulo) - Se os triângulos ABC e $A'B'C'$ são tais que $\angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ e $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, então $ABC \cong A'B'C'$.*

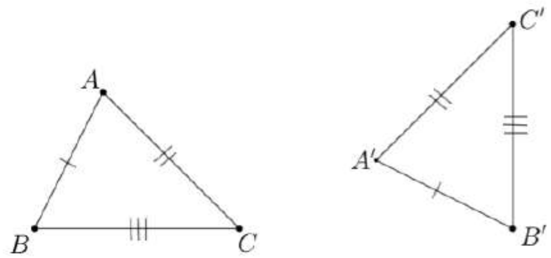
Figura 17 – Caso de congruência: ALA



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Proposição 3.5 *Caso LLL (lado, lado, lado) - Se os triângulos ABC e $A'B'C'$ são tais que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, então $ABC \cong A'B'C'$.*

Figura 18 – Caso de congruência: LLL

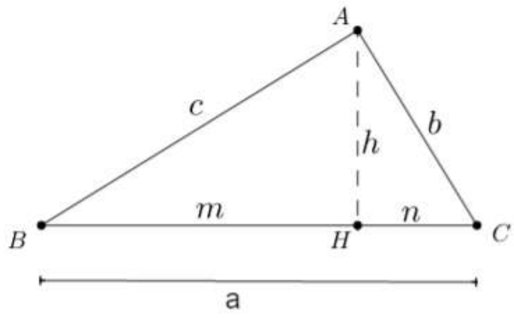


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3.4.2 As relações métricas no triângulo retângulo

Sejam o triângulo ABC retângulo em A e o segmento $\overline{AH}$ sua altura em relação ao lado BC.

Figura 19 – O triângulo retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

A partir dos triângulos ABC, ABH e AHC, pode-se obter as seguintes relações:

$$b^2 = a \cdot n$$

$$c^2 = a \cdot m$$

$$a \cdot h = b \cdot c$$

$$h^2 = m \cdot n$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Esta última relação é conhecida como o Teorema de Pitágoras, que é um teorema muito utilizado em demonstrações de proposições dentro da Geometria, seja plana ou espacial.

Teorema 3.1 *(Teorema de Pitágoras) - Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

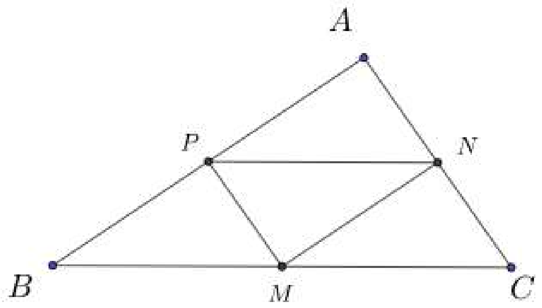
Todas essas relações estão demonstradas em Matemática: Volume Único (IEZZI, 2007, p. 177).

3.4.3 Teorema da base média

Definimos a base média de um triângulo como um segmento que une dois pontos médios de dois lados de um triângulo.

Dado um triângulo ABC e M, N eP pontos médios respectivamente dos lados BC, AC e AB, temos que os segmentos $\overline{MN}$, $\overline{MP}$ e $\overline{NP}$ são as bases médias do triângulo ABC. O triângulo MNP é conhecido como triângulo medial do triângulo ABC.

Figura 20 – As bases médias de um triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

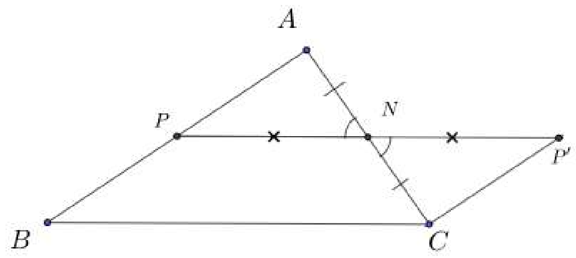
Utilizando qualquer um dos paralelogramos $ANMP$, $PNMB$ e $PNCM$, provamos o seguinte resultado.

Teorema 3.2 *(Teorema da Base Média) - Seja ABC um triângulo qualquer. Se P é o ponto médio de $\overline{AB}$ e N é o ponto médio de $\overline{AC}$, então $PN \parallel BC$.*

Reciprocamente, se pelo ponto médio P do lado AB traçarmos uma paralela ao lado BC, então tal reta intersecta o lado AC em seu ponto médio N. Ademais, temos em qualquer um dos casos a seguinte relação

$$\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{BC}.$$

Figura 21 – Medida da bases médias de um triângulo



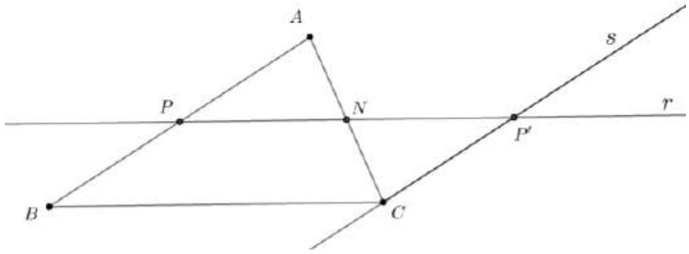
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Demonstração 3.1 *Tome P' sobre $\overrightarrow{PN}$ tal que $\overline{PN} = \overline{NP'}$. Como N é o ponto médio de AC e $\angle ANP = \angle CNP'$, os triângulos APN e CNP' são congruentes pelo caso LAL. Logo, $\overline{P'C} = \overline{PA}$ e $\angle P'CN = \angle PAN$, e pela proposição 2 apresentada em 3.2.4 segue que $AP \parallel P'C$. Assim, $\overline{BP} = \overline{AP} = \overline{CP'}$ e $\overline{BP} \parallel \overline{CP'}$.*

Como $\overline{BP} = \overline{CP'}$ e $\overline{BP} \parallel \overline{CP'}$. Logo, $BCP'P$ é um paralelogramo. E como no paralelogramo os lados opostos são iguais, temos que $\overline{PP'} = \overline{BC} = 2\overline{PN}$.

Reciprocamente, seja P o ponto médio de $\overline{AB}$, seja r uma reta paralela ao lado BC que passe pelo ponto P, seja s uma reta paralela ao lado AB que passe pelo ponto C, seja N o ponto de intersecção entre a reta r e o lado AC, e seja P' o ponto de intersecção entre as retas r e s. Como $\angle NCP' = \angle PAN$ (alternos internos), $\angle NP'C = \angle APN$ (alternos internos), e

Figura 22 – Teorema da base média



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

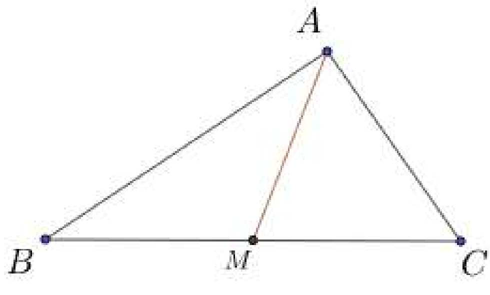
$\overline{BP} = \overline{CP'}$, pois $BCP'P$ é um paralelogramo, temos que $\overline{CP'} = \overline{BP} = \overline{PA}$. Segue que os triângulos APN e NCP' são congruentes pelo critério ALA. Logo, $\overline{AN} = \overline{NC}$, então N é o ponto médio do lado AC.

■

3.4.4 A mediana e o baricentro

Dado um triângulo ABC qualquer, a mediana em relação ao lado BC é o segmento que une o vértice A ao ponto médio do segmento BC.

Figura 23 – A mediana



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Analogamente, temos as medianas relativas aos lados AB e AC.

Propriedade 3.1 *Em um triângulo qualquer, uma mediana divide o triângulo em dois triângulos de mesma área, ou seja, uma mediana divide este triângulo em duas regiões de áreas iguais.*

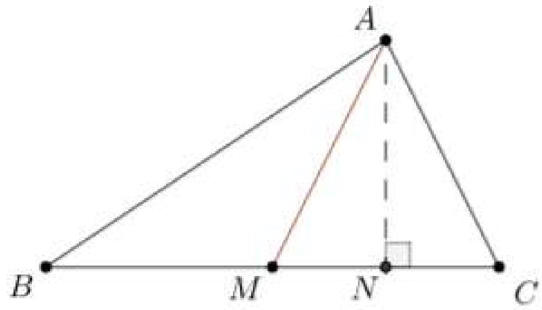
Demonstração 3.2 *Dado um triângulo ABC, seja M o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e $\overline{AN}$a altura do triângulo ABC em relação ao lado BC.*

Temos que a área de um triângulo é dada por:

$$rea = \frac{base \times altura}{2}.$$

Então temos que a área do triângulo ABM é dada por $S_1 = \dfrac{\overline{BM} \cdot \overline{AN}}{2}$ e a área do triângulo AMC é dada por $S_2 = \dfrac{\overline{MC} \cdot \overline{AN}}{2}$. Como $\overline{BM} = \overline{MC}$, obtemos que $S_1 = S_2$. E pelo fato de $\overline{BM} = \overline{MC} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$ e a área do triângulo ABC é $S = \dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{AN}}{2}$, obtemos que $S = S_1 + S_2$.

Figura 24 – Triângulo com mediana $\overline{AM}$ e altura $\overline{AN}$ em relação ao lado BC



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

■

Propriedade 3.2 *As medianas de um triângulo se intersectam em um único ponto no seu interior, dividindo a mediana no ponto $\dfrac{2}{3}$ do vértice correspondente. Além disso, se ABC é um triângulo qualquer, $\overline{AM}$ é a mediana em relação ao lado BC e G é o ponto de encontro das medianas, então $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM}$.*

Demonstração 3.3 *Dado um triângulo ABC, sejam N e P os pontos médios dos lados AC e AB, respectivamente. Sejam $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$ as medianas relativas aos lados AC e AB, respectivamente.*

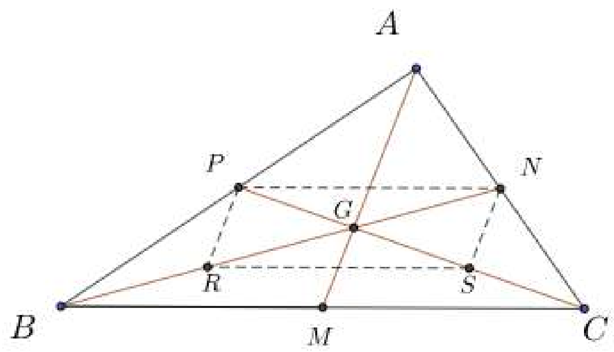
Segue da própria definição que as medianas estarão sempre no interior do triângulo, logo, as medianas relativas aos lados AC e AB se intersectam num ponto no interior do triângulo ABC, que denominaremos de ponto G.

Sejam R e S pontos médios dos segmentos $\overline{BG}$ e $\overline{CG}$, respectivamente.

Aplicando o teorema da base média aos triângulos ABC e BCG, temos que $PN \parallel BC$, e com isso $\dfrac{\overline{BC}}{2} = \overline{PN}$; e temos que $RS \parallel BC$, e com isso $\dfrac{\overline{BC}}{2} = \overline{RS}$. Logo, $\overline{PN} = \overline{RS}$ e $\overline{PN} \parallel \overline{RS}$.

Temos, portanto, que $NPRS$ é um paralelogramo e $\overline{NR}$ e $\overline{PS}$ são suas diagonais. Assim, $\overline{NG} = \overline{GR} = \overline{RB}$ e $\overline{PG} = \overline{GS} = \overline{SC}$ logo, $\overline{BG} = 2\overline{GN}$ e $\overline{CG} = 2\overline{GP}$. Segue que $\overline{CG} = \dfrac{2}{3}\overline{CP}$ e $\overline{BG} = \dfrac{2}{3}\overline{BN}$.

Figura 25 – A mediana



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Analogamente, as medianas $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ se intersectam em um ponto X tal que $\overline{AX} = 2\overline{XM}$ e $\overline{BX} = 2\overline{XN}$, logo, segue que $\overline{AX} = \dfrac{2}{3}\overline{AM}$. Encontramos então dois pontos distintos G e X no interior do segmento $\overline{BN}$ que o dividem na mesma razão, o que é uma contradição, logo, $\overline{X} = \overline{G}$. Portanto as três medianas se intersectam em um mesmo ponto G que é chamado de baricentro do triângulo, demonstrando o corolário que segue abaixo.

■

Corolário 3.1 *Em todo triângulo, as medianas dos lados passam todas por um único ponto, o baricentro deste triângulo.*

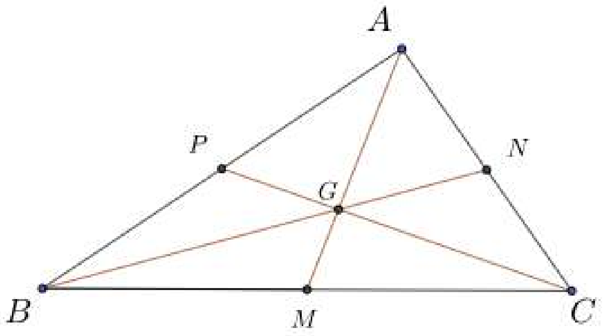
3.4.5 A mediatriz e o circuncentro

Dado um segmento $\overline{AB}$, definimos por mediatriz do segmento $\overline{AB}$ uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa por seu ponto médio.

Proposição 3.6 *As mediatrizes dos lados de um triângulo se encontram em um único ponto.*

Demonstração 3.4 *Sejam ABC um triângulo qualquer e M, N e P os pontos médios, respectivamente, das lados AB, BC e AC. Sejam r, s e t as mediatrizes dos lados AB, AC e BC, respectivamente. Denominamos o ponto de intersecção das retas r e s o ponto O.*

Figura 26 – O baricentro



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

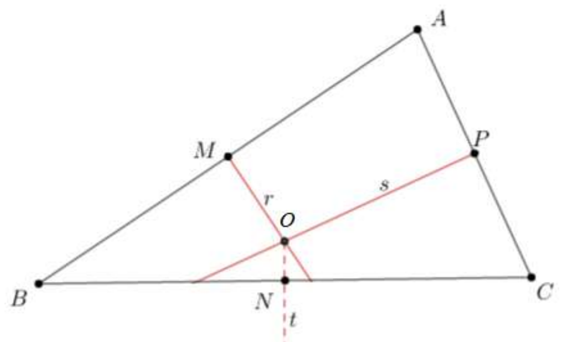
Segue pelo caso LAL que os triângulos AOM e BOM são congruentes. Assim, temos que $\overline{OA} = \overline{OB}$ e, analogamente, $\overline{OA} = \overline{OC}$. Logo, temos que $\overline{OB} = \overline{OC}$ e que, portanto, $O \in t$.

Agora, considere O' o ponto de intersecção entre as retas r e t. De forma análoga a apresentada às retas r e s, obtemos que $\overline{O'A} = \overline{O'B}$ e $\overline{O'B} = \overline{O'C}$. Como O e O' estão em r, logo $O = O'$.

■

O ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é chamado de circuncentro.

Figura 27 – O circuncentro

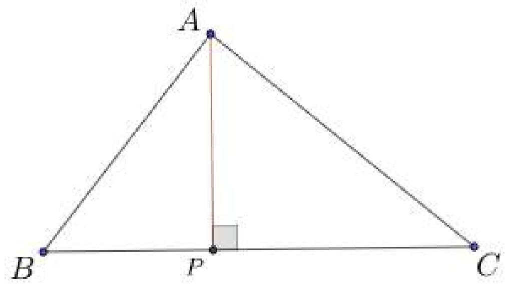


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3.4.6 A altura e o ortocentro

Dado um triângulo ABC, o segmento de reta que passa pelo vértice A e intersecta perpendicularmente o lado BC é denominado altura relativa ao lado BC.

Figura 28 – Altura do triângulo ABC em relação ao lado BC



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Analogamente, temos as alturas relativas aos lados AB e AC.

Proposição 3.7 *As alturas relativas aos lados de um triângulo se encontram em um único ponto.*

Demonstração 3.5 *Dado um triângulo ABC qualquer, considere r, s e t, as retas determinadas pelas alturas relativas aos vértices A, B e C respectivamente. Queremos mostrar que r, s e t intersectam em um único ponto P.*

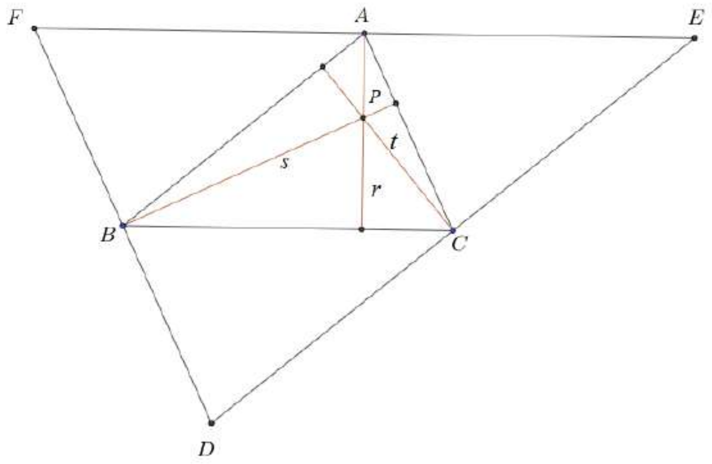
Considere as retas paralelas aos lados, passando pelos vértices opostos. Considere ainda os pontos D, E e F, as intersecções das retas paralelas aos lados AB e AC, BC e AB, BC e AC, respectivamente, formando o triângulo DEF. Então temos que DE, EF e DF são paralelos aos lados AB, BC e AB, respectivamente.

Como $\overline{AF} \parallel \overline{BC}$ e $\angle ABC = \angle BAF$, por serem alternos internos (proposição enunciada em 3.2.4); e da mesma forma $\overline{BF} \parallel \overline{AC}$ e $\angle BAC = \angle ABF$; e $\overline{AB}$ é comum aos triângulos ABC e ABF, logo, os triângulos ABC e ABF são congruentes pelo critério ALA, apresentado em 3.4.1.

Da mesma forma, podemos mostrar que o triângulo ACE e BCD também são congruentes ao triângulo ABC. Assim, temos que $\overline{AF} = \overline{AE}$, $\overline{BF} = \overline{BD}$ e $\overline{CD} = \overline{CE}$. Logo, o prolongamento das alturas do triângulo ABC são mediatrizes de DEF. Mas já provamos que as mediatrizes de um triângulo são concorrentes, de modo que as alturas de ABC também são concorrentes.

■

Figura 29 – O ortocentro



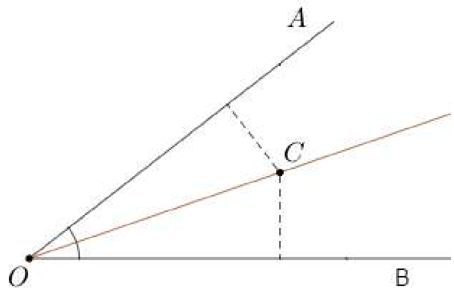
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

O ponto de encontro das alturas relativas as lados de um triângulo é chamado de ortocentro.

3.4.7 A bissetriz e o incentro

Dado um ângulo $\angle AOB$, a bissetriz do $\angle AOB$ é a semirreta $\overrightarrow{OC}$ que o divide em dois ângulos iguais. Neste caso dizemos que $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo $\angle AOB$ e temos que $\angle AOC = \angle BOC$ em medidas.

Figura 30 – A bissetriz



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Uma característica da bissetriz é que todo ponto pertencente a ela é equidistante das retas que a originam. É o que apresentaremos a seguir.

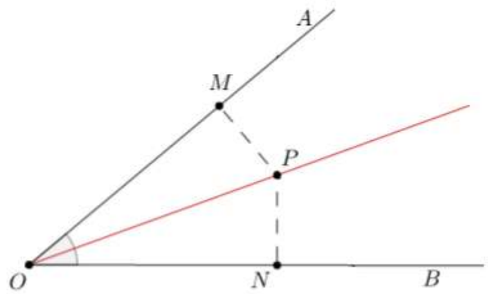
Proposição 3.8 *Seja $\angle AOB$ um ângulo no plano e a reta r a sua bissetriz. Então $P \in r \iff d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$.*

Antes de demonstrar essa proposição, definiremos a distância entre um ponto P e uma reta r:

A distância entre um ponto P e uma reta r é dada pelo comprimento do segmento de reta que parte de P e intersecta a reta r no ponto P' formando um ângulo de 90^o com esta. O segmento $\overline{PP'}$ é a distância entre a reta r e o ponto P.

Demonstração 3.6 *Seja $P \in r$, e sejam M e N, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, passando por P. Temos que $\angle MOP = \angle NOP = \frac{1}{2} \cdot \angle AOB$ e $\angle OMP = \angle ONP = 90^o$. Logo, temos, pelo caso ALA, que os triângulos OMP e ONP são congruentes e, portanto, $d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$.*

Figura 31 – A bissetriz



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Reciprocamente, seja P um ponto do plano tal que $d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$; e M e N são, respectivamente, pontos de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ tais que $\overline{PM} \perp \overrightarrow{OA}$ e $\overline{PN} \perp \overrightarrow{OB}$, temos que $\angle OMP = \angle ONP = 90^o$. Logo, os triângulos OMP e ONP são congruentes pelo caso LAL, pois $\angle OMP = \angle ONP = 90^o$, $\overline{PM} = \overline{PN}$ e $\overline{OP}$ é a hipotenusa comum a estes triângulos. Assim, conclui-se que $\angle MOP = \angle NOP$, ou seja, a semirreta $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz de $\angle AOB$.

■

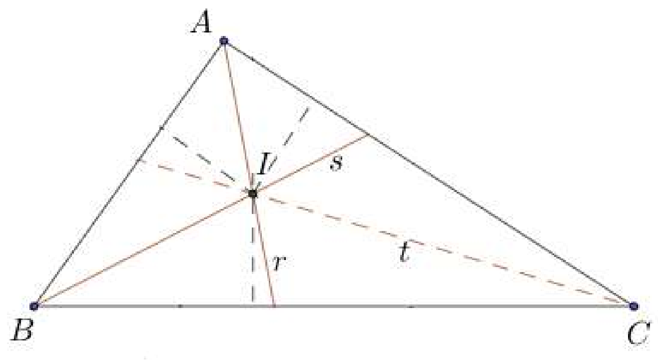
Proposição 3.9 *As bissetrizes internas de todo triângulo concorrem em um único ponto, o incentro do triângulo.*

Demonstração 3.7 *Sejam ABC um triângulo e r, s, t as bissetrizes dos ângulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente. Denominamos I o ponto de intersecção entre as bissetrizes r e s. Como $I \in r$, segue pela proposição anterior que I equidista dos lados AB e AC do triângulo. Analogamente, como $I \in s$, I equidista dos lados AB e BC do triângulo. E usando novamente a proposição anterior concluímos que $I \in t$. Logo, as bissetrizes se intersectam no ponto I.*

■

O ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo é chamado de incentro.

Figura 32 – O incentro



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

3.5 O CÍRCULO E RETAS TANGENTES

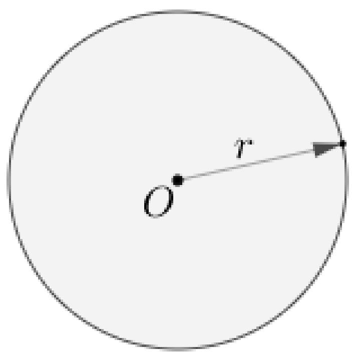
Nesta seção apresentaremos um importante elemento da Geometria Plana, o círculo. As propriedades do círculo, como a sua área e o seu comprimento são bases para assimilação de muitos outros conhecimentos dentro da própria geometria.

Outro tópico relevante envolvendo o círculo é a noção de reta e círculos tangentes, que trataremos a seguir.

3.5.1 **O círculo**

Dado um ponto O e um número real r positivo, o círculo de centro O é o conjunto dos pontos do plano que estão a uma distância menor ou igual a r do ponto O. Denominamos essa medida de comprimento r como o raio do círculo.

Figura 33 – O círculo



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

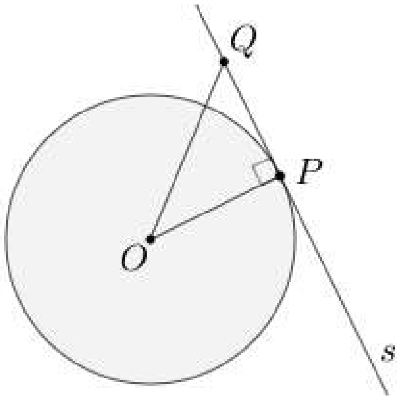
3.5.2 **Reta tangente de um círculo**

Dizemos que um círculo Γ e uma reta s são tangentes se s e Γ possuem um único ponto P em comum.

Proposição 3.10 *Proposição: Sejam Γ um círculo de centro O e P um ponto de Γ. Se s é a reta que passa por P e é perpendicular a OP, então s é tangente a Γ.*

Demonstração 3.8 *Seja r o raio de Γ. Seja Q um ponto pertencente a reta s, tal que $Q \neq P$. Temos que $\overline{OQ} \geqslant \overline{OP} = r$. E uma vez que $\angle OPQ = 90^o$, este é o maior ângulo do triângulo OPQ. Logo, $Q \notin \Gamma$ e, assim, P é o único ponto comum a s e a Γ.*

Figura 34 – O círculo e a reta tangente



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

■

4 CONSTRUÇÕES ELEMENTARES

A construção geométrica é uma importante ferramenta no ensino da geometria, e mais, a construção geométrica faz parte do rol das habilidades considerados essenciais na formação dos indivíduos na Educação Básica. Neste capítulo, descreveremos algumas construções geométricas, com o auxílio da régua e do compasso, elementares na Matemática.

Inicialmente, veremos as construções básicas que serão constantemente usadas em construções posteriores que demandam um pouco mais de complexidade.

A construção geométrica nos permite trabalhar as quatro operações matemáticas com segmentos, então mostraremos como adicionar e subtrair segmentos dados, e multiplicar e dividir segmentos dados por um número natural.

Nas duas últimas seções deste capítulo, descreveremos algumas construções envolvendo triângulos e alguns de seus lugares geométricos importantes. Além disso, apresentaremos algumas construções envolvendo o círculo e suas retas tangentes.

4.1 AS CONSTRUÇÕES BÁSICAS

Nesta seção trataremos as construções básicas, que são passos base de construções mais complexas. Nesses passos básicos veremos: retas perpendiculares; retas paralelas; o ponto médio; a mediatriz de um segmento; a construção de um ângulo e a construção de uma bissetriz.

4.1.1 **Retas perpendiculares**

Construção pretendida: Dado uma reta r e um ponto P, com o auxílio da régua e do compasso, traçar uma reta perpendicular a reta r passando por P.

Descrição da construção.

Nesta primeira construção cabem duas hipóteses: o ponto P não pertence a reta r (Caso i); ou o ponto P pertence a reta r (Caso ii). A partir dessas duas hipóteses há a possibilidade de duas possíveis construções, e elas são descritas a seguir.

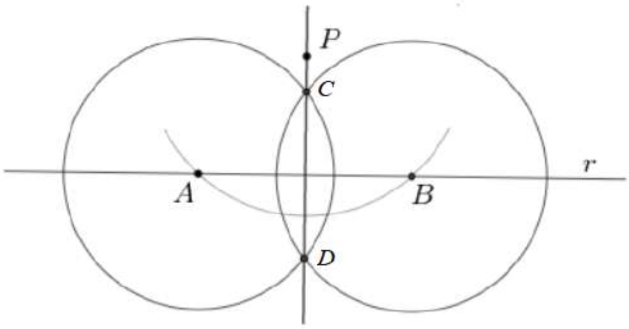
(Caso i) O ponto P não pertence a reta r.

Considere uma reta r e um ponto P não pertencente a reta r. Com a ponta seca do compasso em P, traçar um círculo de raio maior que a distância do ponto P à reta r. Marcar os ponto A e B.

Com a ponta seca do compasso em A, traçar um círculo de raio qualquer maior que o segmento $\frac{\overline{AB}}{2}$. Com a ponta em B traçar um círculo de mesmo raio. Marcar a intersecção desses dois círculos C e D. Traçar uma reta que passe pelos pontos C e D.

Como $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{AD}$, conclui-se que $ABCD$ é um losango, logo, a reta que contém C e D é perpendicular a reta r.

Figura 35 – Construção da reta perpendicular



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

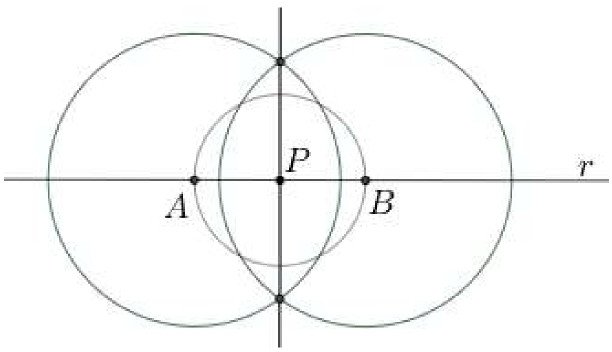
(Caso ii) O ponto P pertence a reta r.

Com a ponta seca do compasso em P, traçar um círculo de raio qualquer. Denominar a intersecção do círculo traçado com a reta r de pontos A e B.

Com a ponta seca do compasso em A, traçar um círculo qualquer de raio maior que a medida do segmento $\overline{AP}$. Repetir este passo com o ponto B usando a mesma medida de raio do segundo círculo traçado.

A partir dos pontos de intersecção destes dois círculos, é possível determinar a reta perpendicular a reta r que passa pelo ponto P, o que fica evidenciado, de forma análoga ao caso i, na observação do losango implícito.

Figura 36 – Construção da reta perpendicular



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4.1.2 **Retas paralelas**

Construção pretendida: Dado uma reta r e um ponto P não pertencente a reta r, traçar uma reta paralela a r passando por P.

Descrição da construção.

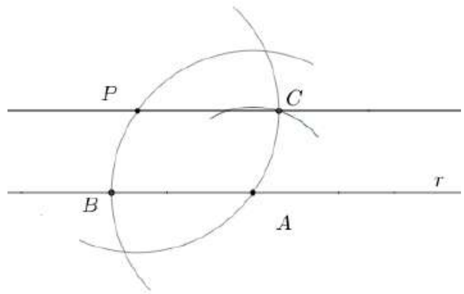
Sejam uma reta r e um ponto P não pertencente a reta r. Fixar um ponto A qualquer da reta r. Com a ponta seca do compasso em A e raio $\overline{AP}$ traçar um arco que passe pela reta r. Denominar a intersecção da reta r com o arco traçado de ponto B.

Com a ponta seca do compasso em P, traçar outro arco com raio $\overline{AP}$.

Com a ponta seca do compasso em A e raio $\overline{BP}$ traçar um arco que intercepta o arco de raio $\overline{AP}$ de centro em P, como mostra a figura a seguir. Chamamos este ponto de interseção de C. Observe que $\overline{BP} = \overline{AC}$.

O quadrilátero $ABCP$ é um paralelogramo, então seus lados opostos são paralelos. Logo, a reta que passa pelos pontos C e P é a reta procurada.

Figura 37 – Construção da reta paralela



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

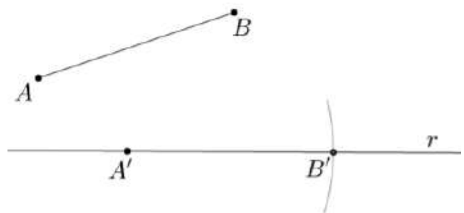
4.1.3 O transporte de segmentos

Construção pretendida: Dada uma reta r e um segmento $\overline{AB}$ não pertencente a reta r, transportar o segmento $\overline{AB}$ para a reta r.

Construção.

Para transportar um segmento $\overline{AB}$, marca-se um ponto A' qualquer na reta r que receberá o segmento e, com a abertura do compasso $\overline{AB}$, determina-se o ponto B'.

Figura 38 – Transporte de um segmento



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4.1.4 A mediatriz e o ponto médio de um segmento

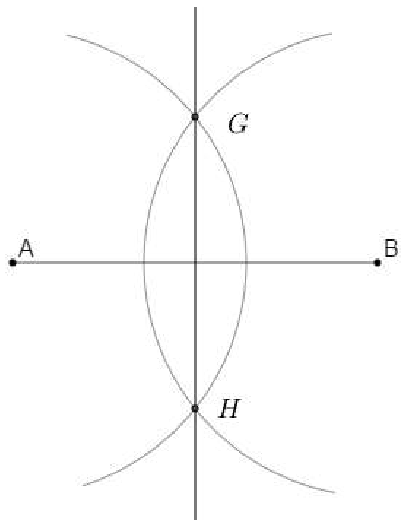
Construção pretendida: Traçar a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ dado.

Descrição da construção.

Seja $\overline{AB}$ um segmento qualquer. Com a ponta seca do compasso em A, traçar um arco com raio qualquer maior que a metade do segmento AB. Com a ponta seca em B, e mesma medida de raio anterior, traçar o outro arco, como mostra a figura. Denominar os pontos de intersecção destes arcos de postos G e H.

O quadrilátero $AGBH$ é um losango, logo, pela propriedade dos losangos, $\overline{AB} \perp \overline{GH}$ e $\overline{GH}$ intersecta $\overline{AB}$ no seu ponto médio. Portanto, a reta que passa pelos pontos G e H é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Figura 39 – Construção da mediatriz



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é dado pela intersecção do segmento $\overline{AB}$ com a reta mediatriz.

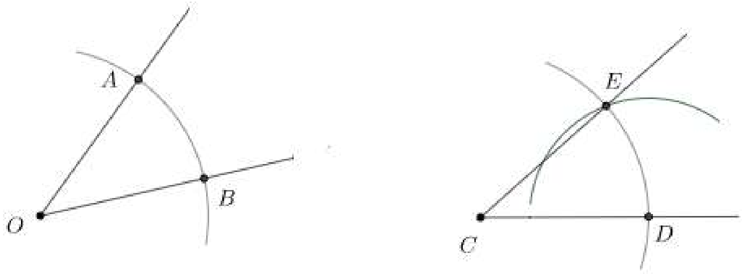
4.1.5 Construção de um ângulo de mesma medida de um já existente

Construção pretendida: Transportar a medida de um $\angle AOB$ dado.

Descrição da construção.

Seja $\angle AOB$um ângulo qualquer. Traçar uma reta suporte. E, seja C um ponto pertencente a essa reta suporte traçada. Com a ponta seca do compasso em C e com a abertura do compasso medindo OA, traçar um arco que intersecte a reta suporte criada num ponto denominado de ponto D. Com a ponta seca do compasso em D e abertura do compasso medindo AB, traçar um arco, que intersecte o arco traçado anteriormente. Essa intersecção é o ponto E. Traçar o segmento CE. Logo, $\angle AOB = \angle DCE$.

Figura 40 – Construção de um ângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4.1.6 **Construção da bissetriz**

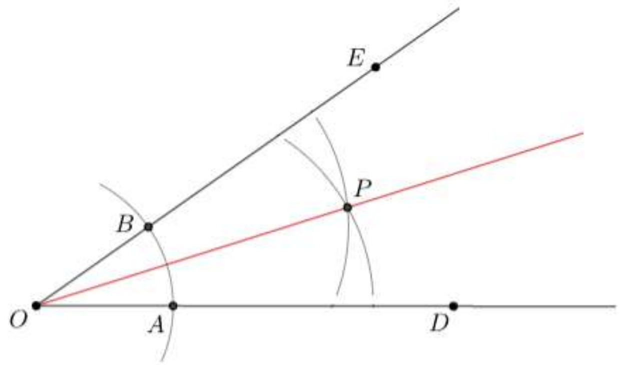
Construção pretendida: Traçar a bissetriz de um ângulo qualquer.

Descrição da construção.

Considere um ângulo $\angle DOE$. Com a ponta seca do compasso em O, traçar um arco de raio qualquer que intersecte as semirretas $\overline{OD}$ e $\overline{OE}$, limitantes do ângulo $\angle DOE$. Denominar estes pontos de intersecção de pontos A e B, como na figura 41.

Com a ponta seca em A e posteriormente em B, com o mesmo raio, traçar os arcos que se intersectam no ponto P, como mostra a figura. A semirreta $\overrightarrow{OP}$ é a bissetriz do ângulo $\angle DOE$, pois $d(P, \overrightarrow{OE}) = d(P, \overrightarrow{OD})$, conforme demonstrado na subseção 3.4.7.

Figura 41 – Construção da bissetriz.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

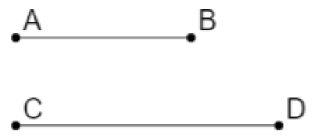
4.2 ALGUMAS OPERAÇÕES COM SEGMENTOS

O compasso também pode ser utilizado para adicionar e subtrair segmentos, além de multiplicar e dividir segmentos por um número natural.

4.2.1 Adição e subtração de segmentos

Dados os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, construir com régua e compasso os segmentos $\overline{AB}+\overline{CD}$ e $\overline{CD}-\overline{AB}$.

Figura 42 – Segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

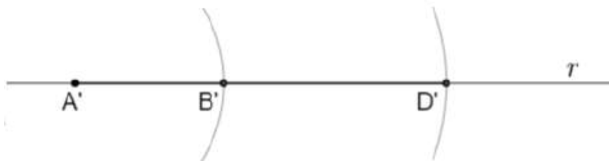


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

i) Construção do segmento $\overline{AB}+\overline{CD}$.

Traçar uma reta suporte r. Transferir com o auxílio do compasso os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ para reta r, como em 4.1.3, de tal forma que $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{B'D'}$. Logo, $\overline{AB}+\overline{CD} \equiv \overline{A'D'}$, como mostra a figura.

Figura 43 – Segmento $\overline{AB}+\overline{CD}$.

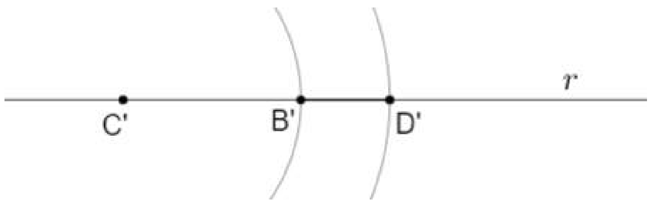


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

ii) Construção do segmento $\overline{CD}-\overline{AB}$.

Traçar uma reta suporte r. Transferir os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ para a reta r, como em 4.1.3, de tal forma que $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{C'B'}$. Logo, $\overline{AB}-\overline{CD} \equiv \overline{B'D'}$, como mostra a figura.

Figura 44 – Segmento $\overline{CD}-\overline{AB}$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4.2.2 Multiplicação de um segmento por um número natural

Construção pretendida: Dado o segmento $\overline{AB}$, construir com régua e compasso o segmento $\overline{CD} = n \cdot \overline{AB}$, $n \in \mathbb{N}$.

Descrição da construção.

Seja $\overline{AB}$ um segmento qualquer e n um número natural. Traçar uma reta suporte r e marcar um ponto C em r. Com a ponta seca do compasso em C e abertura medindo $\overline{AB}$, transferir o segmento n vezes(3 vezes neste caso) para a reta r.

Figura 45 – Segmento $\overline{CD}$.

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

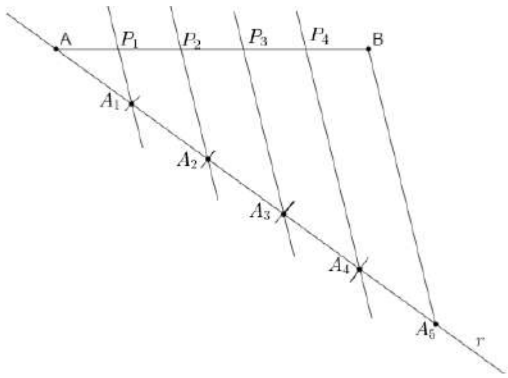
4.2.3 Divisão de um segmento por um número natural

Construção pretendida: Dado um segmento $\overline{AB}$, com o auxílio da régua e do compasso, divida-o em 5 partes iguais.

Descrição da construção.

Seja $\overline{AB}$ um segmento qualquer. Traçar uma reta r concorrente ao segmento $\overline{AB}$ que se intersectem no ponto A. Com a ponta seca do compasso em A e fixando uma abertura qualquer, transferir para a reta r e de forma subsequente 5 vezes o segmento fixado, gerando os pontos A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5, e consequentemente os segmentos $\overline{AA_1} \equiv \overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3} \equiv \overline{A_3A_4} \equiv \overline{A_4A_5}$, como mostra a figura a seguir. Traçar o segmento de reta A_5B e posteriormente traçar retas paralelas ao segmento A_5B, como em 4.1.2, que passe por A_1, A_2, A_3 e A_4. Como $A_1P_1 \parallel A_2P_2 \parallel A_3P_3 \parallel A_4P_4 \parallel A_5P_5$, temos que o segmento $\overline{AB}$ foi dividido em 5 partes iguais.

Figura 46 – Segmento AB



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4.3 O TRIÂNGULO E ALGUNS LUGARES GEOMÉTRICOS IMPORTANTES

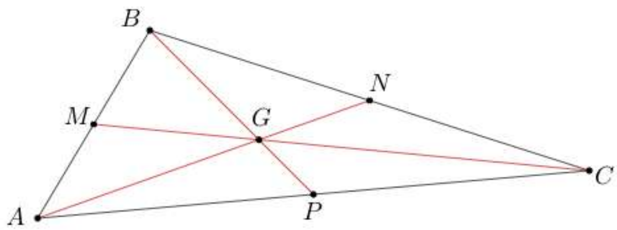
O triângulo é uma importante figura geométrica, alvo de estudos e utilização frequente na Educação Básica, desde o Ensino Fundamental ao Ensino Médio. Devido a tantas peculiaridades dos triângulos, destacaremos uma seção para descrever a construção de alguns pontos importantes relacionados aos triângulos, são eles: o baricentro, o ortocentro, o incentro e o circuncentro.

4.3.1 O baricentro

O baricentro de um triângulo é o ponto de intersecção de suas medianas. Tem-se a construção deste lugar geométrico:

Dado um triângulo ABC, com auxílio da régua e do compasso, marcar os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente, M, N e P; os segmentos de reta AN, BP e CM são as medianas do triângulo ABC, e G é o ponto de intersecção das medianas, então G é o baricentro.

Figura 47 – O baricentro



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4.3.2 O ortocentro

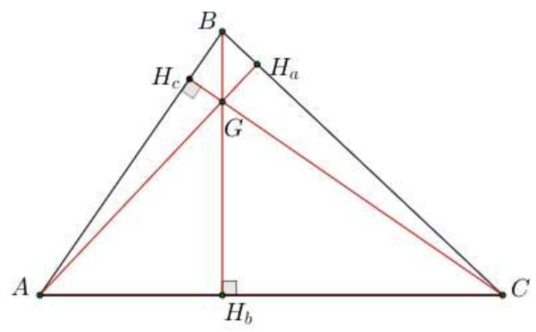
O ortocentro de um triângulo é o ponto de intersecção das alturas relativas aos seus lados. Tem-se a construção deste lugar geométrico:.

Dado um triângulo qualquer ABC. Traçar as alturas desse triângulo dadas pelos segmentos $\overline{AH_a}$,$\overline{BH_b}$ e $\overline{CH_c}$, respectivamente, relativas aos lados BC, AC e AB.

A construção da altura relativa ao lado BC: traçar uma reta perpendicular ao lado BC passando pelo ponto A, como em 4.1.1. De forma análoga, traçar a altura BH_b, relativa ao lado BC, e a altura CH_c, relativa ao lado AC.

O ponto de intersecção dos segmentos $\overline{AH_a}$,$\overline{BH_b}$ e $\overline{CH_c}$ é o ortocentro do triângulo.

Figura 48 – O ortocentro



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

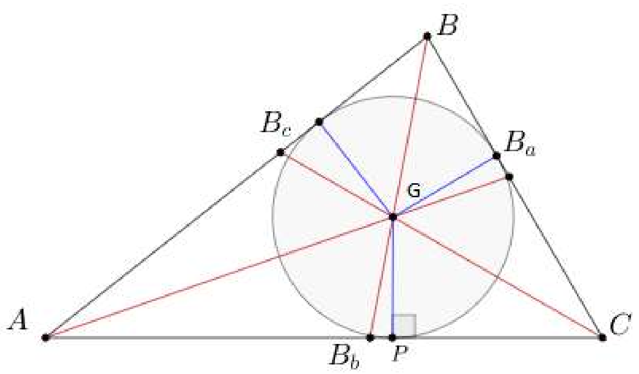
4.3.3 **O incentro**

O incentro de um triângulo é o ponto de intersecção das bissetrizes de seus ângulos. O incentro também é o centro da circunferência inscrita no triângulo. Tem-se a construção deste lugar geométrico:

Dado um triângulo ABC qualquer. Traçar as bissetrizes, $\overline{AB_a}$, $\overline{BB_b}$ e $\overline{CC_c}$, dos ângulos internos do triângulo, como em 4.1.6. Marcar o ponto de intersecção dessas bissetrizes, chamando-o de G.

Em seguida, baixar de G uma perpendicular a qualquer um dos lados do triângulo, como em 4.1.1, chamando a intersecção da perpendicular e o lado de P, logo, $\overline{GP}$ é raio do círculo inscrito no triângulo tangente a todos os seus lados.

Figura 49 – O incentro



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

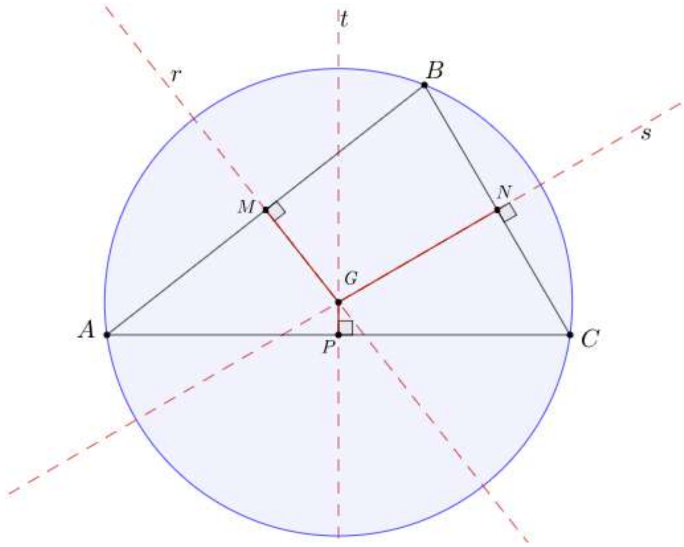
4.3.4 **O circuncentro**

O circuncentro é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados de um triângulo qualquer. O circuncentro também é o centro da circunferência que circunscreve o triângulo.

Tem-se a construção deste lugar geométrico:

Dado um triângulo qualquer ABC, traçar as mediatrizes dos lados do triângulo, como em 4.1.4, e marcar o ponto G, que é o ponto de intersecção das mediatrizes. A distância de G a qualquer um dos vértices A, B e C é o raio do círculo que circunscreve o triângulo.

Figura 50 – O circuncentro



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4.4 O CÍRCULO E TANGENTES AO CÍRCULO

O círculo é uma figura geométrica de suma importância na Geometria. Muitos conhecimentos estão diretamente ligados ao círculo, como a própria Geometria Espacial e a Geometria Analítica. Então, é notório a importância e a beleza das construções relacionadas ao círculo.

A seguir, veremos construções relacionada a círculos e suas tangentes.

4.4.1 **O círculo e uma tangente**

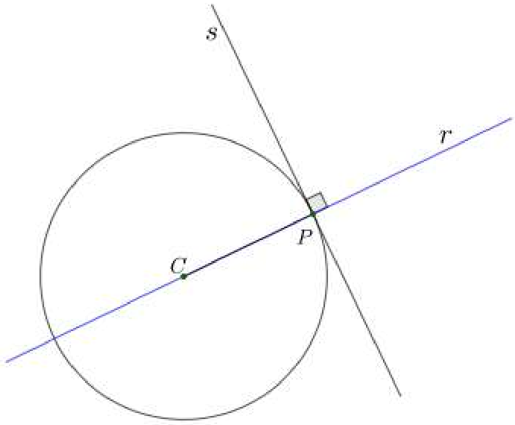
Dado um círculo de centro C e um ponto P, tal que $CP = raio$; traçar uma reta s tangente ao círculo.

Construção:

Seja Γ um círculo de centro C e P um ponto tal que $P \in \Gamma$. Traçar uma semireta r que passe pelos pontos C e P. E em seguida, traçar uma reta s que passe por P e seja perpendicular ao segmento $\overline{CP}$, como em 4.1.1.

A reta tangente ao círculo forma um ângulo de 90^o com o seu raio, logo, é uma reta tangente ao círculo em P.

Figura 51 – Tangente de um círculo



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4.4.2 O círculo e duas tangentes não paralelas

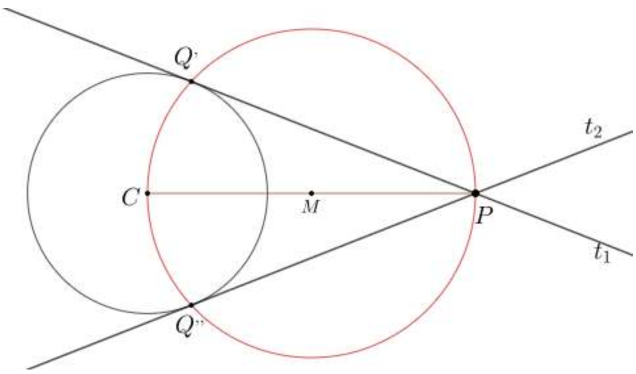
Dado um círculo de centro C e um ponto P exterior ao círculo, traçar as retas tangentes ao círculo que passam pelo ponto P.

Construção:

Seja Γ um círculo de centro C e P um ponto tal que $P \notin \Gamma$. Traçar o segmento $\overline{CP}$ e localizar seu ponto médio M. Traçar uma circunferência de raio $\overline{MP}$ e encontrar os pontos Q' e Q'', pontos de intersecção da circunferência de centro M com o círculo de centro C dado.

As retas t_1, que passa pelos pontos P e Q', e t_2, que passa pelos pontos P e Q”, são as retas tangentes procuradas.

Figura 52 – O círculo, um ponto e suas tangentes



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4.4.3 Dois círculos e suas tangentes internas

Dados dois círculos de centros C_1 e C_2, de raios r_1 e r_2, respectivamente; traçar a tangente interna aos dois círculos.

Construção:

Sejam Γ_1 e Γ_2 círculos de centro C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2, respectivamente.

Passo 1: Traçar uma semirreta que intersecte C_1 e C_2, achar o ponto médio do segmento $\overline{C_1C_2}$ e traçar um semicircunferência de raio do tamanho de $\overline{MC_1}$ (Figura 53).

Passo 2: Adicionar os segmentos de tamanhos r_1 e r_2, e traçar uma circunferência centrada em C_1 de raio $r_1 + r_2$.

Passo 3: Localizar o ponto P de intersecção da semicircunferência centrada em M com a circunferência de raio $r_1 + r_2$.

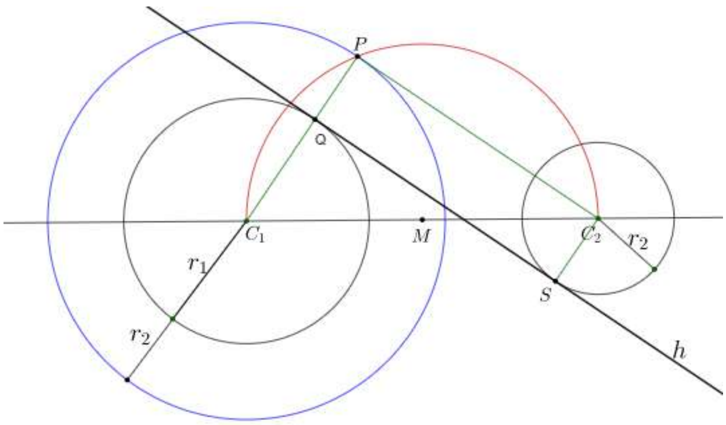
Passo 4: Traçar o triângulo $\triangle\ C_1C_2P$, retângulo em P.

Passo 5: Localizar o ponto Q, ponto de intersecção do segmento $\overline{PC_1}$ com o círculo de raio r_1 e centro em C_1.

Passo 6: Traçar uma reta h, paralela ao segmento $\overline{PC_2}$ que passe pelo ponto Q.

Como a $d(P, Q) = r_2$, temos que a $d(C_2, h) = r_2$. Desta maneira, a $d(C_1, h) = r_1$ e a $d(C_2, h) = r_2$, logo, a reta h é a tangente interna aos círculos de centros C_1 e C_2.

Figura 53 – Tangente interna comum a dois círculos



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4.4.4 Dois círculos e suas tangentes externas

Dados dois círculos de centros C_1 e C_2, de raios r_1 e r_2, respectivamente; traçar a tangente externa aos dois círculos.

Construção:

Sejam Γ_1 e Γ_2 círculos de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2, respectivamente.

Passo 1: Traçar o segmento $\overline{C_1C_2}$, encontrar seu ponto médio M e traçar uma semicircunferência de raio de mesmo tamanho de $\overline{MC_1}$ e centro em M.

Passo 2: Com centro em C_2, como mostra a figura, traçar uma circunferência de raio $r_2 - r_1$.

Passo 3: Encontrar o ponto P, ponto de intersecção da semicircunferência centrada em M de raio $\overline{MC_1}$ com a circunferência centrada em C_2 de raio $r_2 - r_1$.

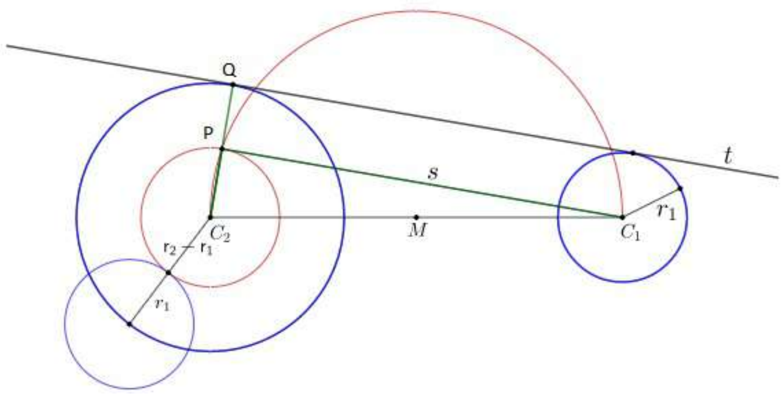
Passo 4: Traçar o triângulo $\triangle C_1C_2P$, retângulo em P.

Passo 5: Prolongar o segmento $\overline{C_2P}$ até intersectar a circunferência dada inicialmente de raio r_2. Chamar esse ponto de Q.

Passo 5: Traçar uma reta t, paralela ao segmento $\overline{PC_1}$, passando por Q.

Como a $d(P, Q) = r_1$, temos que a $d(C_1, t) = r_1$. Desta maneira, a $d(C_2, t) = r_2$ e a $d(C_1, t) = r_1$, logo, a reta t é a reta tangente aos círculos C_1 e C_2 procurada.

Figura 54 – Tangente externa comum a dois círculos



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

4.4.5 **Proposta de atividades**

Exercício 1. Construir um quadrado conhecendo sua diagonal.

Exercício 2. Construir um círculo circunscrito a um triângulo.

Exercício 3. Construir um hexágono regular, dado em posição um lado.

Exercício 4. Construir uma perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto A.

Exercício 5. Construir o triângulo ABC conhecendo o lado a e os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

5 CONSTRUÇÕES DE ALGUMAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS UTILIZANDO RÉGUA E COMPASSO

Neste capítulo apresentaremos algumas equações que podem ser resolvidas geometricamente e com o auxílio da régua e do compasso. A ideia de trabalhar a geometria de uma forma inesperada e desconhecida por muitos alunos pode ser observada na BNCC. A norma fala da importância de apresentar uma Matemática além de mera aplicações de fórmulas.

> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau. (BRASIL, 2017, p. 272)

A aplicação de construções geométricas na resolução de problemas de origem na Álgebra demonstra a capacidade que a Matemática tem em possuir diversas formas de demonstrações e aplicações. Podemos observar a relevância dessas construções salientando que as duas atividades que serão abordadas nas seções seguintes foram extraídas do livro utilizado pelo curso, na disciplina de Geometria (MUNIZ NETO, 2013), do qual este trabalho é pré-requisito de conclusão.

5.1 ATIVIDADE 1

Dados segmentos de comprimentos s e p, tais que $s > 2p$, construa, com régua e compasso, segmentos cujos comprimentos sejam iguais às raízes da equação $x^2 - sx + p^2 = 0$.

Solução.

Inicialmente, observar as propriedades das raízes x_1 e x_2 dadas por:

$$x_1 + x_2 = s$$

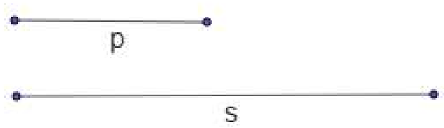
e

$$x_1 \cdot x_2 = p^2 \Rightarrow p = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

A justificativa para tais igualdades está apresentada no apêndice A.

Passo 1: Sejam p e s segmentos com $s > 2p$.

Figura 55 – Segmentos p e s



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

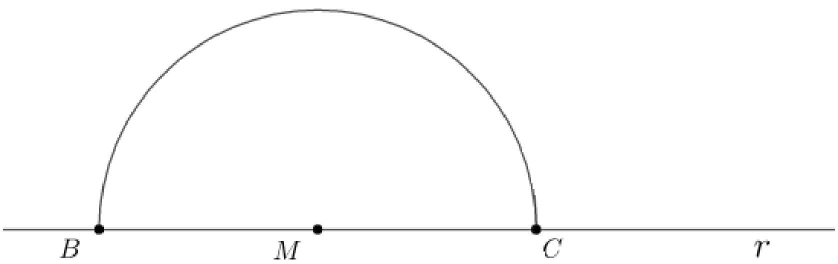
Passo 2: Traçar uma reta suporte r e transferir os segmentos $\overline{BC} = s$ para esta reta.

Figura 56 – Segmento $\overline{BC}$ sobre a reta suporte r

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 3: Marcar o ponto médio M do segmento $\overline{BC}$, como em 4.1.4, e em seguida traçar um semicircunferência de diâmetro $\overline{BC}$.

Figura 57 – Semicírculo de raio $\overline{BM}$

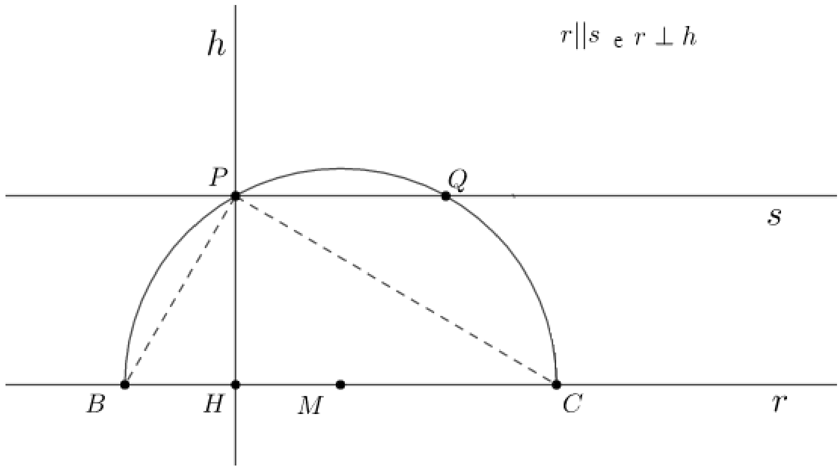


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 4: Traçar uma reta s paralela à reta r cuja distância entre elas seja p, como em 4.1.2. Marcar os pontos P e Q, que são os pontos de intersecção da semicircunferência traçada com a reta s. Em seguida traçar uma reta h perpendicular à reta r passando pelo ponto P, como em 4.1.1. Chamar a intersecção das retas r e h de H.

Considerar o triângulo $\triangle BPC$ inscrito em uma semicircunferência. Como o lado BC é o diâmetro dessa semicircunferência, segue que o triângulo $\triangle BPC$ é retângulo em P.

Figura 58 – Triângulo retângulo $\triangle BPC$



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Logo, $\overline{PH}$ é a altura do triângulo retângulo $\triangle BPH$, e pelas relações métricas do triângulo retângulo, como apresentado em 3.4.2, $p^2 = (\overline{PH})^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$. Por fim, $s = \overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH}$. Por conseguinte, as raízes desta equação, x_1 e x_2, equivalem aos segmentos $\overline{BH}$ e $\overline{CH}$.

5.2 ATIVIDADE 2

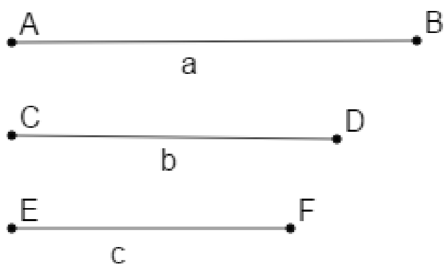
Dados segmentos de comprimentos a, b e c, construa com régua e compasso um segmento de comprimento $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, admitindo que a expressão sob o sinal da raiz seja positiva.

Solução.

Chamar $y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \implies y^2 = a^2 + b^2 - c^2$.

Passo 1: Supor os segmentos de comprimentos $a = \overline{AB}$, $b = \overline{CD}$ e $c = \overline{EF}$.

Figura 59 – Segmentos de comprimentos a, b e c

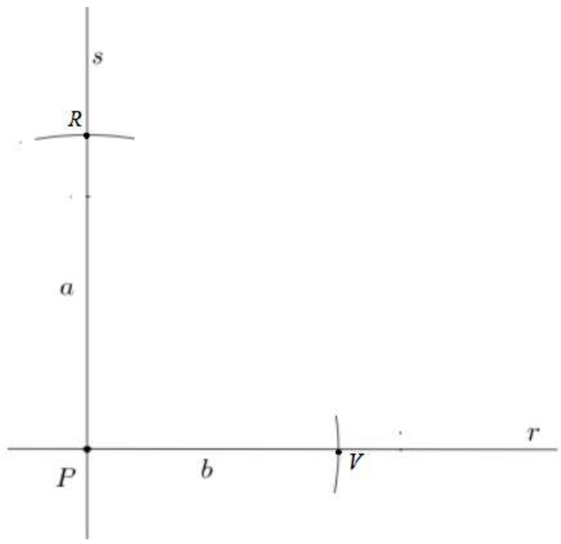


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 2: Traçar uma reta suporte r e marcar um ponto P qualquer sobre a reta r.

Passo 3: Traçar uma reta s perpendicular a reta r que passe pelo ponto P, como em 4.1.1. E com o auxílio do compasso transferir os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ para as retas r e s, como em 4.1.3, como mostra a figura 60.

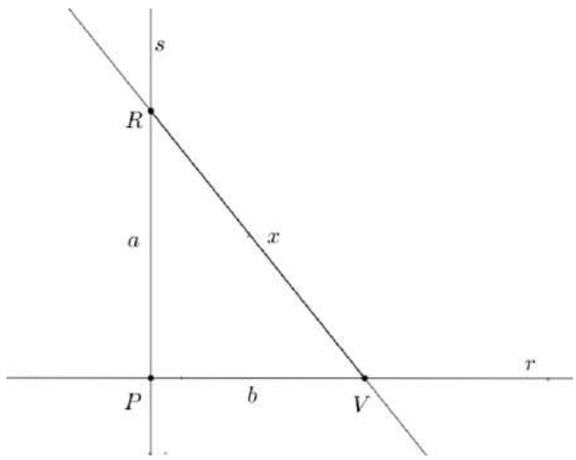
Figura 60 – Segmentos $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$ sobre as retas r e s



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 4: Traçar um segmento de tamanho $x = \overline{RV}$, formando um triângulo $\triangle PVR$ retângulo em P, onde $x^2 = a^2 + b^2$.

Figura 61 – Segmento $x = \sqrt{a^2 + b^2}$



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 5: Utilizando a adição e subtração de segmentos com o auxílio do compasso, tem-se:

$\overline{V'R} = \overline{RV} = x$,

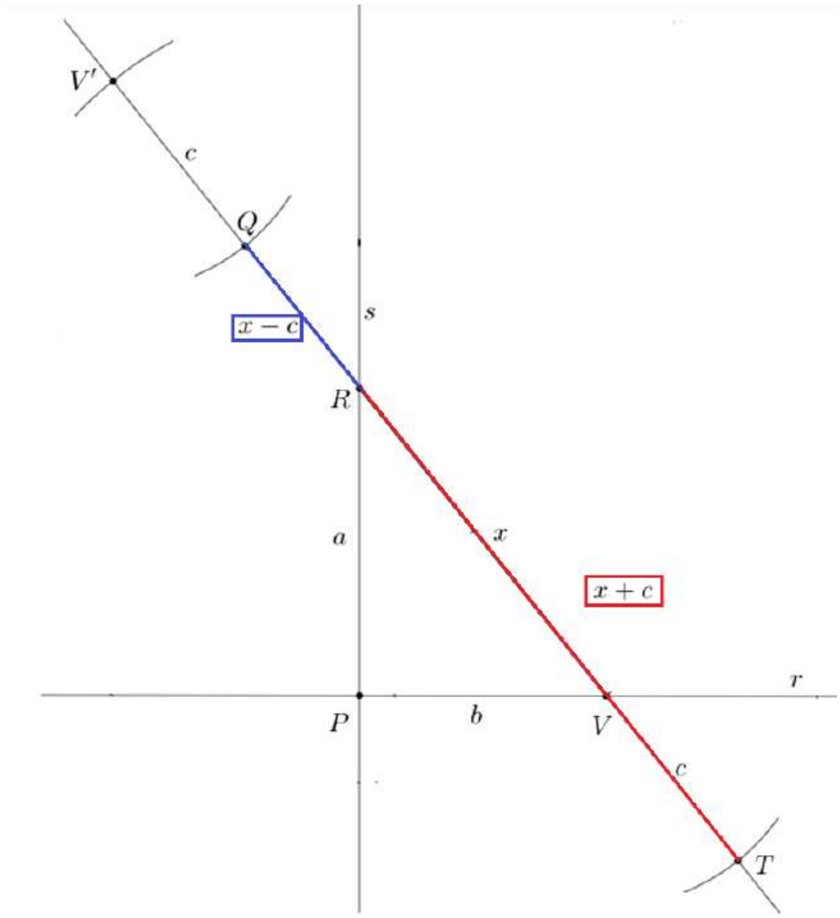
$\overline{V'Q} = c$ e $\overline{VT} = c$,

$\overline{QR} = x - c\,,$

$\overline{RT} = x + c\,.$

Veja na figura 62.

Figura 62 – Segmentos $\overline{QR} = x - c$ e $\overline{RT} = x + c$



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

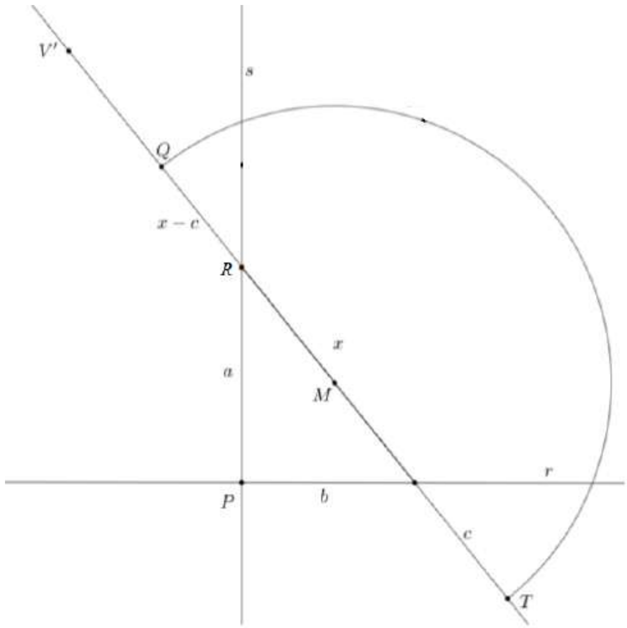
Passo 6: Como $x^2 = a^2 + b^2$ e $y^2 = a^2 + b^2 - c^2$, tem-se que

$$\Longrightarrow y^2 = x^2 - c^2$$

$$\Longrightarrow y^2 = (x + c) \cdot (x - c)$$

Traçar o ponto médio M de $\overline{QT}$ e posteriormente uma semicircunferência de diâmetro $\overline{QT}$.

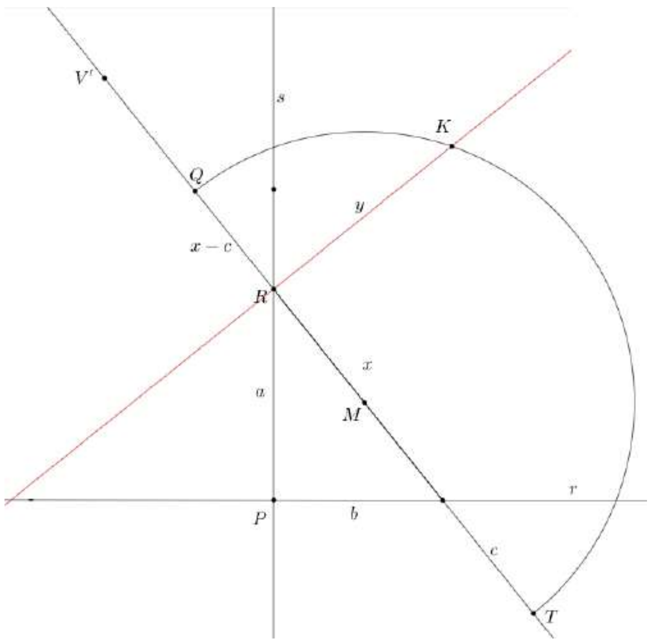
Figura 63 – O ponto médio M e o semicírculo



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 7: Traçar uma reta perpendicular ao segmento $\overline{QT}$ passando pelo ponto R, como exposto em 4.1.1, e chamar a intersecção desta reta com o semicircunferência de K.

Figura 64 – $y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} = \overline{RK}$



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

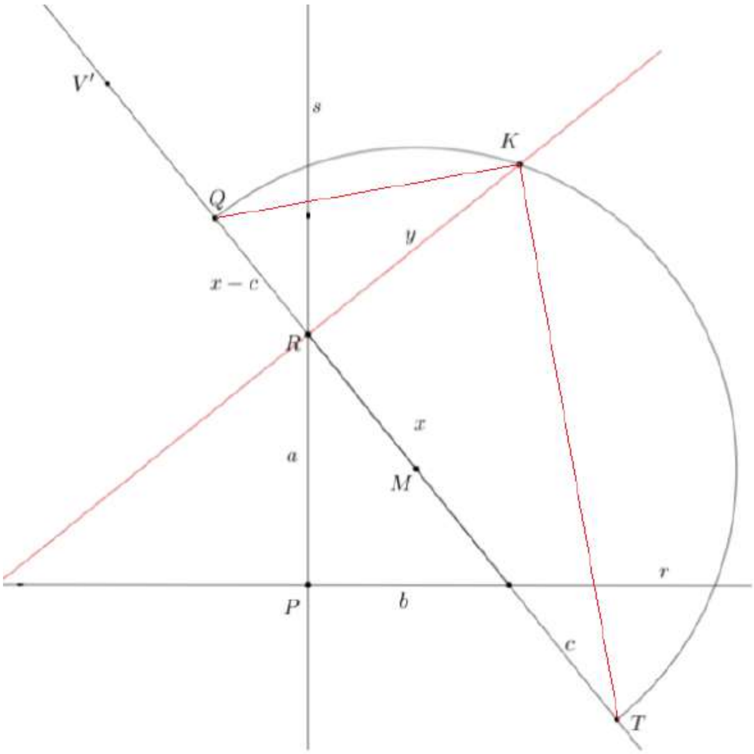
Logo, visto que $\triangle QKT$ forma um triângulo retângulo em K, temos, pelas relações métricas do triângulo retângulo - como apresentado em 3.4.2 -, que

$$(\overline{RK})^2 = \overline{QR} \cdot \overline{RT}.$$

Portanto, $y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} = \overline{RK}$.

Geometricamente, tem-se:

Figura 65 – $y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2} = \overline{RK}$



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

6 ALGUMAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS BÁSICAS UTILIZANDO DOBRADURAS

É notório a necessidade de se buscar meios alternativos que proporcionem aos alunos diversas formas de aprendizagem. E este capítulo tem por objetivo contribuir com ideias que ampliem os recursos didáticos no desenvolvimento de atividades de construções geométricas para além do uso da régua e do compasso, e para além do uso de softwares. Com o objetivo de propiciar ao aluno experiências diversificadas e possivelmente mais atraentes, que estimule a interação e o interesse do aluno, será utilizado as dobraduras como instrumento pedagógico, a fim de que o discente se aproprie de alguns conhecimentos de geometria.

> O uso de dobraduras no ensino de geometria está tornando-se cada vez mais reconhecido como um instrumento pedagógico interessante e muitas vezes eficaz, tanto pelo seu caráter lúdico quanto pela sensação de descoberta que muitas vezes provoca. (CARNEIRO; SPIRA, 2013, p.iii)

A Geometria, que até então ocupava as páginas finais dos livros didáticos, e era deixada para ser trabalhada posterior aos conteúdos de álgebra, e vista como composta de conteúdos abstratos e, consequentemente, desinteressantes para os alunos, com o auxílio das dobraduras, assume uma forma mais concreta de ser apresentada aos alunos.

As dobraduras e origamis são alvos de estudos de pesquisadores, que destacam cada vez mais a eficácia e a riqueza dos conhecimentos explorados nas dobraduras. Ressaltando que a diferença de dobraduras para origamis está no fato de que nos origamis não se utiliza tesoura e cola.

Este capítulo do trabalho será destinado à construção geométrica com o auxílio de dobraduras, inspirado no livro do Programa de Iniciação Científica OBMEP direcionado à Oficina de Dobraduras dos autores Mario Jorge Dias Carneiro e Michel Spira.

6.1 EXPLORANDO O USO DE DOBRADURAS NA GEOMETRIA

Nesta seção, apresentaremos uma lista de sugestões de atividades envolvendo a construção com dobraduras que podem ser exploradas pelos professores e alunos em sala de aula.

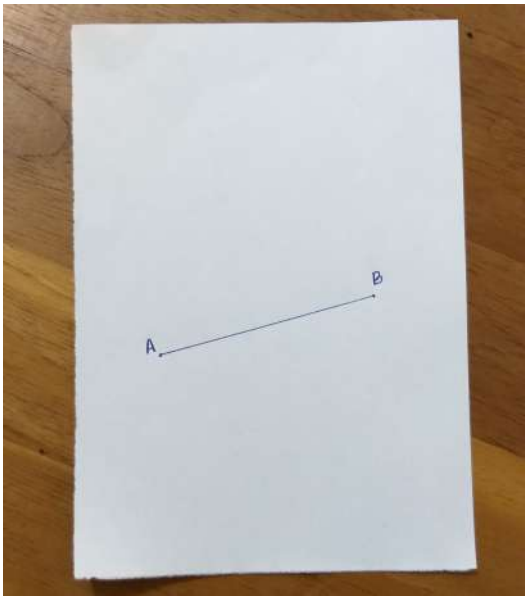
O material utilizado na realização dessas atividades foi somente um quarto da folha de papel A4 com alguma figura base. A opção pela divisão da folha de papel A4 não interferiu no desempenho e objetivo final da atividade, e foi apenas para diminuir o volume de papel que nem sempre as escolas dispõem em grande quantidade.

Todas as construções propostas foram comentadas e ilustradas passo a passo, para facilitar a compreensão.

6.1.1 Construção da mediatriz de um segmento

Atividade: Dado a figura de um segmento AB em uma folha de papel, construir sua mediatriz usando dobraduras.

Figura 66 – Construção da mediatriz

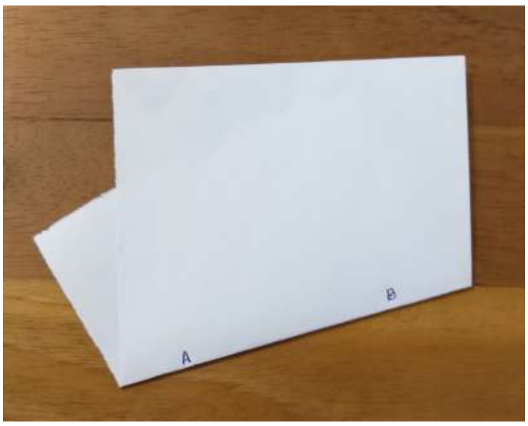


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Descrição da construção.

Passo 1: Dobrar a folha exatamente sobre o segmento $\overline{AB}$.

Figura 67 – Construção da mediatriz - passo 1



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

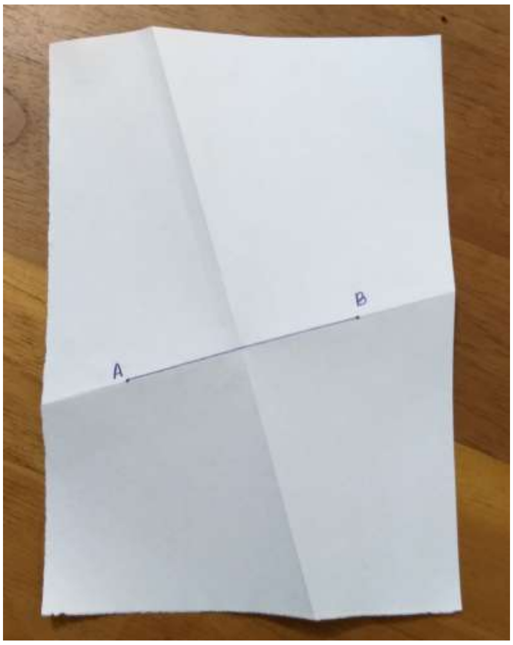
Passo 2: Dobrar novamente o papel colocando o ponto A sobre o ponto B.

Figura 68 – Construção da mediatriz - passo 2

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 3: Desdobrar o papel e obter a reta procurada.

Figura 69 – Construção da mediatriz - passo 3

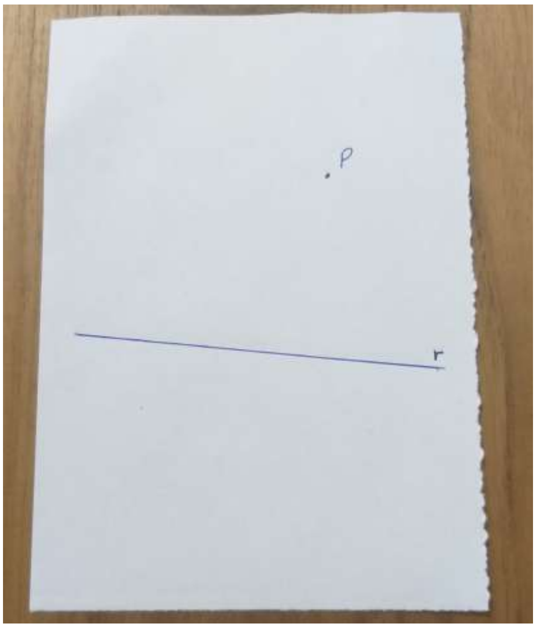


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

6.1.2 Construção de uma reta perpendicular

Atividade: Dado a figura de uma reta r e um ponto P não pertencente a reta r em uma folha de papel, construir, usando dobraduras, uma reta perpendicular a reta r que passe pelo ponto P. Considere a localização de P em uma região que seja possível a construção da reta perpendicular.

Figura 70 – Construção da uma reta perpendicular



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Descrição da construção.

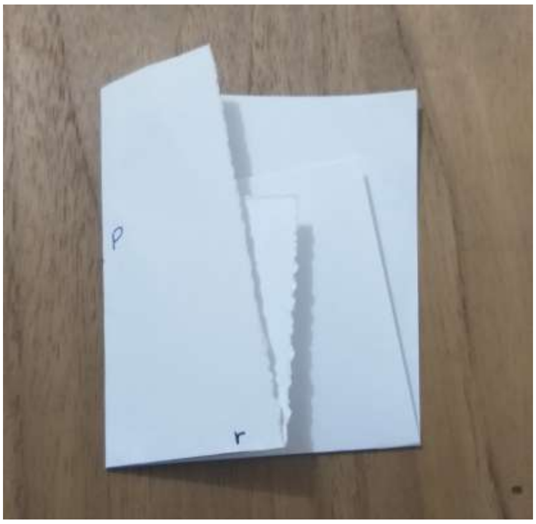
Passo 1: Dobrar o papel exatamente sobre a reta r.

Figura 71 – Construção da uma reta perpendicular - passo 1

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 2: Dobrar novamente o papel no ponto P, com parte da reta r sobre a própria reta r.

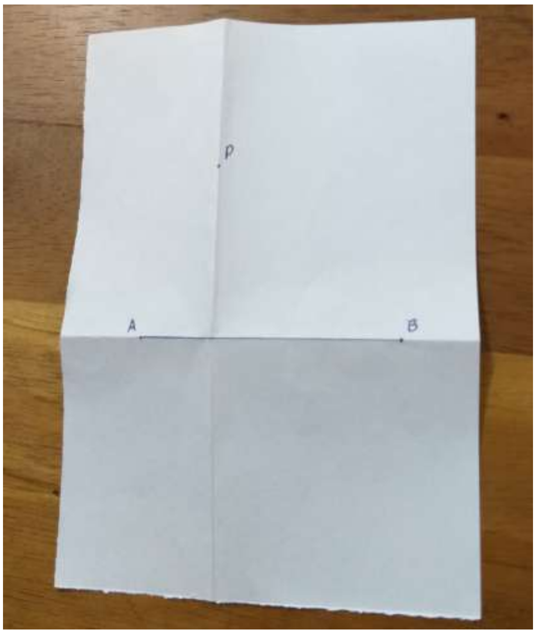
Figura 72 – Construção da uma reta perpendicular - passo 2



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 3: Desdobrar o papel e obter a reta perpendicular procurada.

Figura 73 – Construção da uma reta perpendicular - passo 3

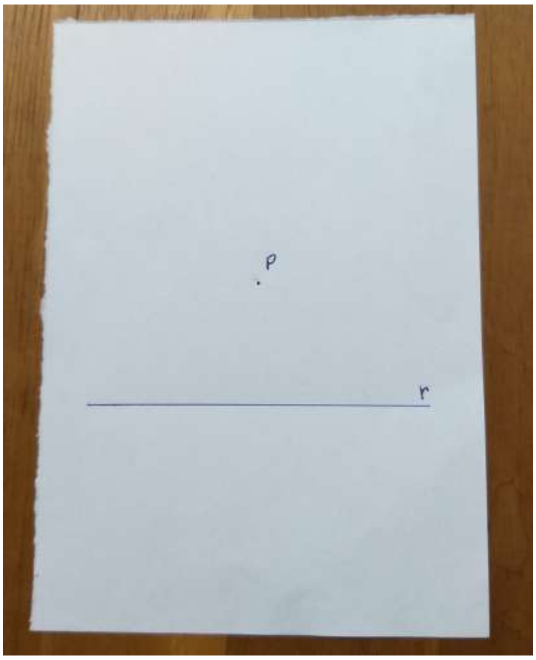


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

6.1.3 Construção de uma reta paralela a uma reta dada

Atividade: Dado uma reta r e um ponto P não pertencente à reta, em uma folha de papel, construir uma reta paralela a reta r que passe pelo ponto P.

Figura 74 – Construção de uma reta paralela



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Descrição da construção.

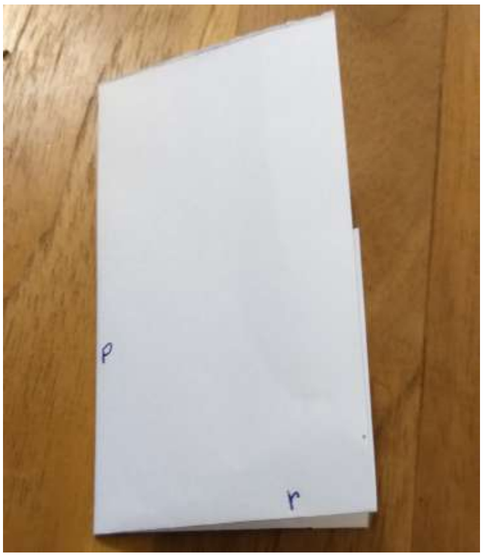
Passo 1: Dobrar o papel exatamente sobre a reta r.

Figura 75 – Construção de uma reta paralela - passo 1

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 2: Dobrar o papel formando uma perpendicular à reta r passando pelo ponto P.

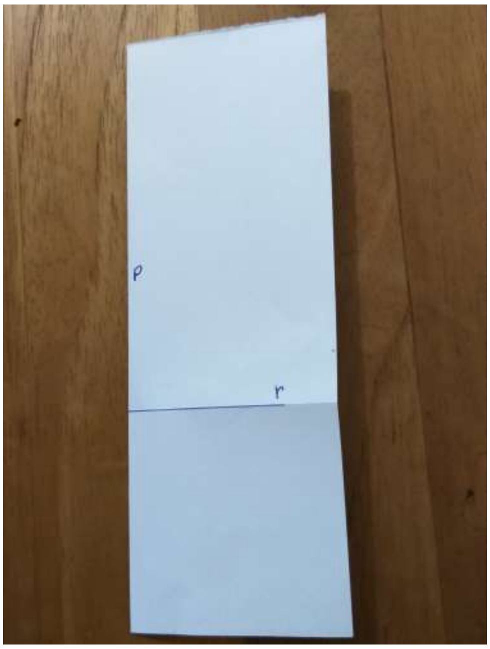
Figura 76 – Construção de uma reta paralela - passo 2



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 3: Desdobrar o papel e dobrar novamente sobre a reta perpendicular r encontrada no passo anterior.

Figura 77 – Construção de uma reta paralela - passo 3



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

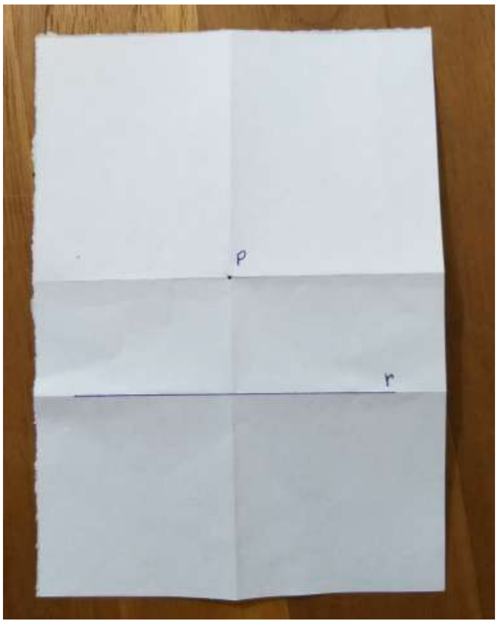
Passo 4: Dobrar o papel formando uma perpendicular a reta encontrada no passo 2 passando pelo ponto P.

Figura 78 – Construção de uma reta paralela - passo 4

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 5: Desdobrar todo o papel e obter a reta paralela procurada.

Figura 79 – Construção de uma reta paralela - passo 5

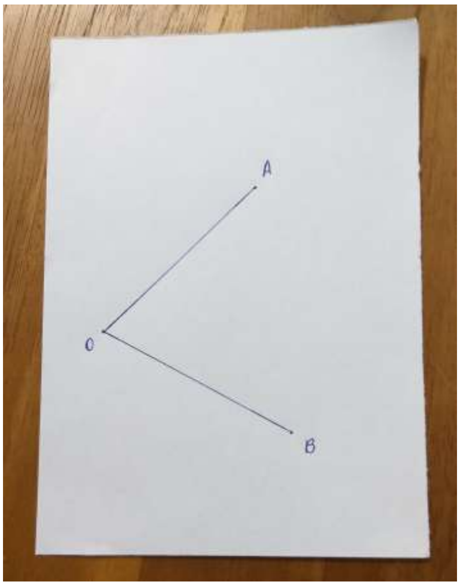


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

6.1.4 **Construção da reta bissetriz do $\angle AOB$**

Atividade: Dado a figura do ângulo $\angle AOB$ em um papel, construir sua bissetriz usando dobraduras.

Figura 80 – Construção da bissetriz

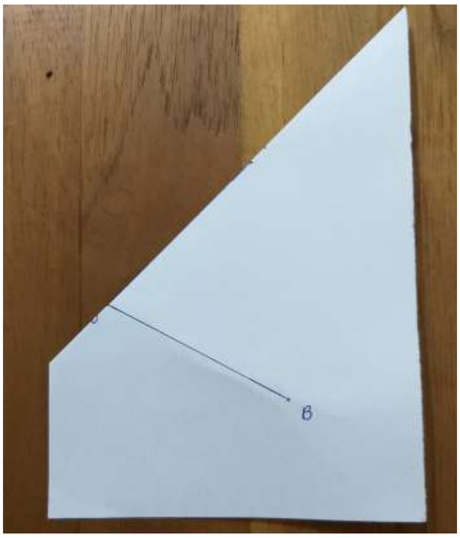


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Descrição da construção.

Passo 1: Dobrar o papel sobre o segmento $\overline{OA}$.

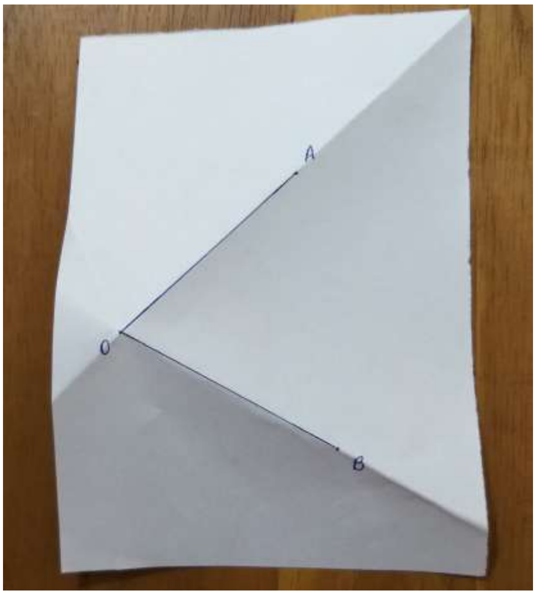
Figura 81 – Construção da bissetriz - passo 1



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 2: Dobrar o papel sobre o segmento $\overline{OB}$.

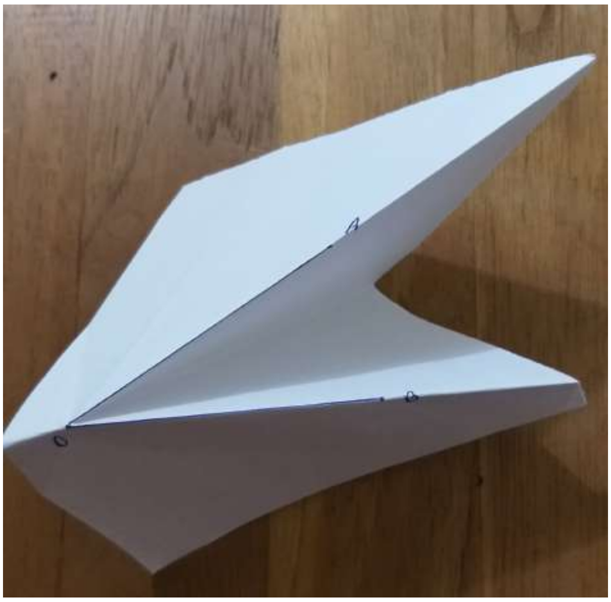
Figura 82 – Construção da bissetriz - passo 2



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 3: Dobrar o papel de forma que o segmento $\overline{OA}$ fique sobre o segmento $\overline{OB}$.

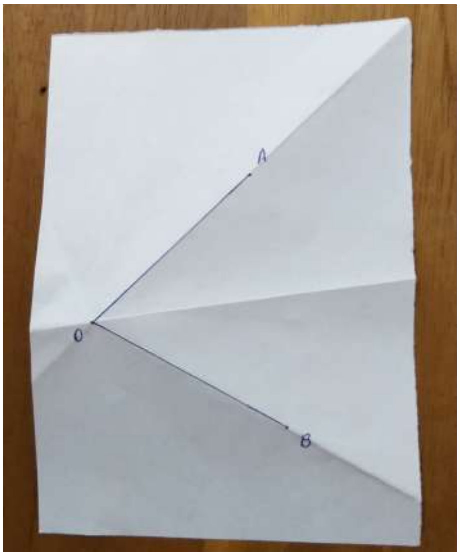
Figura 83 – Construção da bissetriz - passo 3



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 4: Desdobrar o papel e encontrar a reta bissetriz.

Figura 84 – Construção da bissetriz - passo 4

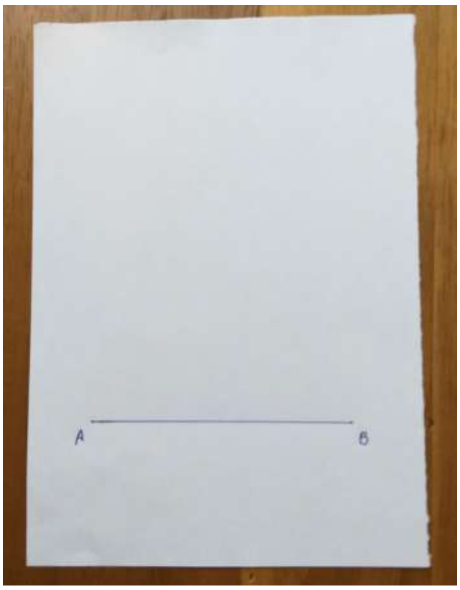


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

6.1.5 Construção de um triângulo equilátero

Atividade: Construir, usando dobraduras, um triângulo equilátero ABC, dado a figura de seu lado AB no papel.

Figura 85 – Construção do triângulo equilátero



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Descrição da construção.

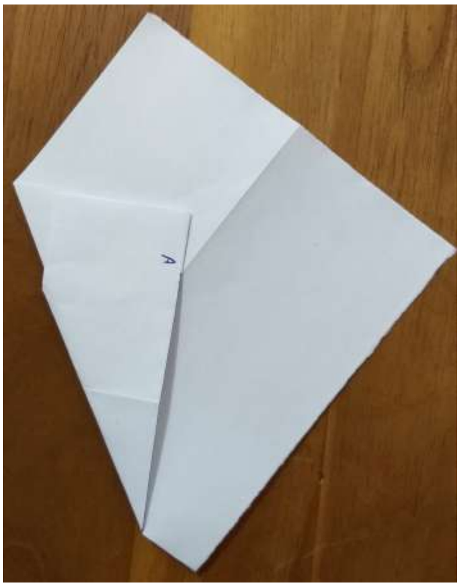
Passo 1: Dobrar o papel sobre o segmento $\overline{AB}$ e encontrar sua mediatriz. como em 6.1.1.

Figura 86 – Construção do triângulo equilátero - passo 1

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 2: Com o papel ainda dobrado no segmento $\overline{AB}$, dobrar o papel no ponto B de tal forma que o ponto A intersecte a mediatriz encontrada no passo anterior. Realçar a posição do ponto de intersecção da reta mediatriz com o ponto com um amassado, por exemplo.

Figura 87 – Construção do triângulo equilátero - passo 2



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 3: Dobrar o papel de forma que se obtenha um outro lado do triângulo. Desdobrar.

Figura 88 – Construção do triângulo equilátero - passo 3

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

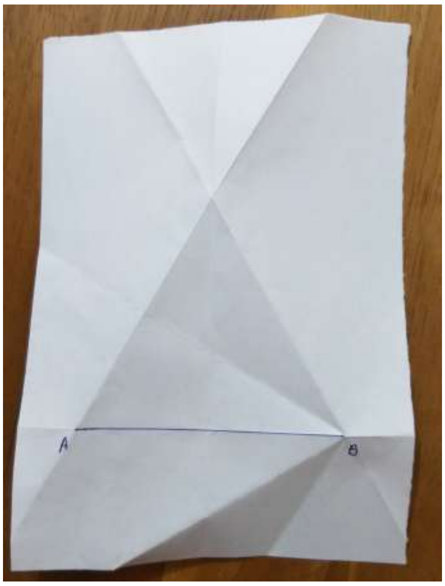
Passo 4: Dobrar o papel de tal forma que sua dobra forme uma reta que passe pelo ponto A e pelo ponto encontrado e realçado no passo 2.

Figura 89 – Construção do triângulo equilátero - passo 4

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 5: Desdobrar e obter o triângulo equilátero.

Figura 90 – Construção do triângulo equilátero - passo 5

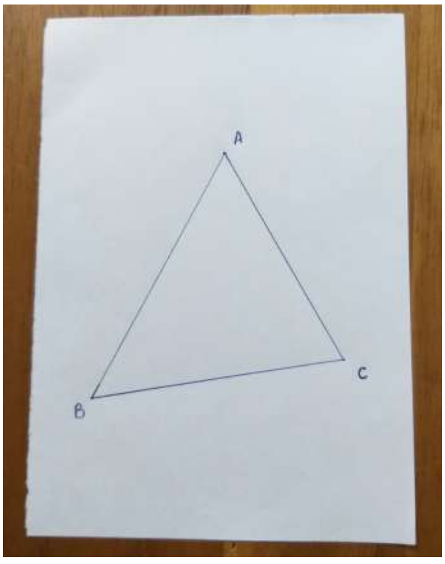


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

6.1.6 Construção do ortocentro

Atividade: Dado a figura de um triângulo ABC no papel, encontrar, usando dobraduras, o lugar geométrico determinado ortocentro.

Figura 91 – Construção do ortocentro

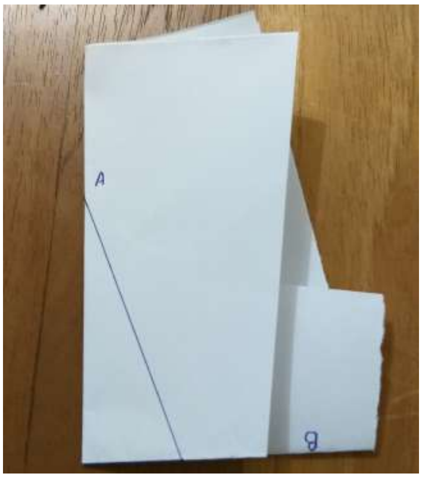


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Descrição da construção.

Passo 1: Dobrar o papel no segmento $\overline{BC}$, e em seguida, encontrar a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa pelo ponto A, como em 6.1.2. Ou seja, encontrar a reta perpendicular baixada do vértice A em relação ao lado BC, que é a altura do triângulo ABC em relação ao lado BC.

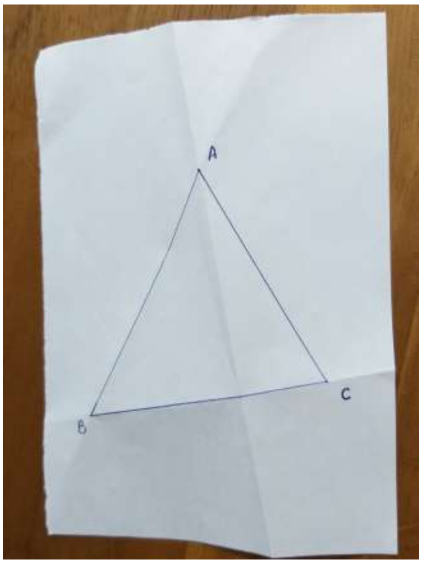
Figura 92 – Construção do orto-
centro - passo 1



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 2: Desdobrar o papel e encontrar a reta perpendicular baixada de A em relação ao lado BC. Repetir o passo 1 para encontrar as alturas do triângulo ABC em relação aos lados AB e AC.

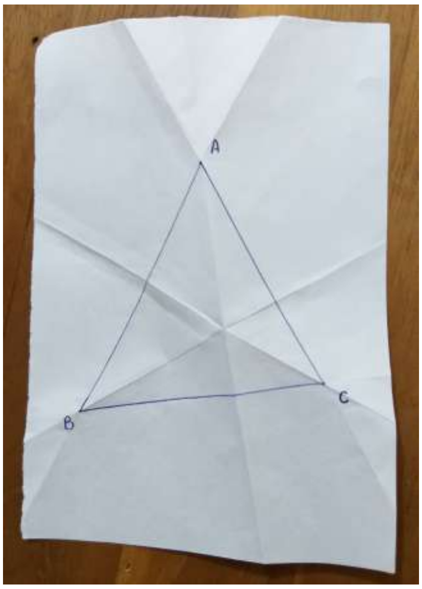
Figura 93 – Construção do ortocentro - passo 2



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 3: Desdobrar o Papel. O ponto de intersecção das retas encontradas, que também contém as alturas do triângulo, é o ortocentro do triângulo.

Figura 94 – Construção do ortocentro - passo 3

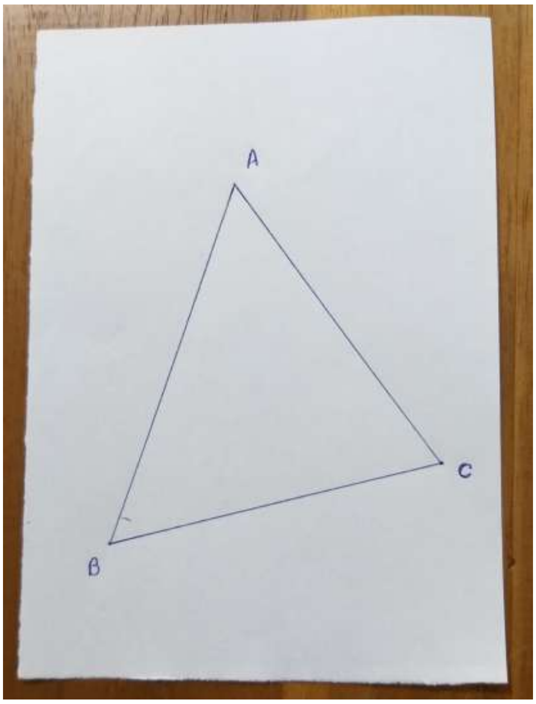


Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

6.1.7 **Construção do circuncentro**

Atividade: Dado a figura de um triângulo ABC no papel, encontrar, usando dobraduras, o lugar geométrico determinado circuncentro.

Figura 95 – Construção do circuncentro



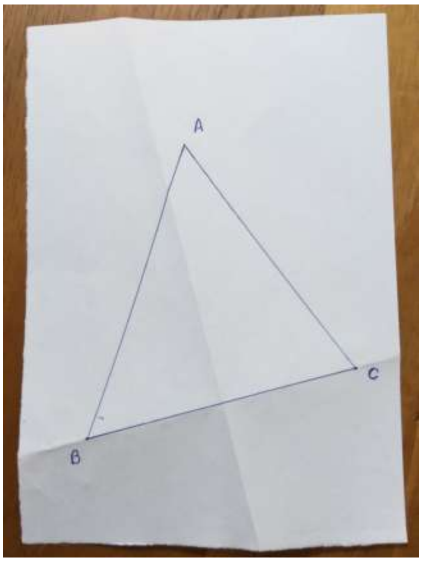
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Descrição da construção.

Passo 1: Dobre o papel sobre o segmento $\overline{AB}$, encontre o ponto médio do segmento AB e encontre sua mediatriz, como em 6.1.1.

Passo 2: Repita esse processo com os lados BC e AC.

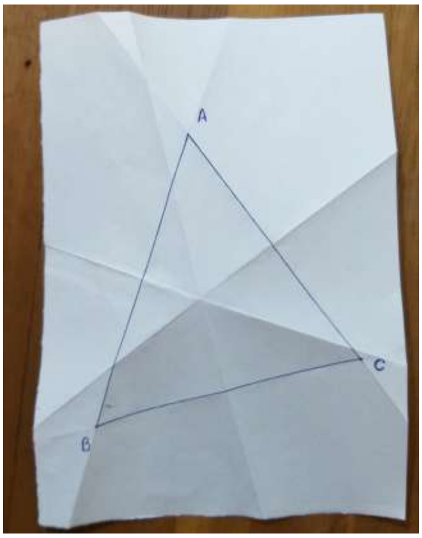
Figura 96 – Construção do circuncentro - passo 2



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 3: Identifique o ponto de intersecção das três mediatrizes.

Figura 97 – Construção do circuncentro - passo 3



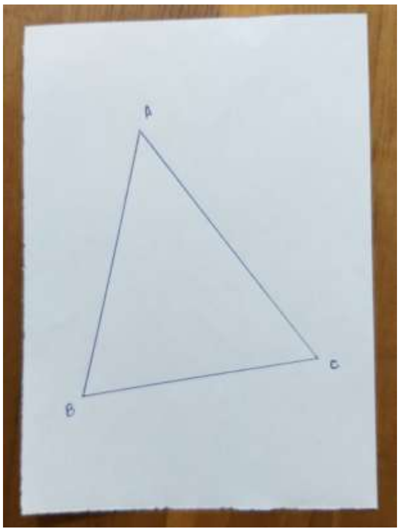
Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

6.1.8 Construção do baricentro

Atividade: Dado a figura de um triângulo ABC no papel, encontrar, usando dobraduras, o lugar geométrico determinado baricentro.

Descrição da construção.

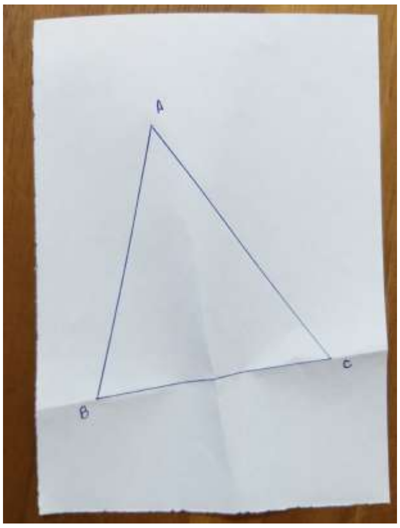
Figura 98 – Construção do baricentro



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 1: Dobrar o papel sobre o segmento $\overline{BC}$. Dobrar novamente para encontrar o ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

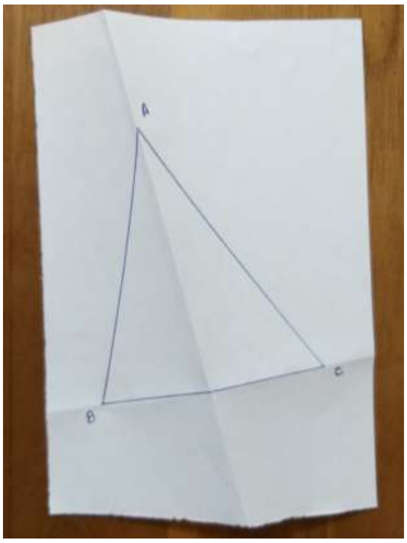
Figura 99 – Construção do baricentro - passo 1



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 2: A partir do ponto médio de BC encontrado no passo 1, dobrar o papel de tal forma a ligar o ponto médio de BC ao vértice A para encontrar a mediana relativa ao lado BC. Repita esse processo com os lados AB e AC.

Figura 100 – Construção do baricentro - passo 2



Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

Passo 3: Desdobrar o papel e identificar o ponto de intersecção das três medianas, este ponto é o baricentro do triângulo ABC.

Figura 101 – Construção do baricentro - passo 3

Fonte: Elaborada pelo autor (2020)

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho foi mostrar que apesar dos recursos tecnológicos estarem em destaque no campo educacional, como instrumentos facilitadores da aprendizagem, a prática de atividades com recursos mais simples, como as construções geométricas com o auxílio da régua e do compasso, também possuem sua relevância, pois se mostram meios eficientes no favorecimento à aprendizagem do aluno. E, a despeito dos softwares terem ganhado espaço e trazido amplos benefícios nos estudos de Geometria, a construção com régua e compasso ainda faz-se necessária, como também instrui a Base Nacional Comum Curricular em sua diretrizes. A relevância da aplicabilidade da construção com régua e compasso pode ser observada ainda em resoluções de exercícios de Álgebra, o que a torna versátil e interessante. Devido à importância do tema, o presente trabalho abordou uma série de atividades envolvendo a construção com régua e compasso de acordo, principalmente, com as propostas da Base Nacional Comum Curricular.

É fato que a aprendizagem não ocorre de forma única e ao mesmo tempo em todo indivíduo, então é importante que sejam respeitadas as peculiaridades de cada discente; e nesse intuito, notamos que é interessante propor aos alunos atividades diversificadas para compreensão de certos conteúdos. Deste modo, o capítulo 5 desse trabalho foi destinado a trazer uma forma alternativa para as construções geométricas por meio das dobraduras. As dobraduras, como instrumento de construções geométricas, proporcionam uma aula diferenciada, atrativa e de muito raciocínio. Se por um lado pressupõe uma aula divertida, por outro exige-se muito raciocínio lógico.

As aulas de construções geométricas, seja com o uso da régua e do compasso ou com o uso das dobraduras, podem ser bem atrativas aos alunos, visto que tendem a fugir um pouco das aulas tradicionais de matemática, que muitas das vezes se resumem a aulas simplesmente expositivas com o uso da caneta, lousa e livros. A matemática precisa ser apresentada de forma diversificada para que os alunos quebrem certos bloqueios envoltos a esta disciplina, e passem a adotá-la como uma disciplina de acesso comum a todos.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM. Reimpressão: 1997.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. **Educação é a base**. Brasília, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br. Acesso em: 29 out. 2019.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília : MEC /SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 02 jan. 2020.

BRASIL. **Constitição da República Federativa do Brasil**. Brasília, DF: Presidência da República, 1988. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Constituiçao.htm. Acesso em: 8 fev. 2020.

CARNEIRO, M. J. D.; SPIRA, M. **Oficina de Dobraduras**. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

GIOVANNI JÚNIOR, R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**. 6º ao 9º ano, ensino fundamental. São Paulo: FDT, 2018.

IEZZI, G. et al. **Matemática: Volume Único**. - 4. ed. - São Paulo: Atual, 2007.

LONGEN, A. **Apoema: matemática**. 6º ao 9º ano, ensino fundamental. São Paulo: Editora do Brasil, 2018.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NETTO, L. N. **Construções Geométricas: Exercícios e Soluções**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.

PARENTE, U. L. **Material Teórico - Módulo Elementos Básicos de Geometria Plana - Parte 1. Retas Cortadas por uma Transversal**. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/uploads/material_teorico/8ioyn500os088.pdf. Acesso em: 09 jun. 2020.

SOUZA, J. R. **Matemática realidade e tecnologia**. 6º ao 9º ano, do ensino fundamental. São Paulo: FDT, 2018.

TAPIA, J. A.; FITA, E. C. **A motivação em sala de aula: o que é, como se faz**. Tradução: Sandra Garcia - 11. ed. - São Paulo: Edições Loyola, 2015.

WAGNER, E. **Construções Geometricas**. Rio de Janeiro: Editora SBM.

APÊNDICE A – A equação do 2º grau e suas raízes

Uma equação do segundo grau é uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais conhecidos, sendo $a \neq 0$, e x é uma incógnita real. Os valores reais de x que satisfazem a equação são chamados de raízes, ao passo que o conjunto formado pelas raízes é o conjunto solução da equação.

Um dos métodos de resolução da equação do 2º grau é por meio da aplicação da fórmula de Baskara, que é dada por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

.

A demonstração da fórmula de Baskara pode ser evidenciada utilizando a forma canônica da equação do 2º grau, que se inicia colocando o número a em evidência. Segue a demonstração abaixo.

$$a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Longleftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Chamando $\triangle = b^2 - 4ac$, temos que $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$. Logo, $x' = \dfrac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}$ e $x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}$ são as raízes da equação do 2º grau.

A soma das raízes da equação do 2º grau:

$$x' + x'' = \left(\frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}\right) + \left(\frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}\right) = \frac{-b - \sqrt{\triangle} - b + \sqrt{\triangle}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

O produto das raízes da equação do 2º grau:

$$x' \cdot x'' = \left(\frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}\right) = \frac{b^2 - b\sqrt{\triangle} + b\sqrt{\triangle} - (b^2 - 4ac)}{4a} = c$$

Podemos observar que, dada uma equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a = 1$, e b e c números reais, $x' + x'' = -b$ e $x' \cdot x'' = c$.