UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: o estudo dos Espaços Vetoriais

Aretha Fontes Alves

Juiz de Fora (MG)

Novembro, 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Pós-Graduação em Educação Matemática
Mestrado Profissional em Educação Matemática

Aretha Fontes Alves

Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: o estudo dos Espaços Vetoriais

Orientador(a): Prof.ª Drª Cristiane de Andrade Mendes
Coorientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Juiz de Fora (MG)
Novembro, 2013

AGRADECIMENTOS

Ao fim desta jornada, quero agradeço primeiramente a Deus que me concedeu saúde e perseverança para concluir esta caminhada e me proporcionou a convivência com pessoas tão maravilhosas ao longo de minha vida.

Quero agradecer aos meus pais que me educaram e deram valores que levarei para sempre com muito carinho. Minha mãe Maria das Neves que me enche de proteção e cuidado e meu pai Rosarvo, *in memorian*, que me ensinou a ter respeito e censo crítico para guiar minhas ações.

Agradeço a minhas irmãs Aline e Amanda que se dispuseram a me ouvir falar tantas vezes de minha pesquisa e me deram muito carinho e apoio.

Agradeço ao meu cunhado e colega de trabalho Kleber, que me proporcionou e proporciona discussões educacionais muito proveitosas.

Agradeço aos meus sobrinhos Aléxia, Bernardo e Frederico, que me lembram sempre que com alegria e brincadeira a vida é muito melhor.

Agradeço a todos da família Salame da Silva que me acolheram sempre que preciso em sua casa para que eu pudesse sair da rotina e recarregar minha bateria.

Agradeço também à minha orientadora, amiga e “mamãe” Cristiane, que dedicou muito de seu tempo para me acompanhar nesta trajetória.

Agradeço ao meu coorientador e amigo Amarildo, que desde meu primeiro dia de aula na universidade vem me mostrando o que é Educação Matemática.

Agradeço ao meu parceiro de pesquisa, colega de trabalho e amigo Vitor, que compartilhou as angústias e alegrias deste projeto.

Agradeço aos professores Romulo e Janete, que aceitaram participar e muito contribuíram para esta pesquisa.

Agradeço, por fim, aos meus professores da Universidade Federal de Juiz de Fora que me proporcionaram momentos propícios à aprendizagem da Matemática e da Educação Matemática.

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo levantar as características de um Curso de Serviço de Álgebra Linear voltado a alunos de Licenciatura em Matemática. Para tanto, desenvolvemos uma análise segundo o Modelo dos Campos Semânticos e uma revisão de literatura, voltada para três temas que permeiam nosso estudo, são eles: a Produção de Significados para a Álgebra Linear; a noção de Curso de Serviço e; a Formação Matemática do Professor de Matemática. Esta análise possibilitou que nos preparássemos para realizar uma pesquisa de campo que se constituiu em um seminário de Álgebra Linear com o intuito de estruturar quais seriam estas características.

Palavras – Chave: Álgebra Linear. Modelo dos Campos Semânticos. Formação Matemática do Professor de Matemática.

ABSTRACT

This work aims to raise the characteristics of a Service Course in Linear Algebra for students of Mathematics. For that, we develop an analysis according to the Model of Semantic Fields and a literature review focused on three themes that permeate our study, they are: Production of meanings for Linear Algebra, the notion of Service Course and; the Mathematics Training of mathematics teacher. This analysis allowed us to prepare ourselves to conduct a field research which constituted which was constituted by a seminary in Linear Algebra with the aim of structuring what these characteristics would be.

Palavras–Chave: Linear Algebra. Model of Semantic Fields. Mathematics Training of mathematics teacher.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 9
CAPÍTULO 1 – A proposição do Problema de Pesquisa 15
CAPÍTULO 2 – O Referencial Teórico 20
2.1 O Modelo dos Campos Semânticos 21
2.2 O Processo Comunicativo 26
2.3 Alguns Pressupostos Teórico-Epistemológicos 31
CAPÍTULO 3 – A Revisão da Literatura 35
3.1 Produção de Significados para a Álgebra Linear 35
3.1.1 A Teoria da Atividade 35
3.1.2 O Processo de Produção de Significados 38
3.1.3 Produção de Significados e Álgebra Linear 42
3.2 Formação do Professor de Matemática 49
3.3 Curso de Serviço 53
3.4 Alguns Pressupostos Teórico-Epistemológicos 56
CAPÍTULO 4 – A Metodologia da Pesquisa 60
4.1 A Pesquisa de Campo 60
4.2 O Produto Educacional 67
CAPÍTULO 5 – A Pesquisa de Campo 69
CAPÍTULO 6 – Concluindo Ideias 80
Referências 84
Anexos 89
I – Termo de Compromisso 90
II – Questionário 91
III – Uma Análise mais detalhada da Pesquisa de Campo 92

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1: Representação de vetores, feita no quadro pelos pesquisadores.

FIGURA 1.2: Euclides: 1- a) (ESPAÇO VETORIAL)

FIGURA 1.3: Euclides: 1 - b) (ESPAÇO VETORIAL)

FIGURA 1.4: Euclides: 1- c) (ESPAÇO VETORIAL)

FIGURA 2.1: Simba: 1- a) (ESPAÇO VETORIAL)

FIGURA 2.2: Simba: 1- b) (ESPAÇO VETORIAL)

FIGURA 2.3: Simba: 1- c) (ESPAÇO VETORIAL)

FIGURA 2.4: Euclides: 1- d) (ESPAÇO VETORIAL)

FIGURA 2.5: Simba: 1- d) (ESPAÇO VETORIAL)

FIGURA 2.6: Euclides: 2) (SUBESPAÇO)

FIGURA 2.7:Simba: 2) (SUBESPAÇO)

FIGURA 3.1:Euclides: 1- d) 1ª Versão (SUBESPAÇO)

FIGURA 3.2: Euclides: 1- d) 2ª Versão (SUBESPAÇO)

FIGURA 3.3: Simba: 1- d) 1ª Versão (SUBESPAÇO)

FIGURA 3.4:Simba: 1 - d) 2ª Versão (SUBESPAÇO)

FIGURA 3.5: Euclides: 2) (SUBESPAÇO)

FIGURA 3.6: Simba: 2) (SUBESPAÇO)

FIGURA 3.7: Euclides: 2) (COMBINAÇÃO LINEAR)

FIGURA 3.8: Simba: 2) (COMBINAÇÃO LINEAR)

FIGURA 3.9: Euclides: 1- a) (CONJUNTO GERADOR)

FIGURA 3.10: Simba: 1 - a) (CONJUNTO GERADOR)

FIGURA 4.1: Estas imagens foram tiradas do quadro com a demonstração do Teorema 2 feita por Simba.

FIGURA 5.1: Euclides: 1) (L.I. e L.D.)

FIGURA 5.2: Simba: 1) (L.I. e L.D.)

FIGURA 5.3: Euclides: 3 - b) (L.I. e L.D.)

FIGURA 5.4: Simba: 3 – b) (L.I. e L.D.)

FIGURA 5.5: Exemplo numérico do Teorema 3 feito pelos pesquisadores no quadro.

FIGURA 5.6: Exemplo numérico do Teorema 4 feito pelos pesquisadores no quadro.

FIGURA 6.1: Euclides: 1) (DIMENSÃO)

FIGURA 6.2: Simba: 1) (DIMENSÃO)

FIGURA 6.3: Euclides: 2) (DIMENSÃO)

FIGURA 6.4: Simba: 2) (DIMENSÃO)

Introdução

A presente pesquisa busca compreender que características deve possuir um Curso de Serviço[1] de Álgebra Linear destinado à formação do futuro professor de Matemática. Portanto, estávamos interessados em analisar como deveria ser configurado este curso de forma que possibilitasse o licenciando em Matemática a uma constante reflexão sobre os elementos envolvidos com a sala de aula de Matemática sendo eles matemáticos ou não.

É importante lembrar que estamos cientes de que não é possível delimitar com precisão as características deste curso, pois foi estruturado na perspectiva da Educação Matemática e, portanto, se preocupará mais com as reflexões advindas da construção dessas características do que com a criação de uma receita que se aplique indistintamente. Além disso, o que estamos propondo é uma visão, a nossa – e de nossos orientadores – de como enxergamos as potencialidades de uma disciplina com essa natureza.

A motivação para essa pesquisa foi em grande parte construída ao longo de nossa graduação em Matemática, na modalidade de Licenciatura, numa universidade pública brasileira. Ao longo de nossa trajetória acadêmica, participávamos com frequência de discussões – com colegas e professores – que giravam em torno das seguintes questões: *a Matemática estudada pelos futuros professores de Matemática deveria ser igualmente estudada por alunos de outros cursos de graduação?; como as disciplinas de conteúdo matemático deveriam ser ministradas de modo que contemplassem a prática do futuro professor de Matemática?; o futuro professor de Matemática deve estudar somente aquilo que vai ensinar?*

Além disso, parte importante desta fase de reflexão foi o período em que iniciamos nossa participação do Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora / NIDEEM -

[1] Trataremos o termo “curso” considerando-o tanto como Curso, tais como Matemática, Física, Engenharia; quanto como disciplina, tais como Geometria, Cálculo, Análise.

UFJF[2] e, paralelamente, éramos monitora da disciplina de Álgebra Linear na mesma instituição de ensino.

Ressaltamos que esta experiência de monitoria foi determinante para que a pesquisa tivesse o olhar voltado para a Álgebra Linear, pois enquanto acompanhávamos os alunos que faziam este curso, muitas vezes alunos de Licenciatura em Matemática, tínhamos a oportunidade de dialogar com eles e perceber sua insatisfação com o modo o qual as aulas desta disciplina eram conduzidas e a maneira com que o professor expunha o conteúdo. Sua maior queixa era que eles não tinham motivação para compreender os conceitos de Álgebra Linear por não conseguirem enxergar como este curso contribuiria para sua formação profissional.

Os encontros no NIDEEM-UFJF constituíram momentos nos quais pudemos discutir com outros profissionais sobre nossas inquietações e fundamentar com a ajuda do referencial teórico lá discutido – o Modelo dos Campos Semânticos (MCS)[3] – as bases para essa pesquisa. Acreditamos que o MCS é parte fundamental para este estudo, pois nos proporcionou uma leitura atenta e refinada da sala de aula de Matemática, nos ajudou a compreender a dinâmica dos processos de ensino e aprendizagem e, sem dúvida, nos auxiliou na caracterização – sem rótulos – de uma postura a qual julgamos adequada para o professor de Matemática.

Paralelo a isso, buscamos leituras que confirmassem e/ou esclarecessem alguns de nossos questionamentos e ingressamos no Mestrado Profissional em Educação Matemática para investigar nossas inquietações e aprofundar nosso estudo.

À medida que refinamos nosso olhar com relação às pesquisas que se dedicavam a analisar a formação matemática do professor percebemos que a sociedade tem exigido destes profissionais da Educação a formação de alunos como indivíduos críticos e capazes de promover continuamente sua própria aprendizagem.

[2] O NIDEEM é formado por professores/pesquisadores, professores em exercício e discentes de licenciatura que se dedicam a pesquisar em Educação Matemática. A coordenação do grupo é de responsabilidade do Professor Dr. Amarildo Melchiades da Silva.

[3] O Modelo dos Campos Semânticos será discutido ao longo de todo trabalho, em especial no capítulo 2.

Para alcançar essa demanda imposta pela sociedade, diversos estudos, em especial o de Fiorentini (2008), apontam que

> se queremos formar professores capazes de produzir e avançar os conhecimentos curriculares e de transformar a prática/cultura escolar, então é preciso que adquiram uma formação inicial que lhes proporcione uma sólida base teórico-científica relativa ao seu campo de atuação e que a mesma seja desenvolvida apoiada na reflexão e na investigação sobre a prática. (FIORENTINI, 2008, p. 49).

Direcionando nosso foco à formação matemática dos licenciandos, vemos que a disciplina Álgebra Linear está presente na maioria das Licenciaturas em Matemática e as pesquisas que tem se dedicado a estudá-la da perspectiva da Educação Matemática não têm apresentado bons resultados, como descreve Dorier (2002):

> [...] o ensino da álgebra linear é universalmente reconhecido como difícil. Os estudantes geralmente sentem-se pousando em outro planeta, eles estão sobrecarregados pelo número de novas definições e a falta de conexão com o conhecimento anterior. Em contrapartida, os professores muitas vezes sentem-se frustrados e desarmados, quando confrontados com a incapacidade de seus alunos para lidar com as idéias que consideram ser simples. Normalmente, eles culpam a falta de prática em lógica básica e teoria dos conjuntos ou a impossibilidade de os alunos em usar a intuição geométrica. (DORIER, 2002, p. 875, 876, tradução nossa).

Segundo Silva (2011), existem as seguintes alternativas a serem empregadas às disciplinas de conteúdo matemático que compõem a grade das Licenciaturas em Matemática: utilizar metodologias alternativas – ou mesmo as já existentes – para proporcionar aos licenciandos em Matemática experiências diversificadas em sala de aula e ministrar

> disciplinas de formação matemática da licenciatura como disciplinas de Educação Matemática, que teriam como característica levar o discente a olhar para os conteúdos matemáticos enquanto elementos que são parte e não o objetivo único da formação do professor, e buscar nesses conteúdos “portas” para que os futuros professores desenvolvam certas noções fundamentais e importantes à sua formação matemática. (LINS apud SILVA, 2011, p.6).

A análise destes e de outros trabalhos nos ajudaram a configurar nossa pesquisa e para que possamos alcançar nossos objetivos estruturamos nosso estudo em seis capítulos nos quais mostraremos o desenvolvimento do mesmo.

Além da dissertação estruturamos um Produto Educacional que tem por objetivo complementar nossa pesquisa. Este será apresentado em forma de material didático voltado ao estudo dos Espaços Vetoriais, direcionado a educadores universitários que se propõem a ministrar aulas de Álgebra Linear a alunos de licenciatura em Matemática.

Capítulo 1

A proposição do Problema de Pesquisa

Muitas foram as questões que permearam nossa trajetória acadêmica e, em sua maioria, eram relativas à nossa constituição como docente em Matemática. E, a maior dúvida era: será que o que estudo na universidade é suficiente para que eu tenha condições de proporcionar um ensino de qualidade e mediar o processo de aprendizagem de meus futuros alunos?

E quando nos referimos a estudo estamos contemplando tanto as disciplinas de conteúdo matemático – Análise, Cálculo, Álgebra Linear, Geometria Analítica, entre outras – quanto as disciplinas oferecidas pela faculdade de Educação – Processos de Ensino e Aprendizagem, Psicologia da Educação e Seminário de Gestão Escolar, por exemplo.

Para analisar esta questão e as situações decorrentes dela, buscaremos neste capítulo apresentar algumas considerações de Educadores Matemáticos acerca desta temática e as questões de investigação que nortearão esta pesquisa.

Em termos de formação docente, existem dois modelos principais: o chamado modelo "3+1" ou *Racionalidade Técnica* e a *Racionalidade Prática*[4]. O primeiro deles é utilizado desde a década de 1930 e foi criado nas antigas escolas de Filosofia. Segundo ele, acredita-se que para ser bom professor basta o domínio da área do conhecimento específico, e a denominação "3 + 1" vem do fato de os alunos cursarem nos primeiros anos exclusivamente disciplinas de conteúdo matemático e, somente no último ano, as de cunho didático-pedagógico.

Em contrapartida, o modelo de Racionalidade Prática considera o professor como um profissional autônomo, que reflete e toma decisões conscientes em sua prática escolar. Nele, portanto, os blocos de formação não se apresentam mais separados e acoplados, mas concomitantes e articulados (Cf: PEREIRA, 1999). E, diferentemente do modelo anterior, em um mesmo

---

[4] Cf: PEREIRA, 1999.

semestre letivo, o licenciando pode cursar tanto disciplinas específicas, quanto didático-pedagógicas.

Segundo Fiorentini, especialista na área de formação de professores, as novas diretrizes curriculares têm apontado uma ruptura com o modelo de racionalidade técnica e devemos acrescentar que novas políticas estão sendo realizadas no cenário educacional brasileiro como consequência disto. Um exemplo seria o parecer do Ministério da Educação, publicado em 2002, que aponta o seguinte perfil para os licenciados em Matemática:

> · visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos
>
> · visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania
>
> · visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.[...] (BRASIL, 2001).

Percebemos que este perfil demonstra um novo olhar acerca da atuação do professor e, quanto as competências e habilidades próprias do educador matemático, este documento ainda resalta que:

> o licenciado em Matemática deverá ter as capacidades de:
>
> a) elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica;
>
> b) analisar, selecionar e produzir materiais didáticos;
>
> c) analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica;
>
> d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;
>
> e) perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente;
>
> f) contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica. (BRASIL, 2001).

Mas queremos chamar atenção ao fato de que mesmo tendo-se a oportunidade de cursar, como já citamos, disciplinas dos dois principais grupos de formação em um mesmo semestre, estas disciplinas continuam sendo ministradas sob óticas particulares do grupo ao qual pertencem. Ou seja, as de conteúdo matemático são dadas apenas com o enfoque da matemática do matemático[5] e as didático-pedagógicas, somente a partir da visão didático-pedagógica.

Acreditamos, portanto, que oferecer apenas esse contato com as disciplinas dos dois grupos de forma “concomitante” não é suficiente para que o licenciando tenha uma postura mais consciente e adequada em sua futura sala de aula e, por isso, sentimos a necessidade de se disponibilizar disciplinas de conteúdo matemático que possuam elementos que contribuam "intencionalmente" na futura prática profissional desses alunos. Dizemos intencionalmente, por acreditar que o professor, formador de professores, mesmo que de forma não intencional, acaba por influenciar na prática de seus alunos.

Um levantamento feito pelo Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores de Matemática da Faculdade de Educação da Unicamp (GEPFPM da FE/Unicamp) analisou as pesquisas brasileiras realizadas até 2002 sobre a formação de professores e apontou alguns problemas encontrados nos programas de licenciatura em Matemática. Entre eles:

> desarticulação entre teoria e prática, entre formação específica e pedagógica e entre formação e realidade escolar; menor prestígio da licenciatura em relação ao bacharelado; ausência de estudos histórico-filosóficos e epistemológicos do saber matemático; predominância de uma abordagem técnico-formal das disciplinas específicas; falta de formação teórico-prática em Educação Matemática dos formadores de professores (FIORENTINI apud FIORENTINI, 2008, p. 50).

Nossa intenção em analisar uma disciplina de conteúdo específico – Álgebra Linear / Espaços Vetoriais – nesta pesquisa surgiu como consequência de nossa trajetória acadêmica citada no capítulo de Introdução e por nos sentirmos incomodados com questões relativas à formação docente e, ainda, por obtermos, a partir de leituras, como a citada abaixo a compreensão de que

> No caso particular da licenciatura em Matemática, a partir dos anos 1990 desenvolvem-se vários trabalhos sobre esses cursos, inclusive dissertações e teses. Entretanto, raramente são focalizadas de forma específica as relações entre os conhecimentos matemáticos veiculados no processo de

[5] Conforme a visão de Lins (2004a).

> formação e os conhecimentos matemáticos associados à prática docente escolar. (MOREIRA & DAVID, 2005, p.14).

Por esse motivo, realizamos uma pesquisa de campo[6] que se constituiu em um curso de Álgebra Linear, na modalidade de seminário, num período de aproximadamente dois meses em parceria com o professor/pesquisador Almeida (2013)[7]. Este seminário contou com a participação de dois sujeitos de pesquisa com pretensões em se tornar professores de Matemática.

Após tecidas nossas considerações a respeito da formação docente, apoiada por especialistas, gostaríamos de analisar e discutir nesta pesquisa de mestrado as seguintes questões:

i) Quais são as características que um curso de Álgebra Linear deve possuir para que contribua na prática docente de professores de Matemática, ou seja, que traga consigo a concepção de Curso de Serviço?

ii) Como podemos elaborar um Curso de Serviço de Álgebra Linear, focado no estudo dos Espaços Vetoriais, para a Licenciatura em Matemática?

Com relação à segunda questão, queremos dizer que para que o projeto seja exequível não desenvolveremos todo o curso, optando por fazer apenas o tema Espaços Vetoriais – dentro do contexto da disciplina Álgebra Linear – e, mesmo dentro desta teoria, optamos pelos conceitos mais relevantes ao nosso estudo.

Para responder esses questionamentos, estaremos conscientes de que alguns fatores devem ser levados em conta. A saber:

- Esta é uma pesquisa de cunho qualitativo e, portanto, não tivemos a pretensão – e nem acreditamos ser possível – de listar todas as características de um Curso de Serviço, nem de oferecer uma receita de como ministrá-lo.

- Este estudo teve caráter local; logo, estávamos mais interessados em proporcionar reflexões que contribuam na formação matemática do professor de matemática a partir de nossas conclusões, sem a pretensão de que estas possam ser generalizadas indiscriminadamente.

---

[6] Nossa pesquisa de campo será detalhada a partir do Capítulo 4.
[7] Este pesquisador realizou um estudo das Transformações Lineares.

- A disciplina Álgebra Linear é obrigatória nas Licenciaturas em Matemática de acordo com as diretrizes, então questionar a sua existência e relevância na mesma não faz sentido.

Em nossa pesquisa, portanto, buscamos desenvolver uma reflexão, direcionada tanto aos docentes “formadores de professores”, que ministram disciplinas a alunos de licenciatura em Matemática, quanto a professores de Matemática que estão, ou estarão, em salas de aula de Matemática, nos diversos níveis de ensino.

Nosso estudo teve o caráter de apontar uma direção no sentido de que as disciplinas de conteúdo matemático possam vir a oferecer contribuições na formação dos professores de Matemática com o intuito de ampliar sua visão da sala de aula de Matemática. Além disso, estamos atentos ao fato de que, em uma mesma sala de aula, teremos licenciandos que enxergam a atividade docente de maneiras diversas e, por isso, nossa opção por uma abordagem reflexiva e distante de rotulações.

Capítulo 2

O Referencial Teórico

Ao descrevermos nossas questões de investigação no capítulo anterior explicitamos nossa necessidade de realizar um estudo no qual compreendêssemos a importância de uma Licenciatura em Matemática na qual as disciplinas de conteúdo matemático oferecessem reflexões sobre a prática de sala de aula.

Para alcançarmos o objetivo proposto, acreditamos que o referencial teórico adotado por nós foi de fundamental importância para este estudo, pois nos deu embasamento para estruturar, coletar dados, intervir, analisar, refletir, argumentar e apresentar considerações para ajudar na conclusão de nossa investigação. Entendemos, em concordância com Lins (2001), que o Modelo dos Campos Semânticos constitui

> [...] uma simples, ainda que poderosa ferramenta para pesquisa e desenvolvimento na educação matemática [...] para guiar práticas de sala de aula e para habilitar professores a produzir uma leitura suficientemente fina, assim útil, do processo de produção de significados em sala de aula. (LINS, 2001, p. 59, tradução nossa).

Neste capítulo, faremos uma descrição deste referencial teórico epistemológico, o Modelo dos Campos Semânticos, proposto por Lins (1993, 1999), visto em Lins e Gimenez (1997), Silva (2003) e influenciado pelas ideias de Vygotsky (1991, 1993), Leontiev (2001) e Goodman (1984).

Além disso, apresentaremos algumas das contribuições da teoria sócio-histórica[8] do psicólogo russo Lev Semyonovitch Vygotsky (1896 – 1934), relacionadas com o MCS e, em especial, que se aplicam a esta pesquisa.

Apoiados por Vygotsky, acreditamos que

> Toda pesquisa tem por objetivo explorar alguma esfera da realidade. Um objetivo da análise psicológica do desenvolvimento é descrever as relações internas dos processos intelectuais despertados pelo aprendizado escolar. Quanto a isso, tal análise deve ser dirigida para dentro e é análoga ao uso de raios-X. Se bem-sucedida, deve revelar ao

[8] Esta é a denominação mais utilizada para caracterizar esta corrente psicológica que explica o desenvolvimento da mente humana com base nos princípios do materialismo dialético cujo fundador é Lev Semyonovitch Vygotsky. (Cf: LIBÂNEO e FREITAS, 2006, p.1).

> professor como os processos de desenvolvimento estimulados pelo aprendizado escolar são "embutidos na cabeça" de cada criança. A revelação dessa rede interna e subterrânea de desenvolvimento de escolares é uma tarefa de importância primordial para a análise psicológica e educacional. (VYGOTSKY, 1991, p.102).

2.1. O Modelo dos Campos Semânticos

O Modelo dos Campos Semânticos (MCS) foi construído a partir da pesquisa de doutorado do professor Romulo Campos Lins[9] denominada “A Framework for understanding what algebraic thinking is”[10] e desenvolvida no Shell Centre for Mathematical Education, em Nottingham na Inglaterra. Segundo Silva (1997) o modelo “não aparece explicitamente no corpo da tese de Lins, mas não só o germe da idéia se encontra lá como a coerência global do trabalho de pesquisa é garantida exatamente pelas premissas do modelo.” (SILVA, 1997, p.10).

A pesquisa de doutorado de Lins foi realizada no período de janeiro de 1988 a junho de 1992 e tinha como objetivo desenvolver um modo de caracterizar álgebra e pensamento algébrico.

> Ao término do doutorado, Lins passou a se dedicar à elaboração da teoria. Preocupou-se, em particular, com a coerência interna das noções que havia formulado, o que o levou a algumas reformulações [...] (SILVA, 2003, p.21).

A partir de seus estudos, Lins sentiu a necessidade de responder a algumas perguntas durante o processo de investigação. Entre elas: *O que é conhecimento?* e *O que é significado?*. Para respondê-las, em especial a primeira, o autor partiu de uma definição para Epistemologia.

Segundo Lins (1993)

> Epistemologia é a atividade humana que estuda as seguintes questões: (i) o que é conhecimento?; (ii) como é que o conhecimento é produzido?; e, (iii) como é que conhecemos o que conhecemos? (LINS, 1993, p.77).

Para este autor “respostas a estas perguntas caracterizam *posições epistemológicas*, e todo trabalho de pesquisa que envolva questões relativas à

---

[9] Atualmente é Livre Docente da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP de Rio Claro, São Paulo).

[10] Um quadro de referência para se compreender o que é pensamento algébrico (tradução nossa).

aprendizagem está inevitavelmente ligado às respostas que um pesquisador dá a elas.” (LINS, 1993, p.77, grifos do autor).

Para melhor compreensão do Modelo dos Campos Semânticos, Silva (2003) destaca três concepções imprescindíveis:

> i) O interesse em olhar para processos, em oposição a olhar para estados ou produtos;
>
> ii) O interesse por uma leitura positiva[11] do processo de produção de significados para a matemática, isto é, o interesse em entender o que as pessoas dizem e por que dizem, em oposição a olhá-las pelo erro, pela falta;
>
> iii) A busca de uma explicação plausível para o processo de produção de significados para a matemática. (SILVA, 2003, p.22, grifos nossos).

Durante sua pesquisa, Lins (1992) – como já citamos – procurou responder a alguns *questionamentos epistemológicos*, e surgiu daí uma das noções centrais do MCS[12], a noção de conhecimento, segundo a qual

> Conhecimento é entendido como uma **crença** – algo que o sujeito acredita e expressa, e que caracteriza-se, portanto, como uma **afirmação** – junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para sua **crença-afirmação**. (LINS, 1993, p.86, grifos do autor).

A justificação tem o papel de tornar a crença-afirmação legítima para quem a enuncia, pois, justificações distintas representam e determinam conhecimentos distintos. Ou seja, além de legitimar, a justificação tem o papel de caracterizar e diferenciar um conhecimento de outro.

Associado à noção de justificação, percebemos que

> A consciência individual e os aspectos subjetivos que constituem cada pessoa são, para Vygotsky, elementos essenciais no desenvolvimento da psicologia humana, dos processos psicológicos superiores[13]. A constante recriação da cultura por parte de cada um dos seus membros é a base do

---

[11] Ao fazer este tipo de leitura nos mostramos dispostos a compartilhar interlocutores com nossos alunos e, assim, poder intervir de maneira adequada no processo de aprendizagem, acrescentando novos elementos ao núcleo em que o aluno está operando e/ou possibilitar uma passagem suave de um campo semântico a outro mais adequado numa dada atividade (no sentido proposto por Leontiev). Daqui em diante utilizaremos o termo leitura plausível.

[12] Silva destaca duas consequências da tese de Lins: o nascimento de uma teoria e a contribuição desta pesquisa no campo da educação algébrica em Educação Matemática (Cf: SILVA, 2003, p.22).

[13] Processos Psicológicos superiores são processos sociais e surgem a partir do movimento de objetivação e exteriorização. São eles: a memória lógica, a atenção voluntária, o pensamento verbal, a linguagem intelectual, o domínio de conceitos, o planejamento, entre outros. (BESERRA et al, 2009).

> processo histórico[14], sempre em transformação, das sociedades humanas. (OLIVEIRA, 1995, p. 63).

Além disso,

> o desenvolvimento individual se dá num ambiente social determinado e a relação com o outro, nas diversas esferas e níveis da atividade humana, é essencial para o processo de construção do ser psicológico individual. (OLIVEIRA, 1995, p. 60).

Apoiados por Lins, acreditamos que a Educação Matemática que praticamos deva ser intencional. Quando dizemos isso estamos interessados em propiciar – enquanto professores – um ambiente de interação constante com nossos alunos, para que possamos ler sua produção de significados, de forma plausível, procurando compreender o porquê de eles apresentarem esta ou aquela resposta para um problema proposto, por exemplo, e, se necessário intervir no processo de aprendizagem.

A partir disso, acreditamos que o professor deva assumir a postura de estabelecer um diálogo com os alunos e de procurar ampliar sua produção de significados.

Podemos dizer, portanto, apoiados pelas das ideias de Vygotsky, que "a intervenção é um processo pedagógico privilegiado. O professor tem o papel explícito de interferir na zona de desenvolvimento proximal[15] dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente". É importante destacar, aqui, o risco de uma interpretação distorcida da posição de Vygotsky que poderia dar a entender, por exemplo, que ele indica "uma postura diretiva, intervencionista, uma volta à 'educação tradicional'" (OLIVEIRA, 1995, p.62), pois, segundo Oliveira (1995)

> Embora Vygotsky enfatize o papel da intervenção no desenvolvimento, seu objetivo é trabalhar com a importância do meio cultural e das relações entre indivíduos na definição de

---

[14] Estudar algo historicamente significa estudá-lo no processo de mudança: esse é o requisito básico do método dialético (VYGOTSKY apud SILVA, 2003). Este método também é conhecido como dialético materialista de Marx, que analisa o movimento dos contrários, em que para cada tese, há uma negação (antítese), que gera uma síntese (Cf: NEVES & DAMIANI, 2006, p.7).

[15] Segundo Vygotsky (1991), Zona de desenvolvimento proximal é "a distância entre o nível de desenvolvimento real[15], que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial[15], determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes." (VYGOTSKY, p. 97, 1991).

> um percurso de desenvolvimento da pessoa humana, e não propor uma pedagogia diretiva, autoritária. [...] Vygotsky trabalha explícita e constantemente com a idéia de reconstrução, de reelaboração, por parte do indivíduo, dos significados que lhe são transmitidos pelo grupo cultural. (OLIVEIRA, 1995, p.63).

Acreditamos, portanto, que, a partir do momento em que o aluno produz significados, ele os torna legítimos para si e, portanto, produz conhecimento. Segundo Silva (2003), "produzir conhecimento é produzir justificações no processo de enunciação das crenças-afirmações" (SILVA, 2003, p. 19).

Além disso, ressaltamos que antes de intervir o professor deve buscar compreender em que direção o aluno está falando e conhecer seu nível de desenvolvimento[16].

> Essa possibilidade de alteração no desempenho de uma pessoa pela interferência de outra é fundamental na teoria de Vygotsky. Em primeiro lugar porque representa, de fato, um momento do desenvolvimento: não é qualquer indivíduo que pode, a partir da ajuda de outro, realizar qualquer tarefa. [...] Em segundo lugar essa idéia é fundamental na teoria de Vygotsky porque ele atribui importância extrema à interação social no processo de construção das funções psicológicas humanas. (OLIVEIRA, 1995, p.59, 60).

A esse respeito, Vygotsky acrescenta que

> Numa atividade coletiva ou sob a orientação de adultos, usando a imitação, as crianças são capazes de fazer muito mais coisas. Esse fato, que parece ter pouco significado em si mesmo, é de fundamental importância na medida em que demanda uma alteração radical de toda a doutrina que trata da relação entre aprendizado e desenvolvimento em crianças. (VYGOTSKY, 1991, p.99).

Mas, frente a esta situação, poderíamos pensar: Como se posicionar diante da fala do aluno? Lins (2008) propõe algumas possibilidades:

> Uma, que o que o aluno diga pareça bem ao professor, e que este decida que não há mais nada a fazer com relação a esse episódio. Mas o professor pode, também, achar que *parece* que a resposta está bem, mas que *mesmo assim* lhe interessa saber *como* o aluno pensou para dizer o que disse, porque aquilo que lhe interessa é conhecer os objetos com que aquele aluno estava pensando, que significados produziu para eles. (LINS, 2008, p. 543, grifos do autor).

[16] A mediação realizada pelo professor entre o aluno e a cultura apresenta especificidades, ou seja, a educação formal é qualitativamente diferente por ter como finalidade específica propiciar a apropriação de instrumentos culturais básicos que permitam elaboração de entendimento da realidade social e promoção do desenvolvimento individual. Assim, a atividade pedagógica do professor é um conjunto de ações intencionais, conscientes, dirigidas para um fim específico. (BASSO, p. 25, 1998).

Acreditamos, em consonância com as ideias de Lins, que "a mais intensa oportunidade de aprendizagem acontece no momento em que professor e aluno(s) compreendem que as *legitimidades* de cada um, naquele momento, são diferentes." (LINS, 2008, p.547, grifo do autor).

Neste ponto, ressaltamos a importância de criar no futuro professor a sensibilidade de ler sua sala de aula e perceber que seus alunos podem produzir significados muito distintos dos seus, pois, do mesmo modo que ele vivencia situações de estranhamento quando se depara – ou se deparou – com a Matemática Acadêmica, do Matemático, enquanto aluno de Graduação, seus alunos vivenciam – ou vivenciarão – situações muito similares quando em contato com a matemática correspondente ao seu nível de ensino. Segundo Oliveira (2012),

> esse processo de estranhamento pode ser indicado ao imaginarmos uma situação em que existe, de um lado, 'aquele para quem uma coisa é natural – ainda que estranha – e de outro aquele para quem aquilo não pode ser dito.' (OLIVEIRA, 2012, p.200).

Analisando outro aspecto da formação inicial do professor de matemática, destacamos uma situação recorrente em sala de aula. Esta situação foi descrita e analisada por Silva (2003), e o autor a caracterizou de processo de impermeabilização. Segundo ele,

> Chamaremos de impermeabilização ao processo que leva os alunos a não compartilharem novos interlocutores em situação de interação face a face, diferente daqueles para o qual eles estavam voltados; de não se propor a produzir significados numa outra direção. (SILVA, 2012, p.79).

Silva (2003) destaca que há várias maneiras que podem levar à impermeabilização no processo de produção de significados

> ou por acreditar na legitimidade do que diz, por entender que não há por que dizer de outra forma; ou por não poder produzir significados em outras direções – por estar, naquele momento, frente a um limite epistemológico –, ou ainda, por entender que não seja legítimo falar naquela direção. (SILVA, 2003, p. 142).

Apoiados por este autor, ressaltamos

> a importância da identificação e do entendimento deste processo está na possibilidade do professor perceber que isto está acontecendo com seus alunos e auxiliá-los em suas dificuldades de aprendizagem, caracterizadas pelo Modelo dos

> Campos Semânticos como um obstáculo ou limite epistemológico[17]. (SILVA, 2012, p.79).

Percebemos, portanto, que deve haver um deslocamento do foco do professor para a fala do aluno, surgindo assim, a necessidade de estabelecer um novo modo de ler a produção de significados de nossos estudantes. Este deslocamento é definido por Oliveira como o processo de *descentramento*. Processo este que "passa pelo esforço de tornar-se sensível ao estranhamento do outro, de entender do que o outro fala, almejando que modos de produção de significados sejam compartilhados, que se crie um espaço comunicativo." (OLIVEIRA, 2012, p.207).

Os licenciandos devem ter consciência de que situações de estranhamento, de impermeabilização, ou apenas o surgimento de modos distintos de produção de significados acontecem a todo o momento na sala de aula. Além disso, acreditamos que as propostas que proporcionam a vivência do estranhamento e sua problematização, criam "oportunidades para que o professor/futuro professor se dê conta de que seus alunos também experimentem o estranhamento e, a partir daí, ele se coloque num exercício de descentramento." (OLIVEIRA, 2012, p.212).

Em nossa pesquisa o MCS terá papel fundamental em todas as suas etapas, e, principalmente, nos permitirá realizar uma leitura plausível das falas de nossos sujeitos de pesquisa em nossa pesquisa de campo.

O Modelo dos Campos Semânticos constitui, para nós, uma ferramenta necessária para embasar esta pesquisa, pois oferece

> elementos para que se produza um melhor entendimento das interações e, é evidente, na sala de aula em particular, permita interações que eventualmente levem ao compartilhamento de algo, seja o de uma *diferença* (e aí decidimos o que fazer a esse respeito) ou o compartilhamento de modos de produção de significados, de objetos e de significados (bem mais reconfortante para todos). (LINS, 2008, p.543, grifos do autor).

2.2. Processo Comunicativo

Dentre as noções que constituem a teoria do Modelo dos Campos Semânticos (MCS), uma delas tem grande relevância: a concepção de

[17] Estas duas noções serão discutidas na próxima seção.

processo comunicativo, proposta por Lins no bojo da construção do próprio MCS.

Devemos ressaltar que esta não é só uma forma de ver e conceber o ato de se comunicar, mas é um modo de se portar diante de situações de interação: orais, escritas, gestuais, etc. Lembramos ainda, que algumas noções do MCS que estão entrelaçadas na concepção de processo comunicativo serão descritas no próximo capítulo, no qual serão melhor discutidas.

Com o intuito de dinamizar nossa descrição deste processo partiremos de uma situação ficcional para retratar na "prática de sala de aula" qual é a abordagem dada pelo MCS para as noções constituintes do mesmo.

Neste ponto, podemos dizer que as principais noções envolvidas no processo de comunicação são *autor*, *leitor e texto*. Além disso, à medida que formos descrevendo o exemplo citado iremos definindo-as.

Imaginemos uma sala de aula de Álgebra Linear na qual o professor propõe a seus alunos a seguinte questão:

A partir do subespaço vetorial de IR^3, $W = \{(x,y,z) \in IR^3,\ x = y\}$[18], *responda:*

Como podemos descrever os elementos deste conjunto?

O professor que enunciou esta questão será o autor, e diremos, apoiados por Lins (1999), que

> Quando o autor fala, ele sempre fala para alguém, mas por mais que o autor esteja diante de uma platéia este alguém não corresponde a indivíduos nesta platéia, e sim a um leitor que o autor constitui: e é para este "um leitor" que "o autor" fala. (LINS, 1999, p.81).

Ao enunciar a questão, o professor está falando numa direção que ele constitui, dirigida *para alguém* denominado *interlocutor*. Segundo Lins (2012), este é "uma direção na qual se fala. Quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação que me autoriza a dizer o que estou dizendo." (LINS, 2012, p.19).

[18] Estaremos considerando IR^3 e W, como espaço e subespaço sobre o corpo dos reais munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar.

Devemos ressaltar que interlocutor é um ser cognitivo e não biológico – constituído pelo professor, neste exemplo – e que

> não deve ser entendido como 'aquele com quem se conversa' ou 'aquele que participa (conosco) de um diálogo' (no sentido comum). Para o MCS, 'dialogar com o interlocutor' é tão impróprio (e impossível) quanto 'dialogar com o texto' [...] (LINS, 2012, p.30).

Podemos representar este primeiro momento por meio do seguinte diagrama:

O AUTOR ⟶ $\boxed{\text{PROBLEMA ou TAREFA}}$ - - - - - - -▸ UM LEITOR

(Professor) | (Resíduo de Enunciação para o qual o professor produziu significado) | (Interlocutor constituído" pelo professor)

Devemos ressaltar que a tarefa tal como a representamos – em forma de palavras escritas – ou oralmente apresentada pelo professor, constitui-se para os alunos como um *resíduo de enunciação*[19] da fala do mesmo, ou seja, os alunos podem internalizar apenas alguns elementos desta fala. Por isso, representamos de forma pontilhada a linha que liga "texto" a "um leitor".

Se analisarmos agora o lado do aluno que dialoga com este professor, podemos dizer que ele pode produzir, ou não, significados[20] para os resíduos de enunciação. No momento em que ele se sente autorizado a produzir ações enunciativas a partir dos resíduos de enunciação estes passam a constituir-se em *texto* para ele. Logo, o leitor – cada aluno – pode definir como texto apenas os resíduos de enunciação para os quais produz significado.

Passaremos agora à análise das falas de alguns alunos presentes nesta situação ficcional.

<u>Anderson</u>: "Professor, eu acho que os elementos deste conjunto são vetores de três coordenadas, pois W é um subespaço do IR^3 e este possui três coordenadas."

---

[19] Algo com que me deparo e que acredito ter sido dito por alguém. Um resíduo de enunciação não é nem menos, nem mais importante que uma enunciação: ele é *de outra ordem*. (LINS, 2012, p.27, grifos do autor).

[20] O Processo de Produção de Significados será descrito no Capítulo 3.

<u>Júlia</u>: “Quando eu olho para este conjunto a primeira coisa que vejo é a reta x = y bissetriz dos quadrantes ímpares, só que em forma de plano do IR^3, com três dimensões.”

<u>Pedro</u>: “Eu penso que os elementos são ternas ordenadas cujas coordenadas são números reais nos quais as duas primeiras devem ser iguais.”

<u>Alice</u>: “Professor, eu não sei te responder.”

A partir de suas falas descreveremos que elementos constituem o núcleo em que operam cada um dos alunos na atividade[21] de produzir significado para a tarefa apresentada.

Para Anderson, o fato mais relevante é que os elementos têm três coordenadas, pois parece que ele constitui em sua fala um núcleo com os seguintes elementos: “vetores”, “número de coordenadas”, “subespaço” e “IR^3”. Percebemos também que ele, ou não considera, ou pouco releva o fato de que o subespaço W possui uma restrição/definição[22] diferente de IR^3, o fato de x ser igual a y.

Júlia inicia sua fala citando que “visualiza” o conjunto e, partindo daí vemos que é notável o apelo geométrico. Esta situação é corroborada pela constituição de um núcleo com elementos geométricos, pois percebemos em sua fala as palavras: “reta”, “bissetriz”, “quadrantes”, “plano” e “três dimensões”. Além disso, ela leva em consideração a restrição/definição de W, mas direciona sua fala apenas para o aspecto geométrico, em detrimento do aspecto algébrico, lembrando que não estamos priorizando o último deles, apenas citando.

O terceiro aluno, Pedro, produz significados algébricos para caracterizar os elementos de W. Percebemos que ele leva em conta o número de coordenadas dos elementos, sua natureza (números Reais) e a restrição/definição do conjunto, pois em sua fala há expressões como: “ternas ordenadas”, “números reais” e “as duas primeiras devem ser iguais”.

---

[21] Atividade segundo Leontiev.

[22] Chamaremos aqui de Restrição/Definição do Espaço (ou Subespaço) Vetorial a condição a qual os elementos do mesmo devem satisfazer.

Pela fala de Alice, percebemos que ela aparentemente[23] não produz significado para os elementos presentes no enunciado da tarefa. Neste caso, ressaltamos que Alice pode estar frente a um *obstáculo epistemológico* ou frente a um *limite epistemológico*.

Para diferenciar estes dois conceitos, devemos compreender que diante de um *obstáculo epistemológico*, podem ocorrer duas situações: ou o aluno não produz significados numa determinada atividade ou produz significados em uma direção distinta da do professor, mas que num segundo momento, após interagir com alguém – seja o professor ou a leitura de um livro, por exemplo – ou mesmo sozinho, poderá *transpor* este *obstáculo* e produzir significado em *alguma* direção, mudando seu modo de operar.

Em contrapartida, frente a um limite epistemológico, ou o aluno não consegue mudar sua maneira de operar (e, portanto, nem mesmo realizando interações, altera sua produção de significados) ou ele continua sem produzir algum significado.

É relevante dizer que estamos considerando que o aluno deve ser acompanhado por um período razoável de tempo durante o processo de aprendizagem para que se caracterize uma situação de *limite epistemológico* e, ainda, que esta situação possa ser caracterizada apenas considerando-se este intervalo de tempo. Ou seja, não podemos garantir que este aluno jamais produzirá algum significado para o texto em questão, ou que mudará seu modo de operar, pois analisamos sua produção de significados no interior de uma atividade preestabelecida como unidade de análise, portanto, em outra situação, outro processo será desencadeado e não cabe ao professor/pesquisador antecipá-lo.

É importante lembrarmos que o professor/pesquisador que se embasa na teoria do MCS, ao vivenciar situações como esta, busca compreender que elas constituem processos e que "sendo um processo, ao ser colocado em marcha crias as condições para sua própria transformação" (VYGOTSKY apud LINS, 2012, p.17). E ele não busca antecipar o que poderá ou não acontecer, mas lê o processo com os elementos disponibilizados na situação de interação.

---

[23] Dizemos que a aluna "aparentemente" não produz significado, pois ela diz apenas que não sabe responder, portanto, não temos elementos suficientes para ler precisamente sua fala.

Cada aluno representa *leitores* desta situação, e

> O leitor constitui sempre um autor, e é em relação ao que este “um autor” diria que o leitor produz significado para o texto [...]. Outra vez, o um autor é um ser cognitivo e não biológico, e não precisa corresponder de fato a nenhum outro real. (LINS, 1999, p.82).

Isto pode ser representado pelo seguinte diagrama

UM AUTOR	- - - →	PROBLEMA ou TAREFA	——→	O LEITOR
(Cada um dos alunos)		(Resíduo de Enunciação para o qual cada um dos alunos pode produzir significado)		(Interlocutor “constituído” por cada um dos alunos)

Lins ressalta que

> o pontilhado indica uma transmissão que só se concebe enquanto tal no *imaginário* do leitor. E vale a pena enfatizar que é apenas na medida em que o leitor fala, isto é, produz significado para o texto, colocando-se na posição de autor, que ele se constitui como leitor. (LINS, 1999, p. 82, grifo nosso).

O que procuramos fazer neste capítulo foi apresentar e descrever algumas noções presentes em nosso referencial teórico-epistemológico, o Modelo dos Campos Semânticos o qual sustenta nossa pesquisa.

2.3. Alguns Pressupostos Teórico-Epistemológicos

A utilização de um referencial teórico numa pesquisa deve conduzir a algo bem maior do que apenas a colocação de citações e definições escritas na mesma. Acreditamos que, ao optar por uma teoria, o pesquisador deve seguir uma postura que une suas concepções àquelas do referencial que o sustenta.

Segundo Lins (1993),

> Quando afirmo, como o faço sempre, que é preciso trazer à tona a *questão epistemológica* para o núcleo que forma a base interdisciplinar da pesquisa em Educação Matemática, estou precisamente afirmando que tanto as questões sendo investigadas, quanto as hipóteses de trabalho, os métodos de investigação **e mesmo os resultados**, só podem ser entendidos e avaliados corretamente em relação às posições epistemológicas do pesquisador e do leitor. [...] De modo geral, posições epistemológicas são elementos essenciais na construção do mundo onde um pesquisador “vive”, e é deste

> mundo – e não de todos os mundos[24] – que o pesquisador está falando. (LINS, 1993, p. 78, grifos do autor).

O que faremos nesta seção é levantar as características do *mundo em que vivemos* enquanto professores/pesquisadores, para que ao realizar a leitura de nosso trabalho, o leitor, tenha compreensão global do mesmo.

Ao pesquisarmos como as disciplinas de conteúdo matemático vêm sendo estruturadas, deparamo- nos com uma concepção de ensino – que está presente não só nas universidades, mas em todos os níveis de ensino, em escalas diferentes – denominada por diversos autores de Ensino Tradicional Vigente (ETV). Silva (1998), cita que

> A “fachada” do ETV assenta-se, assim, sobre uma concepção epistemológica: pensa-se que o professor transmite o conhecimento “mostrando” e que o aluno aprende “vendo”. O contrato de trabalho do ETV reza que a maior parte das aulas são ministradas pelo professor, o qual expõe uma teoria e em seguida apresenta exemplos que ilustrem os conceitos apresentados; e os alunos na turma assumem a posição essencialmente de ouvintes. (SILVA, 1998, p. 158).

E ainda que

> A prova é o instrumento exclusivo pelo qual o professor faz uma verificação, se os assuntos expostos foram ou não assimilados e de posse do resultado desse recurso ele associa a cada aluno, naturalmente, uma pontuação chamada nota que, a partir de um certo valor mínimo, autoriza o aluno a passar de uma etapa a outra. As negociações são sempre unilaterais na medida em que é o professor que previamente estabelece o que pode ou não ser feito, como deve ou não ser feito e quando deve ou não ser feito. É a imposição do eu sob a lei da ordem. (CABRAL apud SILVA, 1998, p. 158).

Com isso, o que propomos nesta pesquisa é uma alternativa a esta concepção, tanto, no modo como conduziremos a construção de nosso trabalho, quanto na postura que adotaremos em nossa pesquisa de campo. A partir disso, vamos retomar alguns dos conceitos e noções mais importantes apresentados nas seções anteriores e descrevê-los constituindo um conjunto de pressupostos que nos acompanharão ao longo de nosso trabalho.

Primeiramente, acreditamos que o professor, antes de tudo, deva praticar o exercício de descentramento como forma de ampliar e redirecionar seu olhar para a fala do aluno, abrindo-se a um diálogo constante na direção

---

[24] O autor está se referindo aos mundos de Nelson Goodman, ler mais em Goodman, 1984.

de perceber *onde está*, com quais elementos e *com que lógica opera* este aluno.

Para isso, deve-se entender que, em sala de aula esta leitura deve ser feita de forma contínua, compreendendo-se que ao iniciá-la estaremos acompanhando processos e que estes podem se modificar.

Além disso, todas estas ações devem ser realizadas de forma intencional e com o interesse genuíno de interagir, compreender e intervir no processo de aprendizagem. O professor deve utilizar-se da intervenção, compreendendo que ao dialogar com seu aluno, tem a possibilidade de fazê-lo crescer por si só e permitir que realize uma construção individual de significados desencadeando o processo de produção de conhecimento.

Entendemos que a comunicação estabelecida entre professor e aluno, analisada de acordo com o MCS, conduz a duas consequências, sugeridas por Lins (1999), ao analisar o processo comunicativo

> A primeira conseqüência importante deste modelo é que, uma vez que nos colocamos incessante e alternadamente na posição de o autor e de o leitor em cada um destes processos, terminamos por fundir as duas imagens, e os pontilhados desaparecem, restando a *sensação psicológica de comunicação efetiva*. [...] A segunda conseqüência deste modelo é, que o que dizemos não é apenas aquilo que afirmamos (por acreditar), mas também, e constitutivamente, o que nos autoriza a dizer o que dizemos. (LINS, 1999, p. 82, 83, grifo nosso).

Ressaltamos que a sensação psicológica de comunicação efetiva – segundo a concepção de Processo Comunicativo, proposta pelo MCS – pode indicar dois pontos importantes relacionado à interação em sala de aula: a impossibilidade de transmissão de conhecimento, sugerida pelo ETV e; a indicação de que, para realizar intervenções no processo de aprendizagem, devemos obter o máximo de elementos que tornem esta leitura o mais refinada possível.

Devemos, ainda, compreender que uma pessoa constitui o "um leitor" e o "um autor" a partir de "modos de produção de significados que o autor ou o leitor internalizaram como sendo legítimos" (Cf: LINS, 1999, p.82). Podemos ver uma relação com a noção de conhecimento apresentada na primeira seção deste capítulo, na qual o leitor produz significados e ao crer em suas afirmações apresenta justificações para suas "crenças-afirmações".

Neste ponto, atentamos ao fato de que, ao conceber conhecimento do modo proposto pelo MCS, estaremos lidando com as “crenças” dos alunos, com o modo que os leva a agir desta ou daquela maneira, portanto, devemos estabelecer um espaço comunicativo

> que é um processo de interação no qual (dizer isto, para o MCS, é redundante) interlocutores são compartilhados. Numa inversão conceitual, “comunicação” não corresponde mais a algo do tipo “duas pessoas falando uma para outra”, e sim a “dois sujeitos cognitivos falando na direção de um mesmo interlocutor”. (LINS, 2012, p.24, grifos nossos).

Além disso, devemos realizar uma leitura plausível do outro – dos alunos. Segundo Lins (2012), este tipo de leitura “[...] é útil nas situações de interação, como são (ou deveriam ser) todas as situações envolvendo ensino e aprendizagem, às quais vou me restringir, embora o MCS, neste aspecto, refira-se a qualquer situação de interação.” (LINS, 2012, p.23).

A leitura plausível também pode ser entendida como antônima de leitura pela falta, pelo erro. Seu objetivo, por assim dizer, é

> mapear o terreno ao mesmo tempo que trata de saber onde o outro está. Em contraste, as teorias piagetianas dão o mapa e só nos resta saber onde, naquele mapa, o outro está; se a localização que ele nos dá não se encaixa, estamos perdidos. (LINS, 2012, p.24).

Como já dissemos anteriormente, o que procuramos fazer nesta seção foi apontar alguns dos pressupostos que sustentam esta pesquisa, como forma de esclarecer para o leitor como conduziremos a mesma.

Capítulo 3
A REVISÃO DA LITERATURA

A partir desse momento todas as nossas considerações estarão embasadas pelas premissas do Modelo dos Campos Semânticos e isto irá definir nossas escolhas e diferenciar nosso estudo de outros que utilizem um referencial teórico diferente do nosso.

O que faremos a seguir é, em três seções distintas, apresentar e discutir alguns trabalhos relevantes sobre temas pertinentes à nossa pesquisa, a saber: a Produção de Significados para a Álgebra Linear da perspectiva apresentada pelos pesquisadores do grupo Sigma-t[25]; a Formação do professor de Matemática e; a noção de Cursos de Serviço.

Nosso objetivo principal, além dos já mencionados acima, será o de utilizar as pesquisas concluídas para lançar luz às nossas questões de investigação e apresentar, na última seção deste capítulo, mais alguns pressupostos que sustentam nosso trabalho.

3.1. Produção de significados para Álgebra Linear

Antes de começarmos a analisar as pesquisas que se dedicaram a estudar a disciplina Álgebra Linear sob a perspectiva da Educação Matemática, trataremos de explicitar em subseções a Teoria da Atividade, proposta pelo psicólogo russo Alexei Nikolaevich Leontiev e alguns aspectos do processo de produção de significados segundo o Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Ao dividir esta seção desse modo procuramos discutir algumas ideias que sustentam as pesquisas aqui estudadas para melhor compreensão do leitor.

3.1.1. A teoria da Atividade

Por volta da década de 1920, Leontiev e outros pesquisadores realizaram pesquisas em pareceria com Vygotsky e formaram a base da teoria

---

[25] Grupo de pesquisa coordenado pelo professor Romulo Campos Lins, filiado à UNESP - Rio Claro, São Paulo; www.sigma-t.org.

sócio-histórica e, nesta época, foram desenvolvidos estudos sobre a atividade humana, um dos mais importantes conceitos na abordagem histórico-cultural, sob a liderança de Leontiev.

Silva (2003) apresenta algumas considerações importantes feitas por Zinchenko a respeito destes estudos. Segundo ele

> foi a psicologia histórico-cultural que deu origem à teoria da atividade desenvolvida por Leontiev e ele entende que tanto a psicologia histórico-cultural quanto a teoria da atividade representam linhas de pesquisa e não duas escolas, como muitos pesquisadores entendem. (ZINCHENKO apud SILVA, 2003, p.42).

Apoiado por Vygotsky e Luria, Leontiev formula que

> Por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo. (LEONTIEV, 2001).

Devemos analisar que nem todos os processos são caracterizados como atividade. Nesse sentido, Leontiev indica que

> Por esse termo designamos aqueles processos que, realizando as relações do homem com o mundo, satisfazem uma necessidade especial correspondente a ele. Nós não chamamos atividade um processo como, por exemplo, a recordação, porque ela em si mesma, não realiza via de regra, nenhuma relação independente com o mundo e não satisfaz qualquer necessidade especial. (LEONTIEV, 2001).

Em contraste, "um ato ou ação é um processo cujo motivo não coincide com seu objetivo, (isto é, com aquilo para o qual se dirige), mas reside na atividade da qual ele faz parte". (LEONTIEV, 2001).

Para esclarecer os conceitos de ação e atividade, apresentaremos nossa leitura de um exemplo utilizado por Leontiev (LEONTIEV, 2001). Imaginemos que uma criança esteja lendo um livro de história e um amigo lhe diga que o conteúdo deste livro não está intimamente ligado ao conteúdo cobrado num teste ao qual serão submetidos. Neste ponto específico, poderíamos nos perguntar: ler o livro de história representa uma atividade?

Para que concluamos corretamente é preciso que analisemos as possibilidades: primeiro a criança pode abandonar imediatamente o livro; segundo pode deixá-lo de lado com relutância e; terceiro pode continuar a lê-lo.

Percebemos, nas duas últimas possibilidades, que a atividade era ler o livro, pois seu conteúdo “satisfez alguma necessidade especial correspondente a ele” (LEONTIEV, 2001). Ou seja, o motivo de ler o livro era para internalizar o que ali estava escrito e o objetivo era igualmente este. Neste ponto vale ressaltar que o fato da criança deixar o livro, mas fazê-lo com relutância é decisivo para caracterizar esta situação como atividade, assim como continuar a lê-lo.

Diferentemente destas, a primeira possibilidade representa uma ação, pois o objetivo da leitura do livro é dominar seu conteúdo, e o motivo era passar no teste. Neste caso, ler o livro era uma ação e a atividade era passar no teste.

Apesar de distintas, para esta teoria, ação e atividade estão intimamente ligadas. E, além disso,

> o motivo da atividade, sendo substituída, pode passar para o objeto (o alvo) da ação, com o resultado de que a ação é transformada em uma atividade. Este é um ponto excepcionalmente importante. Esta é a maneira pela qual surgem todas as atividades e novas relações com a realidade. Esse processo é precisamente a base psicológica concreta sobre a qual ocorrem mudanças na atividade principal e, conseqüentemente, as transições de um estágio do desenvolvimento para o outro. (LEONTIEV, 2001).

Assim como Silva (2003), optaremos por utilizar o conceito de atividade como unidade de análise[26], e

> com essa posição queremos dizer, primeiro, que a análise do processo de produção de significados é considerada sempre no interior de uma atividade. Segundo, queremos dizer que, em nossa análise, não é possível “olhar menor”, isto é, a atividade é considerada no MTCS[27] como um todo mínimo. E terceiro, nossa opção por esta unidade de análise se baseia na prática, no fato de que, se a atividade muda, a produção de significados também pode mudar. (SILVA, 2003, p.64).

Para finalizar esta seção, concordamos com Libâneo e Freitas (2007) quando se referem à teoria histórico-cultural e da atividade, pois, assim como nós eles entendem que

---

[26] Com o termo unidade queremos nos referir a um produto de análise que, ao contrário dos elementos, conserva todas as propriedades básicas do todo, não podendo ser dividido sem que as perca. (VYGOTSKY apud SILVA, 2003).

[27] Inicialmente o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) era caracterizado como Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS).

> elas ajudam a compreender melhor o trabalho de professor e sua formação profissional, uma vez que abordam a natureza e a estrutura da atividade humana, a relação entre atividade de ensino, atividade de aprendizagem e desenvolvimento humano. Especialmente, possibilitam compreender a formação profissional a partir do trabalho real, das práticas correntes no contexto de trabalho e não a partir do trabalho prescrito, tal como aparece na visão da racionalidade técnica e tal como aparece também na concepção de senso comum sobre formação, que ainda vigora fortemente nas escolas e nas instituições formadoras. Vygotsky explica o desenvolvimento humano por processos mediados e destaca a importância da educação e do ensino na aquisição de patamares mais elevados de desenvolvimento. Leontiev mostra que tanto a atividade profissional quanto a atividade cognitiva implicam o desenvolvimento de ações muito específicas, obrigando-nos a não tratar a atividade docente como algo abstrato, uma vez que o professor desenvolve uma atividade prática, no sentido de que envolve uma ação intencional marcada por valores. (LIBÂNEO e FREITAS, 2007, p. 7).

3.1.2. O processo de Produção de Significados

O processo de produção de significados está presente em quase todos os ambientes onde há interação social, mas é na sala de aula para onde o olhar do professor/pesquisador – que se baseia nas premissas do MCS – o toma como peça chave do processo de aprendizagem.

Segundo Silva (2003), o conceito de significado passou por algumas reformulações e, sobre isto, ele conclui que

> em sua versão atual, a noção de significado de um objeto, neste trabalho será entendida como aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto no interior de uma atividade. O "poder dizer" presente na formulação de significado está intimamente relacionado à questão da legitimidade[28]. (SILVA, 2003, p.21).

Portanto, o processo de produção de significados pode ser entendido como um processo no qual um indivíduo se propõe a produzir ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade[29].

> A importância de se investigar a produção de significados é expressa por Lins (1999) quando diz: "Para mim, o aspecto central de toda aprendizagem humana – em verdade, o

[28] Discutida no capítulo 2.
[29] Discutida na seção anterior.

> aspecto central de toda cognição humana – é a produção de significados". (LINS apud SILVA, 2003, p.21).

Produzir ações enunciativas é falar a respeito de um *objeto* – que é visto como algo sobre o qual podemos dizer algo. Segundo Lins (1999), os objetos são constituídos enquanto tais precisamente a partir do momento em que se produz significados para eles (Cf: LINS, 1999, p. 86). E quando dizemos *falar* estamos nos referindo tanto à fala propriamente dita (oral) quanto à escrita, aos gestos, representações gráficas, ou seja, a todas as formas que um indivíduo tem para se expressar.

Segundo Silva, apoiado pelas ideias de Lins: "o ponto central é que produzimos significados para que pertençamos a uma prática social ou, em escala maior, a uma cultura, tanto quanto produzimos enunciações pelo mesmo motivo." (LINS apud SILVA, 2003, p.21).

> O interesse do MCS é no processo de produção de significado e em sua leitura, e não na permanência, mas esta pode ser teorizada, no modelo, como (apenas) uma foto datada de um processo (de produção de significados). (LINS, 2012, p.19).

Para exemplificar apresentamos um exemplo presente em Silva (2003)[30] no qual ao analisar a fala de um de seus sujeitos de pesquisa (Diva) aponta a seguinte consideração

> Pensar em termos de atividade tem como uma das possíveis conseqüências dizer que em outra atividade – por exemplo, na sala de aula em que Diva é professora – ela possivelmente não diria o que disse. Mesmo que ela acreditasse que o plano tivesse três dimensões, não seria legítimo para ela dizer o que disse como aluna. Como dissemos, se a atividade muda, a produção de significados pode mudar. (SILVA, 2003, p.68).

Em sua pesquisa Silva (2003), descreve que Diva insiste no fato de que uma folha de papel, por mais fina que seja, representa algo que possui três dimensões. Apontamos o fato de que muito provavelmente uma folha de papel, nas aulas em que Diva ministra, constituísse um exemplo de algo com duas dimensões, um plano[31], e, portanto, como destacado por Silva, algo que "ela possivelmente não diria o que disse. Mesmo que ela acreditasse que o plano tivesse três dimensões, não seria legítimo para ela dizer o que disse como aluna." (SILVA, 2003, p.68).

---

[30] Tese de doutorado cujo título é: Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática (SILVA, 2003).

[31] Queremos ressaltar o fato de que estamos apontando uma possível posição de "Diva", e que não está presente esta consideração na pesquisa de Silva (2003).

> Em resumo, quando uma pessoa se propõe a produzir significados para o resíduo de uma enunciação, observamos da perspectiva do MTCS o desencadeamento de um processo – o processo de produção de significados – que envolve:
>
> i) A constituição de objetos – coisas sobre as quais sabemos dizer algo e dizemos – que nos permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos;
>
> ii) A formação de um núcleo: as estipulações locais, as operações e sua lógica;
>
> iii) A produção de conhecimento[32];
>
> iv) Os interlocutores;
>
> v) As legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer no interior de uma atividade. (SILVA, 2003, p. 77, grifos nossos).

Os conceitos/definições presentes na teoria do MCS possuem interligações como, por exemplo, a noção de estipulação, ou seja, algo dado, já "estipulado"

> inspirou a noção de núcleo a partir da idéia de estipulações locais da seguinte maneira: no processo de produção de significados, existem algumas afirmações que a pessoa faz e que, tomando-as como absolutamente válidas, não sente necessidade de justificá-las. A essas crenças-afirmações, chamaremos de estipulações locais. E ao conjunto de estipulações locais constituídas no interior de uma atividade denominamos núcleo. (SILVA, 2003, p. 75).

Nesta direção, Lins (1997) comenta que:

> O que é importante e revelador é que esse "localmente" se refere ao interior de uma atividade, e que no processo dessa atividade esse núcleo pode se alterar pela incorporação de novas estipulações (elementos) ou pelo abandono de algumas estipulações até ali assumidas. (LINS apud SILVA, 2003, p.75)

Ainda no sentido de esclarecer a noção de núcleo, Lins observa que: "O núcleo não é uma gramática, embora possa conter uma. *Com intenção didática* pode ser interessante constituir um "repertório de 'campos semânticos' imaginários"." (LINS, 2012, p.18, grifo do autor).

> Um núcleo pode ser constituído por um diagrama, por um desenho, por uma balança, por um conjunto de princípios (axiomas, por exemplo), por uma situação "realista" ou ficcional. O que importa é que é em relação aos objetos do núcleo que vai ser produzido significado, seja para que texto for. Núcleos não se referem especificamente a "conteúdos" ou "áreas de conhecimento": em relação ao mesmo núcleo de balança de dois pratos, é possível produzir significado para

[32] "Sempre que há produção de significado há produção de conhecimento e vice-versa, mas conhecimento e significado são coisas de naturezas distintas." (LINS, 2012, p.28).

> uma equação, para a noção de justiça ou para fenômenos físicos diversos. (LINS, 1997, p.144).

Ao relacionarmos a noção de núcleo com o processo de intervenção podemos analisar que ao interagir com o aluno o professor irá buscar compreender com quais elementos este aluno está operando para, portanto, se necessário, realizar uma intervenção no sentido de ampliar a produção de significados dele, sugerir que ele "aumente" o número de elementos que constituem o núcleo em questão. Portanto, o professor cumpre o papel de mediador e oferece ao aluno um novo modo, um modo diferente, de produzir significado.

> É importante ter em mente que núcleo, no sentido proposto no MTCS, <u>não se refere a algo estático</u>, um conjunto de coisas, e sim, a um processo que se constitui no interior de atividades e dissipa ao final delas. Em uma outra atividade, novo núcleo se constitui e esse é o <u>processo</u>. (SILVA, 2003, p.76, grifos nossos).

Ao oferecer este outro modo (ou outros modos) de produzir significado o professor também oferece ao aluno novos elementos que passarão, ou não, a constituir o núcleo no qual está operando. E, ao falar de

> *modos de produção de significados* não é falar propriamente de campos semânticos, mas de 'campos semânticos idealizados' que existem na forma de repertórios segundo os quais nos preparamos para tentar antecipar de que é que os outros estão falando ou se o que dizem é legítimo ou não. (LINS, 2012, p.29, grifos do autor).

O professor que conhece vários modos de produção de significados e que passa de forma suave de um campo semântico a outro e que opera em núcleos diversos, deve ter consciência de que seus alunos podem, ou não, acompanhar essa passagem de um campo semântico a outro, ou seja, podem ou não, conseguir produzir significados de outra maneira. Para tanto, é imprescindível que estejamos atentos à fala de nossos alunos e os tornemos centro de nossa atenção para que alcancemos nosso intento enquanto educadores: realizar de forma efetiva o processo de aprendizagem, educando pela da Matemática.

Na Educação Matemática proposta por Lins

> O professor terá um interesse genuíno por como seus alunos estão pensando, no "acerto" e no "erro", e isso quer dizer bem mais do que comparar suas respostas com os padrões de uma taxonomia, não importa o quanto esta seja detalhada e atraente, "didaticamente reconfortante". (LINS, 2008, p. 548).

Na próxima subseção, passaremos a analisar algumas pesquisas de Educação Matemática que se dedicaram a estudar a produção de significados para os conceitos presentes na teoria da Álgebra Linear.

3.1.3. Produção de significados e Álgebra Linear

Nosso interesse em pesquisar especificamente a disciplina Álgebra Linear – como já citamos anteriormente – surgiu de nossa atuação como monitora da disciplina. A partir daí, começamos a analisar as características deste curso em nossa universidade, discutindo com alunos e professores e procurando apoio na literatura disponível, principalmente a produzida pelos pesquisadores que utilizam o Modelo dos Campos Semânticos.

Um fato que é recorrente é o de que as universidades brasileiras, muitas vezes, não têm condições de disponibilizar turmas formadas apenas por alunos de um mesmo curso e de matricular uma quantidade de estudantes que permita ao professor realizar seu trabalho de forma mais produtiva[33]. Além disso, as ementas das disciplinas são, normalmente, muito extensas para serem cumpridas em um único semestre e, ainda contamos com um corpo docente que, na maioria das vezes, não observa "que o tempo real de aprendizagem e o tempo institucional de ensino de uma teoria matemática não coincidem" (SILVA, 2010, p.2).

De acordo com o quadro apresentado, concordamos com Silva (1997) ao se referir às avaliações adotadas pela maioria das universidades, nas quais

> Institucionalmente, o conhecimento do aluno é quantificado pelos testes de verificação de conhecimento (TVC) que se reduz, em geral e no contexto de onde partem nossas considerações, ao registro escrito. (SILVA, 1997, p.77).

Baseado nessas características e na situação de nossas instituições de ensino superior, os cursos de Álgebra Linear não têm alcançado os objetivos a que se propõe, pois

---

[33] "Trabalhos mais produtivos", para nós, são entendidos como práticas pedagógicas nas quais o professor tem condições de estabelecer diálogo com seus alunos, ler sua produção de significados e de intervir, quando necessário, no processo de aprendizagem dos mesmos, o que acreditamos ser dificultado, por exemplo, por turmas com grandes quantidades de alunos.

> o aprendizado dos estudantes de conceitos e métodos da Álgebra Linear são pobres. Sendo assim, os resultados dos exames finais podem muito bem esconder este fato, porque os estudantes com frequência são perguntados somente como usar técnicas e não têm que trazer os conceitos à tona. (DORIER apud SILVA, 1997, p.3).

Além disso,

> tanto o ensino como a aprendizagem da Álgebra Linear a nível de terceiro grau são quase que universalmente considerados uma experiência frustrante. A Álgebra Linear é geralmente o primeiro curso em que os estudantes têm contato com uma teoria matemática madura, edificada sistematicamente de baixo pra cima, com toda a sua preocupação exagerada de tornar as suposições explícitas, justificando afirmações por referências às definições e a fatos já provados. (HILLEL & SIERPINSKA apud SILVA, 1997, p.3).

Isto nos leva a pensar que um curso de Álgebra Linear, especialmente ministrado a licenciandos em Matemática, não pode "exigir" destes alunos somente a aplicação de técnicas, realização de cálculos e memorização de Teoremas - que normalmente apresentam-se vazios de significado para eles.

Fazendo um retrospecto da história da Álgebra Linear, Silva (1997) lembra que foi apenas

> na primeira metade do século XX que a álgebra linear se tornou o domínio que nós conhecemos atualmente, como resultado de um processo que exigiu dos matemáticos dessa época um espírito de síntese muito forte e um grande domínio de muitas teorias. Portanto, os conceitos encontrados em álgebra linear, em sua presente forma, são o resultado da unificação e generalização levados a cabo por esses profissionais. A teoria axiomática dos espaços vetoriais é uma descoberta do final do século XIX que não decolou antes de 1920. (SILVA, 1997, p.61).

Em sua dissertação de Mestrado, intitulada *Uma análise da produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear*, Silva (1997) apresentou um estudo histórico, que visava compreender quais os significados foram produzidos por matemáticos profissionais ao longo da história a partir de conceitos envolvidos com a teoria atual da Álgebra Linear. Além disso, fez um levantamento da teoria desta disciplina presente em livros-texto utilizados pela maioria das universidades brasileiras.

Após realizar a análise do material coletado nestas duas etapas, o autor procurou analisar quais significados seriam produzidos por alunos de uma universidade pública brasileira, após cursarem a disciplina Álgebra Linear, com foco principal no conceito de Base de um espaço vetorial. Segundo Silva (2010)

> O objetivo inicial de minha inserção naquela turma foi o de me familiarizar com meus potenciais sujeitos de pesquisa, que oportunamente seriam convidados para entrevistas. Além disso, buscava observar que significados poderiam ser produzidos em uma sala de aula a partir do diálogo entre o professor e seus alunos. (SILVA, 2010, p.2).

Um estudo de caso foi realizado, no qual os instrumentos de investigação foram entrevistas com dois sujeitos de pesquisa dentre os que ele acompanhou em sala de aula. Essas entrevistas começariam com a resolução de tarefas, pertinentes ao conteúdo analisado – o conceito de base e outros que o envolvem – e, posteriormente, os sujeitos de pesquisa exporiam as justificativas usadas para legitimar suas afirmações.

Com relação à análise da produção de significados dos entrevistados de sua pesquisa, Silva (1997) comenta que

> Para o pesquisador que analisa as justificações dos alunos a partir do MTCS, ele <u>não se interessa pela questão dicotômica entre o certo e o errado</u>; isto é secundário e pouco relevante. Não interessa também se o aluno <u>justificou ou não da maneira padrão</u>. Por isso, uma resposta em branco tem um significado completamente diferente de uma <u>resposta considerada absurda</u> [...] o pesquisador interessa-se muito mais pelo que foi dito a respeito do que foi perguntado. Na verdade, o que nos interessa é aquilo que o sujeito do conhecimento disse e porque disse. Pois, caso ele apresente algo que não é capaz de justificar o que afirmou, não há razão para acreditarmos que ele possui esse conhecimento. (SILVA, 1997, p.87, grifo nosso).

A partir da fala do autor, podemos concluir que os cursos de Álgebra Linear que se propõem a realizar uma leitura deficitária[34] sobre a fala[35] dos alunos, ou que não se preocupam em realizar leitura alguma, perderão uma grande oportunidade de contribuir de forma mais eficaz e prazerosa no processo de aprendizagem dos estudantes. Pois, quando não nos dispomos a ler de forma plausível[36] nossos alunos, não podemos compreender o porquê de

---

[34] A expressão “leitura deficitária” é usada por nós como antônima da expressão “leitura plausível”, seria uma leitura pela falta, aquilo que o aluno “não tem” e “deveria” ter.

[35] Quando dizemos “fala” estamos nos referindo à forma com a qual um indivíduo pode expressar sua produção de significados, por exemplo: escrita, gestos, expressões e a própria fala oral.

[36] A expressão leitura plausível refere-se a uma leitura da produção de significados que busca compreender o porquê do aluno apresentar esta ou aquela justificativa, uma leitura que não visa antecipar a produção de significados e tenta entender sua lógica e seu modo de operar.

realizarem certas tomadas de decisão frente a um questionamento e, nem mesmo de afirmar se houve produção de conhecimento.

Este fato foi analisado na dissertação de Silva (1997), na qual ele conclui, após analisar a fala de um de seus sujeitos de pesquisa, que

> ela parece fazer a leitura dos textos matemáticos considerando a sua lógica das operações. Ela observa ainda que os textos apresentados a ela como demanda de produção de significados *"são muito vagos"*. Isto nos sugere que o leitor real está muito distante daquele *"leitor ideal"* presente nas expectativas de alguns professores. E nem por isso os significados produzidos por Elisângela deixam de ser ricos. (SILVA, 1997, p.100, grifos do autor).

Portanto, a nosso ver, os contextos de sala de aula tornam-se mais propícios à produção de significados, quando o aluno percebe que pode explicitar e compartilhar sua visão com os outros alunos e o professor.

Durante o estudo de caso realizado por Silva (1997), o autor procurou colocar à disposição dos entrevistados tarefas que permitissem a ele, posteriormente, analisar onde (em que campo semântico) e como (com qual núcleo) eles estavam operando. Esta análise fê-lo concluir que

> Os textos apresentados a nossos informantes foram lidos e interpretados em relação a um núcleo "preferencial" que pressupõe constituídas todas as noções que constituem a noção de base. Isto nos sugere que as possíveis expectativas de um professor que espera que seus alunos falem e operem de maneira efetiva a partir dos textos matemáticos considerando, por exemplo, as noções de independência linear e de geração como "coisas" de mesmo status, possivelmente, não irão obter isto como resposta. Ao que parece, no estudo de caso em questão, é que nossos informantes não internalizaram os possíveis campos semânticos preferenciais colocados à disposição durante o curso e os significados produzidos por eles são em relação aos núcleos que eles próprios constituíram. Assim, eles nos revelaram que a questão não passa, muitas vezes, por não saber, mas sim por não falar como o professor. (SILVA, 1997, p.113).

De acordo com a fala de Silva (1997) percebemos que, do modo como são conduzidos alguns cursos de conteúdo matemático (em especial, os de Álgebra Linear) e como suas avaliações são realizadas, os alunos devem, se quiserem ser bem sucedidos, produzir justificativas iguais às do professor, mesmo que estas não sejam legítimas para si.

O professor/pesquisador deve estar atento a sua sala de aula e compreender que:

> A importância de estudo dos significados matemáticos reside no fato de que, em geral, serão esses os modos de produzir significados que estarão à disposição dos estudantes para a demanda de produção de significados; quer no discurso dos professores, quer nos livros- textos. Textos esses que refletem a concepção e o modo de operar dos matemáticos. São esses os significados que queremos que os estudantes venham a produzir. (SILVA, 1997, p.116).

Segundo Silva (1997), devemos proporcionar aos licenciandos em matemática a importância do compartilhamento de significados – matemáticos ou não – produzidos e

> [...] investir em metodologias alternativas de ensino que estimulem nossos alunos a falar a partir dos textos matemáticos. Além disso, devemos proporcionar aos estudantes, através de tarefas, que eles venham a operar fazendo a passagem de um campo semântico a outro; visto que, essa é a maneira como, efetivamente, operam os matemáticos. (SILVA, 1997, p.119).

Ao dizermos que pretendemos analisar a produção de significados matemáticos e não-matemáticos apresentados por nossos alunos, devemos deixar claro em que exatamente consistem estes conceitos e como caracterizamos os significados em uma categoria ou outra.

Para isto nos apoiaremos no trabalho de Julio (2007), sua dissertação de mestrado intitulada *Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para 'dimensão'* (JULIO, 2007), em que a autora busca analisar como e, com quais significados, a palavra "dimensão" aparece em textos matemáticos e no cotidiano das pessoas.

Segundo ela, o significado matemático está relacionado com a caracterização de matemática do matemático.

> Olhar para os significados matemáticos significa produzirmos significados que sejam plausíveis para a comunidade matemática [...], ou seja, de acordo com a caracterização de matemática do matemático[37]. (JULIO, 2007, p.28).

Em contrapartida, "os significados não-matemáticos estão relacionados com coisas que um matemático não diria ao falar como um matemático" (JULIO, 2007).

---

[37] Para melhor esclarecer: "Para o matemático, Matemática é a Matemática justificada dentro de certos modos de produzir significados que são, naturalmente, simbólicos. E apenas estes modos de produzir significados são aceitos. E, também naturalmente, já que se podem produzir justificações de um único modo, estas justificações são incorporadas ao texto da matemática". (LINS apud JULIO, 2007, p.23).

A importância de descrever e diferenciar esses conceitos resulta do fato de que ao analisarmos a produção de significados de nossos alunos, significados destas duas categorias estarão presentes.

A pesquisa de Julio (2007) nos mostra que

> Assim como no cotidiano, em uma sala de aula de matemática podemos ver que *dimensão*, de acordo com as produções de significados pelas pessoas que cursaram uma disciplina matemática, também assume significados diferentes da matemática do matemático. (JULIO, 2007, p.95, grifo da autora).

E, além disso,

> As noções do cotidiano ou as noções naturalizadas (que também estão presentes no cotidiano) são como um porto seguro, um chão firme, um lugar onde as pessoas estão ou sempre podem voltar, pois essas noções são estipulações locais para elas e, em um curso de matemática, uma definição matemática nem sempre se transforma em uma estipulação local por parte dos alunos, pois no nosso mundo ela, na maioria das vezes, não é utilizada. (JULIO, 2007, p.95).

Essa dicotomia – significados matemáticos versus significados não-matemáticos – também pode, e deve, ser associada à relação dicotômica matemática acadêmica versus matemática escolar, como oportunidade de discutir no interior das Licenciaturas em Matemática este contraste, lembrando que

> As disciplinas de Matemática ‘avançada’ têm um potencial único na formação de professores de Matemática, desde que não sejam entendidas em si mesmas, apenas como ‘de conteúdo’; ou ainda, a Matemática do matemático oferece uma oportunidade única de viver o estranhamento peculiar ao encontro com noções que contrariam em tudo o senso comum do cotidiano (...). (LINS apud OLIVEIRA, 2012, p.200).

Acreditamos ser importante para o licenciando o contato com estes dois pontos de vista da matemática, para que no futuro possa ler de forma refinada significados matemáticos e não-matemáticos produzidos por seus alunos, perceber a diferença entre eles e ter a capacidade de realizar esta leitura quando as justificações estiverem “corretas” e quando estiverem “incorretas”. Pois acreditamos que

> É apenas com base na coexistência de significados matemáticos e não-matemáticos na escola [ou em qualquer ambiente de ensino] que se poderá constituir uma legitimidade comum, o que pode, por sua vez, impedir que a matemática da escola seja percebida como inútil, um saber cuja razão de ser

> deixa de existir quando termina a escolarização que envolve matemática. (LINS & GIMENEZ, 1997, p. 28).

O professor deve levar em conta que diferentes significados podem surgir em um diálogo. E, que conceitos matematicamente corretos e, justificativas legítimas para quem os enuncia, podem até não ser aceitos por matemáticos profissionais, mas estarão "corretos" e, portanto, devem ser explicitados e incentivados.

Além disso, é importante que o professor deixe claro para seus alunos que está disposto a fazer uma leitura plausível de sua produção de significados e que ao realizar uma intervenção, a partir das justificações apresentadas por eles, quer ampliar, e não substituir, seus modos de produzir significados.

Queremos ressaltar ainda a importância do trabalho de Silva (2003) no qual realizou um estudo de caso do tipo etnográfico. O objetivo do autor era ler a produção de significados de alguns estudantes a partir de um problema de matemática[38] e analisar a dinâmica deste processo.

Este estudo foi realizado durante o curso de Álgebra Linear ministrado para alunos de um Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática de uma universidade pública brasileira, no qual o próprio autor cursava seu Doutorado. As aulas foram filmadas e acompanhadas por Silva num período de quatro meses.

Além de perceber que ao estudar a dinâmica do processo "todos os sujeitos de pesquisa que produziram significados para o problema proposto, o fizeram, de diferentes modos, operando de modo peculiar, uns em relação aos outros" (SILVA, 2003), o autor concluiu que

> todos os elementos que constituem o processo de produção de significados – a constituição e transformação dos objetos, o processo de nucleação, a fala na direção de interlocutores, as legitimidades – estão interligados, e são interdependentes, de modo que mudanças ocorridas em um deles provocariam transformações em todos os outros. E são essas transformações que caracterizam a dinâmica do processo. (SILVA, 2003, p.143).

Portanto, o que fizemos nesta seção foi analisar alguns trabalhos que se dedicaram principalmente ao estudo do processo de produção de

---

[38] O problema citado é: "IR^2 é o conjunto dos pares ordenados de números reais: $IR^2 = \{(x, y)$ tal que $x, y \in IR\}$. Investigue se é possível existir um espaço vetorial real (isto é, IR é o corpo dos escalares) onde IR^2 é o conjunto de vetores desse espaço e que tenha dimensão 3." (SILVA, 2003).

significados e levantar as conexões que os mesmos possuem com a nossa pesquisa.

3.2. Formação do professor de Matemática

Ao analisarmos os cursos de Licenciatura em Matemática, vemos que, em sua maioria, eles têm se estruturado no formato no qual o futuro professor tem contato com os conhecimentos específico e pedagógico, mas que estes estão desconectados, ou seja, este modelo de curso não leva em conta a futura prática profissional dos licenciandos em Matemática.

Esta situação é descrita por Francisco (2008), quando menciona que

> Tanto no papel de professor quanto no de pesquisador, testemunhamos diversos relatos de professores de Matemática das escolas públicas de ensino fundamental e médio, apontando que a trajetória formadora proporcionada a eles pela universidade nos cursos de licenciatura em matemática, não apresenta propostas concretas que permitam o desenvolvimento profissional efetivamente ligado ao exercício da profissão, durante todo o processo de formação inicial. Esta indicação é vista por muitos professores como fator que coloca marcas profundas em sua atuação profissional na escola, no que se refere a lidar com os desafios lá presentes. (FRANCISCO, 2008, p.2, 3).

Como consequência disso surge um conflito significativo no processo de formação do licenciando: o distanciamento entre a Matemática Escolar – a Matemática ensinada nos níveis Fundamental e Médio – e a Matemática Acadêmica – a Matemática “formal” ensinada nas Universidades[39].

E de acordo com Lins, acreditamos que na realidade a postura do professor de matemática deva ser a de compreender que “não há ‘a matemática’ de um lado e a ‘pedagogia’ do outro, pois ‘quando o professor toma decisões e realiza ações, considerações de todos os tipos estão envolvidas’”. (LINS apud LINARDI, 2007, p.6).

Estudos e Pesquisas em Educação Matemática mostram que, cada vez mais, os cursos denominados cursos de conteúdo, devem e podem contribuir

---

[39] Segundo Lins e Gimenez (1997), não é verdade que a matemática acadêmica exclui sempre os significados que hoje chamamos de não–matemáticos. E não é verdade que os significados da rua sempre foram considerados ilegítimos pela matemática acadêmica. Os autores citam que o processo de tornar ilegítimos os significados não–matemáticos teve início em meados do século XIX e culmina, na passagem do século, com o programa de David Hilbert. (Cf.: LINS e GIMENEZ, 1997, p.24).

para a formação profissional do professor de Matemática. Lins (2005) sugere que examinemos

> as possibilidades de formação profissional de professores de Matemática em cursos usualmente entendidos como apenas 'cursos de conteúdo', isto é, que oportunidades podem ser aproveitadas, para oferecer ao futuro professor experiências que efetivamente promovam seu desenvolvimento profissional, sempre entendido no sentido de ampliação de horizontes, e nunca no sentido de uma (p)reparação técnica em uma direção específica. Em outras palavras, irei examinar as possibilidades de se transformar cursos de Matemática em cursos de Educação Matemática [...] [e] realizar a formação do professor, substituindo-se a dicotomia 'Pedagogia/ Matemática' por 'Educação Matemática', e a dicotomia 'teoria/ prática' por 'teorizar'. (LINS, 2005, p. 119, 123).

Ou seja, os licenciandos devem ter contato com disciplinas matemáticas de um modo tal que estas permitam a reflexão acerca dos conceitos matemáticos lá discutidos, e que eles façam uma análise de como este conjunto de disciplinas pode contribuir para sua futura prática docente.

Lins (2004c) acredita que:

> a Matemática do professor de matemática é caracterizada por nela serem aceitos, além dos significados matemáticos, significados não - matemáticos. Há os tradicionais exemplos, como o de que 'fração é pizza', 'decimais são dinheiro' e 'números negativos são dívidas'. Mas isto não basta, porque o professor não tem que dar conta apenas do que concorda com o que ele diz, com o que está 'certo'. O professor precisa ser capaz de ler o que seu aluno diz, mesmo que esteja 'errado', tanto quanto como quando está 'certo'. (LINS, 2004c, p. 01-13).

E, ainda cita que "que a MPM é 'maior' do que a MM, que a primeira engloba esta última" [40] (LINS, 2004b, tradução nossa). Assim como o autor, acreditamos que na Matemática do Professor de Matemática devem estar contidos tanto o modo de produção de significados dos matemáticos profissionais, quanto os diversos modos de produção de significados apresentados por seus alunos, "certos" ou "errados".

Analisando pesquisas que se dedicam a estudar a formação profissional do professor de Matemática, percebemos que é constante o questionamento: *como estruturar a grade e as ementas da Licenciatura em Matemática de modo a transformá-la em uma Licenciatura em Educação Matemática?* E, a partir

[40] O autor utiliza as abreviações MM - Mathematics of the Mathematician, para designar a Matemática do Matemático e MMT - Mathematics of the Mathematics Teacher, para designar a Matemática do Professor de Matemática.

dele, podemos refletir: *o futuro professor de Matemática deve mesmo ter contato com uma Matemática "mais avançada", "acadêmica", "formal"?Se sim, como isto deve ser feito?*

Segundo Fiorentini (In: MOREIRA & DAVID, 2005, p.9), referindo-se especificamente ao caso do ensino de números – o que não impede que estendamos esta ideia a outros conteúdos matemáticos – cita que

> o futuro professor precisa conhecer também seus processos e significados formais não para depois transpô-los didaticamente[41] a seus alunos da escola básica, mas para discuti-los e analisá-los criticamente, avaliando seus limites e possibilidades enquanto objeto de ensino. O professor, desse modo, qualifica-se para, com mais autonomia, explorar e problematizar as formas conceituais pedagogicamente mais significativas ao desenvolvimento do pensamento matemático do cidadão contemporâneo. (FIORENTINI apud MOREIRA & DAVID, 2005, p.11).

Outros autores, como Moreira e David (2005) especialistas na área de formação de professores[42], afirmam que este profissional

> [...] deverá, no mínimo, conhecer como os algoritmos funcionam, a lógica operacional deles, as possíveis dificuldades dos alunos na sua utilização, etc. Assim, o conhecimento sobre os algoritmos formais ainda continua sendo parte da demanda da prática profissional docente na escola básica de hoje e, consequentemente, essa questão se coloca, também, para o processo de formação na Licenciatura. (MOREIRA e DAVID, 2005, p.59).

Percebemos que, um curso de caráter "conteudista" - ministrado dentro da perspectiva da Educação Matemática –, a nosso ver, deve proporcionar ao licenciando o contato com conceitos Matemáticos avançados, mesmo que futuramente não tenha que ensiná-los. Pois o professor deve ter consciência de que

> a escola é, sim, lugar de tematizações, de formalizações. Esse é um papel importante que ela deve cumprir, o de introduzir as crianças em sistemas de significados que constituem o que Vygotsky chamou de conceitos científicos, e que correspondem a um corpo de noções sistematizadas. (LINS E GIMENEZ, 1997, p.23).

---

[41] Na obra intitulada La Transposicion Didáctica, Yves Chevalard analisa que: "[...] um conteúdo de saber que é designado como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre <u>os objetivos de ensino</u>. O 'trabalho' que transforma um saber a ensinar em um objetivo de ensino é denominado <u>transposição didática</u>." (CHAVALARD apud MOREIRA & DAVID, 2005, p. 18, grifos do autor).

[42] Nesta citação os autores referem-se ao estudo de números Naturais.

Acreditamos que esta reflexão acerca dos conceitos envolvidos nestes cursos poderá contribuir para que, ao lecionar em níveis escolares, o professor tenha condições de visualizar o conteúdo de maneira global, ter conhecimento de sua forma mais abstrata e, como consequência, ser capaz de contextualizar e problematizar situações que estimulem a produção de significados de seus alunos.

Ressaltamos ainda que

> A formação matemática na licenciatura, ao adotar [apenas] a perspectiva e os valores da Matemática Acadêmica, desconsidera importantes questões da prática docente escolar que não se ajustam a essa perspectiva e a esses valores. As formas do conhecimento matemático associado ao tratamento escolar dessas questões não se identificam – algumas vezes chegam a se opor – à forma com que se estrutura o conhecimento matemático no processo de formação. Diante disso, coloca-se claramente a necessidade de um redimensionamento da formação matemática na licenciatura, de modo a equacionar melhor os papéis da Matemática Científica e da Matemática Escolar nesse processo. (MOREIRA e DAVID, 2005, p.103).

Relacionado a esta discussão, o projeto intitulado “Um quadro de referência para as disciplinas de Matemática num curso de Licenciatura” (2002), coordenado pelo professor Romulo Lins teve como objetivos principais realizar

> o estudo da Matemática que o professor de Matemática precisa saber, isso agora do ponto de vista do professor e de sua prática (presente ou futura) e não apenas do ponto de vista do que pode ser oferecido a ele em sua formação inicial ou continuada, e que pudesse, em relação aos conceitos matemáticos, proporcionar a ele uma maior lucidez matemática entendida agora, de forma mais clara, como algo que lhe permita exercer melhor sua profissão. (LINS, 2002).

Este e outros projetos de pesquisa têm contribuído para que possamos refletir um pouco mais sobre como devemos caracterizar e estruturar nossa pesquisa. Além disso, leituras como estas que acabamos de citar, confirmam que cursos conteudistas ministrados com o enfoque da Educação Matemática e que levem em conta a ampliação de horizontes do futuro professor de Matemática, podem e devem contribuir para a sua formação pré- serviço, enquanto estudante de Graduação.

E, em consonância com a fala de Nacarato e Paiva (2008), acreditamos que

> As pesquisas que tomam os saberes docentes como objeto de estudo já rompem com a concepção de que o bom professor é aquele que tem apenas o domínio do conteúdo. Não significa, porém, negar a importância dos conteúdos, mas partir do pressuposto de que o saber docente vai além dessa única dimensão do conhecimento. (NACARATO & PAIVA apud PROCOPIO, 2012, p. 23).

3.3. Curso de Serviço

O fato de a matemática universitária mostrar-se muito distante da matemática ensinada nas escolas secundárias abriu espaço para que a comunidade acadêmica se preocupasse com a forma de ensinar a Matemática.

Esta preocupação iniciou-se no século XIX e motivada pelas diversas mudanças ocorridas na sociedade e nas propostas de ensino desta disciplina, foram desencadeados movimentos de dimensão internacional, que são considerados marcos da história da Educação Matemática.

A partir de então os movimentos partiram em defesa deste descompasso entre universidade e escola. O primeiro deles, o IV ICM [43], é lembrado pela criação da *Commission Internationale de L' Enseignement Mathématique* e, além disso, por procurar "na intuição e nas aplicações da Matemática a outras áreas do conhecimento os elementos fundamentais para a elaboração de sua proposta" (MIORIM, 1998).

Uma das principais cosequências desta nova postura frente à metodologia de ensino deste conteúdo foi a intenção de se criar os Cursos de Serviço que, segundo Procópio (2011),

> foram idealizados para caracterizar disciplinas de matemática dos cursos universitários que não se limitavam ao desenvolvimento do conteúdo específico e buscavam contribuir com a formação do futuro profissional. (PROCOPIO, 2011, p.17).

O principal propósito de cursos assim caracterizados seria fazer com que o processo de ensino do conteúdo teórico/técnico, especificamente o matemático, estivesse intimamente associado à respectiva prática do

---

[43] A proposta de criação da Comission Internationale de l'Enseignement Mathématique – CIEM foi apresentada durante Quarto Congresso Internacional de Matemática (ICM), realizado em abril de 1908 em Roma. (MIORIM, 1998).

profissional. Ou seja, teoria e prática seriam concomitantemente ensinadas e não fragmentadas de acordo com esta concepção.

Mais especificamente, em relação à Educação Matemática e à Licenciatura em Matemática:

> Entendemos como Cursos de Serviço, disciplinas que tenham como foco a formação do professor de matemática, mas que não se limitam a desenvolver conteúdo matemático. Elas se propõem a intervir, também, na sua formação didático-pedagógica. (SILVA, 2011, p.2).

Em sua dissertação de mestrado intitulada *Geometria como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: Uma leitura da perspectiva do Modelo dos Campos Semânticos* (PROCÓPIO, 2011), o autor cita que a Comission Internationale de l'Enseignement Mathématique – CIEM

> teve como objetivo inicial diagnosticar a situação do ensino da matemática, para estudantes que são primariamente mais engajados com o estudo de outras disciplinas e identificar o que a matemática deveria ensinar, para satisfazer as necessidades específicas destes cursos, possibilitando um maior envolvimento com a formação profissional dos alunos.(PROCÓPIO, 2011, p.18).

Ainda conforme este autor, em 1987, na cidade italiana de Udine, foi realizado um seminário para discutir como a Matemática poderia contribuir nas diversas formações profissionais e, a partir daí "a terminologia 'Curso de Serviço' passa a ser utilizada para caracterizar esta forma de desenvolvimento de uma disciplina de conteúdo específico" (PROCÓPIO, 2011, p.19).

Atualmente, as disciplinas chamadas de conteúdo matemático, como o Cálculo Diferencial e Integral, a Álgebra Linear e a Geometria Analítica, por exemplo, são ministradas a alunos de diversos cursos de graduação com enfoque único. Ou seja, elas se enquadram na definição apresentada aqui para Curso de Serviço, mas não têm contribuído de forma intencional na formação profissional dos alunos.

E, além disso, apesar deste conceito já existir há mais de vinte anos, o que ainda se vê, na maioria das universidades brasileiras, é que as disciplinas cursadas por alunos de Licenciatura em Matemática, que é para onde voltamos nosso olhar, ainda são divididas em dois grupos: um de conteúdo matemático, que se preocupa apenas em ensinar apenas o conteúdo matemático e; um composto de disciplinas didático-pedagógicas. Como consequência, conteúdo e prática profissional ficam fragmentados.

O que percebemos é que tanto educadores matemáticos quanto matemáticos preocupados com sua prática docente mostram-se interessados em formar professores de matemática mais qualificados, mas não conseguem implantar nas universidades em que trabalham cursos que unam estes dois tipos de enfoque – pedagógico e conteudista[44]. Além disso, muitos educadores universitários

> que ministram tais disciplinas [conteudistas] geralmente não têm consciência de que participam dessa dupla – eu diria múltipla – formação do futuro professor. Esse fato nos remete a defender que essa dupla/ múltipla função do formador seja reconhecida por todos e assumida como uma função fundamental à formação do futuro professor. (FIORENTINI, 2005, p.113).

Segundo Moreira e David (2005):

> Os licenciandos se vêem diante do problema de desenvolver sua ação pedagógica em sala de aula a partir de uma formação que não lhes proporcionou acesso à discussão de uma série de questões fundamentais na prática escolar. (MOREIRA E DAVID, 2005, p.102).

Percebemos que a principal dificuldade encontrada por estes professores ao iniciar sua vida profissional é

> identificar e reconhecer como legítimas e importantes certas formas de conhecimento que, embora se distanciem das formas válidas da Matemática Científica, são cruciais na educação básica porque se vinculam ao processo de construção escolar do saber matemático. (MOREIRA E DAVID, 2005, p.102).

Nosso interesse em analisar as possíveis contribuições de uma disciplina de conteúdo específico (matemático) na formação profissional dos professores de Matemática – seja ela, pré-serviço ou em serviço[45] – foi, em grande parte, influenciado pelo fato de acreditarmos que “estas disciplinas influenciam mais a prática do futuro professor do que as didático-pedagógicas” (FIORENTINI, 2005, p.111). E, com isso, ao iniciar sua prática docente, os

[44] Acreditamos que “para atuar como educador o professor universitário deverá assumir uma postura crítico- reflexiva diante da situação sócio – político – econômico – cultural do país, como especialista e como professor. Além de treinar profissionais bem informados, cuidará de desenvolver neles a atitude científica: pensamento autônomo, criativo, crítico, dentro de sua especialidade e vinculado com a realidade social em que vive”. (SERBINO, 1982, p.26).

[45] Entendemos a expressão “formação em serviço” como sendo a formação continuada do professor, após a conclusão de sua graduação. E “formação pré-serviço” como sendo a formação inicial do professor, enquanto estudante de graduação.

professores “tendem a mobilizar aqueles modos de ensinar e aprender Matemática que foi internalizado durante sua formação escolar ou acadêmica” (FIORENTINI, 2005, p.111).

Para finalizar esta seção, acreditamos que

> Assim como os Cursos de Serviço foram criados a partir do reconhecimento da existência de diferenças entre a matemática do matemático e as matemáticas aplicadas, o Curso de Serviço para a Licenciatura de Matemática [deve] considera[r] as diferenças entre a matemática do Matemático e a matemática do professor de Matemática. (PROCÓPIO, 2011, p.21).

Pesquisar sobre este modo de conceber os cursos “conteudistas” é importante por três motivos

> 1) Numericamente, pois envolve um grande número de matemáticos lecionando em cursos não-matemáticos, como Economia, Engenharias e Ciência da Computação; 2) Socialmente, corresponde ao impacto da matemática em todos os aspectos do cotidiano; 3) Intelectualmente, devemos observar sob diferentes ângulos, percebendo que os diferentes aspectos provêm de campos matemáticos que podem ser inseridos em uma variedade de situações cotidianas. ‘Além disso, devemos levar em consideração a diversidade de alunos e as diferenças entre as instituições de ensino superior. ’ (HOWSON et al apud NOMURA, 2008, p.18).

3.4. Alguns Pressupostos Teórico-Epistemológicos

O objetivo central de nosso trabalho é compreender que abordagem deve ser dada à disciplina Álgebra Linear ministrada a alunos de Licenciatura em Matemática, segundo a perspectiva de Curso de Serviço discutida na seção anterior. Para alcançá-lo, realizamos como pesquisa de campo um seminário no qual investigamos a aplicação desta disciplina a licenciandos em matemática[46].

Com o andamento da pesquisa nosso foco foi modificado, passando de um olhar mais centrado na parte matemática da disciplina, para a construção de uma abordagem reflexiva acerca dos conceitos matemáticos envolvidos e sua relação com a formação inicial do professor de matemática.

---

[46] Tal pesquisa será discutida a partir do capítulo seguinte.

Este direcionamento, nos fez compreender que havia a necessidade de bem delimitar qual seria a postura de um professor que ministrasse esta disciplina – especificamente a alunos de Licenciatura em Matemática –, postura esta construída a partir das noções do Modelo dos Campos Semânticos, envolvida pela concepção de Curso de Serviço e de pontos importantes levantados ao longo de nossa Revisão de Literatura.

O Capítulo de Revisão da Literatura teve como propósito unir as três frentes de investigação que orientam a nossa pesquisa. Para isso, analisamos diversos trabalhos de Educação Matemática de autores que, mesmo dentro de seus campos particulares de pesquisa, mostram-se preocupados com a formação do professor de Matemática e com a possibilidade de possuirmos, em nossas licenciaturas, cursos de conteúdo matemático contribuindo intencionalmente na futura prática profissional dos licenciandos.

Ao realizar a revisão de trabalhos divididos nas três seções anteriores, pretendíamos alcançar o ponto de intersecção das mesmas, ou seja, queríamos compreender como a união das potencialidades de cada uma destas áreas poderia esclarecer nossos questionamentos e sustentar nossa pesquisa.

Aliado ao que fizemos no fim do Capítulo 2, portanto, apresentaremos mais alguns pressupostos teórico-epistemológicos que formam uma base para este estudo. Por utilizarmos uma grande quantidade de pesquisas embasadas pelo MCS, ressaltamos que muitas das contribuições obtidas com a construção desta seção têm relação com algumas das ideias discutidas no capítulo anterior.

Acreditamos que esta revisão possibilitou-nos enxergar algumas contribuições a serem aplicadas a cursos conteudistas ministrados a professores / futuros professores de matemática, a saber:

i) propor reflexões sobre a importância de se realizar uma leitura da produção de significados do aluno e de procurar com esta, realizada de forma plausível, perceber onde e como o estudante está operando para, com isso, realizar intervenções em sua aprendizagem procurando ampliar, e não substituir, seus modos de produção de significado;

ii) possibilitar o contato com diferentes modos de produção de significados, além dos seus, para que ao entrar em sala de aula, o professor possa perceber e respeitar os significados matemáticos e não matemáticos apresentados pelos alunos;

iii) possibilitar o contato tanto com a matemática Acadêmica tanto quanto com a matemática Escolar, para saber se relacionar e compreender as duas categorias de significados citados anteriormente.

Além disso, esta última consideração também apoia o fato de disciplinas, como Álgebra Linear pertencerem à grade da Licenciatura em Matemática, pois nos indica que o licenciando deve transitar “tanto no jardim do matemático”[47] quanto fora dele.

Além disso,

> É preciso que a escola tenha a dignidade de admitir que significados matemáticos são *mais um* modo de produzir significado, e não o único, e mais, que os significados matemáticos e os não-matemáticos são *diferentes*. Apenas assim, permitindo a legitimidade dos significados não-matemáticos na escola, poderemos aspirar à legitimidade dos significados matemáticos fora da escola. (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 165, grifo do autor).

E assumir a seguinte postura educacional frente a nossos alunos:

> Não sei como você é: preciso saber. Não sei também onde você está[48] (sei apenas que está em algum lugar); preciso saber onde você está para que eu possa ir até lá falar com você e para que possamos nos entender, e negociar um projeto no qual eu gostaria que estivesse presente a perspectiva de você ir a lugares novos. (LINS, 1999, p.85).

Como podemos ver o processo de produção de significados é extremamente importante para nós. Por isso, gostaríamos de apontar, apoiados por Lins e Gimenez (2001), mais alguns aspectos que devem ser considerados ao se analisar este processo envolvido em situações de sala de aula. São eles

> i) a atividade em questão, e também a tarefa que a origina;
>
> ii) os significados sendo produzidos - e, portanto, o núcleo (os núcleos) em jogo;

[47] Conforme LINS, 2004a.

[48] Com relação ao fragmento “onde está” o autor se refere à legitimidade dos significados para a pessoa e não a estágios de desenvolvimento. (LINS, 1999, p.85).

> iii) o possível processo de transformação do(s) núcleo(s), e as possíveis rupturas na direção de novos modos de produção de significado;
>
> iv) os textos sendo produzidos - notações, digramas, escrita, fala, gestos, e sua eventual constituição em objeto;
>
> v) o papel do professor como interlocutor;
>
> vi) os alunos como interlocutores uns dos outros;
>
> vii) interlocutores não-presentes;
>
> viii) a existência e certos modos de produção de significados que queremos que os alunos dominem; e,
>
> ix) a existência de certas *afirmações* que eles venham a assumir como corretas. (LINS e GIMENEZ, 2001, p.146, grifo do autor).

Para finalizar este capítulo, queremos ressaltar ainda, a importância da formação continuada do professor. Percebemos que mesmo que o professor tenha a oportunidade de cursar disciplinas, em sua graduação ou pós-graduação, com o enfoque proposto aqui, é necessário que reflitam constantemente sobre sua prática em sala de aula, “em serviço”, pois à medida que a sociedade evolui, a escola e, consequentemente os alunos, se modificam e necessitam de uma sala de aula que acompanhe esta evolução, pois acreditamos que

> [...] a formação pré-serviço pode prover apenas a condição inicial para a inserção profissional do futuro professor, e que é apenas a formação em serviço, continuada, que pode garantir que alcancemos o nível de qualidade que buscamos para nosso sistema escolar. (LINS, 2002, p.3, grifo nosso).

A construção desta seção e da seção 2.3, nos possibilitou ir a campo com uma visão mais refinada de nossos objetivos, o que julgamos ser de grande importância, uma vez que, foi este olhar e a postura aqui proposta que tornou este seminário diferente dos outros cursos de Álgebra Linear e apontou e apontará novos horizontes para as pesquisas futuras e, até mesmo possibilitar uma alternativa de reflexão e estruturação das disciplinas de conteúdo matemático voltada à Licenciatura em Matemática.

Capítulo 4

A Metodologia da Pesquisa

A presente pesquisa caracteriza-se por uma abordagem qualitativa no sentido proposto por Bogdan e Biklen (1994).

Segundo os autores

> Tal como a definimos, a investigação qualitativa possui cinco características. [...] 1. Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.[...] 2. A investigação qualitativa é descritiva.[...] 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.[...] 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.[...] 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (BOGDAN e Biklen,1994).

Ressaltamos que esta visão de pesquisa sustenta junto com nosso referencial teórico-epistemológico, o Modelos dos Campos Semânticos, nossa pesquisa de campo, bem como todo nosso estudo.

4.1. A pesquisa de campo

Acreditamos, em consonância com Lins (2005) que mesmo quando se diz que um "curso de Cálculo é apenas isso, um curso de conteúdo matemático, está, ao fim das contas, afirmando uma ideologia" (LINS, 2005, p.119). O que queremos dizer, apoiados pelo autor, é que todas as experiências de ensino e aprendizagem constituem possibilidades de desenvolvimento profissional para o professor de Matemática.

Além disso, é muito comum ouvirmos que os cursos de conteúdo matemático são exemplos de aprender a como não dar aula, pois influenciam, em sua maioria, tão negativamente que os licenciandos querem ministrar suas aulas bem diferentes das que tiveram.

O que vamos propor em nossa pesquisa de campo é um curso no qual temos consciência de que nossa prática estará influenciando os alunos (sujeitos de pesquisa), futuros professores, que estará "afirmando uma ideologia" e ainda, nossa proposta será influenciada fortemente pelos pressupostos teórico-epistemológicos – apresentados nos capítulo anteriores – os quais julgamos contribuir para desenvolver um ambiente propício à reflexão sobre a prática docente.

Neste capítulo, descreveremos como foi elaborada nossa pesquisa de campo que se constitui, portanto, em um curso de Álgebra Linear de ementa livre, na modalidade de Seminário, voltada especificamente a alunos de Licenciatura em Matemática, sustentado pela concepção de Curso de Serviço apresentada anteriormente.

Este curso foi denominado de "Seminário de Álgebra Linear"[49], o qual foi ministrado por nós e pelo professor/pesquisador Vitor R. Almeida, aluno do mesmo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática que o nosso.

Os encontros do seminário aconteceram num período de dois meses aproximadamente, no período de dezembro de 2012 a janeiro de 2013. No total, foram realizados nove encontros, entre os quais seis deles se dedicaram ao estudo dos Espaços Vetoriais, pertinentes à nossa pesquisa e os restantes, ao estudo das Transformações Lineares que será discutido no trabalho do professor-pesquisador Almeida (2013). Chamamos atenção ao fato de que toda a estruturação da pesquisa de campo, bem como sua execução, também foi realizada em parceria com este pesquisador.

Durante toda a aplicação do seminário realizamos encontros semanais[50] nos quais discutíamos desde a reserva de salas, para realizarmos as aulas, até a elaboração das tarefas a serem aplicadas nos encontros.

Como nosso foco era a formação matemática do licenciando, passamos a investigar em nossa universidade alunos que cursassem a modalidade de licenciatura e possuíssem a intenção de atuar como professor para participar de nossa pesquisa.

Na etapa inicial, tivemos muita dificuldade em encontrar alunos com este perfil e que possuíssem disponibilidade de horário compatível com a nossa. Além disso, outros dois fatores dificultaram nossa aproximação destes alunos,

[49] Este seminário não contabilizou créditos curriculares aos alunos que participaram das aulas.
[50] Os encontros foram interrompidos apenas pelo recesso de fim de ano, paramos no encontro de 21 de dezembro e retomamos no dia 07 de janeiro.

primeiro que nossa universidade conta apenas com um curso de Licenciatura em Matemática no período noturno e, segundo que, nos outros períodos temos apenas com o Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciências Exatas, no qual os alunos cursam inicialmente um conjunto de disciplinas comuns aos cursos de exatas e, posteriormente, podem optar por seguir outras modalidades de graduação distintas desta licenciatura específica.

Ao final do momento de preparação, conseguimos dois estudantes com disponibilidade compatível com a nossa. Um deles que cursa Licenciatura em Matemática e outro aluno Bacharelado em Ciências Exatas, ambos com intenção em seguir a carreira de professor de Matemática.

Paralelamente a esta busca por alunos com o perfil desejado, fomos construindo os pressupostos que nos sustentariam na pesquisa de campo e que foram apresentados e discutidos nos Capítulos 2 e 3, além de elaborar o material que utilizaríamos nas aulas.

Ressaltamos que estes pressupostos foram de fundamental importância para que realizássemos uma leitura suficientemente fina da sala de aula analisada e, com isso, alcançássemos os objetivos dessa pesquisa.

Durante os encontros procuramos colocar em prática[51] estes pressupostos de modo a verificar e analisar que um curso de serviço sustentado por eles pode conduzir o licenciando a uma formação mais consciente e reflexiva de sua futura prática docente. Acreditamos, portanto, que estes pressupostos teórico-epistemológicos constituem algumas das características as quais julgamos serem necessárias a um curso de serviço de Álgebra Linear voltado à formação do futuro professor de matemática.

Com relação à formação profissional desses estudantes, procuramos visar tanto o sentido conteudista – definições e Teoremas presentes na teoria de Álgebra Linear, por exemplo – quanto no sentido didático-pedagógico, ou seja, contribuindo de forma global em sua formação como educador matemático, seja em qual nível de ensino tenha intenção de atuar.

---

[51] Durante os encontros que discutimos a teoria de Espaços Vetoriais assumimos a postura de observadora, o mais neutra possível, enquanto nosso parceiro de pesquisa ministrava as aulas. E durante os encontros em que discutimos a teoria de Transformações Lineares os papéis se inverteram. Essa inversão se deu pelo fato de acreditarmos que conseguiríamos coletar e analisar melhor a sala de aula, enquanto pesquisadores, se não tivéssemos a preocupação principal de conduzir o andamento da aula como professor regente.

Após diversas discussões no interior de nosso grupo de pesquisa, optamos em utilizar nas aulas um material dividido em Fichas de Trabalho as quais seriam construídas a partir dos temas mais relevantes de um curso de Álgebra Linear.

As Fichas de Trabalho foram escritas abrangendo um ou mais conceitos de Álgebra Linear, escolhidos com o intuito de levar o aluno a fazer conexões entre os mesmos e perceber sua importância individual e global para a teoria dos Espaços Vetoriais.

Todo o texto utilizado foi escrito a partir de um material criado por Silva (2010) para servir de suporte didático nos cursos de Álgebra Linear que este ministra numa Universidade pública brasileira. Este material foi elaborado e reformulado por ele a partir de suas pesquisas em Educação Matemática, principalmente, sua dissertação de Mestrado e tese de Doutorado onde investigou temas relacionados à produção de significados para a Álgebra Linear[52]. Além desse material consultamos diversos livros comumente indicados para este curso.

Antes de prosseguirmos na descrição do material utilizado, apresentaremos o perfil de nossos dois sujeitos de pesquisa, uma vez que, o material e a dinâmica de sua utilização foram elaborados de modo a contemplar, da melhor maneira possível, a formação destes dois alunos aliada aos objetivos da pesquisa. Com o intuito de formalizar sua participação, entregamos aos dois participantes um termo de compromisso ético e uma ficha cadastral e, além de mostrar como utilizaríamos o material coletado durante as aulas, aconselhamos que escolhessem um pseudônimo com o objetivo de preservar sua identidade.

O primeiro que se mostrou interessado em participar foi o aluno cujo pseudônimo será Euclides, estudante de Licenciatura em Matemática, que cursava Ciência da Computação, na mesma instituição e, devido a sua insatisfação com o rumo que sua formação tomava, optou por fazer esta Licenciatura antes mesmo de se formar.

Neste primeiro curso, Euclides teve o contato com diversas disciplinas que são ministradas também aos alunos da Licenciatura em Matemática, como

[52] Ver mais em Silva (1997) e Silva (2003).

Geometria Analítica e os Cálculos, mas não havia tido a oportunidade de cursar Álgebra Linear. E, ao ingressar nesta Licenciatura, ele cursou outras disciplinas específicas dos alunos da matemática, como Análise Real e Estruturas Algébricas.

Ao cursar Geometria Plana e Geometria Espacial, Euclides teve o contato com uma metodologia alternativa ao Ensino Tradicional Vigente (ETV)[53]. Estes dois cursos possibilitaram, entre outros fatores a importância do diálogo em sala de aula e a postura do docente de procurar refletir sobre sua prática. Em todos os encontros Euclides sempre se mostrou muito atento e participativo às discussões propostas, tanto conosco, quanto com o outro participante da pesquisa.

Pela análise feita das aulas, acreditamos que, este seminário contribuiu em um aspecto muito importante para este aluno: por não ter cursado Álgebra Linear, ele teve a oportunidade de estudá-la sem a cobrança imposta pelos instrumentos avaliativos tradicionais, mas com um empenho genuíno e direcionado à aprendizagem do conteúdo e, especialmente, direcionado à sua formação profissional. Além disso, como nunca atuou como professor regente apresentou grande interesse nas discussões que envolviam a prática de sala de aula.

Nosso segundo sujeito de pesquisa, cujo pseudônimo será Simba, é aluno do Bacharelado Interdisciplinar em Ciências Exatas. Assim como Euclides, Simba nunca atuou como professor de Matemática e, acreditamos, novamente, este foi um fator que estimulou as discussões voltadas à formação do licenciando. Outro fator que aproximava o perfil dos dois alunos foi que Simba também já havia cursado as disciplinas Análise Real e Estruturas Algébricas.

Em relação às disciplinas, Simba já havia cursado Álgebra Linear uma vez, tendo sido reprovado e, paralelamente à realização do seminário, ele a cursou novamente. Um dos pontos que motivaram este aluno a participar do seminário foi que, apesar de já ter estudado o conteúdo, Simba não se sentia seguro quanto ao mesmo e, segundo ele, não sabia sequer dizer o que seria um Espaço Vetorial, uma das questões centrais da disciplina. Este foi um dos

[53] Como descrito no Capítulo 2.

fatores que possibilitou que o aluno se dispusesse a participar dos encontros com muita dedicação.

Além disso, acreditamos que a troca de experiência entre dois alunos, um com e outro sem experiência em Álgebra Linear, possibilitou uma discussão bastante rica na direção da variedade da produção de significados.

Voltaremos agora à apresentação de nossas escolhas para a elaboração do material utilizado no seminário.

Nossa primeira e, talvez, a mais importante e decisão, era escolher entre duas abordagens: primeira, um curso de Espaços Vetoriais que procurasse estudar de um modo geral os Espaços Vetoriais, operações usuais e não-usuais e diferentes corpos de escalares e; uma segunda, que focasse em um Espaço Vetorial IR^n com operações usuais e sobre o corpo dos Reais.

Optamos pela segunda abordagem, motivados por alguns fatores: por possuirmos um tempo para a conclusão de nosso estudo, deveríamos estruturar uma pesquisa de campo que desse conta de nossos objetivos dentro dos prazos estipulados, portanto, optamos por realizar o estudo dos conceitos mais importantes deste tópico da Álgebra Linear focado apenas no Espaço Vetorial IR^n, sobre o corpo IR e munido das operações usuais de Adição e Multiplicação por Escalar e seus respectivos subespaços.

Com isso, acreditamos que tivemos tempo de apresentar e discutir os conceitos ali envolvidos de forma que estivessem em acordo com nossos pressupostos teórico-epistemológicos e contemplassem nossos objetivos, ou seja, os objetivos de nosso trabalho orientaram a escolha dos conteúdos.

Além disso, nossa proposta visava mais do que, apenas, a discussão dos conceitos da teoria de Espaços Vetoriais, pois acreditamos que o estudo deste conteúdo aliado aos pressupostos que nos sustentam podem possibilitar, entre outras, as seguintes contribuições ao licenciando em Matemática:

- O contato com a Matemática Acadêmica e a vivência de situações de estranhamento;

- Uma concepção mais abrangente da teoria de conjuntos e estruturas algébricas;

- Uma análise mais abrangente das operações e suas propriedades;

- Uma leitura refinada de definições e enunciados, tanto de Teoremas quanto de tarefas;

- Lucidez matemática ao analisar demonstrações;

- A realização de conexões entre conteúdos estudados em níveis de ensino distintos, como por exemplo, a noção de Independência Linear e o estudo de Sistemas de Equações Lineares.

Além disso, destacamos que alguns tópicos comumente discutidos na seção de Espaços Vetoriais dos cursos tradicionais de Álgebra Linear – como, Operações entre Espaços Vetoriais e Espaço com Produto Interno – foram intencionalmente suprimidos, pois acreditamos que os conceitos escolhidos já possibilitavam que realizássemos nossa pesquisa de campo com elementos suficientes à nossa análise e, também, devido ao fato de que o tempo de realização da pesquisa é estabelecido e, relativamente reduzido, como já mencionamos.

Como já dissemos anteriormente, a teoria estudada no seminário foi dividida em Fichas de Trabalho as quais apresentaremos e descreveremos abaixo:

- **Ficha de Trabalho 1 – O Espaço Vetorial IR^n**: apresentamos o conjunto IR^n, as operações usuais de Adição e Multiplicação por Escalar; as propriedades as quais estas operações satisfazem; alguns tópicos de discussão sobre o conteúdo, com o objetivo de esclarecer algumas possíveis dúvidas e motivar a discussão da teoria; algumas propriedades decorrentes da definição de espaço vetorial e; a realização de algumas tarefas com o intuito de possibilitar mais um momento de discussão dos conceitos envolvidos.

- **Ficha 2 – Subespaços Vetoriais do IR^n**: apresentamos as condições que um dado conjunto deve satisfazer para ser um subespaço vetorial do IR^n e; alguns tópicos de discussão sobre a relação dos Espaços com seus respectivos subespaços.

- **Ficha 3 – Geração de Espaços Vetoriais**: apresentamos os conceitos de Combinação Linear, Conjunto Gerador e Dependência / Independência Linear; em cada um deles também foram propostos alguns tópicos de discussão e tarefas específicas para cada conceito e, ao final da Ficha, que fizessem conexões entre os mesmos.

- **Ficha 4 – Base e Dimensão de Espaços Vetoriais**: apresentamos os conceitos de Base e Dimensão de Espaços Vetoriais; alguns Teoremas decorrentes das definições; observações, tópicos de discussão e tarefas. No fim desta Ficha apresentamos um Esquema-Resumo apresentando as conexões entre os conceitos estudados e algumas sugestões de discussões.

O que fizemos neste capítulo foi apresentar como foi estruturada nossa saída a campo e qual é o perfil dos participantes da pesquisa.

Entendemos que este curso nos oferecerá, entre outras coisas, uma oportunidade de refletir em que circunstâncias os cursos de conteúdo matemático podem contribuir na prática docente de professores de Matemática.

Devemos ressaltar ainda dois aspectos importantes de nossa pesquisa de campo fundamentais à compreensão da mesma. O primeiro refere-se ao fato de que o seminário proposto e executado por nós constituiu-se apenas em um momento de análise, discussão e elaboração de uma proposta de Curso de Serviço de Álgebra Linear voltado a alunos de licenciatura em Matemática. Portanto, mesmo tendo ido a campo com o embasamento teórico-epistemológico necessário, nós pesquisadores sabíamos que esta era apenas uma etapa de nosso estudo.

E o segundo aspecto diz respeito ao olhar que demos a esta sala de aula particular. Durante o decorrer das aulas não procuramos levantar, a partir da fala dos alunos, suas possíveis dificuldades – entendidas por nós ou como obstáculos ou como limites epistemológicos – e nem mesmo propusemos apenas sua análise e discussão por si mesmas como forma de reflexão dos processos ali envolvidos. Nossa proposta era realizar, com base em nosso referencial teórico e em nossa revisão de literatura, um levantamento de algumas das possíveis características de um Curso de Serviço de Álgebra Linear para licenciandos em Matemática.

4.2. O Produto Educacional

Como nossa pesquisa está vinculada a um Mestrado Profissional em Educação Matemática temos apontado nosso olhar para duas direções que não são distintas, mas que se configuram estruturalmente em dois blocos. Um deles será a própria dissertação de Mestrado e o outro, o Produto Educacional, uma parte importante da pesquisa na qual aplicaremos nossas reflexões colhidas ao longo da construção da dissertação.

É por esse motivo que acreditamos que esses blocos não possuem focos distintos, pois enxergamos o segundo deles como uma consequência – um “produto” – da construção do primeiro e de nosso próprio crescimento como professores/pesquisadores ao longo de sua elaboração.

Nossa pretensão, portanto, é construir um material didático direcionado a educadores universitários com o propósito de dar-lhes uma proposta alternativa de formação de professores focada no estudo dos espaços vetoriais. Além dos pressupostos teóricos, nosso Produto Educacional[54] contará com algumas noções que sustentam esta proposta e um material de Álgebra Linear com alguns comentários e sugestões metodológicas.

[54] Indicamos que além do Produto o leitor poderá contar com a leitura da dissertação para compreender de forma crescente a nossa proposta.

Capítulo 5
Análise das aulas

Neste capítulo apresentaremos uma análise de nossa pesquisa de campo e lembramos que o leitor terá acesso a informações mais detalhadas no anexo da dissertação, bem como poderá visualizar o material utilizado e reformulado após a análise das aulas, em nosso Produto Educacional.

O objetivo dos encontros era analisar uma sala de aula sustentada pelos pressupostos teórico-epistemológicos – apresentados e discutidos em capítulos anteriores e tomados como base para nossa postura em sala de aula – para responder às nossas questões de investigação.

Ao longo do período de preparação para o estudo de campo determinamos que um primeiro curso de Álgebra Linear para licenciandos em Matemática voltado ao estudo de espaços vetoriais deve ser estruturado com base no estudo do espaço vetorial IR^n, munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar, onde esses escalares são números reais, e seus subespaços correspondentes, como descrito no capítulo anterior.

Com isso, procuramos direcionar nosso olhar a um tipo específico de espaço vetorial apenas como ponto de partida das discussões e não como forma de delimitar a produção de significados dos alunos. Além disso, acreditamos que situações de sala de aula que procurem ampliar a visão dos alunos com relação aos conceitos envolvidos na teoria dos espaços vetoriais podem se mostrar – e se mostraram, como veremos a seguir – capazes de conduzir o aluno a não só compreender o que é o espaço vetorial IR^n, como definimos, bem como, fazer com que se interesse em buscar outras estruturas similares a esta.

Acreditamos que esta decisão de dar um norte e provocar situações que estimulem a ampliação da visão dos alunos está em consonância com o modo com o qual olhamos este nosso aluno, ou seja, por se tratarem de futuros professores, dois eram os enfoques: um como aluno, aprendiz da disciplina Álgebra Linear e o outro como futuro professor de matemática.

Este duplo olhar direcionou a abordagem com a qual iniciamos as fichas de trabalho. Em cada um dos encontros, pedíamos que os dois sujeitos da pesquisa lessem primeiro a teoria sem nenhuma intervenção nossa. Com isso, queríamos que eles pudessem ter um fala autônoma e, além disso, queríamos indicar-lhes que o professor / futuro professor deve ter condições de ler uma teoria, pertinente à sua área de conhecimento, e apresentar considerações acerca dos conceitos ali envolvidos.

Acreditamos que o professor de Matemática deve ter um caráter dinâmico e crítico quanto àquilo que lê e aprende – para si e para ensinar posteriormente. Dinâmico e crítico, aqui entendidos, no sentido de que ele deve procurar enxergar num texto aquilo de que necessita, procurando refletir acerca do mesmo, tendo condição de produzir ações enunciativas legítimas para si.

O que percebemos nos encontros é que os alunos mostraram-se à vontade em explicitar seu modo de produzir significados e inseriram novas ideias e conceitos aos apresentados no material didático oferecido a eles, como vemos nas seguintes situações.

Ao pedirmos que os alunos explicassem com haviam resolvido uma das tarefas, eles sentiam-se confortáveis em nos responder, como podemos ver em alguns recortes de nossos encontros.

Expondo sua opinião e argumentando acerca da teoria discutida, Simba cita que:

> Eu não concordo não. Porque não está falando que isso aqui é base. [...].
>
> Esses vetores, o IR^n que é gerado por esses vetores? O W?

Ou ainda, mostrando que a definição apresentada em outro momento não é legítima para si:

> Você quer que só lendo pra esta definição, vendo o que está escrito aqui, eu diga o que é um subespaço? Bom, eu sei que é porque já definiram assim pra mim, mas se eu aceito isso é uma pergunta bem/ que é um subconjunto não vazio eu concordo.

Já Euclides, analisando os detalhes de uma definição, diz:

> Mas pra ele estar na base ele tem que estar em V? Isso que eu não vi então. [...]
>
> Era esse detalhe da definição que eu não tinha visto.

Ou ainda, analisando/comparando significados algébricos e geométrico:

> Eu vou usar tipo assim, eu acho que não. Sabe por que, usando parte de geometria espacial, por exemplo, senão eu teria como representar fazer uma figura no espaço que/ acho que, <u>com três dá, com quatro não</u>. Porque eu poderia botar um cubo e representar ele aqui no espaço, né, aí talvez, <u>não tem figura de 4 dimensões</u>. [...]
>
> <u>Se vale para qualquer n vale pro IR^4</u>. O pior é que você <u>tenta ver</u> como é que fica isso e não dá.

A primeira definição que apresentamos foi a do espaço vetorial IR^n munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar, sobre o corpo IR. Com relação a esta definição duas foram as contribuições em relação à ampliação da produção de significados dos sujeitos de pesquisa:

Primeiramente, Euclides introduziu no diálogo o conceito de matrizes e verificou que é possível criar-se espaços vetoriais cujos elementos são matrizes. Ele, inclusive, verifica as operações em algumas matrizes particulares. E, por fim, conclui:

> Então, não é preciso ter representação geométrica para ser um espaço vetorial. [...]
>
> É. Eu acho que a definição de espaço é que é passada errada. [...] Agora espaço vai ser uma coisa diferente.

E, a segunda contribuição, foi que, ao discutirmos o trecho "sobre IR", presente na definição de Espaço Vetorial apresentada, os alunos sentiram-se incomodados com esta expressão e Simba – que já havia cursado Álgebra Linear – chega a nos dizer:

> Eu nunca entendi o que significa isso.

Esta discussão fez com que apontássemos não só as consequências da escolha de um corpo de escalares para o espaço vetorial, mas também pudemos dialogar acerca da importância de se ler e buscar compreender todos os conceitos envolvidos em definições, enunciados de tarefas e teoremas.

Ainda nesta situação, Simba chega a nos questionar também se, ao efetuarmos a multiplicação de um elemento de IR^n a um elemento de IR não obteríamos um elemento do tipo "IR^{n+1}". Esta fala possibilitou-nos explorar ainda mais a importância e compreensão das operações efetuadas entre elementos de espaços vetoriais e os elementos do corpo de escalares.

Estes momentos reforçam a importância de lermos a produção de significados de nossos alunos pois, como visto em Silva (1997),

> Muitas vezes, nós professores, desejamos que nossos alunos produzam significados em relação a nossos núcleos preferenciais. Mas a prática nos sugere que com a mesma freqüência e intensidade que desejamos, isso não acontece. (SILVA, 1997, p.80).

Outro fato ocorrido em nossa pesquisa e comumente visualizado em sala de aula é o processo de *assincronismo.* Este pode ser percebido quando detecta-se que o tempo de ensino não coincide com o tempo de aprendizagem (Cf: Silva, 2010). O processo de assincronismo foi percebido no início do segundo encontro no qual ao que discutimos a definição de espaços vetoriais e ressaltamos importância do corpo de escalares[55].

Ao questionarmos Simba a respeito da diferença entre a definição dada por nós e a definição comumente estudada nos cursos de Álgebra Linear – definição que não restringe o conjunto, o corpo nem as operações –, percebemos que ele muda o modo de operar e nos responde inicialmente que:

> É porque eles (livros e professores) sempre começam a definição, que você tem uma ‘coisa’ e aí tem um corpo, um α pertencente a K um corpo. E eu sempre confundo isso, entendeu? Você tem um vetor aí ele pega um α pertencente ao corpo. Aí depois ele faz esse α ‘vezes’ esse vetor, que dá um vetor do subespaço.

E em encontros posteriores:

> Não vejo diferença, parece a mesma coisa, mas, pelo menos agora, eu entendo o que é um espaço vetorial, que eu não tinha entendido o que era. Porque eu pegava um outro corpo, tinha que multiplicar por ele e seguia as definições de um corpo e não era um corpo. Aí eu me perdia.

Parece-nos que este aluno passou a falar sobre a definição de espaços vetoriais e analisar os detalhes presentes na mesma – incluiu novos elementos

[55] No primeiro encontro apenas Euclides pode participar do seminário e do segundo em diante contamos também com a participação constante do dois alunos. Por isso, a retomada da definição de Espaços Vetoriais neste encontro.

ao núcleo em que operava – e entendeu que este se tratava de uma estrutura algébrica.

A leitura e posterior análise da produção de significados dos alunos faz com que possamos intervir de forma mais adequada no processo de aprendizagem dos alunos e algumas situações ocorridas nos encontros apontaram esse fato.

Ao iniciar a resolução de uma determinada tarefa, os alunos apresentaram certa dificuldade no sentido de compreender uma expressão contida no enunciado da mesma. O enunciado da tarefa era:

Determine se o conjunto formado pelo vetor nulo de IR^2, juntamente com todos vetores w = (x, y) de IR^2 para os quais $\frac{y}{x}$ tem um valor constante, é ou não um subespaço de IR^2.

Ao serem questionados sobre o que estava causando dificuldade, Euclides nos diz:

> Essa parte do ‘tem um valor constante’ é que eu não estou entendendo.

Neste caso, a dificuldade, analisada como algo em processo, foi entendida como sendo um obstáculo epistemológico, pois, após uma intervenção nossa, os alunos conseguiram seguir adiante na resolução. E ao questionarmos o que os fez mudar o jeito de operar, eles dizem:

> Euclides: O lance de pegar o y igual a cx, <u>mudou tudo pra mim</u>. [...] Pra falar verdade a <u>pergunta que</u> ele (professor) fez <u>que me permitiu enxergar</u> foi ‘qual a relação entre o y e o x, pra dar um c aqui?’ Porque pra mim esse c aqui, acho que foi aqui que eu enxerguei, eu não sei porque eu não estava passando o x/
>
> Simba: Porque <u>quando ele falou</u> isso a gente conseguiu escrever o y como combinação de x acho que <u>aí a gente pode jogar/ usar as propriedades</u>.

Acreditamos que a intervenção na direção de ampliar a produção de significados dos alunos foi decisiva nesta situação para a superação da dificuldade, do obstáculo epistemológico no qual se encontravam.

Ao longo dos encontros, discutimos constantemente sobre a relação entre dimensão, número de coordenadas dos vetores e a representação desses vetores.

Num primeiro momento, ainda sem apresentarmos a sua definição formal, Euclides associa dimensão ao número de coordenadas de um vetor e também ao índice “n” que acompanha o “IR^n”. Isso pôde ser percebido nas seguintes falas:

> Se o ‘n’ for significar dimensão mesmo.

Ou ainda:

> Eu acho que o ‘n’ ali vai indicar quantas ‘casinhas’ eu vou ter aqui, quantas coordenadas eu vou ter. Mas aí tem, algum que é mais de três?

Com esta última fala percebemos que ele começa a visualizar diferentes possibilidades para a definição e modifica sua fala:

Euclides: Agora eu falaria que seria a representação de vetores no espaço com ‘n’ dimensões. Teria que botar o ‘n’ ali, porque eu ia achar que são só três, é espaço, onde tudo seria figura de três dimensões, sempre achei que fossem 3 dimensões. No mínimo alguma coisa pra identificar que teria mais de três deveria ter um nome ali, sabe. É até estanho falar porque sempre definiu espaço com três dimensões. Pra mim isso é difícil. (Lê o material). Um lugar que tem vetores com ‘n’ coordenadas e as coordenadas são reais, mas eu não sei como eu colocaria um nome não.

Vemos que Euclides muda seu modo de falar até mesmo a definição de espaço vetorial e de vetor, nos seguintes termos:

> Agora, pra mim, vetor não é só aquilo ali mais, já não posso falar mais que aquilo ali é um vetor (a seta desenhada no quadro) teria que falar, por essa definição é abrangente demais. Ali é um vetor no plano de duas dimensões aí o plano seria o espaço de duas “dimensão”. Por essa definição, e o espaço seria o espaço de três dimensões. Aí o espaço agora seria outra coisa, porque eu sempre distingui, espaço e plano eram coisas diferentes agora o plano pra mim seria um espaço. [...] É. Eu acho que a definição de espaço é que é passada errada. [...] Agora espaço vai ser uma coisa diferente.

Neste ponto, chamamos atenção ao fato de que os estudantes, especialmente os de Álgebra Linear, tendem a procurar na teoria elementos que lhe sejam familiares. Por exemplo, Euclides ao ver a palavra “espaço” já associa logo ao espaço geométrico, de três dimensões. Portanto, a leitura da fala pelo professor e sua consequente discussão com os alunos deve ocupar um lugar importante, pois toda a teoria de um curso como este está pautada em diálogos algébricos, mas que possam ter forte apelo geométrico.

Como citamos acima, nossos sujeitos de pesquisa são futuros professores e, portanto, devemos nos preocupar em ensiná-los os conceitos de Álgebra Linear e em proporcionar-lhes momentos de discussão e reflexão acerca das situações de sala de aula, tanto metodológicas quanto conceituais. E a discussão acerca dos modos de produção de significados algébrico e geométrico é importante para refinar seu olhar para situações similares e importantes à sua formação.

Além dessa questão que envolve a análise da dimensão por meio das coordenadas ou pelo índice do “IR^n”, como citamos, os alunos também mostraram-se atentos ao fato de esse “n” ou a “dimensão” do espaço vetorial ser algo maior do que três e extrapolar a visualização/representação geométrica.

E quando discutimos, mais adiante no curso, o conceito de dimensão questionamos o que isto significa pra eles e eles responderam.

> Euclides: Tamanho. Medida, tamanho.
>
> Simba: O meu não vem nada. Talvez medida, eu pensaria em alguma coisa do tipo. Qual a dimensão do quadro?

No decorrer do diálogo, vemos que Simba também se sente incomodado com a questão da definição de dimensão especialmente aplicada ao IR^3, pois fala:

> Simba: Eu não consigo ver, porque o IR^3 tem dimensão três. Porque ele, assim é tão grande. Entende? [...]

E ainda:

> Simba:Então a dimensão do IR^3 é três.
>
> Professor: Porque seria três?

> Simba: Porque a base dele tem três vetores, então é três, pela definição aí, mas, tipo assim, fica tão estranho falar dimensão três do IR^3.

A princípio Simba visualiza que a dimensão do IR^3 é três, neste contexto da Álgebra Linear, mas ao dizer que acha “estranho”, e percebemos que esta afirmação não é legítima, confortável, para ele. Além disso, mais adiante, numa única fala, Simba nos mostra que os objetos que constitui não estão associados ao contexto da Álgebra Linear, estão associados à ideia de espaço físico.

Pois diz:

> Eu posso falar que não existe o IR^2 em nossa vida? Porque na verdade esse quadro está no IR^3, mas ele é um ... ele tem dimensão dois.

A discussão do conceito de dimensão é de grande importância para a reflexão e entendimento do aluno/professor de que um mesmo conceito, matemático ou não, pode vir a assumir diversos significados que deverão ser igualmente explorados quando emergirem em um diálogo em sala de aula.

E, como já analisado na pesquisa de Silva (2003), o conceito de dimensão pode levar o aluno a operar de modos muito diversos do contexto de um curso de Álgebra Linear e aí ressaltamos mais uma vez a importância dos professores proporcionarem momentos de discussão nos quais os alunos tenham a oportunidade de expressar sua produção de significados e, como consequência, o professor possa ler esse diálogo no sentido de melhor intervir no processo de aprendizagem de seus alunos.

Silva (1997) também destaca em sua pesquisa uma situação que envolve o conceito de dimensão e que pode propiciar bons momentos de ampliação da produção de significados dos alunos. Esta situação foi transformada por Silva em uma tarefa e nós a utilizamos em nossa pesquisa. A tarefa é a seguinte: *O IR^2 é um subespaço do IR^3, munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar, sobre o corpo dos Reais ?*

Segue um trecho do diálogo ocorrido durante um dos encontros:

> Euclides: Eu posso falar que o IR^2 é um/ com a terceira coordenada zero lá.

Professor: Façam aí.

Euclides: Mas o IR^2 pode colocar ele também como sendo um, vamos botar, um conjunto (x,y,0).

Simba: Eu acho estranho.

Euclides: Agora eu comecei a pensar que, tá, o IR^2 é um subconjunto do IR^3? Eu não sei disso. É porque o três/ assim, o IR^2 tem duas coordenadas, e olha só os elementos do IR^3, vai ter três aí eu teria que ligar. Eu teria que achar/

Simba: Mas aí você pode desfazer essa / esse negócio aqui?

Professor: Essa última coordenada?

Simba: É. Tipo assim, realmente se você pegar um gráfico lá isso aqui vai dar um plano no eixo/ mas eu posso simplesmente ignorá-lo?

Euclides: É isso que eu estou pensando agora. Porque se eu pegar a soma.

Simba: E como é que você vai somar? Eu não consigo ver que isso é igual a isso.

Euclides: Igual não é, eu to tentando fazer algum tipo de associação, de/ de função.

Simba: Concordo que você tem que fazer uma função, mas você tem que montar a função.

Professor: Na verdade, a questão é, ele é um subconjunto?

Euclides: É, ele não é um subconjunto. Ele não é porque o elemento dele tem dois/ tem outra “cara”.

Simba: Não. Eu acreditaria sim que ele é um subconjunto, mas/ é o IR^2 está contido no IR^3.

Professor: Você acredita também Euclides?

Simba: Acho que está. É mais eu não saberia explicar o porquê. Pelo gráfico. Eu vou ter o plano.

Professor: Mas esse plano vai estar onde?

Simba: Como assim onde?

Professor: Vai estar no espaço né? É um plano no espaço inteiro. E o IR^2 o que é?

Simba: Um plano.

> Professor: E tem mais alguma coisa? Se a gente fosse pensar geometricamente. O IR^2 preenche tudo né?
>
> Simba: É um plano do IR^3.
>
> Professor: É “um” plano do IR^3. Mas é o IR^2? [...] quais são os elementos do IR^3?
>
> Euclides: (x,y,z).
>
> Professor: E do IR^2?
>
> Simba: (x,y). Eu não consigo ver que isso é igual aquilo (os elementos).

Percebemos que os alunos tentam justificar a relação entre o IR^2 e o IR^3 geometricamente, mas quando analisam os elementos desses espaços vetoriais, percebem que há uma diferença associada ao número de coordenadas.

Após vários momentos de discussão, os alunos puderam concluir que IR^2 não pode ser um subespaço vetorial de IR^3 pelo fato de não ser um subconjunto do mesmo.

Neste ponto, chamamos atenção a dois fatos importantes verificados nesta pesquisa. Primeiro, com relação a esta última conclusão a que chegaram os alunos, ressaltamos o fato de provocar nos alunos um estímulo de buscar compreender enunciados matemáticos no sentido de ampliar sua produção de significados.

E segundo, com relação a esta situação, já discutida por Silva (1997, 2003) e por nós, destacamos a importância de transformar dificuldades recorrentes em tarefas também como forma de ampliar o escopo de significados produzidos por nossos alunos. Tarefas estas que podem ter o caráter familiar, mas não usual[56] ou possuir um formato tradicional, mas inserir-se num contexto de sala de aula em que sua discussão e consequente compreensão sejam objeto de atenção, tanto pelos professores, quanto pelos alunos.

Gostaríamos de apresentar outra situação ocorrida nos encontros e que proporcionou um efeito positivo na direção de refinamento de nossa leitura em sala de aula.

---

[56] Como descrito em Silva (2003).

Denominamos de “rediscussão” este momento em que pudemos discutir um pouco mais algumas tarefas ou definições as quais julgamos necessário ouvir mais uma vez nossos sujeitos de pesquisa para que pudéssemos analisar a possível dinâmica de sua produção de significados e para mostrar-lhes que situações como estas podem proporcionar momentos de reflexão e ampliação da compreensão do conteúdo. Acreditamos que a Álgebra Linear possui uma linguagem peculiar e, portanto, momentos como este também podem fazer com que os alunos internalizem esse novo modo de produzir significado.

Para finalizar este capítulo, gostaríamos de acrescentar que este trabalho se dedicou em propor uma alternativa ao ensino tradicional vigente no que se refere a disciplinas de conteúdo matemático ministrado a alunos de licenciatura. Portanto, nosso objetivo é disponibilizar aos educadores universitários um novo modo de se conceber estas disciplinas como cursos de serviço voltados à formação do licenciando em matemática.

Procuramos ao longo desta dissertação apresentar os pressupostos teórico-epistemológicos que sustentam esta alternativa bem como apontar as contribuições de um seminário executado como proposta-piloto, construindo assim um rol de características que moldam este curso de serviço de Álgebra Linear para futuros professores de matemática.

Além dos capítulos de nossa dissertação, nos quais mostramos a evolução dessa proposta, elaboramos um produto educacional o qual se constitui em um material didático similar ao utilizado na proposta-piloto com modificações advindas de nossas reuniões com nossos orientadores.

Neste material também construímos anexos que trazem alguns conceitos vistos ao longo do texto de forma mais aprofundada como, por exemplo, dizer que todo conjunto que possui as características de IR^n – mencionadas anteriormente – será um Espaço Vetorial.

Capítulo 6

Concluindo ideias

O objetivo de nosso estudo foi levantar as características de um curso de serviço voltado a alunos de licenciatura em Matemática, com foco no estudo dos espaços vetoriais. Para alcançá-lo, estruturamos uma dissertação que mostrasse a constante reflexão de nossas ideias com relação a este curso.

Este estudo teve caráter qualitativo e local no qual analisamos uma sala de aula particular com dois sujeitos de pesquisa igualmente particulares. Portanto, os resultados apontados por este estudo devem ser entendidos como reflexão para novas pesquisas e como suporte às licenciaturas já existentes e futuras licenciaturas que busquem por uma alternativa à estrutura empregada na maioria dos cursos de Licenciaturas em Matemática.

Neste capítulo, o nosso olhar se volta para a descrição das características deste curso e, consequentemente, se propõe a responder os questionamentos iniciais desta pesquisa.

A priori, gostaríamos de mencionar que dividimos as características do curso em três grupos com a finalidade de melhor apresentar nossas posições metodológicas. São eles: características voltadas à metodologia de sala de aula; características que envolvem a nossa expectativa quanto a postura do professor de matemática e, por fim; características voltadas ao conteúdo de Espaços Vetoriais e sua relação com a formação do professor de matemática.

Como dissemos no capítulo anterior, no qual analisamos nossa saída a campo, os pressupostos teórico-epistemológicos que sustentaram-na também podem ser apontados como características para o curso.

O que faremos, portanto, será elencar de forma sucinta as características levantadas ao final dos capítulos 2 e 3 e a partir da análise da pesquisa de campo feita no capítulo 5.

1) A metodologia da sala se aula:

- ao analisar o processo comunicativo da perspectiva do MCS, o professor deve ter a compreensão de que o conhecimento não pode ser transmitido;

- o professor deve se esforçar em praticar o descentramento como forma de direcionar seu olhar a aprendizagem dos alunos;

- a dinâmica da sala de aula deve proporcionar momentos de interação entre os alunos e entre alunos e professores;

- entendemos que o processo de ensino se caracteriza como um momento no qual o professor tem a oportunidade de sugerir novos modos de produzir significados a seus alunos e o processo de aprendizagem ocorre quando os alunos conseguem internalizar e legitimar significados;

- acreditamos que ao dar voz à fala do aluno o processo de ensino torna-se muito diferente do modo como vêm sendo feito no ETV[57], portanto, neste curso o olhar do professor deve se voltar a ler o aluno, refletir sobre sua fala, procurando fazer uma leitura plausível da sala de aula, não procurando por erros ou acertos;

- como este curso terá alunos que serão professores, devemos destacar que o professor do mesmo deve analisar estes alunos sob dois enfoques: um como aluno e outro como professor. Portanto, as características metodológicas devem ser conduzidas de modo a possibilitar a aprendizagem deste aluno e proporcionar a ele uma postura de sala de aula que lhe direcione a embasar sua futura prática em sala de aula.

2) O que esperamos do professor de matemática:

O professor de matemática deve possuir uma formação que lhe permita ser autônomo e reflexivo, portanto, este curso deverá proporcionar momentos em que o licenciando:

- reflita sobre sua prática de sala de aula, suas expectativas e sua postura frente a seus alunos;

- ao vivenciar a estranhamento possa refletir em como levar futuramente esta vivência para sua sala de aula;

- entenda que intervir no processo de aprendizagem não é falar pelo outro e sim modificar seu modo de operar;

- tome uma postura crítica e exploratória quanto ao conteúdo, de forma a compreender que os elementos ali envolvidos são importantes para a

[57] Descrito no capítulo 2.

compreensão da mesma. Procurando sempre lembrar que, no futuro, será importante estimular seus alunos a terem esta postura.

- consiga visualizar a importância da formação continuada, em serviço, como forma de ampliar, refletir e melhorar constantemente sua prática como docente.

3) O estudo dos Espaços Vetoriais:

A teoria de Espaços Vetoriais possui um conteúdo que, se conduzido em acordo com a metodologia proposta por nós, pode oferecer ao licenciando oportunidades de ampliar seus modos de produção de significados. Acreditamos que as principais características que este curso deve possuir são:

- A possibilidade de conviver com conceitos que oferecem uma discussão acerca de significados matemáticos e não-matemáticos, como as noções de Espaço, Vetor, Base e Dimensão;

- A manipulação dos conceitos discutindo sua natureza: algébrica ou geométrica;

- A oportunidade de vivenciar momentos de estranhamento por esta se tratar de uma teoria com uma linguagem muito particular, um modo de produzir significados muito singular;

- A manipulação da definição de definições (em especial a de Espaços Vetoriais) com a oportunidade de ampliação das mesmas, vendo ganhos ou perdas ao modifica-las;

- A oportunidade de manipular o conjunto dos números reais de forma distinta do que é deito em outras disciplinas e ter a oportunidade de analisar suas propriedades e refletir sobre sua aplicação.

- Estender a ideia anterior ao manipular operações de adição e multiplicação em n-uplas de números reais;

- Além disso, destacamos a importante discussão de tarefas as quais foram formuladas a partir de um levantamento de dificuldades recorrentes em cursos de Álgebra Linear apontados por autores[58] que se dedicaram a analisar estas dificuldades.

---

[58] Citados em nossa revisão de literatura.

Gostaríamos de ressaltar que estas características metodológicas devem ser refletidas pelo educador universitário ao ministrar uma disciplina a alunos de licenciatura em Matemática, procurando adequá-las à realidade de seu trabalho, de sua universidade e de seus alunos e manter uma constante reflexão.

Além disso, como dissemos no início deste trabalho, não temos a intenção de indicar uma proposta que seja estática. Nosso objetivo é dar uma alternativa de curso de serviço que poderá ser utilizada após várias reflexões – como dissemos acima – acerca do contexto da sala de aula de Álgebra Linear a qual será direcionada aliada às concepções do profissional que for ministrá-la.

Para finalizar gostaríamos de indicar que o olhar dos educadores matemáticos deve se voltar constantemente à formação, inicial e continuada, do professor de matemática – mesmo que este não seja seu foco principal –, lembrando que este é um dos principais temas de discussão da Educação Matemática: o olhar atento aos processos de ensino e aprendizagem da Matemática.

Portanto, o que propomos é que sempre tenhamos em mente que necessitamos de professores que tenham uma perspectiva ampla de sua sala de aula antes mesmo que inicie sua docência, para que possam efetivamente compreender e intervir nos processos de ensino e aprendizagem, no sentido de ampliar os modos de produzir significados de seus alunos.

Referências

ALMEIDA, V. R. **Álgebra Linear como um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática: o estudo das Transformações Lineares. 2013**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

ANDRÉ, M. et al. **Estado da Arte da Formação de Professores no Brasil**. Educação & Sociedade, ano XX, nº 68, Dezembro/99.

ARCAVI, A., SHCOENFELD, A. **Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática**. BORBA, M. C. (org.). Autêntica. Belo Horizonte, 2006.

BASSO, I. S. **Significado e sentido do trabalho docente**. Caderno Cedes, ano XIX, nº 44, abril, 1998.

BESERRA, F. M., CARVALHO, J. M. R., MELO, P. B., GONÇALVES, R. M. P. **A contribuição da teoria de Leontiev no estudo da relação entre Trabalho e Educação**. Journal Article. Anais da Abrapso, 01/2009.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. Investigação qualitativa em Educação: fundamentos, métodos e técnicas. In: Investigação qualitativa em educação. Portugal: Porto Editora, 1994, p. 15-80.

BRASIL, Parecer n° CNE/CES 1.302/2001, de 06 de novembro de 2001. Dispõe sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 05 dez. 2001. Seção 1e, p.13.

DORIER, J. L. **Teaching Linear Algebra at University**. ICM, 2002. Vol. III. 1 – 3.

FIORENTINI, D. **A Formação Matemática e Didático- Pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática**. Revista de Educação. Campinas; n. 19, p. 107- 115, 2005.

_____________. **A Pesquisa e as Práticas de Formação de Professores de**

Matemática em face das políticas Públicas no Brasil. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 21, nº29, 2008, pp. 43 a 70.

FRANCISCO, C. A. **O Modelo dos Campos Semânticos como Instrumento de Leitura da Prática Profissional do Professor de Matemática.** 2008.

GOODMAN, N. **Of mind and other matters**. London: Harvard Universitiy Press, 1984.

HOWSON, A. G. et al. **Mathematics as a service subject**. Cambridge: Cambridge University Press: Cambridge, 1988.

JULIO, R. S. **Uma leitura da produção de significados matemáticos e não-matemáticos para "*dimensão*"**. 2007. 96 P. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro.

LEONTIEV, A.N. **Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil**. In: VIGOTSKII, L.S., LURIA, A.R. & LEONTIEV, A.N. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem. 7ª ed. São Paulo: Ícone, 2001.

LIBÂNEO, J. C.; FREITAS, R. A. M. M. **Vygotsky, Leontiev, Davydov: três aportes teóricos para a Teoria Histórico-Cultural e suas contribuições para a Didática**. CONGRESSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO, 4., 2006, Goiânia.

LINARDI, P. R. **Rastros da Formação matemática na prática profissional de uma professora de matemática: do problema inicial ao estudo real**. ULBRA. Canoas. 2007.

LINS, R. C. & LINARDI, P. R. **Um Estudo do Impacto da Formação Matemática na Prática do Professor de Matemática**. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. UNESP de Rio Claro.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebric thinking is.** 1992. 330p. Thesis (Phd) – University of Nottingham, Nottingham.

_____________. (1993). **Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases de pesquisa**. Revista SBEM – SP, Campinas, v.1 (1), 75-79.

LINS, R. C. & GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

_____________. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 1999. (Seminários e Debates). p.75-94.

_____________. **The production of meaning for Algebra: a perspective based on a Theoreticall Model of Semantic Fields**. In: R. Sutherland et al. Perspectives on School Algebra. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.

_____________. Um quadro de referência para as disciplinas de Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. In: LINS, R. C. **Projeto de Pesquisa Integrado submetido como parte de solicitação de renovação de bolsa de concessão de auxílio financeiro o CNPq.**, 2002, p.01-40.

_____________. **Monstros, Matemática e Significados**. In: BICUDO, M. A. V. e BORBA, M. C. (orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004a, pp. 92- 120.

_____________. **Characterising the mathematics of the teacher from the point of view of meaning production.** In: 1th International Congress on Mathematical Education, 2004, Copenhagen. Plenary and Regular Lectures (abstracts) (2004b).

_____________. Design e Implementação de um programa de formação continuada de professores de Matemática. In: LINS, R. C**. Projeto de Pesquisa Integrado submetido como parte de solicitação de concessão de bolsa de Produtividade em Pesquisa ao CNPq.**, 2004c, p. 01-13.

_____________. A Formação Pedagógica em Disciplinas de Conteúdo Matemático nas Licenciaturas em Matemática. **Revista de Educação**. Campinas: n.18, p.117-123, 2005.

_____________. **A diferença como oportunidade para aprender**. In: XIV ENDIPE, 2008, Porto Alegre. Trajetórias e processos de ensinar e aprender: sujeitos, currículos e culturas. Porto Alegre: Edi PUCRS, v.3. p. 530 550, 2008.

______________. **O Modelo dos Campos Semânticos: Estabelecimentos e notas de teorizações.** In: Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática – 20 anos de história. Midiograf. São Paulo, 2012. 1ª Edição, p. 11-30.

MIORIM, Maria A. **Introdução à História da Educação Matemática. São Paulo: Atual, 1998.**

MOREIRA, P. C. & DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: Licenciatura e prática docente escolar**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Editora Autêntica, 2005.

NEVES, R. A.; Damiani, M. F. Vygotsky e as teorias da aprendizagem. UNIrevista , Pelotas, Vol. 1, n. 2 , p. 2-8 ,abr . 2006.

NOMURA. J. I. **Como sobrevivem as diferentes noções de Álgebra Linear nos cursos de Engenharia Elétrica e nas Instituições**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky:** aprendizado e desenvolvimento um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1995.

OLIVEIRA, V. C. A. **Sobre as ideias de estranhamento e descentramento na Formação de Professores de Matemática**. In: Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática – 20 anos de história. Midiograf. São Paulo, 2012. 1ª Edição, p. 199-216.

PEREIRA, J. E. D. **As licenciaturas e as novas políticas educacionais para a formação docente**. Educação & Sociedade, ano XX, nº 68, Dezembro, 1999.

PROCÓPIO, R. B. **Geometria como um Curso de Serviço para a Licenciatura de Matemática: Uma Leitura da Perspectiva do Modelo dos Campos Semânticos**. 2011. 82p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2011.

SERBINO, R. V. **A educação do educador universitário.** Didática, São Paulo, 18: 25- 31, 1982.

SHULMAN, L. Those who understand: the knowledge growths in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v.15, p. 4-14, 1986.

SILVA, M. R. G. **Avaliação: um contrato de trabalho**. Interface – Comunicação, Saúde, Educação. V.2, n.2, 1998.

SILVA, A. M. **Uma análise da produção de significados para a noção de base em álgebra linear**. 1997. 163p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.

_____________. **Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática**. 2003, 243p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

_____________. Uma Análise dos processos de ensino e aprendizagem a partir da produção de significados. In: XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática. Aveiro. **XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Lisboa: Associação dos professores de matemática, v. único, p.587-596, 2010.

_____________. **Notas de Álgebra Linear**, UFJF. Juiz de Fora. 2010.

_____________. Um Curso de Serviço para a Licenciatura em Matemática. **XIII Conferência Interamericano de Educação Matemática**. Recife: CIAEM, p.1-7, 2011.

_____________. **Impermeabilização no Processo de Produção de Significados para a Álgebra Linear.** In: Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática – 20 anos de história. Midiograf. São Paulo, 2012. 1ª Edição, p. 79-90.

VYGOTSK, L. S. **A Formação Social da Mente**. Livraria Martins Fontes, Editora Ltda. São Paulo – SP 1991. 4ª Edição Brasileira.

______________. **Pensamento e Linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

ANEXOS

ANEXO I:

TERMO DE COMPROMISSO ÉTICO

Este termo de compromisso tem o objetivo de esclarecer os procedimentos de coleta de dados envolvidos com a pesquisa desenvolvida no Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática/UFJF e sua utilização na mesma.

Os registros presentes nas tarefas e as transcrições provenientes das falas dos sujeitos de pesquisa servirão como material para nossa pesquisa que procura investigar quais as possíves contribuições de um Curso de Serviço de Álgebra Linear para uma Licenciatura em Matemática, mais especificamente, em relação ao estudo dos Espaços Vetoriais.

O acesso ao conteúdo acima citado será de uso exclusivo do pesquisador e dos pesquisadores do Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora (NIDEEM-UFJF), que assumem o compromisso de não divulgarem dados que permitam identificar os sujeitos de pesquisa.

As informações provenientes da análise da coleta de dados poderão ser utilizadas pelos pesquisadores envolvidos no projeto em publicações e eventos científicos e divulgadas a todos aqueles que se interessarem pelas pesquisas, na forma acima indicada.

Juiz de Fora, ___ de ___________ de ______.

_____________________________ _____________________________

Aretha Fontes Alves Cristiane de Andrade Mendes

____

Sujeito de Pesquisa

ANEXO II:

Questionário

1. Nome:____

2. Pseudônimo:____

3. Telefone(s) para contato:_______________________________________

4. e-mail:____

5. Naturalidade: ____

6. Idade: _________

7. Nível de Instrução:

( ) Estudante de Graduação em ______________________________

( ) Graduação em ____

( ) Especialização em ____

( ) Estudante de Mestrado ____________________________________

( ) Mestrado em ____

8. Você leciona Matemática? ( ) sim ( ) não

Se sim,

8.1 Em que nível ou níveis de Ensino leciona?

____

8.2 Há quantos anos leciona?

____

9. Você já cursou ou está cursando a disciplina Álgebra Linear?

( ) sim ( ) não

Se sim,

9.1 Você se lembra de ter estudado os seguintes conteúdos?

i) Espaços Vetoriais: ( ) sim ( ) não

ii) Transformações Lineares: ( ) sim ( ) não

iii) Núcleo: ( ) sim ( ) não

iv) Dimensão: ( ) sim ( ) não

v) Imagem: ( ) sim ( ) não

vi) Base: ( ) sim ( ) não

Observações:

____

____

ANEXO III:

Uma Análise mais detalhada da Pesquisa de Campo

Neste capítulo descreveremos[59], do nosso ponto de vista, como decorreram os encontros do seminário que realizamos no período de 14 de dezembro de 2012 a 2 de fevereiro de 2013. Neste capítulo em especial, descreveremos apenas os seis primeiros encontros nos quais realizamos o estudo dos Espaços Vetoriais. A análise dos encontros seguintes estará na dissertação do professor/pesquisador Almeida (2013) que realizou esta pesquisa em conjunto conosco e procurou estudar as Transformações Lineares, sob o mesmo enfoque de Curso de Serviço proposto por nós.

1. Ficha 1 – O Espaço Vetorial IR^n

Dias 14 e 21 de dezembro de 2012 – 14/12: 1º Encontro

O primeiro encontro aconteceu no dia 14 de dezembro de 2012 e contou com a participação de apenas um aluno, Euclides. Iniciamos o seminário explicando-lhe qual seria a dinâmica das aulas e qual era o objetivo do mesmo.

Apresentamos também um breve resumo de nossa pesquisa e explicamos que, por se tratar de um trabalho científico, tínhamos a necessidade de que ele preenchesse um termo de compromisso ético e uma ficha de cadastro na qual constariam seus dados pessoais, um pseudônimo e algumas perguntas relacionadas à sua formação acadêmica e, mais especificamente, quanto a Álgebra Linear[60].

Euclides preencheu o termo de compromisso e a ficha de cadastro e a partir daí, entregamos o material preparado por nós, para que ele lesse a

---

[59] Nas transcrições das falas as seguintes convenções foram utilizadas: a) os sujeitos de pesquisa são identificados pelos seus pseudônimos. [...] b) Palavras entre barras indicam sobreposição de falas; c) Uma barra indica interrupção súbita ou mudança na direção de uma fala; d) Reticências indicam pausa prolongada; e) Reticências entre colchetes indicam omissão de partes da transcrição e f) Aspas indicam que o sujeito de pesquisa esta lendo o que esta dizendo.(Conf.: Silva, 2003).
[60] No Anexo II.

definição de Espaço Vetorial IR^n, a forma como definimos as operações envolvidas com os elementos de IR^n e as propriedades que estes elementos satisfazem.

Sempre que iniciávamos um tópico novo, indicávamos até que ponto do mesmo o aluno deveria ler e analisar. Com isso, procuramos delimitar as discussões de forma que todos os assuntos do tópico fossem contemplados de forma organizada, sem contudo, possuir um formato ou dinâmica que vetasse, de alguma forma, a produção de significados do aluno; pelo contrário, discussões de temas relacionados sempre foram bem-vindos e incrementaram positivamente nossos encontros.

A primeira parte do material da qual solicitamos a leitura de Euclides contou com: a definição do conjunto IR^n; a definição das operações de Adição e Multiplicação por Escalar que utilizaríamos e; as propriedades que estas operações satisfaziam. Ele leu e, em alguns minutos, nos comunicou o término de sua leitura.

Iniciamos nossa discussão com os significados que poderiam ser atribuídos ao conceito de Espaço Vetorial.

Professor: Então deixa eu te fazer uma pergunta Euclides. Se você não tivesse lido isto daí, o que seria, pra você, esta notação? (E escreve no quadro: Espaço Vetorial) O que você acha que isto quer dizer? O que seria um espaço vetorial pra você?

Euclides: Olharia direto para os nomes e tentaria ligar com alguma coisa que eu já sei, eu botaria que seriam os vetores no Espaço, vamos dizer, um Espaço de Vetores, matematicamente falando, seria um tipo representação de vetores no Espaço.

Professor: É isso que esse nome te remete? Mas que vetores seriam esses? Vetores no espaço mesmo? No plano?

Euclides: É, pelo nome, eu acho/ eu iria pro espaço mesmo, sabe. Porque quando a gente trata de vetores em Física no plano, né? Aí quando é espaço, a gente, geralmente, pra trás você faz cada vetor no plano aí eu ah, deve ser algum tipo de/ representar o vetor no espaço.Um tipo de ... Porque eu não conheço isso, né? Então eu falaria isso. Porque sempre que eu escuto o pessoal falar mesmo, eles falam espaço vetorial, então o que seria isso? Deve ser uma coisa/ eu sempre penso assim, de representar o vetor no espaço.

Percebemos que Euclides produz, inicialmente, apenas significados geométricos para Espaço Vetorial. Ele parece não produzir, por exemplo, um significado para “Espaço” como “lugar”. E, por não ter cursado Álgebra Linear, também não produz significados algébricos.

Professor: E depois de ler esta definição matemática? O que você/ qual relação que você acredita ter um espaço vetorial e o que está escrito aí? Coincide com o que você imaginou?

Euclides retorna ao material buscando “apoio” na definição.

Euclides: Coincide, só que agora, pelo o que eu vejo aqui, eu sempre imaginei eu representando vetores no espaço, só que o espaço com três dimensões, normal que a gente faz sempre, só que agora eu vi esse “n” aqui, no começo eu não estava entendendo o porquê desse “n” aí quando eu cheguei no fim e li aqui/

E relê modo como definimos o IR^n:

$$R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n);\ x_i \in R \quad i = 1,2,...,n\}$$

Após ler os dois trechos do material, ele continua sua fala concluindo:

Euclides: Seria o vetor no espaço e o “n” aqui seria quantas dimensões tem o espaço. Mas eu não sei enxergar isso não, eu sempre enxergaria com três dimensões. Só que o “n” aqui, deve ter alguma coisa a ver com a dimensão, por causa do x_1, x_2, x_3 essas que seriam as coordenadas dele aqui. Por causa dessa soma aqui também. Agora que eu lembrei, quando aqui define a soma aqui, aí ele faz a soma de vetores só que pra vários, aí eu imaginei que seria isso.

Professor: Então você acha que este espaço vetorial pode “fugir” do espaço de três dimensões?

Euclides: É, eu acho que sim, seguindo essas definições aqui, acho que sim. Se o “n” for significar dimensão mesmo.

Apesar de atribuir a espaço vetorial um apelo fortemente geométrico, e associar à palavra espaço, segundo nossa leitura, uma conotação voltada ao espaço euclidiano IR^3, Euclides, parece começar a compreender que podem existir “espaços” diferentes do que ele imaginava.

Após esta discussão inicial, pedimos que ele relesse a definição do Espaço Vetorial IR^n, as operações envolvidas e suas propriedades.

Professor: E sobre essas propriedades aí? O que você conseguiu ver delas?

Euclides: É que um elemento/ Ele definiu a soma e a multiplicação aqui, né, por escalar, dentro desse conjunto e começou a ver aquelas propriedades, acho que ele começou a ver se valia as propriedades da soma, no caso, e essa multiplicação, por isso, que ele falou multiplicação por escalar, aqui. Ver se valia a soma de dois “carinhas” desse conjunto, se era associativa, se é distributiva.

Parece-nos que, Euclides não leva em conta a seguinte frase presente no material: “Observemos que estas operações em R^n satisfazem as seguintes propriedades”, e acredita que estão lá para serem verificadas e não que estamos afirmando que as operações definidas satisfazem tais propriedades.

Professor: E deixa eu te perguntar, você consegue me dar um exemplo de um elemento de um espaço vetorial? Você consegue escrever um? Qualquer elemento? Imagina falar assim, esse cara é um elemento de um espaço vetorial. Pelo que você viu aí, você consegue escrever um?

Euclides: Um elemento. Um elemento quando você fala, é um “u” ou “v” desse aqui?

Professor: Sim.

Euclides: Ah, se eu fosse representar no plano eu botaria o (0,0), o ponto (0,0).

Professor: Então você está imaginando no plano? (E desenha no quadro). “X” e “Y” no caso?

Euclides: Isso. Então seria o IR^2, o IR elevado a dois.

Professor: Sim.

Euclides: E aí o ponto (0,0), acho que seria um elemento daí, acho que/

Professor: Então você quer dizer que isso aqui [(0,0)] pertence a esse cara (IR^2)? (O professor desenha no quadro o ponto (0,0) no plano cartesiano).

Euclides: É. Agora eu tô na dúvida, porque como está falando de vetor, se eu colocasse um ponto ali qualquer se fosse falar que é plano cartesiano, um ponto qualquer aí seria, mas como está falando de vetor aí eu não sei se teria que contar/

Para Euclides, a noção de vetor está intimamente ligada à noção de segmento orientado com origem no (0,0) e extremidade em algum ponto (x,y) o qual dá “nome” ao vetor.

Professor: Por exemplo, aqui, (e desenha uma seta no plano saindo da origem e com extremidade no (1,2)) isso é um vetor né?

Euclides: É. No caso, seria o vetor (1,2) aí né? É nesse caso o vetor (0,0) pertenceria.

Professor: E esse também? (Aponta para o vetor (1,2))

Euclides: Esse também.

Professor: Então esses caras todos pertencem ao IR^2.

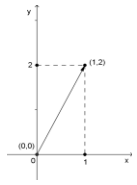


FIGURA 1.1: Representação de vetores, feita no quadro pelos pesquisadores.

Euclides chega a nos dizer que ele não sabe se deve contar "dois pontos" para termos "um" vetor – origem e extremidade –, mas após ler o modo como representamos um elemento (vetor) de IR^n, como u = $(x_1,x_2,..., x_n)$ ele passa a compreender que os elementos do espaço IR^n são n-uplas de números reais.

Além disso, ele associa dimensão ao número de coordenadas de um vetor e também ao índice que acompanha o "IR^{n}". Lembramos que, ele faz esta associação, mas em sua fala destacamos: "Se o "n" for significar dimensão mesmo." O que não nos permite precisar se ele realmente produz significados na direção de alguma dessas duas ideias: de associar dimensão à número de coordenadas ou; se ele imagina que dimensão possa ser algo diferente disso.

O professor pergunta como seria possível representar o IR^2 genericamente e ele escreve no quadro como: (x,y).

A princípio ele fica em dúvida se x e y são números reais, mas depois de ler novamente como são definidos os elementos de IR^n, ele conclui que são números reais por causa do "IR" de IR^2.

Professor: E o IR^2 seria o que pra você?

Euclides: O IR^2 seria o plano. É seria o plano, duas dimensões.

Perguntamos se existem vetores que estão em outro “lugar”, diferentes do plano. Ele responde que sim e fala que:

Euclides: No espaço eu acho que tem, no espaço de três dimensões. Eu colocaria uma terceira coordenada ali.

E desenha no quadro um espaço euclidiano com três dimensões, mas não representa uma terna. Então o professor pergunta como seria a “cara” dos elementos de IR^3.

Euclides: Eu acho que/ vai ter que entrar mais uma coordenada aqui. Seguindo o material, colocaria (x,y,w).

Professor: E esses x, y, w são números o quê?

Euclides: Você fala real, inteiro?

Professor: É.

Euclides: Por ser uma representação no plano eu acho que dá pra ser real. Mas se no plano puder ser real aqui (aponta pra terceira coordenada), acho que também pode. Não sei como provar, mas acho que pode.

Professor: Olhando para aquele IR^n, o que você acha que aquele “n” quer dizer? Qual o significado? Olhando esses dois exemplos que você deu.

Euclides: Eu acho que o “n” ali vai indicar quantas “casinhas” eu vou ter aqui, quantas coordenadas eu vou ter. Mas aí tem, tem algum que é mais de três?

Questionamos também o fato de podermos, ou não, aumentar mais o “índice” do IR^3 para IR^4. Euclides, a princípio, acha que não é possível e acreditamos que isto é devido à incapacidade de desenhar, representar geometricamente.

Euclides: Eu vou usar tipo assim, eu acho que não. Sabe por que, usando parte de geometria espacial, por exemplo, senão eu teria como representar fazer uma figura no espaço que/ acho que, com três dá, com quatro não. Porque eu poderia botar um cubo e representar ele aqui no espaço, né, aí talvez, não tem figura de 4 dimensões.

Professor: Mas, será que algebricamente tem jeito de representar?

Euclides: A tendência é falar que sim.

Professor: Representa um elemento que está no IR^4 sem desenhar.

Ele escreve uma quadra do IR^4, mas diz que não dá pra desenhar e se pergunta se valem as propriedades para qualquer “n”. Ele fala:

Euclides: Se vale para qualquer n vale pro IR^4. O pior é que você tenta ver como é que fica isso e não dá.

Professor: E se você olhar para parte algébrica isso funciona bem? Por exemplo, pra somar dois vetores, vai funcionar com vetores de IR^4?

Euclides: Posso reler? Eu acho que pela representação daria. Porque, vamos supor, se eu pegar aqui um “v”.

Ele faz no quadro alguns rascunhos operando a soma de elementos de IR^4. E a partir daí, ele começa a rascunhar algumas multiplicações por escalar com elementos de IR^4, e se pergunta se o escalar “a” (escalar usado na multiplicação por escalar) tem que ser um número real. Ele olha para o material e conclui que sim e, que ao multiplicar este escalar real por cada coordenada de IR^4, que são reais, o vetor resultante continuará tendo coordenadas reais.

Após terminar as operações, ele conclui que pode aumentar o quanto quiser o “n” que vai dar certo. E ainda:

Euclides: Até se diminuir, também vai continuar sendo. Além disso, tem que verificar as propriedades também.

Ao falar das propriedades ele parece, novamente, não levar em conta a validade das propriedades para todo “n”, com n pertencente ao conjunto dos números naturais, como definimos.

Apontando para o “n” do IR^n, ele afirma que “Isso aqui é o número de casinhas”. Neste ponto, destacamos a importância de retornarmos esta discussão no tópico de Dimensão de um espaço vetorial.

Indicamos a ele que por questões de nossa pesquisa – objetivos descritos no capítulo de Metodologia da Pesquisa – optamos por estudar apenas o Espaço Vetorial IR^n sobre o corpo IR e munido das operações de adição e multiplicação por escalar do jeito que definimos (usuais).

Discutimos com ele que elementos n-uplas com mais de três coordenadas não podem ser representadas geometricamente, mas podem ser representados algebricamente.

Professor: Lembra a definição de espaço vetorial que você deu pra mim? [...] Você acha que continua sendo isso? Ou não?

Euclides: Agora eu falaria que seria a representação de vetores no espaço com “n” dimensões. Teria que botar o “n” ali, porque eu ia achar que são só três, é espaço, onde tudo seria figura de três dimensões, sempre achei que fossem 3 dimensões. No mínimo alguma coisa pra identificar que teria mais de três deveria ter um nome ali, sabe. É até estanho falar porque sempre definiu espaço com três dimensões. Pra mim isso é difícil. (Lê o material). Um lugar que tem vetores com “n” coordenadas e as coordenadas são reais, mas eu não sei como eu colocaria um nome não. Porque eu não lembro muito do estudo de vetores, no ensino médio em G.A., não lembro nem se eu vi.

Por associar a palavra “espaço” a “espaço euclidiano de três dimensões”, ele acha que o nome da estrutura “espaço vetorial” deveria ser diferente.

Euclides: Agora, pra mim, vetor não é só aquilo ali mais, já não posso falar mais que aquilo ali é um vetor (a seta) teria que falar, por essa definição é abrangente demais. Ali é um vetor no plano de duas dimensões aí o plano seria o espaço de duas “dimensão”. Por essa definição, e o espaço seria o espaço de três dimensões. Aí o espaço agora seria outra coisa, porque eu sempre distingui, espaço e plano eram coisas diferentes agora o plano pra mim seria um espaço.

Professor: Um espaço vetorial.

Euclides: É. É. Eu acho que a definição de espaço é que é passada errada. [...] Agora espaço vai ser uma coisa diferente.

Euclides sempre retorna ao modo como definimos o espaço vetorial IR^n, e percebe que a definição de Espaço Vetorial é bem mais abrangente, no sentido dos elementos que podem constituí-lo e no sentido das operações. Pois, ao dizermos que vetor é o nome que se dá a todo elemento de um Espaço Vetorial, ele começa a escrever no material como poderia ser realizada a adição e a multiplicação por escalar de matrizes.

Indicamos aqui que, em nenhum momento, solicitamos ou fizemos menção a matrizes e as operações que comumente as envolvem. A iniciativa foi tomada por conta própria do aluno.

Pedimos que ele leia as observações que colocamos acerca da teoria discutida anteriormente.

Quando dizemos que outras operações podem ser definidas em IR^n (ele já esteve em contato com "outras operações", pois já cursou Estruturas Algébricas), ele conclui que mesmo operações "bizarras" que satisfazem as propriedades "vai continuar funcionando" e, segundo ele "ficar mais bizarro ainda."

Ele ainda nos fala que se pegarmos matrizes, por exemplo, e se operarmos a adição e multiplicação por escalar e elas satisfizerem as 8 propriedades, teremos um outro espaço vetorial. Ele aplica as operações e verifica duas propriedades e conclui que acha que devem ser todas satisfeitas. Falamos pra ele que o conjunto das matrizes com aquelas operações constitui um espaço vetorial e, motivado por esse fato ele conclui:

Euclides: Então, não é preciso ter representação geométrica para ser um espaço vetorial. [...]

Neste ponto, ressaltamos o fato de que, mesmo que nós tenhamos optado por estudar apenas o Espaço Vetorial IR^n, sobre o corpo IR e munido das operações usuais de Adição e Multiplicação por Escalar, o aluno pode ser levado a abstrair e estender a estrutura de Espaço Vetorial a outros conjuntos de vetores, corpos e operações.

Discutimos também que "vetor" é o nome que se dá aos elementos de um espaço vetorial, independente de serem n-uplas ou não. Ele fala: "então cada matriz dessa aqui seria um vetor então."

Ao ler a propriedade iv) que fala sobre o vetor nulo, Euclides comenta que este não é necessariamente o (0,0), poderia ser a matriz nula, por exemplo.

Professor: O $\overline{0}$, no IR^4 seria quem?

Euclides: (Pensa e fala) O (0,0,0,0).

Neste ponto, conduzimos a discussão na direção de compreender que é possível definir a subtração a partir da adição usando o simétrico aditivo.

Começamos a ler as propriedades decorrentes das definições discutidas e Euclides parece não ter problemas em analisá-las, pois não faz questionamentos e, além disso, ele analisa sua validade rascunhando no papel uma demonstração.

Terminada a discussão da teoria da Ficha 1, pedimos que ele fizesse a primeira tarefa, na qual analisamos sua produção de significados acerca do modo de operar com vetores e a consequente análise/discussão das soluções dos sistemas de equações lineares resultantes da comparação das coordenadas dos vetores, em cada um dos quatro itens[61].

Tarefa 1:

Sejam u = (0, ***b***) e v = (***c***, 1) pertencentes a R^2. Determine quais os valores de ***b*** e ***c*** satisfazem as seguintes relações:	
a) $2.u - v = \overline{0}$	b) u + v = v
c) u + v = u	d) (2 + 5).(u + v) = 5.u + 2.v

[61] Ressaltamos o fato de que neste anexo serão apresentadas e discutidas apenas algumas das questões aplicadas em nossa pesquisa de campo.

a)

Ele parece compreender bem a ideia do exercício e que a notação “2u” significa que é o escalar “2” multiplicado pelo vetor “u”. Ele apenas fica em dúvida se ele, realmente, pode comparar coordenada a coordenada. Achamos que seria necessário colocar um tópico ou observação sobre a comparação de n-uplas. Esta situação é corroborada pelo fato de Euclides justificar que poderia igualar as coordenadas por causa da definição de multiplicação por escalar.

Euclides: Eu só fiquei em dúvida se eu podia falar, que esse menos esse era igual a esse (0 – c = 0), [...] aí eu resolvi por sistema mesmo.

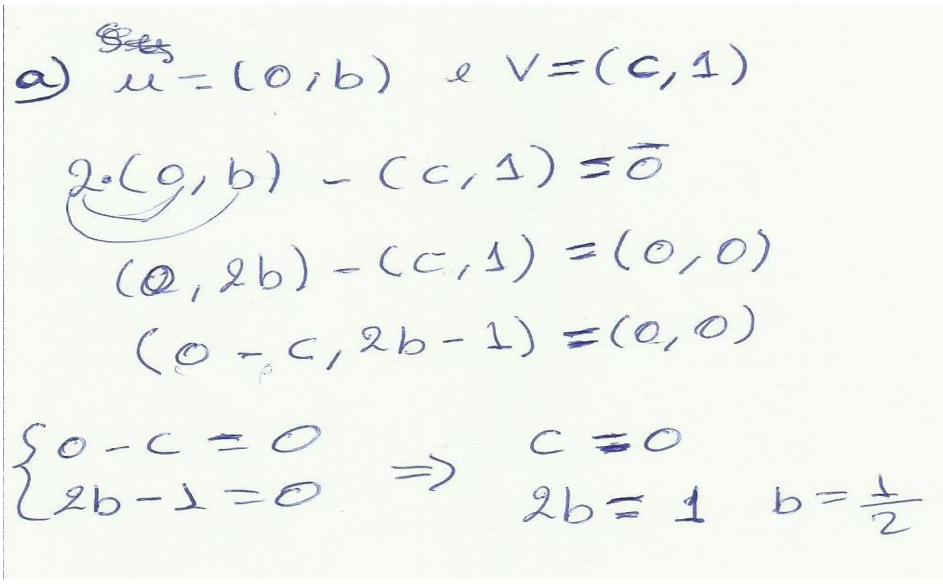


FIGURA 1.2: Euclides: 1- a) (ESPAÇO VETORIAL)

b)

Euclides: Esse aqui (item b) usando a propriedade já sai direto né? Só a propriedade lá/ que fala que soma uma coisa para dar ele mesmo só pode ser tipo um zero. Daqui eu nem faria sistema não, eu acho que eu faria direto, ali é zero. O primeiro é zero (coordenada “b”), deixa eu fazer só pra ver (o sistema).

Para resolvê-lo ele entende que tem a ver com a propriedade de elemento neutro, ele diz que nem precisaria de fazer um sistema, mas monta o sistema assim mesmo e diz que é “para ver”. Parece-nos que o método de montar e resolver o sistema dá segurança na resolução, e quando ele confirma que b = 0 ele fala que deu o que esperava. Mas, quando chega em c = c, fica em dúvida.

Euclides: Porque ali só pode ser o zero, o vetor nulo.

Professor: E o “c” quem que pode ser?

Euclides: Qualquer um aqui, c = c. (fica pensando). O c pode ser qualquer um ele não vai interferir não, vai?

Professor: Ele pode ser qualquer um o quê?

Euclides: Qualquer real aqui. Que vamos supor se for 2, vai dar (2,1) não vai, ele não vai mexer na conta não.

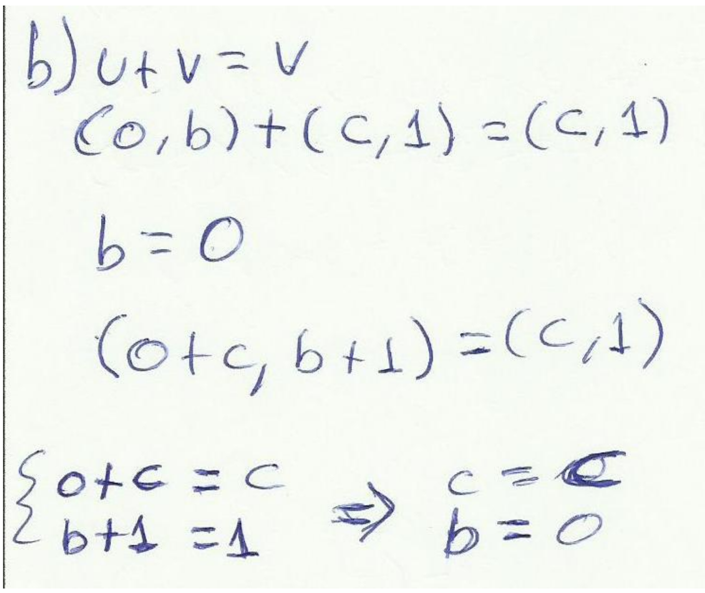


FIGURA 1.3: Euclides: 1 - b) (ESPAÇO VETORIAL)

c)

Ele começa a fazer e fala:

Euclides: Devo ter errado alguma coisa aqui. Estou dando alguma bobeira. Está dando 1 = 0.... Está certo né. (confere as contas)... como assim?

Ele demora a resolver e nos dá a impressão de desconforto ao fazê-lo. Então perguntamos o que ele está pensando. E ele diz:

Euclides: Dando que 1 = 0, mas não estou vendo erro nenhum, no sistema.

Professor: O que você acha que está acontecendo nesta situação?

Euclides: Deu que “1 = 0”. Eu tentei montar aqui o/ “c” do jeito que o resultado aqui e deu “c = 0” e/ não faz sentido... “1 = 0”. É só se aqui fosse zero. Se esse 1. Aí o 1 não é 1. É, não sei não. Se eu substituísse esses valores que eu encontrei aqui aí daria certo, mas...

Professor: Você acha que esse exemplo aí tem alguma relação com o anterior?

Euclides: É, eu imaginei que tinha né. A tendência era também falar que se u + v = u, então v tem que ser o (0,0). Aí eu caí na asneira de fazer a conta e/ está dando (0,1).

Professor: E o que está informação está te falando?

Euclides: Que o (0,1) também é o (0,0).

Professor: Isso aqui te diz o que, 1 = 0? Isto pra você funciona, não funciona?

Euclides: Indo pelo algebricamente formal, é um absurdo né. Por isso, que na hora que eu achei eu já/

Professor: Isso está contradizendo o quê, por que o absurdo?

Euclides: Teoricamente ele está falando que (0,0) é igual a (0,1).

Professor: O que não é de fato. O que causou este “absurdo” todo? O estopim desse problema?

Euclides: Deve ser por causa dessa soma aqui.

Professor: Então você acha que devem existir “b” e “c” que podem satisfazer isso?

Euclides: É “b + 1”, é não, se eu olhasse isso aqui eu já ia saber que/ “b + 1” só pode ser se o “b” for zero.

Professor: Aí daria 1 = 0.

Euclides: Ah é. É mesmo.

Professor: O que você queria mostrar, lá no início? Que u + v = u.

Euclides: Eu queria mostrar que o v era o (0,0).

Professor: É possível isso acontecer?

Euclides: Eu acho que não, porque está dando esse “b + 1”, não vai dar nunca “b + 1 = b”, não vai dar. E como “b” é número real não tem “b” que somado a 1 dê “b” não. Aí como é que fica, não dá certo isso aqui?

Professor: O que você falaria pra mim? Ma dá uma resposta final.

Euclides: (pensa) Ah. Eu acho que não tem solução isso aqui não. Essa soma não. É eu acho que o vetor dessa maneira que está escrito aqui, ... é que não vai ter b / independente qual seja o b. Você nunca vai encontrar b tal que b + 1 = 1 não. É não tem solução, o sistema não tem solução então você não vai encontrar b que satisfaça aqui. (ele pensa e escreve a solução na resolução).

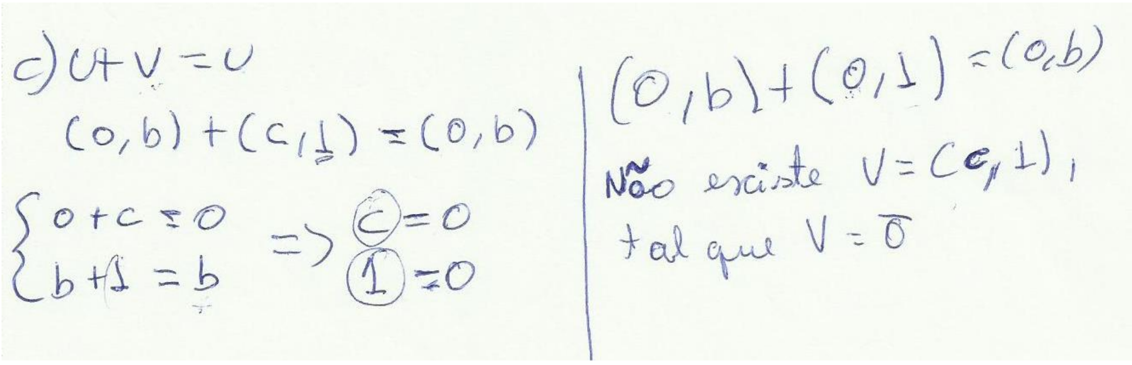


FIGURA 1.4: Euclides: 1- c) (ESPAÇO VETORIAL)

Acreditamos que, por achar que sempre seria possível encontrar os valores de “b” e “c”, Euclides foi levado apensar em consequências que acarretariam em absurdos, tais como 1 = 0 e o vetor nulo de IR^2, (0,0), ser igual ao vetor (0,1).

Destacamos que, reconhecemos o fato de que em alguns exemplos o vetor nulo poderia ser algo diferente do que costuma ser. A discussão foi proveitosa em dois sentidos principais: primeiro, apontarmos este fato de que o vetor nulo pode não ser o (0,0) ou similares e; segundo, que o professor deve estar atento à análise das soluções de sistemas de equações, tema discutido com este enfoque no Ensino Médio.

21/12: 2º Encontro (continuação da Ficha 1).

Por motivos de incompatibilidade de horários, nossos e dos alunos, foi só a partir do 2º encontro que passamos a ter dois alunos: Euclides e Simba.

O presente encontro iniciou-se de maneira análoga à do anterior, apresentamos ao Simba o questionário de apresentação e o termo de compromisso ético.

No primeiro diálogo relacionado ao conteúdo de Álgebra Linear, Simba nos disse que, apesar de ter cursado esta disciplina, é como se estivesse vendo o conteúdo pela primeira vez, pois não compreendia os conceitos.

Como Euclides no primeiro encontro já havia discutido grande parte da Ficha 1, pedimos a ele que, enquanto realizávamos esta parte com Simba, que ele terminasse o item d) da tarefa 1.

Simba lê a definição de IR^n, das operação e suas propriedades e começamos a discutir sobre os conceitos ali envolvidos. Ao questionarmos sobre a definição de Espaço Vetorial, ele diz que:

Simba: São vetores que você trabalha com operações de um corpo. Só isso que eu sei.

Vemos que, da definição de Espaços Vetoriais, Simba cita os elementos “constituintes” desta estrutura: vetores; operações e corpo. E, portanto, apesar de não definir da forma “matematicamente correta” parece-nos que Simba internalizou alguns conceitos envolvidos nesta definição.

Pedimos a ele também que citasse um exemplo de um Espaço Vetorial e ele fala:

Simba: O zero. Só o zero. Se você fizer todas as operações/ fica lá. O zero é não é?

Professor: É o quê?

Simba: Um Subespaço Vetorial.

Professor: Um Subespaço?

Simba: É, não um Espaço Vetorial, é um Subespaço de IR.

Professor: Ok. Vamos com calma. E o IR é o quê?

Simba: Não. Na verdade teria que ser o IR^2.

Acreditamos que Simba estava se referindo ao Espaço nulo {0} e considerando-o como um subespaço de IR por meio de suas falas. Mas, de acordo com a fala anterior, percebemos que, provavelmente, ele estava imaginando o Espaço nulo {(0,0)} subespaço de IR^2. Ele não fez representações e, por isso, não temos condições de confirmar esta informação, apesar de ele retomar este assunto na próxima Ficha de Trabalho.

Professor: E o que era o IR^2?

Simba: São. Não sei, o que é o IR^2. O IR^2 seria um plano.

Professor: Um plano xy?

Simba: Mas aí é um plano cartesiano, estou falando um plano mesmo. Um plano.

Professor: E quais são os elementos desse plano?

Simba: São pontos com dois pares ordenados?

O Professor desenha no quadro (x,y) e pergunta:

Professor: Isso?

Simba: É.

Professor: Isso é um cara que está?

Simba: No IR^2. Isso também pode ser um ponto ou um vetor. Depende de como você olha.

Vemos que Simba tem a noção de que o elemento (x,y) pode ser analisado de duas maneiras dependendo da abordagem que lhe é dada.

Professor: E só teríamos o IR^2? Ou teríamos mais alguém?

Simba: Não tem o IR^3, o conjunto de matrizes, o conjunto de polinômios. É isso.

Professor: Tem também o IR^4, o IR^5 e, assim por diante.

Neste ponto explicamos nossa intenção em trabalhar apenas com o Espaço Vetorial IR^n sobre IR e munido das operações de Adição e Multiplicação por Escalar usuais. Por ter cursado a disciplina, Simba cita outros tipos de Espaços já estudados por ele, mas, raramente, retorna a eles depois que firmamos o propósito de nosso estudo.

Ao ler as propriedades que os elementos do Espaço Vetorial IR^n satisfazem, Simba pergunta se estas são propriedades de Corpo.

Simba: Isso aqui é a definição de Corpo também? Porque quando você tem um corpo você tem essas propriedades.

Professor: Aí fala que estas são propriedades de Corpo?

Simba: Não, só estou perguntando se são. Ele não falou, mas eu estou associando.

Professor: Sim, mas aqui temos algo a mais. E não falamos em Corpo até agora.

Simba: É porque, eles (livros e professores de Álgebra Linear) sempre começam a definição, que você tem um "coisa" e aí tem um Corpo, um α pertencente a K um Corpo. E eu sempre confundo isso, entendeu? Você tem um vetor aí ele pega um α pertencente ao Corpo. Aí depois ele faz esse α vezes esse vetor, que dá um vetor do subespaço. Mas se eu tiver, é, esse subespaço não poderia ser um Corpo?

Professor: Quem está funcionando como Corpo aí? Você chegou a prestar atenção nisso Euclides? Você lembra ele (o material) falou assim “Seja um Espaço Vetorial IR^n” (e mostra no material o quadro abaixo).

Como as operações definidas para IR^n satisfazem as 8 propriedades listadas acima, dizemos que IR^n, com as operações descritas anteriormente, é um Espaço Vetorial sobre R. E seus elementos serão chamados de vetores.

Professor: Nós não colocamos esta palavra Corpo aí, falamos “sobre IR”.

Eles leem e perguntamos ao Simba:

Professor: Você nunca entendeu isso.

Simba: Eu nunca entendi o que significa isso.

Professor: Deixa eu fazer uma diferenciação. Na verdade é o seguinte quando você falou das propriedades, todas elas. Quando você olha para Corpo, você opera apenas com elementos desse Corpo, então você se pegarmos o Corpo IR, e aplicarmos estas operações, analisando estas propriedades, veremos que adicionando e multiplicando, estaremos sempre dentro do mesmo corpo. Um Espaço Vetorial é um pouco mais abrangente, porque você pode pegar o IR^2, e multiplicar seus elementos por elementos do Corpo IR. Viu a diferença.

Euclides: É porque aqui você está pegando um cara “fora”.

Professor: Isso.

Simba: Mas porque não fica tipo IR^{n+1} , por exemplo?

Professor: Porque você está multiplicando “escalar”. Eu entendi o que você falou. Quando a gente multiplica x^2 por x^2 não dá x^4? Alteraria este expoente.

Simba: Sim.

Professor: Por que aqui não altera? Por que exatamente este “cara”/

Simba: Então eu não posso pegar um Corpo de IR^2 não?

Professor: Não, pois IR^2 não é um Corpo, são “conjuntos”. O IR^2 nesse caso seria um Espaço Vetorial. Você entendeu? Para ser Corpo temos que ter um conjunto, definir duas operações de Adição e Multiplicação e seus elementos devem satisfazê-las.

Simba: Então será sempre “sobre” IR ou C?

Professor: Ou Q. racionais também é Corpo. Porque a Multiplicação aqui não é uma Multiplicação entre elementos/ Quando você olha Corpo você opera dentro do mesmo conjunto Racional com Racional. [...] A questão é que a gente define uma Adição, que não precisa ser esta que está aí, pode ser outra, define uma Multiplicação por Escalar, na qual estou multiplicando um vetor por um “escalar”, por um número, o número no Corpo que eu tiver escolhido. Aqui, eu falei que é sobre os números reais, mas poderia ser u número complexo. E as operações devem satisfazer.

Simba: Sim.

Professor: Então a gente pensou em alguns exemplos, se a gente pegar, por exemplo, este elemento (1,1), de que Espaço ele poderia ser?

Simba e Euclides: Do IR^2.

Professor: Então se a gente tomar, vamos pensar no seguinte, mas ele podia estar no Q^2?

Simba e Euclides: Podia.

Professor: E se a gente pegar Q^2 sobre IR, será que vai ser um Espaço Vetorial com estas operações?

Euclides: Você poderia pegar um “a” escalar que seja irracional.

Professor: Então me fala.

Euclides: $\sqrt{2}$, por exemplo.

Professor: Multiplica ele então pelo vetor (e faz no quadro). Vai dar, utilizando as operações usuais, ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$) e está em Q^2?

Euclides: Não.

Professor: Então eu opero, eu posso operar, mas eu “saio fora”, viu aí a importância desse “sobre alguém”, a gente tem que ter cuidado com isso.

Simba: Então ele não. Ele deixa de ser um subespaço/ Espaço Vetorial sobre o corpo IR? Mas se eu falar sobre Q ele seria.

Professor: Então por que é mais “abrangente” a definição? Porque eu preciso de um conjunto, um Corpo de escalares, porque a multiplicação é por escalar, e preciso definir duas operações.

Explicamos a eles que nossa opção em fazer o curso apenas com IR^n sobre IR e as operações usuais, foi tomada por acreditarmos que o mais importante seria que os alunos compreendessem as definições independente do Espaço Vetorial considerado. E indicamos que, em nosso material, todas as definições e Teoremas seriam analisados apenas para este Espaço Vetorial específico.

Simba: Então as operações também entrariam como um diferencial?

Professor: Com certeza. E, até pensamos em utilizar a seguinte notação(escrevemos no quadro):

$$(IR^n, IR, +, .)$$

Euclides: Ah, porque a notação do Corpo é só IR^n.

Professor: É, só o conjunto e duas operações.

Simba: E essas operações podem ser definidas de outras formas?

Professor: Sim, mas quando utilizarmos esta notação, estaremos nos referindo às operações usuais. [...] Portanto, quando eu escrevo aquilo ali (a notação), eu estou “amarrando” quatro condições para um Espaço Vetorial: não é só IR^n, só IR, só as operações, eu preciso dos quatro.

Perguntamos ao Simba, que já havia estudado a definição mais geral de Espaço Vetorial, que não restringe conjunto, Corpo ou operações, se ele vê alguma diferença.

Simba: Não vejo diferença, parece a mesma coisa, mas, pelo menos agora, eu entendo o que é um Espaço Vetorial, que eu não tinha entendido o que era. Porque eu pegava um outro Corpo, tinha que multiplicar por ele e seguia as definições de um Corpo e não era um Corpo. Aí eu me perdia.

Discutimos um pouco sobre como seria esta definição, para que Euclides compreendesse do que estávamos falando e Simba pergunta:

Simba: Então depende sempre da operação?

Professor: Sim. [...] Por isso, que quando alguém perguntar: este conjunto é um Espaço Vetorial? Você tem que perguntar: sobre que Corpo e com quais operações?

Neste ponto, discutimos, brevemente, sobre as operações de subtração e multiplicação. Questionando o porquê da “regra” de sinais; a importância dos inversos aditivo e multiplicativo; e como ensiná-los no Ensino Fundamental. Simba diz que já foi questionado sobre estes assuntos e nunca tinha parado para pensar neles devidamente. Dizemos a eles que são essas as perguntas que aparecerão na sala de aula e são perguntas que os licenciandos deveriam ter a oportunidade de discutir.

Mostramos a eles os seguintes exemplos:

(-2).(-2) = -[-(2.2)] = 4 (O inverso do inverso aditivo do produto 2.2)

$\frac{4}{2} = 4.\frac{1}{2}$ (Dividir por dois, por exemplo, 4:2, basta multiplicar o 4 pelo inverso multiplicativo do 2).

Simba: Acho que assim até fica mais fácil de entender fração.

Terminamos a discussão e pedimos o Simba que faça a tarefa 1. Enquanto isso, Euclides termina o item d) do mesmo exemplo.

a) Neste item, Simba resolveu sem nenhuma dificuldade e o único questionamento que fizemos foi à respeito do que seria o $\overline{0}$ neste caso e ele respondeu (0,0) e colocou na resolução.

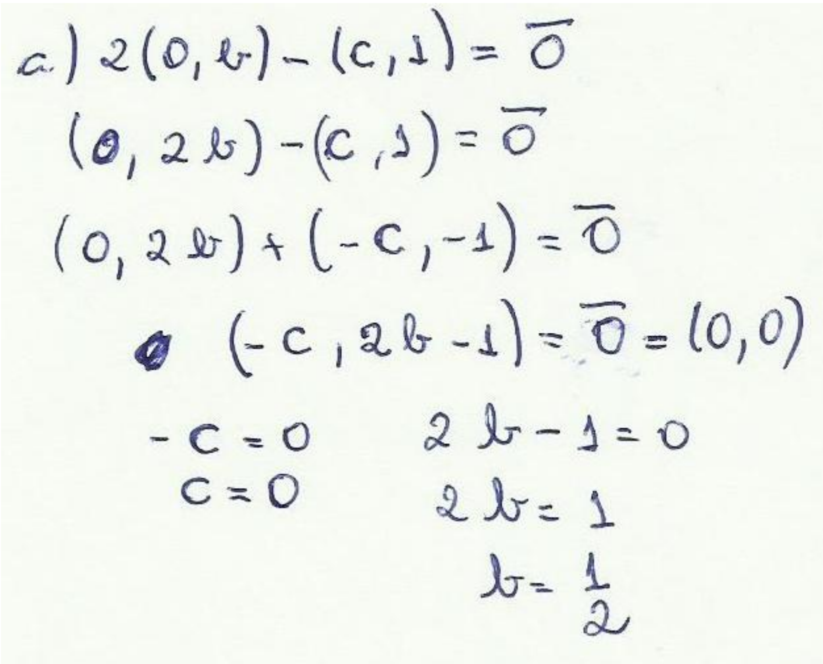


FIGURA 2.1: Simba: 1- a) (ESPAÇO VETORIAL)

b)

Simba: Se essa coordenada aqui (“b”) não fosse zero não teria como resolver, teria? Seria “1+c = c”. Não teria solução?

Professor: Você quer “u+v=v”?

Simba: É.

Professor: Se desse isso aqui não teria solução. Porque existe algum número que ele somado com 1 que dê ele mesmo?

Simba: Não.

Professor: Você chegaria numa contradição.

Simba: Aí isso aqui seria/ não seria verdade.

Professor: Nesse aqui deu certo?

Simba: Acho que vai dar, não terminei. Daria, b = 0 e c seria c = 0. Não/ 0 = 0. Não sei o que vou fazer.

Professor: O que você conclui?

Simba: “c” é independente, pertence aos reais.

Professor: Você acredita nisso?

Simba: Sim, estou aprendendo.

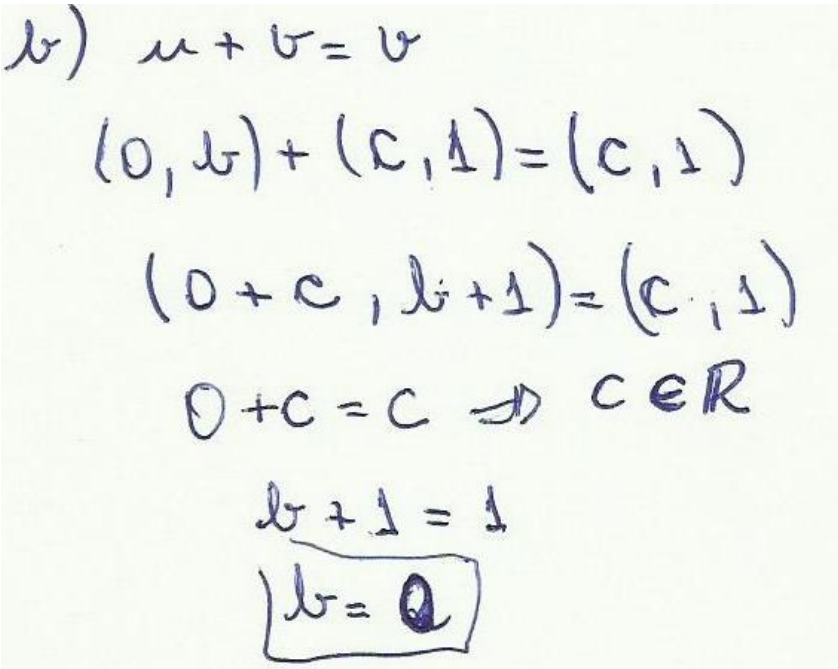


FIGURA 2.2: Simba: 1- b) (ESPAÇO VETORIAL)

c)

Simba: Aqui aconteceu um negócio igual/ “b+1 = b”.

Professor: Aí você tem que pensar. Na situação.

Simba: Vai ter uma solução?

Professor: Vê se é possível enxergar alguma solução para isso.

Simba: Não tem solução.

Professor: É, não existem reais que satisfaçam esse sistema. Você pode escrever do seu jeito.

c) $u + v = u$

$(0, b) + (c, 1) = (0, b)$

$0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

$b + 1 = b$

Não existe b e c para este caso

FIGURA 2.3: Simba: 1- c) (ESPAÇO VETORIAL)

d) Euclides acredita que não consegue terminar/concluir pois está errando nas contas. E fica analisando.

[...]

Ele rabisca a palavra “impossível”.

Euclides: Então não dá impossível mais. Engraçado que eu deveria colocar uma restrição em algum lugar para esse “c”, pois sabendo que ele é zero eu não podia passar dividindo. E se ele for, e eu passar normal eu “ferro” com o sistema.

Professor: A gente trava no que a gente não está acostumado a ver.

Euclides: É.

$$(2+5)\cdot(u+v) = 5u+2v$$

$$(2+5)\cdot((0,b)+(c,1)) = 5u+2v$$

$$(2+5)\cdot((0+c,\ b+1)) = 5u+2v$$

$$(2\cdot(0+c)+5\cdot(0+c),\ (2\cdot(b+1)+5(b+1)) = 5u+2v$$

$$(7c,\ 2b+2+5b+5) = 5u+2v$$

$$(7c,\ 7b+7) = 5u+2v$$

$$(7c,\ 7b+7) = 5(0,b)+2(c,1)$$

$$(7c,\ 7b+7) = (0,5b)+(2c,2)$$

$$(7c,\ 7b+7) = (2c,\ 5b+2)$$

$\cancel{7c+2}$

$$\begin{cases} 7\cancel{c} = 2\cancel{c} \Rightarrow \\ 5b+2 = 7b+7 \end{cases} \Rightarrow \text{~~Impossível~~.}$$

$$7c - 2c = 0$$
$$5c = 0$$
$$c = 0$$

$$\begin{cases} 7c = 2c \\ 5b+2 = 7b+7 \end{cases}$$

$$7b - 5b = 2 - 7$$
$$2b = -5$$
$$b = -\frac{5}{2} \quad e \quad c = 0$$

FIGURA 2.4: Euclides: 1- d) (ESPAÇO VETORIAL)

Simba nos diz que não tem outra solução, somente que $b = -\frac{5}{2}$ e $c = 0$.

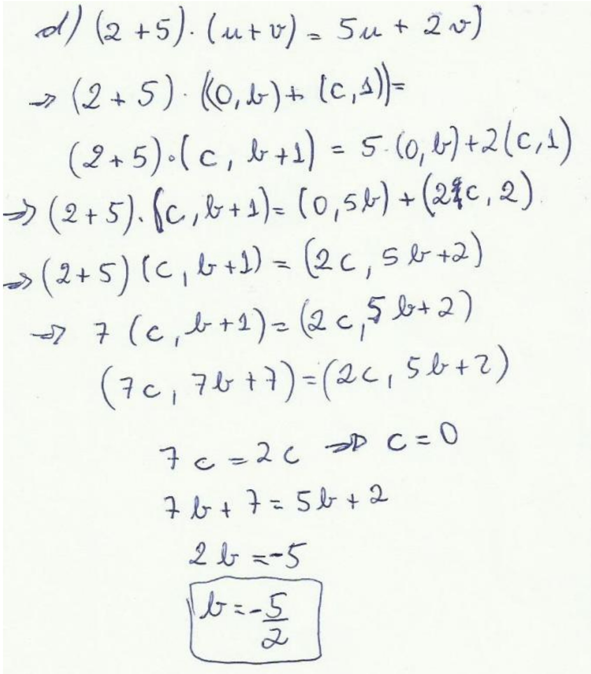


FIGURA 2.5: Simba: 1- d) (ESPAÇO VETORIAL)

Discutimos a resolução do item d) com os dois alunos.

Professor: O Euclides fez uma coisa que a gente faz muito, que é "cortar". Ele "cortou" os "caras" né?

Euclides: E eu "cortei" sem pensar, aí depois/

Professor: Olha só ele chegou em 7 = 2. Esse "cortar", você dividiu por zero, porque a única solução dessa equação era zero. Quando você divide por zero, por isso, que essa divisão por zero é indeterminada porque pode chegar a contradições absurdas.

6.2 – Ficha 2: Subespaços Vetoriais do IR^n

21/12: 2º Encontro

Eles iniciam a leitura da definição de Subespaço Vetorial. E, a partir dela, pedimos que eles construíssem um exemplo de subespaço vetorial de algum IR^n.

Professor: Como vocês definiriam subespaço a partir do que leram? Ou pode ser com um exemplo de subespaço.

Simba: Você quer que só lendo pra esta definição, vendo o que está escrito aqui, eu diga o que é um subespaço? Bom, eu sei que é porque já definiram assim pra mim, mas se eu aceito isso é uma pergunta bem/ que é um subconjunto não vazio eu concordo.

Euclides: Fazendo um diagrama, eu começaria assim.

Pedimos que eles desenhem no quadro.

Euclides desenha um diagrama representando o IR^n e contido nele um subconjunto W e vai analisando as outras condições

Euclides: u e v pertencem a W, aí ele está pegando um u e um v aqui e quer provar que o u+v também está aqui, dentro, quer provar não/ e dado u escalar, que agora depois do 'sobre IR' lá eu sei.

Simba: O u não, o "a" é escalar.

Euclides: É o a escalar, e o u ali quer falar que o "au" também está aqui. Aí ele está falando que se você tem uma estrutura assim, você tem um subespaço, que isso aqui, o W aqui é um subespaço do IR. Assim que eu falando de diagrama. Então assim, já daria pra garantir sem saber que esse u+v também é do IR^n.

Simba: Não, você não consegue ver isso, você quer isso.[...] Você tem que provar que u e v estando ali, u+v ele está no W.

Euclides: Hãhã. Ah, tá, tem um/

Simba: Você tem que provar. Se tiver vai ser, se não tiver não vai ser.

Euclides: Se eu tenho um u e um v, se eu tenho um W pertencente a um espaço e a soma de dois desse W, está dentro do W e a multiplicação está no W ele é um subespaço do outro. Entendi.

Professor: Então pega um exemplo.

Euclides: O IR^2.

Professor: Escreva um subconjunto do IR^2.

Euclides: (x,0).

Simba: x e 0.

Professor: Você está pensando em x real?

Euclides: É. Aí um subconjunto seria um x par, no W.

Professor: Qual é o subconjunto que você está pegando?

Euclides: Um subconjunto disso aqui (aponta para (x,0)).

Simba: Mas você já pegou o (x,0). O (x,0) é o seu subespaço.

Euclides: Ah é, é porque isso aqui (o IR^2) é (x,y).

Professor: Isso.

Eles iniciam a realização da “verificação” das condições com elementos/vetores particulares/numéricos para verificar a soma e quando vão fazer a verificação da multiplicação eles tomam um escalar genérico e um vetor numérico. E eles verificam que o subespaço “(x,0)” é um subespaço do IR^2. E Simba sugere que Euclides faça a verificação com elementos genéricos.

Pedimos a eles que construam então um exemplo que não caracteriza um subespaço de algum IR^n.

Simba: Coloca x par. Não x par não vai dar certo, talvez x ímpar.

Euclides: x, 0, com x ímpar.

Simba: Pode ser par, vai dar um problema no “a” ali. Aí a soma ali Euclides vai dar certo, porque par mais par dá par, mas na hora que você pegar um “a” aqui, pegar “a” igual 3/

Euclides:Eu já entendi o que você quer fazer, a soma/

Simba: Agora pega “a” igual a $\frac{1}{2}$ e u pertencente ao W, (2,0). Aí quando você multiplicar por $\frac{1}{2}$ vai dar (1,0) e (1,0) não pertence aquele W, porque o x “1” não é par aí não pertence ao W. Entendeu?

Pedimos que eles escrevessem o W com todas as condições que eles pensaram. E anotam no quadro as seguintes notações, com q ∊ Z:

$\{(x,0) \in IR^2; x = 2q\}$

$\{(x,0); x \in IR, x = 2q\}$

$\{(x,y)\ x \in IR^2; y = 0, x = 2q\}$

O Euclides não acredita que a segunda notação não é equivalente às demais, pois não aparece explicitamente no conjunto que os elementos (x,0) pertencem ao IR^2, ele diz que se incomoda com a “cara” dos termos.

Ao perguntarmos se era suficiente tomarmos um único exemplo numérico para provar que um conjunto não é um subespaço, eles respondem que sim e que este constitui um contraexemplo.

Euclides tem dúvida se a observação iii), que diz que o vetor nulo sempre pertencerá a um subespaço, é realmente verdadeira. Mas, Simba explica-lhe o porquê dela ser verdadeira: o escalar poder ser igual a zero e multiplicado por cada vetor do conjunto resultará no vetor nulo do mesmo.

Após terminarem a discussão da teoria, eles concluíram que o subespaço é também um espaço.

Começamos a resolução das tarefas de subespaço. Ressaltamos que serão discutidos aqui apenas os aspectos mais relevantes das discussões.

Tarefa 1 – Subespaços Vetoriais:

Analise quais dos seguintes itens abaixo constitui um exemplo de Subespaço Vetorial para IR^3, sobre IR e munido das operações usuais de Adição e Multiplicação por escalar:	
a) $L = R^2$	d) $T = \{(x,y,z) \in R^3;\ x + y = 0,\ z < 0 \quad e \quad z > 0\}$

a)

Euclides: Eu posso falar que o IR^2 é um/ com a terceira coordenada zero lá.

Professor: Façam aí.

Euclides: Mas o IR^2 pode colocar ele também como sendo um, vamos botar, um conjunto (x,y,0).

Simba: Eu acho estranho.

Euclides: Agora eu comecei a pensar que, tá, o IR^2 é um subconjunto do IR^3? Eu não sei disso. É porque o três/ assim, o IR^2 tem duas coordenadas, e olha só os elementos do IR^3, vai ter três aí eu teria que ligar. Eu teria que achar/

Simba: Mas aí você pode desfazer essa / esse negócio aqui?

Professor: Essa última coordenada?

Simba: É. Tipo assim, realmente se você pegar um gráfico lá isso aqui vai dar um plano no eixo/ mas eu posso simplesmente ignorá-lo?

Euclides: É isso que eu estou pensando agora. Porque se eu pegar a soma.

Simba: E como é que você vai somar? Eu não consigo ver que isso é igual a isso.

Euclides: Igual não é, eu to tentando fazer algum tipo de associação, de/ de função.

Simba: Concordo que você tem que fazer uma função, mas você tem que montar a função.

Professor: Na verdade, a questão é, ele é um subconjunto?

Euclides: É, ele não é um subconjunto. Ele não é porque o elemento dele tem dois/ tem outra "cara".

Simba: Não. Eu acreditaria sim que ele é um subconjunto, mas/ é o IR^2 está contido no IR^3.

Professor: Você acredita também Euclides?

Simba: Acho que está. É mais eu não saberia explicar o porquê. Pelo gráfico. Eu vou ter o plano.

Professor: Mas esse plano vai estar onde?

Simba: Como assim onde?

Professor: Vai estar no espaço né? É um plano no espaço inteiro. E o IR^2 o que é?

Simba: Um plano.

Professor: E tem mais alguma coisa? Se a gente fosse pensar geometricamente. O IR^2 preenche tudo né?

Simba: É um plano do IR^3.

Professor: É “um” plano do IR^3. Mas é o IR^2? [...] quais são os elementos do IR^3?

Euclides: (x,y,z).

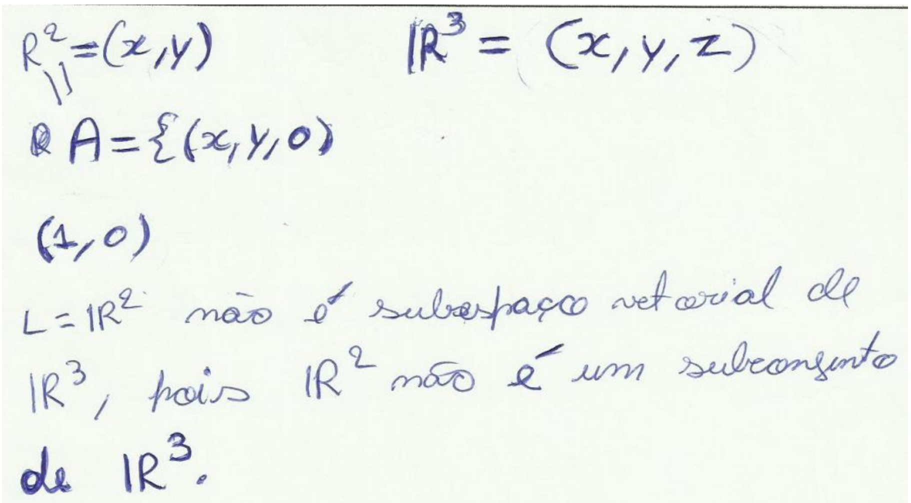
Professor: E do IR^2?

Simba: (x,y). Eu não consigo ver que isso é igual aquilo (os elementos).

Pedimos que eles escrevessem exemplos numéricos de elementos do IR^2 e IR^3, eles escreveram (1,2,0) e (1,2) e eles viram que eram elementos de naturezas distintas.

[...]

Eles concluíram que, por isso, os elementos não possuírem a mesma natureza, IR^2 não estava contido no IR^3, e, portanto, IR^2 não era um subespaço de IR^3.

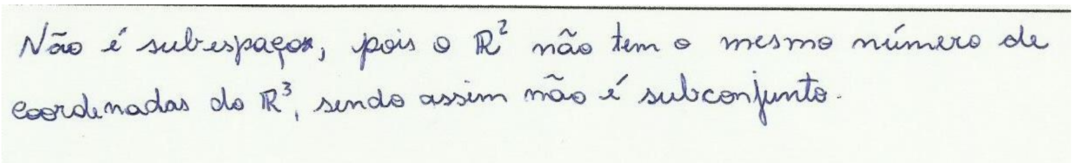

$\mathbb{R}^2 = (x,y)$ $\mathbb{R}^3 = (x,y,z)$

$A = \{(x,y,0)$

$(1,0)$

$L = \mathbb{R}^2$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, pois $\mathbb{R}^2$ não é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$.

FIGURA 2.6: Euclides: 2) (SUBESPAÇO)


Não é subespaço, pois o $\mathbb{R}^2$ não tem o mesmo número de coordenadas do $\mathbb{R}^3$, sendo assim não é subconjunto.

F

FIGURA 2.7:Simba: 2) (SUBESPAÇO)

Do dia 7 ao dia 14 de janeiro de 2013.

3º Encontro: 07/01

Tarefa 1:

d)

Nesta tarefa, procuramos explorar como os alunos reagiriam à expressão “z > 0 e z < 0” e foi visível o desconforto deles ao se depararem com ela, como podemos ver em suas falas.

Simba: A “d”, pra mim ficou ambígua. Porque z < 0 e z > 0, eu coloquei como se significasse que z é diferente de 0. Mas também entendi que z teria que ser, ao mesmo tempo, menor e maior, mas eu acho que isso não existe. Então, tipo assim, eu fiz/ o mais correto é dizer que z é diferente de 0. Aí eu fiz como se z fosse diferente de 0.

Euclides: Eu tava tentando fazer, eu não entendi muito bem esse “z maior” e “z menor” mesmo, aí eu fui fazendo a soma/ aí chegou ali eu não sabia como interpretar esse “z maior” e “z menor” aí foi o que eu falei o que eu fiz, vou tentar provar que não é usando só a parte da multiplicação por escalar. Porque aí, se eu provar que não é, aí eu nem preciso ver essa parte da soma. Aí eu peguei um “a” e multipliquei por um “u” qualquer desse cara (o conjunto T). Mas aí, deu a mesma coisa, só que independente/ o que que eu fiz o “a” multiplicando o “u” independente de qual seja o z na condição aqui o zero multiplicando ele vai dar no final 0,0 só que o z eu sei que ele tem que ser maior ou menor do que 0.

Simba: Mas você pegou um “a” igual a zero?

Euclides: É peguei um “a” igual a 0. Pode ser que tenha um, pelo menos/ aí o que eu cheguei o “a” vezes o “u” independente do que seja o z aqui vai dar o “0,0” e isso aqui não vai estar lá no T, aí eu tá beleza/ aqui eu provo que é um subespaço. Mas eu ainda não entendi o/

Simba: Eu fiz, tipo assim, peguei falei que ele é não vazio, porque o não “0,0” pertence ao T, aí tipo assim, peguei um α igual a 0 e o vetor (0,0,1) aí mostrei que “0,0” não pertence a T e também provei pra soma, sabe, mas bastava eu provar pra um/

(entendemos que toda vez que eles dizem “0,0” estão se referindo ao vetor (0,0,0).)

Professor: Mas aí você conseguiu provar pra/

Simba: Mas tipo assim, eu peguei só contraexemplo, dá pra provar.

O desconforto dos alunos foi desencadeado pela expressão “z > 0 e z < 0”, mais especificamente por não saberem interpretar o conectivo “e”.

Professor: O problema está onde você achou que está o problema mesmo. Nessa terceira coordenada aqui, no z. z tem que ser maior do que 0 e z tem que ser menor do que 0. Existe algum z, algum número real z que satisfaz essa condição simultaneamente? Igual você botou, você botou aqui o z igual a quanto?

Simba: (0,0,1).

Professor: Isso, o 1 é maior do que zero, mas o 1 não é menor do que 0.

Simba: Foi isso que eu falei. Mas aí, tipo assim, como pra mim surgiu meio que ambíguo, eu falei, como isso não existe eles devem querer dizer que z é diferente de 0.

Professor: Você deduziu assim?

Simba: É, entendeu, por isso, que eu fiz dessa forma, porque eu interpretei que z fosse diferente de 0. Eu interpretei das duas formas, tanto é que eu falei com vocês no início, interpretei das duas formas, só que, como pra mim soou muito estranho z ser maior e menor do que 0 eu preferi acreditar que vocês pediram que z era diferente de 0, entendeu?

Acreditamos que, neste ponto, Simba parece estar "impermeável" à expressão "z > 0 e z < 0", pois, consegue interpretá-la, mas diz: "preferi acreditar que vocês pediram que z era diferente de 0". Ou seja, Simba demonstra não estar familiarizado com a expressão e, por não saber como lidar com ela, opera com algo que é mais natural para ele: "interpretei que z fosse diferente de 0".

Professor: Mas e aí, e agora?

Simba: Aí com o z diferente de 0, não é subespaço. Porque eu peguei um elemento (0,0,1) e o elemento (0,0,-1) e somei. Isso dá (0,0,0) que não pertence ao T, porque pra mim, z é diferente de 0, não pertence.

Professor: E você Euclides, o que você acha disso?

Euclides: Eu também acho que aqui, essa condição ela é impossível, eu pensei nisso, só que eu também pensei, às vezes eles isso aqui imprimiu errado ou eles digitaram errado e eu vou então provar por outro lugar e ver o que que/.

Simba: Ele pensou do mesmo jeito que eu que z tinha que ser diferente de 0.

Assim como Simba, Euclides nos dá a impressão de não querer acreditar que é possível utilizar e manipular um conjunto com tal condição: "z > 0 e z < 0".

Professor: Não tem nada escrito errado não.

Simba: Então não é subespaço. Ele não seria um subconjunto, nem existiria.

Professor: Quantos elementos teriam aqui dentro?

Euclides/ Simba: Vazio.

Simba: Ele não é subconjunto e ainda é vazio.

Professor: Na verdade é subconjunto, porque o vazio é subconjunto de todo conjunto. Ele só não é/ Por isso, que fala assim, um subconjunto não-vazio, por isso, que a gente pega o (0,0,0) e mostra que ele está lá.

Simba: Eu provei que o (0,0,1) estava lá. Se o z fosse diferente de zero.

Por acreditar que “z > 0 e z < 0” implica que z é diferente de zero, Simba escreve na tarefa: “Não é vazio, pois (0,0,1) ∈ T”, afirmando que isto “prova” que T é não-vazio.

Professor: Seria se fosse “ou”. Z é menor ou maior do que 0, só não pode ser 0. Então, como é “e” ele queria que satisfizesse as duas condições simultaneamente.

Euclides: É a intersecção.

Professor: Exatamente.

Simba: Eu percebi isso, mas/

Professor: Você não queria acreditar?

Simba: É.

Pedimos a eles que refizessem o exercício a partir do que discutimos.

Seja u e $v \in T$

$u = (x_1, y_1, z_1)$ onde $x_1 = -y_1$

$v = (x_2, y_2, z_2)$ $\quad x_2 = -y_2$

$u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$u + v = (-y_1 - y_2 ; y_1 + y_2 ; z_1 + z_2)$

$u + v = (-(y_1 + y_2), y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Seja $a \in \mathbb{R}$,

$au = (ax_1 + ax_2, ay_1 + ay_2, az_1 + az_2)$

Como a é qualquer $\in \mathbb{R}$.

Então se $a = 0$

$\Rightarrow 0u = (0, 0, 0)$

Logo, não é subespaço

FIGURA 3.1:Euclides: 1- d) 1ª Versão (SUBESPAÇO)

1-d

Como

$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y=0,\ z<0 \text{ e } z>0\}$

o conjunto $T = \emptyset$, pois $\nexists$ z tal que $z>0$ e $z<0$

logo não é subespaço.

FIGURA 3.2: Euclides: 1- d) 2ª Versão (SUBESPAÇO)

1) T é um subconjunto do $\mathbb{R}^3$

2) Não é vazio, pois $(0,0,1) \in T$

3) Seja $\alpha = 0$ $\quad \underbrace{(0,0,1)}_{\in T} \cdot \overset{0 \in \mathbb{R}}{0} = \underbrace{(0,0,0)}_{\in T} \notin T$

4) $\underbrace{(0,0,1)}_{\in T} + \underbrace{(0,0,-1)}_{\in T} = \underbrace{(0,0,0)}_{\notin T}$

logo não é subespaço vetorial.

FIGURA 3.3: Simba: 1- d) 1ª Versão (SUBESPAÇO)

d) $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y=0,\ z<0 \text{ e } z>0\}$

$T = \emptyset$, pois não existe ~~elemento~~ nenhum elemento pertecente ao $\mathbb{R}^3$ que satisfaz a condição $z<0$ e $z>0$. Portanto não é subespaço, pois para ser, preciso ter pelo menos um elemento (ser não vazio).

Como não existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $z<0$ e $z>0$,

então o $a \in T$ não existe.

$T = \emptyset$

FIGURA 3.4:Simba: 1 - d) 2ª Versão (SUBESPAÇO)

Tarefa 2:

Determine se o conjunto formado pelo vetor nulo de R^2, juntamente com todos vetores w = (x, y) de R^2 para os quais $\frac{y}{x}$ tem um valor constante, é ou não um subespaço de R^2.

Euclides: Não sei nem como eu definiria este conjunto, vai ser... Eu estou tentando enxergar o conjunto primeiro.

Inicialmente, a preocupação deles é: como escrever/definir o conjunto W na forma que eles conhecem. Eles começam a pensar em frações equivalentes, quando analisam que a divisão y / x resultará em um valor constante.

Simba: Se você mudar o valor da constante teremos subespaços diferentes. É porque ele quis dizer assim, eu só posso pegar frações equivalentes.

Professor: Se você só pegar frações equivalentes terá que ser sempre a mesma constante.

Simba: Ou seja, pertencer ao mesmo subespaço. Se uma for uma constante/ mas o subespaço é diferente.

Professor: Só que aqui a gente quer um subespaço que contenha todas essas/ a gente não fixou essa constante. A gente quer o conjunto onde acontece isso sempre. Como seriam a “cara” dos vetores aí?

Eles escrevem o conjunto, mas têm dificuldade de exibir um elemento pertencente a ele.

Euclides: Essa parte do “tem um valor constante” é que eu não estou entendendo.

Professor: E você Simba?

Simba: Parece que ele vai ser um subespaço, mas eu não estou conseguindo provar. Porque, olha só, eu tenho/ porque eu não estou conseguindo encontrar um contraexemplo.

Acreditamos que os alunos estão frente a um obstáculo epistemológico, pois não conseguem, a partir do conjunto, seguir adiante na resolução da tarefa e, com a intervenção do professor eles conseguem terminar.

Professor: Tenta pensar/ tenta pegar um vetor de P, você consegue achar um? Por exemplo, assim, qual é a relação entre x e y? Do par ordenado (x,y)? Porque P é o conjunto de todos os (x,y) pertencentes ao IR^2, tais que ou ele é o (0,0), o vetor nulo, ou ele é (x,y) tal que y/x é uma constante c. Bom, falar que y/x é igual a c, qual é a relação entre esses dois “caras”? Tem uma relação entre x e y, não tem?

Euclides: Ah, tá.

Simba: Um é múltiplo escalar do outro?

Professor: E como é que você escreve isso “no vetor”?

Simba: Mas ele é múltiplo escalar como? Então y é igual a cx.

Professor: Então como ficaria a cara do vetor?

Simba: (x, cx).

Professor: Fica melhor fazer as operações se for assim?

A partir daí, eles começam a analisar se esse conjunto será ou não, um subespaço do IR^2.

Simba: É um subespaço.

Professor: Mas porque que agora foi tão simples ver que é um subespaço? Em que momento ou que afirmação que vocês mudaram o jeito de pensar, vocês estavam pensando em várias outras coisas diferentes e não conseguiam enxergar a “cara” dos elementos e porque vocês mudaram de ideia? A gente falou alguma coisa que influenciou vocês?

Euclides: O lance de pegar o y igual a cx, mudou tudo pra mim.

Simba: É, porque quando eu tava fazendo isso, porque eu tava fazendo/

Euclides: Pra falar verdade a pergunta que ele (professor) fez que me permitiu enxergar foi ‘qual a relação entre o y e o x, pra dar um c aqui?’ Porque pra mim esse c aqui, acho que foi aqui que eu enxerguei, eu não sei porque eu não estava passando o x/

Simba: Porque quando ele falou isso a gente conseguiu escrever o y como combinação de x acho que aí a gente pode jogar/ usar as propriedades.

Euclides: Aí até em relação a um outro exercício que a gente tava fazendo que você (professor) falou que não poderia, nem adiantava provar para um y qualquer do IR^2, porque a gente tinha que valer aqui dentro, então a gente tinha que enxergar essa “cara” deles. Então até aqui eu não estava/

Professor: O conjunto é diferente de vazio?

Simba: É, porque o (0,0) está lá. Na definição.

Professor: Por que vocês acham que ele (o enunciado) “separou” esse conjunto?

Simba: Porque senão deixaria de ser subespaço. Porque se eu pegasse o α igual a zero valeria.

Euclides: Não porque você não poderia ter um x igual a zero nunca, aqui né.

Professor: Vamos pensar, se a constante for zero?

Simba: Eu não teria um subespaço porque eu não teria/ o vetor nulo não estaria lá dentro. Porque pra ser igual a zero/

Euclides: Se o y for zero daria a constante zero.

Professor: E o x deveria ser o quê?

Simba: O x daria/ poderia ser diferente de zero. Então não teria o (0,0).

Professor: Por isso, separar/ colocar o (0,0). E se fosse igual a 1?

Simba: O (0,0) não teria, mas quando o α/ se eu pegasse o α igual a zero a multiplicação por escalar, o (0,0) não estaria lá.

$P = \{(x,y) \in R^2 : (x,y) = (0,0)$ ou $(x,y) \in R^2$ onde $\frac{y}{x} = c\}$

$P \neq \emptyset$ pois $(0,0) \in P$.

P é subconjunto de $\mathbb{R}^2$ pois, para todo $(x,y) \in P \Rightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Sejam u e $v \in P$, $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$

~~$u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$~~

~~$u+v = (x_1, y_1$~~

$u+v = (x_1+x_2, y_1+y_2)$ $\quad \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$

Como $\frac{y}{x} = c \Rightarrow y = cx$

Assim

$u+v = (x_1+x_2, cx_1+cx_2)$ $\quad \frac{c.\cancel{(x_1+x_2)}}{\cancel{x_1+x_2}} = c$

$u+v = (x_1+x_2, c(x_1+x_2))$

Seja $a \in \mathbb{R}$.

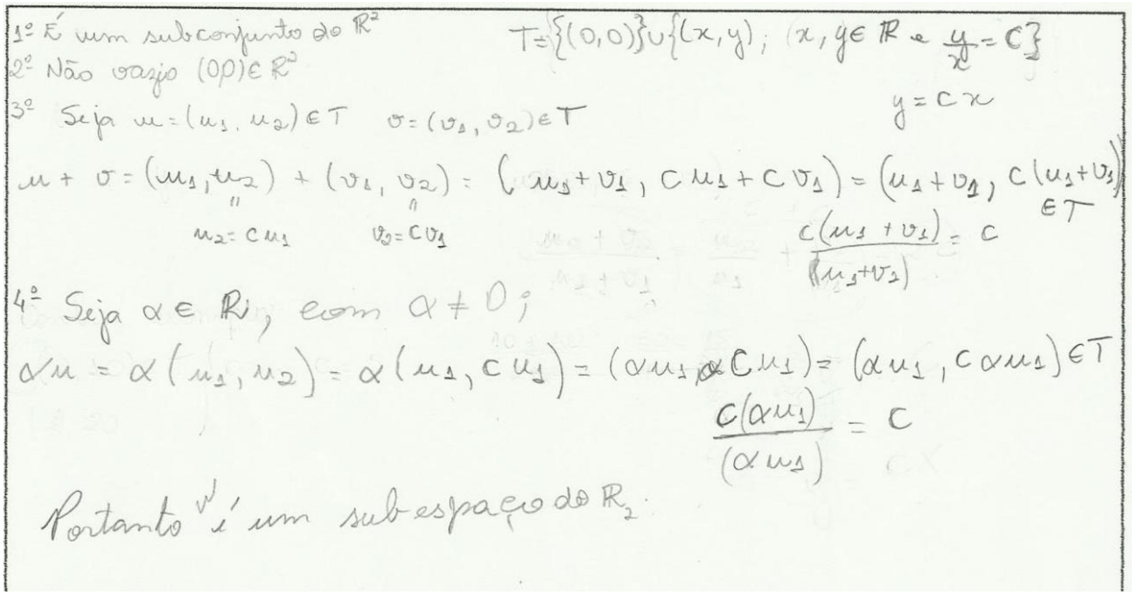
$au = (a(x_1+x_2), a(cx_1+cx_2))$

$au = (a(x_1+x_2), ac(x_1+x_2))$

$$\frac{\cancel{a}c \cdot \cancel{(x_1+x_2)}}{\cancel{a}\cancel{(x_1+x_2)}} = c$$

Portanto, é subespaço.

FIGURA 3.5: Euclides: 2) (SUBESPAÇO)



1º É um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ $T=\{(0,0)\}\cup\{(x,y);\ x,y\in\mathbb{R}$ e $\frac{y}{x}=C\}$

2º Não vazio $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ $y=Cx$

3º Seja $u=(u_1,u_2)\in T$ $v=(v_1,v_2)\in T$

$u+v=(u_1,u_2)+(v_1,v_2)=(u_1+v_1, Cu_1+Cv_1)=(u_1+v_1, C(u_1+v_1))\in T$

$u_2=Cu_1$ $v_2=Cv_1$ $\frac{C(u_1+v_1)}{(u_1+v_1)}=C$

4º Seja $\alpha\in\mathbb{R}$, com $\alpha\neq 0$;

$\alpha u=\alpha(u_1,u_2)=\alpha(u_1,Cu_1)=(\alpha u_1,\alpha Cu_1)=(\alpha u_1, C\alpha u_1)\in T$

$\frac{C(\alpha u_1)}{(\alpha u_1)}=C$

Portanto V é um subespaço do $\mathbb{R}_2$

FIGURA 3.6: Simba: 2) (SUBESPAÇO)

6.3 – Ficha 3: Geração de Espaços Vetoriais

3º Encontro: 07/01 – Parte 2

Iniciamos a segunda parte deste encontro discutindo o conceito de Combinação Linear e, como de costume, pedimos que eles lessem a definição matemática deste conceito para que pudéssemos discutir posteriormente.

Professor: Vocês conseguem ver que esse vetor v é um vetor de IR^n, sendo que ele é soma de vetores de IR^n, multiplicados por escalares?

Euclides: Sim, porque a multiplicação de escalar por qualquer um desses vetores que é de IR^n vai dar um vetor de IR^n e depois você vai somar vetores de IR^n e a gente já viu que dá em IR^n também porque eles são todos de IR^n.

Simba: Você só está pegando vetores em IR^n e como IR^n é um espaço vetorial e você está fazendo um soma e multiplicação por escalar então, soma de vetores em IR^n vai estar em IR^n.

Professor: Tem dois pontos que eu queria chamar atenção, um deles é a importância das operações do espaço. Viu que ali a combinação é uma combinação linear, porque a nossa multiplicação é uma multiplicação por escalar. Se não fosse, não seria uma combinação linear. O que é uma equação linear? Eu tenho um número vezes um outro número ou um número vezes um vetor. E uma equação quadrática, não tem alguém de um grau diferente? Aqui a gente vai ter isso, dado que a nossa multiplicação é uma multiplicação por escalar? Por isso, que é uma combinação linear dos vetores aí.

Retomamos a importância de analisarmos as operações, o corpo e o conjunto em que estamos trabalhando.

Professor: A outra questão é que quando a gente faz ali as duas operações na combinação linear elas poderiam ser operações não-usuais, mas como nós estamos lidando, neste curso, com operações do jeito que a gente definiu, serão estas as utilizadas, poderiam ser outras operações de adição e multiplicação por escalar.

Tarefa 2:

Sejam $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (2,4)$. Verifique se é possível escrever todos os vetores de R^2 como combinação linear de v_1 e v_2.

Simba: Mas o vetor não é múltiplo escalar dele? Eu não vou conseguir escrever números ímpares não. Vou?

Euclides: É, não vai dar não.

[...]

Professor: Qual a sua conclusão Euclides?

Euclides: Que não é possível. Porque eu escrevi ali primeiro, fiz a combinação linear pra escrever o (x,y) assim, então vai dar isso, e vai chegar num sistema.[...] ou seja, o y vai ser sempre um número par, aí vai faltar os vetores em que a segunda coordenada é ímpar.

Professor: Como assim, o que vai ser o seu y?

Euclides: É vi ser par porque vai ser duas vezes “alguma coisa”. Aí vai faltar os que a segunda/ ou seja, ele sempre vai ser par a segunda coordenada e como você quer escrever todo mundo, vai faltar estes.

Simba: Vai dar mais ou menos o dele, eu cheguei que 2x tem que ser igual a y.

Professor: Você pegou o (3,5) e ele nunca vai poder ser escrito como combinação linear destes vetores?

Simba: Aqui, Euclides, não vão ser só pares, eu consigo escrever o (3,6) acho que no meu ficou mais fácil de visualizar, quer dizer que a coordenada y sempre vai ser duas vezes a coordenada de x, não necessariamente par, entendeu?

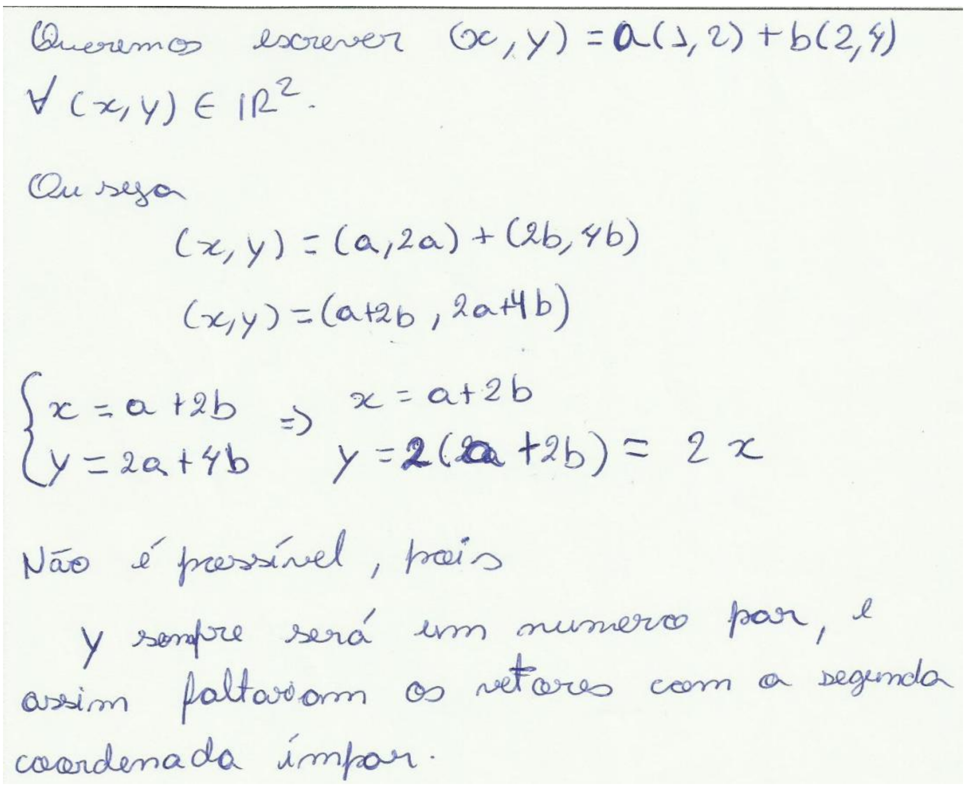
Euclides: Mas vai ser par de qualquer jeito.

Simba: Mas o x não vai ser necessariamente par.

Euclides: Mas eu não estou falando do x, o y vai ser sempre par. Então pelo menos a segunda coordenada vai ser par.

Professor: Mas eles vão ter alguma relação entre si? O x e o y?

Euclides: Dá até pra pôr aqui, que o y = 2x.



Queremos escrever $(x,y) = a(1,2) + b(2,4)$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Ou seja

$$(x,y) = (a,2a) + (2b,4b)$$
$$(x,y) = (a+2b, 2a+4b)$$

$$\begin{cases} x = a+2b \\ y = 2a+4b \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = a+2b \\ y = 2(a+2b) = 2x \end{array}$$

Não é possível, pois y sempre será um numero par, e assim faltariam os vetores com a segunda coordenada ímpar.

FIGURA 3.7: Euclides: 2) (COMBINAÇÃO LINEAR)

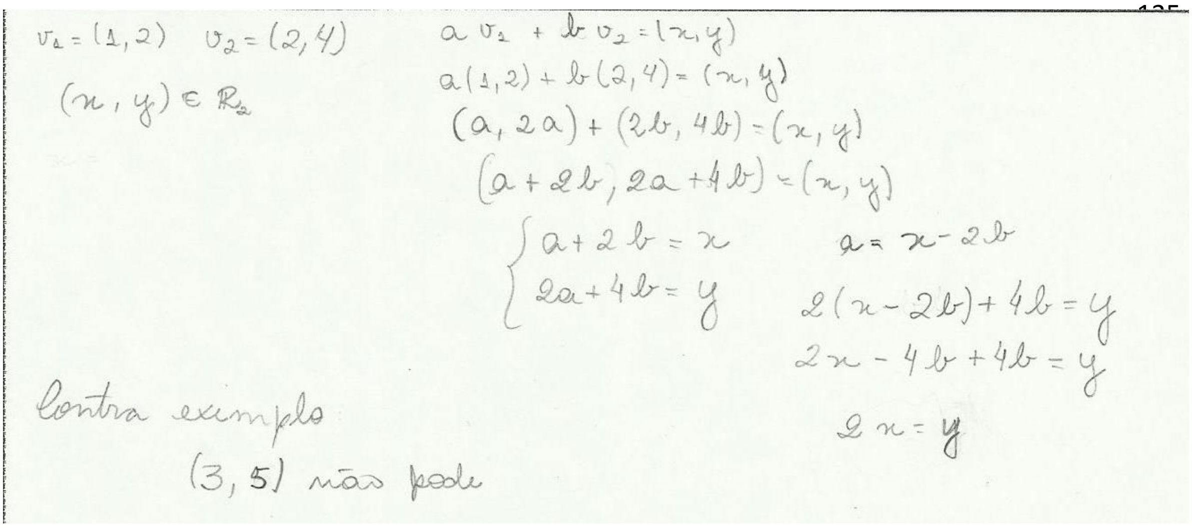


FIGURA 3.8: Simba: 2) (COMBINAÇÃO LINEAR)

Pedimos que leiam a definição de Conjunto Gerador e as observações para discutirmos.

Simba: Então, por isso, vocês introduziram este conceito de combinação linear?

Professor: Sim, utilizaremos em dois conceitos.

Euclides: Então esse último exercício que a gente fez (tarefa 2) a gente estava querendo mostrar se esse aqui/ se esses dois vetores era conjunto gerador/ gerava o IR^2?

A definição proporcionou que Euclides, a partir do modo como discutimos combinação linear, compreendesse a noção de conjunto gerador.

Simba: Quando eu escrevo esse W “colchete” $v_1, ..., v_k$ quer dizer que $v_1, ..., v_k$ eles geram o W, mais o quê? Só isso? É só pra eu saber que eles geram o W?

Professor: É uma notação. Então toda vez que você ver vetores dentro de colchetes ele vai indicar que ali tem um conjunto de vetores, mas que esses vetores geram todos os vetores que são do espaço dado. Ou seja, todos os vetores que estão neste espaço vão ser escritos como combinação linear destes “carinhas” que estão aqui.

Euclides: E tem que ser de todos os “carinhas” que estão ali?

Professor: Mas pode ter um zero vezes um v_i desses aí. Quando você combinar, somar, multiplicar e somar de novo, multiplicar de novo, você vai com esses vetores escrever. Viu que está definido de outra forma? Olha a diferença das duas notações.

$$W= [v_1, v_2, ..., v_k] \text{ ou } W = \{a_1v_1 + a_2v_2 +... + a_kv_k; a_1, a_2, ..., a_k \in R\}.$$

Simba: Eu não consigo. Tem diferença?

Professor: Primeiro que, um deles está entre colchetes e o outro está entre chaves, e segundo que um só tem os vetores descritos (v_1, v_2, ..., v_k)e no outro tem a combinação linear, na verdade tem as infinitas combinações lineares que a gente pode obter a partir de v_1, ..., v_k.

Simba: Então quando eu coloco os colchetes estou falando também das combinações lineares.

Professor: E que quando eu coloco entre colchetes eu tenho que entender que ali não estão somente aqueles vetores, estão estes vetores mas eu consigo produzir todos os vetores de W a partir das combinações lineares.

Simba: Ah, entendi.

[...]

Euclides: Você pode pegar qualquer k?

Professor: É. Qualquer conjunto de k vetores/

Simba: Dependendo do que você precisar escrever você vai pegar determinados/

Professor: O que está “fixo” é o conjunto de vetores. Imagina o exemplo/

Simba: Coloca o (1,0) e (0,1). Eu quero escrever o vetor/ meu W seria o IR^2 tá? Então, eu quero escrever o vetor (2,2). Então eu vou escolher os a_1 e o a_2 que vai satisfazer aquilo.

Euclides: Então eu vou pegar o primeiro multiplicar por 2 e o segundo por 2. Entendi. E aí, você consegue fazer isso pra qualquer um do IR^2, né? Aí como esse (1,0) e (0,1) é fácil né?

[...]

Professor: Você lembra que você falou da relação com o exercício? Eles não geram o IR^2 todo, mas eles vão gerar algo menor?

Euclides: Vai gerar um subespaço.

Professor: Qual subespaço?

Euclides: O que tem a primeira coordenada qualquer e a segunda par.

Professor: Mas é só isso?

Simba: Não entendi.

Professor: Você viu que ele não gera o IR^2 todo, esses dois vetores. Mas eles vão gerar algo menor, um subespaço do IR^2, concorda? Ou não? E aí qual é o subespaço que ele vai gerar?

Simba: O subespaço onde a segunda coordenada é duas vezes a primeira.

Professor: Então como vocês escreveriam ele?

Euclides: Mas como a primeira é qualquer número eu posso, falar que a segunda é qualquer par.

Simba: Só que é um par que depende da primeira. Ele não é qualquer par.

Euclides: Entendi.

Professor: Esse conjunto de vetores pode vir a gerar o IR^2 todo, como pode gerar um subespaço dele, como o caso do (1,0) e (0,1), mas o (1,2) e (2,4) ele não gera o IR^2 todo, ele vai gerar quem?

Simba: Mas eu preciso destes dois vetores ((1,2) e (2,4)) pra gerar este subespaço?

Professor: Veremos em um outro conceito, o de Independência Linear.

Tarefa 1: (apenas o item a)) 31:30

Em cada item determine se o conjunto formado pelos vetores dados gera, ou não, R^2.
a) u = (1,2), v = (0,1) e w = (1,1)
Se em algum dos itens o conjunto de vetores não gerar R^2, determine qual é o subespaço de R^2 gerado por ele.

a)

Professor: Este sistema está estranho?

Euclides: É, eu não sei como eu vou interpretar este sistema. Porque este sistema não vai resolver, vai ficar dependendo do valor ali de x no caso. Aí eu não sei como vai ficar.

Professor: O problema desse sistema é que tem letra demais ou de menos?

Euclides: O caso é igual o Simba falou, ele está com mais variáveis do que/

Simba: É, eu não estou conseguindo é terminar pelo v e pelo w. Se eu tivesse só o v e o w, eu sei que geraria porque o u, ele pode ser escrito como combinação linear do v e do w. E o v e o w, eles, eu não tenho certeza, mas eu acho que eles geram o IR^2. Então se eu tirasse esse u eu conseguiria gerar o IR^2, mas se eu ponho ele (o u) eu não consigo determinar os coeficientes.

Professor: Os coeficientes são quaisquer?

Simba: Tá, mas eu/ eu não sei.

Os alunos tem dificuldade de determinar os coeficientes, pois eles acham que os coeficientes da combinação linear devem ser escritos de forma independente das variáveis x e y, dos vetores de IR^2.

Professor: Eles vão gerar?

Euclides: Sim, mas eu não sei como escrever.

Professor: Como a gente sabe que um conjunto gera?

Euclides: Quando todos os vetores podem escritos.

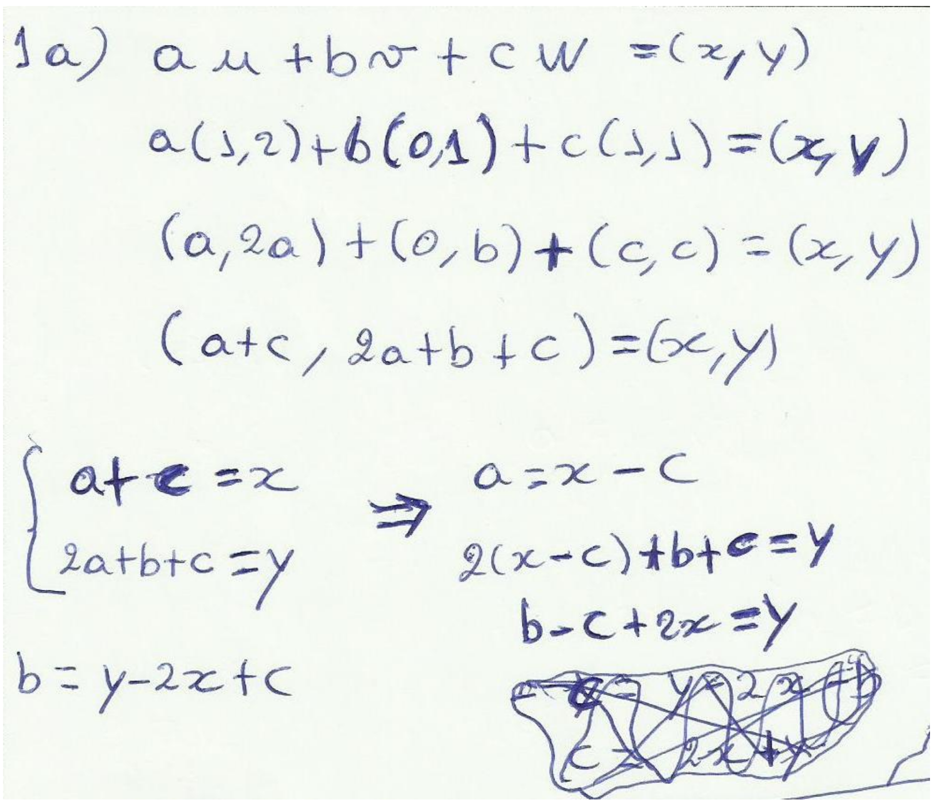
Professor: Todos os vetores do IR^2 podem ser escritos como combinação linear desses dois vetores isto é possível?

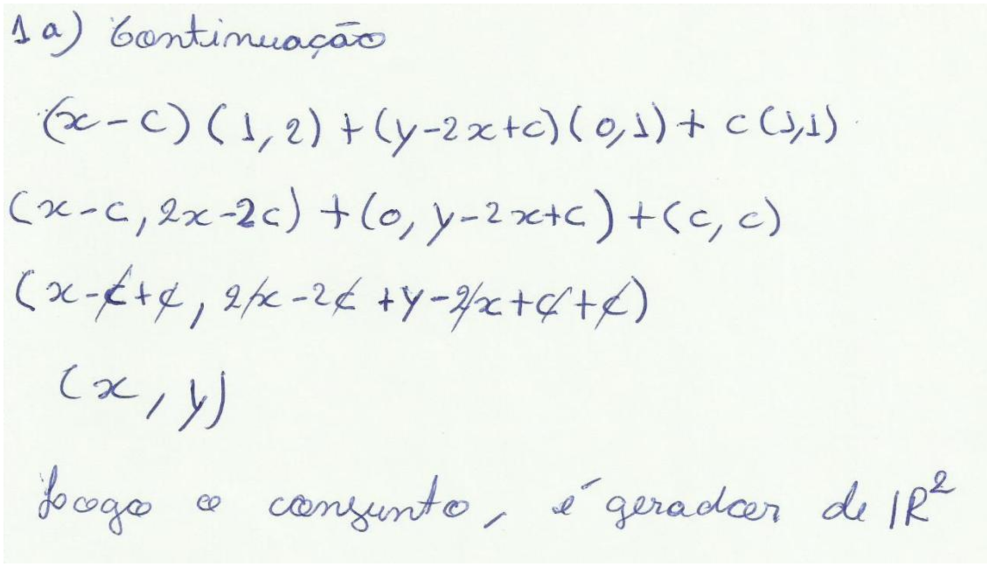
Euclides: Possível.

[...]

Euclides: Em não sabia como provar. Eu não entendia como voltar.

Euclides precisou que o professor indicasse que era a partir da combinação linear que verificávamos se o conjunto gera, ou não. Ele não compreendia se podia retomar a combinação linear inicial com os coeficientes encontrados a partir da resolução do sistema.





1 a) Continuação

$(x-c)(1,2)+(y-2x+c)(0,1)+c(1,1)$

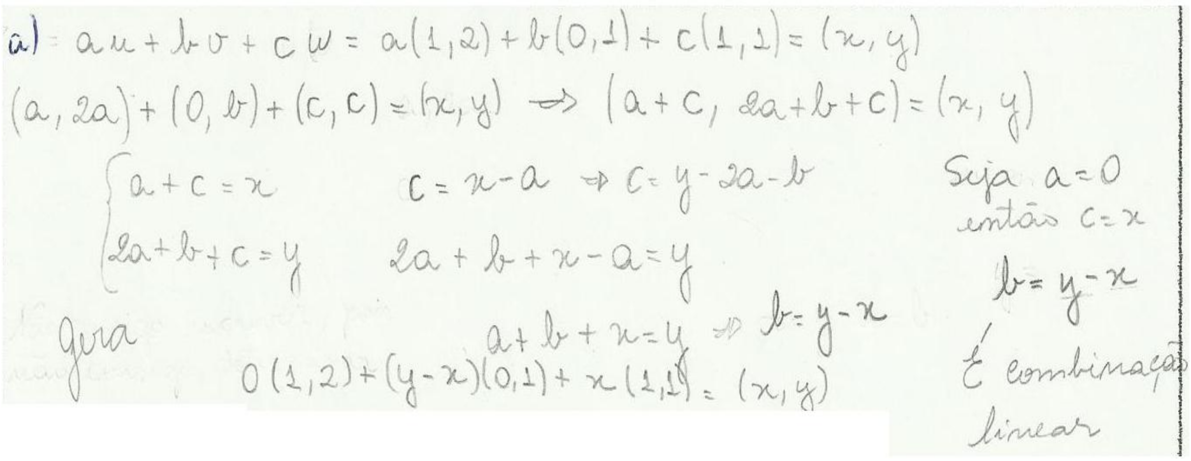
$(x-c,2x-2c)+(0,y-2x+c)+(c,c)$

$(x-\cancel{c}+\cancel{c},\ \cancel{2x}-2\cancel{c}+y-\cancel{2x}+\cancel{c}+\cancel{c})$

(x,y)

logo o conjunto, é gerador de IR^2

FIGURA 3.9: Euclides: 1- a) (CONJUNTO GERADOR)



a) $au+bv+cw=a(1,2)+b(0,1)+c(1,1)=(x,y)$

$(a,2a)+(0,b)+(c,c)=(x,y) \Rightarrow (a+c,\ 2a+b+c)=(x,y)$

$\begin{cases} a+c=x \\ 2a+b+c=y \end{cases}$ $\quad c=x-a \Rightarrow c=y-2a-b$

$2a+b+x-a=y$

$a+b+x=y \Rightarrow b=y-x$

Gera

$0(1,2)+(y-x)(0,1)+x(1,1)=(x,y)$

Seja $a=0$

então $c=x$

$b=y-x$

É combinação linear

FIGURA 3.10: Simba: 1 - a) (CONJUNTO GERADOR)

Depois que eles terminam de analisar se os conjuntos dados são, ou não, geradores de IR^2, pedimos que eles verifiquem, nos casos onde o conjunto não gera o IR^2, qual é o subespaço gerado por ele.

4º Encontro: 11/01

Após algumas conversas com nosso colega de pesquisa Vitor R. Almeida e nossa orientadora, achamos que seria conveniente rediscutir algumas tarefas após a análise que realizamos do áudio e do registro escrito. Percebemos que, em algumas resoluções, ou mesmo, em algumas de nossas discussões em aula, os alunos não concluíram raciocínios e não deram a devida atenção a algumas notações.

Realizamos esta rediscussão, portanto, com os seguintes objetivos: colher mais elementos que nos ajudassem a refinar nossa análise; analisar uma possível dinâmica na produção de significados e; como um modo de discutir com eles a importância de (futuros) professores vivenciarem momentos que auxiliassem sua prática docente, tais como:

- a oportunidade de refinar sua leitura da sala de aula e da produção de significados dos alunos, por meio desta "rediscussão" da resolução de tarefas;

- possibilitar aos alunos um retorno sobre sua própria aprendizagem;

- avaliar a aprendizagem como um "processo" contínuo; e

- mais especificamente quanto ao conteúdo, a oportunidade de possibilitar momentos de refinamento da "escrita matemática", não como forma de moldá-la/restringi-la numa única perspectiva (a da Matemática do Matemático), mas como forma de ampliar os significados matemáticos produzidos pelos alunos de forma consciente conduzindo à lucidez matemática para os conceitos envolvidos.

As principais contribuições obtidas com a realização deste momento de rediscussão foram possibilitar aos alunos a compreensão de se realizar em sala de aula os "momentos" citados acima.

Descreveremos abaixo a discussão realizada a partir da tarefa 2 do tópico Combinação Linear na qual procuramos não realizar intervenções no momento da realização da tarefa para que pudéssemos analisar uma possível dinâmica na produção de significados dos alunos.

Tarefa 2:

Sejam $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (2,4)$. Verifique se é possível escrever todos os vetores de R^2 como combinação linear de v_1 e v_2.

Euclides: y não, não é possível, pois y sempre será um número par e assim faltariam os vetores com a segunda coordenada ímpar".

Professor: Isso é verdade? Você concorda com isso que ele escreveu Simba?

Euclides: É, sempre vai ser; y = 2x/ y é igual a 2 vezes alguma coisa/ y é um 2k, qualquer número dessa forma, esse “cara” é um número par.

Professor: Onde está o “k”?

Euclides: Espera aí. Não. K no caso é inteiro. É não. Eu fiz o mesmo erro que eu fiz em Teoria dos Números.

Professor: E se você pegar esse vetor ($(1{,}5;3)$, pois 3 = 2.1,5) ele não vai estar ali não? No IR^2? E você, Simba, não tinha falado em “par”, hora nenhuma, mas como o Euclides falou, você começou a falar. Você falou é o dobro.

Simba: Eu cheguei a comentar com ele, “mas é par”?

Professor: É, você estava falando e mudou o jeito de falar. Estava falando o dobro e começou a falar “não Euclides, vai ser par só que vai ser o dobro”. Quer dizer, você mudou o jeito de falar.

Professor: O problema aqui não é que existem vetores com coordenadas ímpares, é que existem “alguns” vetores do IR^2 que não podem ser escritos como combinação linear dos vetores $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (2,4)$.

Nesta situação aconteceram dois fatos que devemos ressaltar:

- primeiro que, a influência da fala de Euclides sobre a produção de significados de Simba, a mudança no modo de operar, passando de uma coordenada como dobro de outra a uma coordenada como dobro de outra e “par”;

- segundo que, bastou que perguntássemos onde (em que conjunto) encontrava-se o “k” (y = 2k), para que os dois verificassem que, como os vetores estão em IR^2 poderíamos produzir vetores com a segunda coordenada par e ímpar e que a condição que deve ser satisfeita é que a 2ª coordenada deve ser o dobro da 1ª;

Outra questão importante surgiu durante esta discussão. Nós vamos apresentar e faremos sua análise como forma de complementar o quão importante ela foi no desenvolvimento e entendimento dos conceitos seguintes, assim como a questão original advinda da tarefa discutida anteriormente.

Quando realizamos inicialmente a tarefa 2, o aluno Simba nos questionou a respeito da possibilidade de obtermos um mesmo vetor a partir de diferentes combinações lineares, mantendo-se o mesmo conjunto de vetores. Como não discutimos com muita profundidade a questão, achamos que seria interessante retornar à mesma, iniciando-a com a análise do seguinte conjunto: {(1,2), (0,1), (1,1)}.

Professor: Será que é possível montar várias combinações lineares com esse conjunto de vetores?

Euclides: Depende do sistema que você vai montar. Na hora que você jogar as combinações ali e fizer a “vezes” o 1º vetor, b “vezes” o 2º, acho que vai depender da “cara” do sistema né. Se o sistema tiver uma solução só acho só vai ter uma solução, um só jeito de escrever.

Professor: E o que você acha que dá esse sistema aí? Com esse conjunto.

Euclides: Aí nesse caso, esse sistema vai dar indeterminado, eu acho que indeterminado.

Professor: Isso.

Euclides: Ou seja, ele tem infinitas soluções, nesse caso aí vai ter um monte de solução.

Professor: Está vendo Simba, o que você me perguntou? Dá pra montar outras combinações. Quer ver? (montamos no quadro as combinações lineares resultando no vetor (1,0) tomado aleatoriamente).

(1,0) = 0(1,2) -1(0,1) + 1(1,1)

(1,0) = 1(1,2) -2(0,1) + 0(1,1)

Professor: Viu uma particularidade nos dois casos a gente pode fazer “0” vezes alguém. Por que será que isso aconteceu?

Simba: Porque um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros.

Após terminarmos as “rediscussões”, passamos às tarefas de Conjunto Gerador. Neste momento, escolhemos apresentar apenas considerações nas quais tiveram falas que contribuíram para relacionar os conceitos de Combinação Linear e Conjunto Gerador e que apresentassem mais elementos do modo como os alunos estavam operando estes conceitos.

Tarefa 2 de Conjunto Gerador:

2) Observe o seguinte conjunto $H=[(1,0),(2,1),(3,0),(1,2)]$, e responda:
a) Os vetores $(1,0),(2,1),(3,0),(1,2)$ estão em H?
b) Quantos vetores possui H?

Euclides: Eu pensei se você variando, tipo, eu não expliquei assim, mas eu pensei só de eu zerar o resto e fizer um lá, combinação tudo zero e uma só a, b, c, d diferente de zero.

[...]

Professor: Será que eu consigo escrever esse vetor de outra forma, usando outros escalares?

Euclides: Deve ter. É igual eu falei, eu teria que ver o sistema lá, eu pra saber se tem mais eu, por exemplo/

A princípio, vemos que Euclides parece compreender que basta variarmos os escalares da combinação linear para obter novos vetores. Mas, depois desta última fala, vemos que ele necessita da montagem do sistema e da análise de sua solução para que verifique se o conjunto é um gerador ou não e se existem formas diferentes de se montar a combinação linear.

Simba: Tem porque, o (3,0) é uma combinação linear do (1,0).

Euclides: É, pode ser.

Professor: Você pode multiplicar o vetor (1,0) por $\frac{1}{3}$, por exemplo.

Euclides: Bobeira então estar esse (3,0) no grupo.

Professor: Você acha bobeira?

Euclides: Você pode gerar ele.

Professor: Se eu tirasse esse (3,0)? Eu poderia “tirar” mais alguém?

Euclides: Você continua podendo gerar todo mundo.

Euclides parecia compreender que o vetor (3,0) está “excedente” no conjunto gerador H e que, retirando-o, ainda teríamos um conjunto gerador.

Professor: Será que tem “gente” demais? Tem alguém de “bobeira” aí?

Simba: Tem, tem um a mais aí, mas eu não estou conseguindo fazer a combinação. Mas tem um a mais.

Novamente, percebemos que os alunos têm dificuldade (obstáculo epistemológico) em analisar sistema que possui mais equações do que incógnitas.

Professor: Dois seriam suficientes?

Euclides: Deixa eu ver. Aí vocês estão me fazendo pensar. Mas não, não é por isso. Como isso aqui pertence/ são vetores do IR^2, eu to pensando que isso aqui pode ser gerado apenas por aqueles que geram o IR^2, (1,0) e (0,1). Se isso aqui gera isso, mas não esse negócio não é o IR^2.

Parece-nos que Euclides associa o número de coordenadas ao número de vetores que devem possuir o conjunto gerador, apesar de analisar que H não é o IR^2. Mas não nos dá certeza de compreender que o IR^2 pode ser gerado por H.

Professor: O (1,0) você já tem, não é? Você precisaria de mais quantos vetores? Você precisa necessariamente do (0,1)? Pra gerar o IR^2?

Euclides: Esse é um que gera né?

Professor: Esse é um par que gera né?

Euclides: Agora, acho que (1,0) ...

Professor: E se fosse (0,2)?

Euclides: (0,2)? Acho que (0,2) não ia dar não. Porque eu não ia conseguir.

Simba: É não vai pensar que só dá o dobro, só par.

Analogamente à tarefa que "rediscutimos", Euclides parece ainda não compreender que, dado um escalar "a" real e um vetor (0,2), por exemplo, conseguimos produzir todos os vetores da forma (0,2a) = (0,y) onde y percorre todos os números reais.

Professor: O escalar pode ser qualquer número real. Ou pode ser (1,0) e (1,1)?

Euclides: É o (1,1) poderia, porque eu posso zerar aqui esse aqui e fazer tudo em cima desse outro.

Simba: Tudo em cima desse outro não (o (1,1)). Porque senão vai ser todos da forma (2,2), (3,3),... entendeu? Por que pelo jeito que você falou só o (1,1) bastava.

Professor: É, todos os vetores em que a 1ª e a 2ª coordenadas são iguais.

Euclides: Tá beleza. Se eu precisar zerar a 1ª coordenada eu posso fazer - 1 aqui e eu vou ficar com (0,1) e aí é só somar.

Simba: Isso. Viu? Porque, pelo jeito que você falou parecia que só o (1,1) bastava.

Na tarefa posterior, (Sejam os vetores u = (1,0) e v = (0,-2). O conjunto W gerado por u e v pode ser representado por: W = {a(1,0) + b(0,-2) ; a,b ∈ IR}) pedimos que eles escrevessem alguns vetores de IR^2. E, em nossa discussão perguntamos a eles:

Professor: E só tem um jeito de escolher esses escalares? Porque os dois usaram os mesmos escalares?

Simba: Só, só tem um jeito.

Professor: Por que?

Simba: Porque, eles podem ser escritos de forma única...

Euclides: Porque o sistema dá resposta/ Eu tô vendo tudo pelo sistema, se o sistema dá possível e determinado então.

Professor: Tem uma única solução. Viu que quando tinham três vetores deu “um monte” de combinações lineares e quando tinham dois vetores deu uma única solução no IR^2. Nesse exemplo, como nós temos dois vetores no conjunto W só existe uma combinação linear.

Euclides: Isso que eu estou pensando, eu estava pensando naquela hora que eu falei, eu falei de IR^2, mas não é IR^2. Estou começando a pensar que, como o/ tem duas coordenadas, o par ordenado, só precisaria de dois vetores, se você tiver mais que isso dá indeterminado. Aí vamos supor, se fossem três, eu só precisaria de três vetores para representar e, assim por diante...

Euclides: Estou começando a pensar nisso.

Professor: E quando passa desse número o que acontece?

Euclides: Aí vai dar indeterminado.

Professor: Você só toma um cuidado que aí você está olhando pro IR^2, se eu tiver um subespaço do IR^2, por exemplo, $\{(x,0) \in IR^2\}$, será que eu preciso de dois vetores pra gerar esse subespaço?

Euclides: Não, mas pensa bem, não realmente.

Fazemos no quadro o exemplo.

Euclides: O que eu estava falando do outro é que você precisaria no máximo de dois. Porque é o número de coordenadas que ele tem.

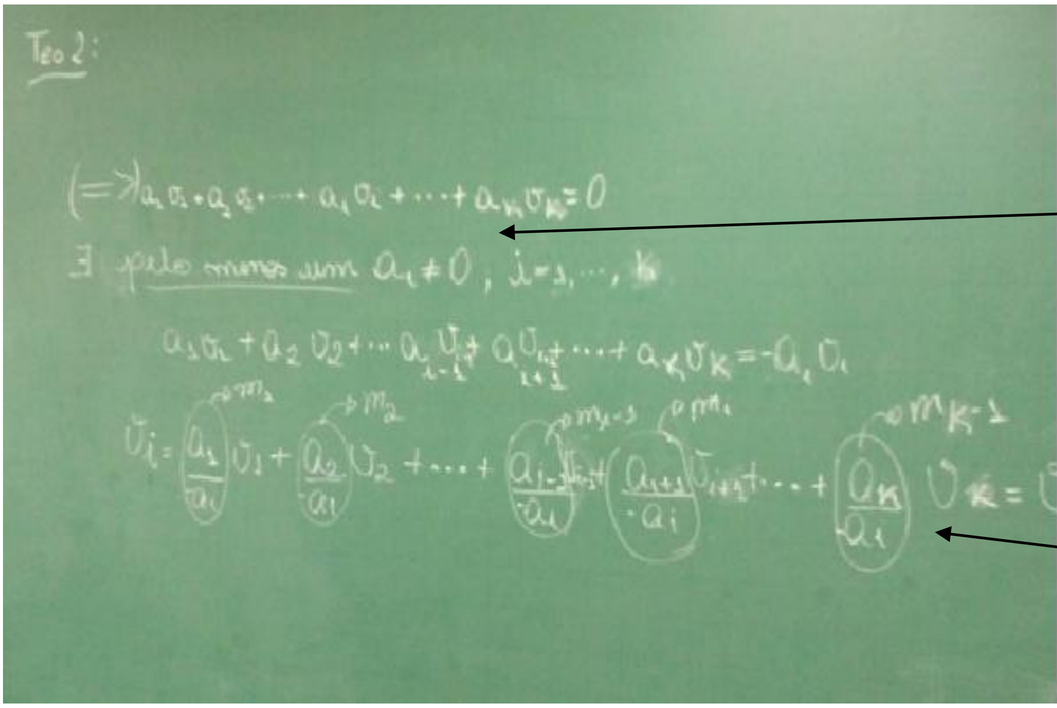
A princípio, pensamos que Euclides associava apenas o número de coordenadas dos vetores ou do conjunto, ao número de vetores do conjunto gerador, mas com essa última fala, vemos que ele conclui que esse número estabelecerá um limite superior para a quantidade de vetores dos conjuntos geradores.

4º Encontro (continuação): 11/01 – Dependência e Independência Linear

À medida que os alunos foram lendo a definição e as observações correspondentes aos conceitos de Dependência e Independência Linear eles foram fazendo questionamentos e relacionando com ideias discutidas anteriormente.

Ao iniciarmos a discussão do Teorema 2, Simba pede-nos para demonstrá-lo no quadro.

Teorema 2: Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset R^n$ é Linearmente Dependente se, e somente se, um dos vetores desse conjunto for uma combinação linear dos outros vetores do conjunto.



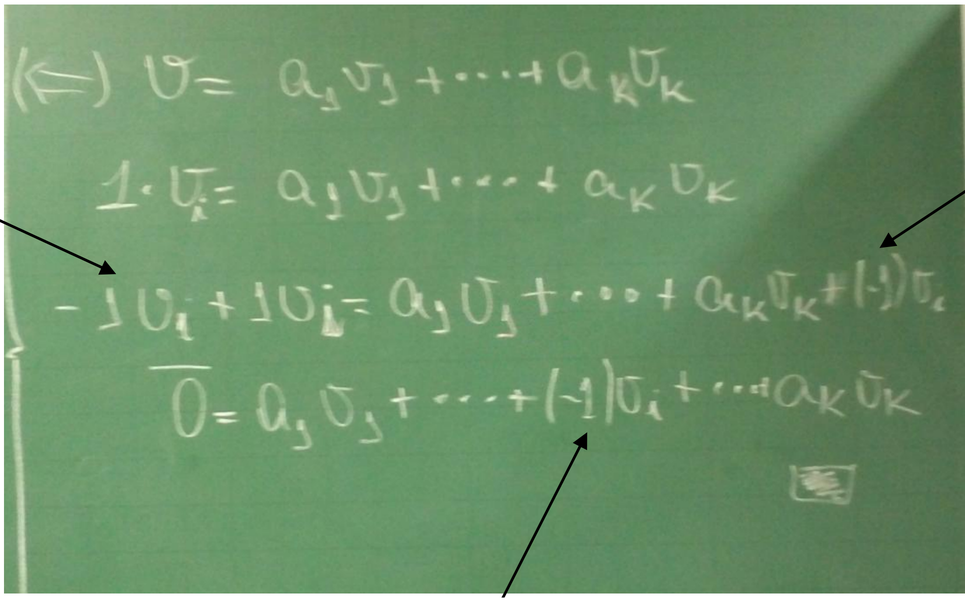


FIGURA 4.1: Estas imagens foram tiradas do quadro com a demonstração do Teorema 2 feita por Simba.

Ao discutirmos a demonstração deste Teorema foram discutidos os seguintes conceitos: Dependência Linear, Inverso Aditivo, Inverso Multiplicativo.

Simba compreende que pelo conjunto de vetores ser L.D. haverá, pelo menos, um escalar diferente de zero e, consequentemente, $a_i v_i$ será também não-nulo, podendo utilizar o inverso aditivo de $a_i v_i$ e multiplicativo de a_i.

Professor: Você viu o porquê de ser por a_i?

Simba: Eu peguei isso aqui e "passei dividindo", e ele é diferente de zero.

Ele ainda compreende que o conjunto resultante com "k – 1" vetores não é necessariamente L.I. e que ainda podemos retirar algum vetor, se necessário, e que um dos vetores do conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset R^n$ pode ser escrito como combinação linear dos "k – 1" vetores.

A motivação para realizarmos a discussão da demonstração do Teorema e proporcionarmos aos alunos que o demonstrassem no quadro foi dada pelo fato de que, muitas vezes, grande parte dos conceitos estudados podem ser analisados sob a perspectiva do Teorema, se discutida na direção de dar lucidez matemática aos licenciandos e pelo fato de que essa se caracteriza como uma oportunidade de os alunos de vivenciarem situações de estranhamento – com a demonstração – e de discutir, apresentando suas considerações, por meio da construção da demonstração.

5º Encontro: 14/01

Este encontro se inicia com a discussão da Tarefa 1:

Demonstre que os vetores (a, b) e (c, d) de IR^2 são Linearmente Independentes se, e somente se, $a.d – b.c \neq 0$.

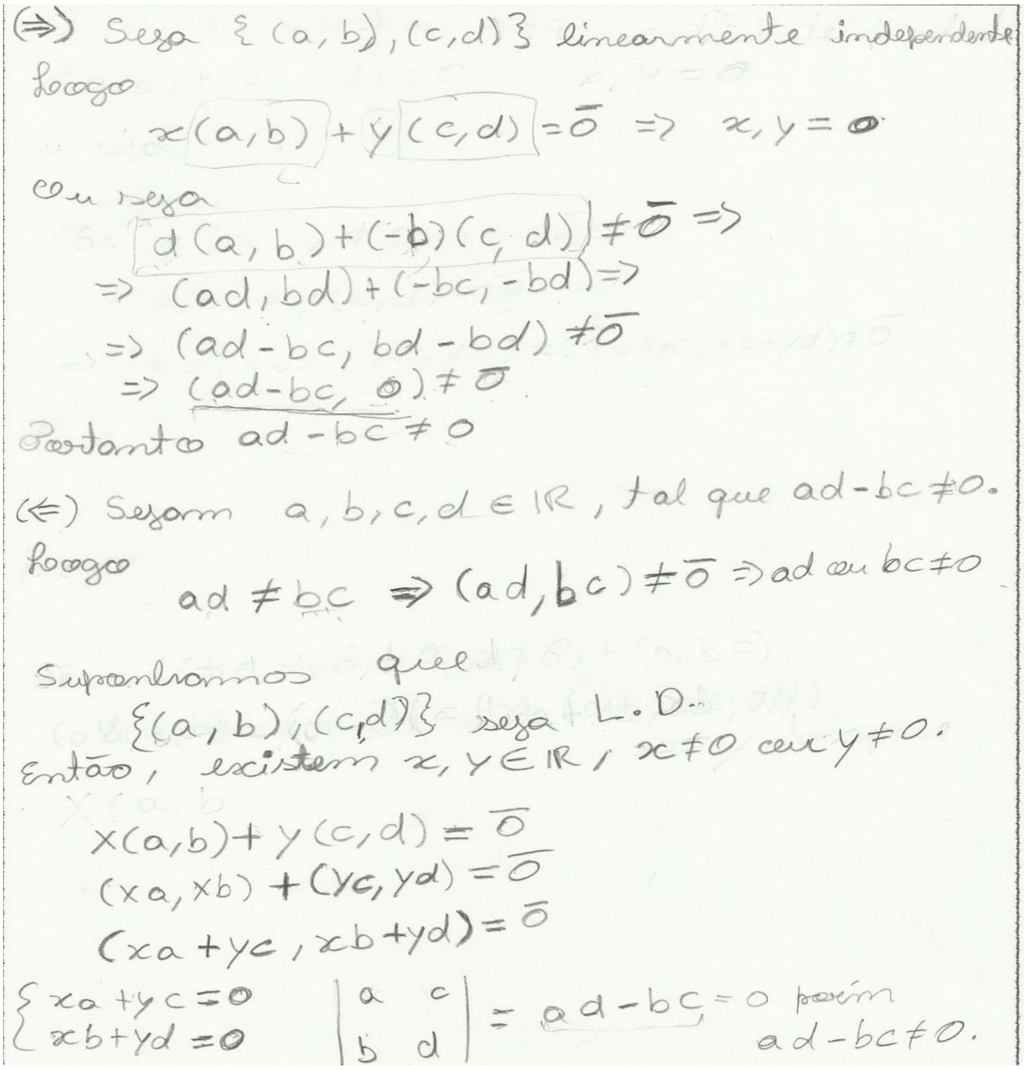
Professor: E o que te chamou mais atenção nesta tarefa?

Euclides: Como é um "demonstre" eu já olho logo se é "se então" ou "se e, somente se", aí eu vi que era um "se e, somente se" aí eu pensei logo, então eu tenho que mostrar logo duas/ ida e volta, eu comecei a separar ida é o que, volta é o que.

Vemos que o Euclides possui uma noção de demonstração em sua fala e no modo de escrever tarefas que exigem técnicas demonstrativas.

Neste ponto, enquanto discutíamos a demonstração da tarefa 1, Euclides utiliza o conectivo “ou” e Simba não compreende sua utilização. Lembramos que Euclides já havia cursado a disciplina Introdução à Lógica e Simba não, por isso, discutimos algumas aplicações dos conectivos mais utilizados, como: “e”, “ou” e “ou – ou”. E questionaram o fato de não existir na grade atual da Licenciatura em Matemática uma disciplina que discutisse a teoria de Lógica.

Além disso, nesta tarefa também discutimos as noções de Sistema de Equações Lineares Homogêneos e Análise deste tipo de Sistema por meio da Teoria de Determinantes. Acreditamos que, por estes dois conceitos terem grande aplicabilidade na análise de tarefas envolvendo, principalmente, Dependência/Independência Linear, acrescentaremos observações e sugestões sobre eles em nosso Produto Educacional.



($\Rightarrow$) Seja $\{(a,b),(c,d)\}$ linearmente independente

Logo

$$\boxed{x(a,b)} + y\boxed{(c,d)} = \bar{0} \Rightarrow x, y = 0$$

ou seja

$$\boxed{d(a,b) + (-b)(c,d)} \neq \bar{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ad, bd) + (-bc, -bd) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (ad - bc, bd - bd) \neq \bar{0}$$

$$\Rightarrow \underline{(ad - bc, 0)} \neq \bar{0}$$

Portanto $ad - bc \neq 0$

($\Leftarrow$) Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, tal que $ad - bc \neq 0$.

Logo

$$ad \neq bc \Rightarrow (ad, bc) \neq \bar{0} \Rightarrow ad \text{ ou } bc \neq 0$$

Suponhamos que

$\{(a,b),(c,d)\}$ seja L.D.

Então, existem $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

$$x(a,b) + y(c,d) = \bar{0}$$

$$(xa, xb) + (yc, yd) = \bar{0}$$

$$(xa + yc, xb + yd) = \bar{0}$$

$$\begin{cases} xa + yc = 0 \\ xb + yd = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0 \text{ porém } ad - bc \neq 0.$$

FIGURA 5.1: Euclides: 1) (L.I. e L.D.)

($\Rightarrow$) Seja $d, b \in \mathbb{R}$, com $d, b \neq 0$

$$d(a,b)+(-b)(c,d)=0$$

$$(ad, db)+(-bc,-db)=0$$

$$(ad-bc,\ db-db)=0.$$

$$(ad-bc,\ 0)=0$$

$$ad-bc=0.$$

Como $(a,b),(c,d)$ é LI

$$ad-bc=0 \qquad d=0 \text{ e } b=0$$

Mas como $b, d \neq 0$

$$ad-bc\neq 0$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que seja LD

$$d(a,b)+(-b)(c,d)=0$$

$$(ad-bc,0)=0$$

$$ad-bc=0$$

Mas por hipótese $ad-bc\neq 0$

Portanto, $(a,b),(c,d)$ é LI

FIGURA 5.2: Simba: 1) (L.I. e L.D.)

Tarefa 3:

Analise se o seguinte conjunto é Linearmente Dependente ou Independente.
{(1,0,0), (0,-1,0),(-1,-1,0),(0,0,1)}

Professor: O que vocês fizeram?

Euclides: Eu tirei o vetor que eu vi que era combinação linear dos outros.

Simba: Mas por que ele é?

Euclides: Porque eu fiz de cabeça. Eu não mostrei aqui, você mostrou.

Simba: Eu consegui demonstrar diretamente/ eu conseguiria concluir diretamente mostrar que os três iriam ser L.I., eu conseguiria concluir só de olhar, só que assim, eu não sei se poderia e nem sei se eu tenho base pra isso.

[...]

Professor: Com os quatro vetores/

Simba: Eu cheguei que “c” poderia ser igual a “a” e “b” igual a “- b”, tipo assim, qualquer “c” que eu pegasse eu vou poder escrever com outros [...], já que ele o conjunto é L.D., então eu já retirei/ eu escolhi e fiz a combinação linear de novo e descobri que agora dá (0,0,0).

Professor: Viu lá Euclides? Você já viu que era esse “cara” que te atrapalharia e usou o Teorema, se um deles pode ser escrito como combinação linear dos outros é porque esse conjunto é L.D..

Euclides: Eu até peguei o material pra ver o Teorema de novo.

Professor: Você escreveu “o vetor que poderia ser excluído é esse ((-1,-1,0)), pois nenhum dos que restam pode ser combinação linear dos outros”. Onde que verificou isso?

Euclides: Eu fiz de cabeça.

Professor: Foi bom você ter usado o Teorema, porque a gente não costuma usá-lo diretamente, mas pra concluir se o conjunto é L.I. ou L.D. o Teorema basta , mas pra ter certeza que o outro/ se tirar um vetor se daria L.I. eu acho melhor fazer o sistema pra concluir. Pra saber qual que eu tiraria.

Vemos que Euclides utiliza corretamente o Teorema apresentado e discutido por nós, mas que toma como estipulações locais muitos dos conceitos, pois é frequente sua fala “fiz de cabeça”, por isso, acreditamos que ele não julga ser necessário colocar alguns desenvolvimentos na resolução da tarefa.

Acreditamos ainda que, Simba, por já ter cursado Álgebra Linear anteriormente, desenvolve as tarefas de maneira mais padrão/tradicional e por algumas de suas falas, indica que acha que está incorreto algumas justificativas distintas das suas.

b) Podemos ver que:

$$(-1,-1,0) = -1(1,0,0) + 1(0,-1,0) + 0(0,0,1)$$

Logo o conjunto é linearmente dependente.

O vetor que poderia ser excluído é $(-1,-1,0)$. Pois nenhum dos que restam pode ser combinação linear dos outros.

FIGURA 5.3: Euclides: 3 - b) (L.I. e L.D.)

b) $a(1,0,0) + b(0,-1,0) + c(-1,-1,0) + d(0,0,1) =$

$= (a,0,0) + (0,-b,0) + (-c,-c,0) + (0,0,d) =$

$= (a-c, -b-c, d) = (0,0,0)$

$$\begin{array}{ll} a - c = 0 & a = -b \\ -b - c = 0 & c = a = -b \\ d = 0 & \end{array}$$

Retirando $(-1,-1,0)$, temos $\{(1,0,0),(0,-1,0),(0,0,1)\}$

$a(1,0,0) + b(0,-1,0) + c(0,0,1) = (a,0,0) + (0,-b,0) + (0,0,c) =$

$= (a,-b,c) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} a = 0 \\ -b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad a = b = c = 0$$

FIGURA 5.4: Simba: 3 – b) (L.I. e L.D.)

6.4 – Ficha 4: Base e Dimensão de Espaços Vetoriais

Dia 14/01/2013 ao dia 26/01/2013

5º Encontro: 14/01 – Parte 2 – Base

Ao finalizarmos as tarefas de Dependência e Independência Linear, iniciamos a leitura e discussão do conceito de Base.

Professor: Então, o que vocês acharam do conceito de base?

Euclides: Ah, o problema da Matemática é: as definições geralmente são tranquilas, na hora que você entra tentando usá-las é/ aí você vê que não entendeu ela direito.

Professor: Eu acho que poderíamos fazer um exemplo.

Euclides: Eu já entendi, um exemplo é esse conjunto que falamos: {(1,0,0), (0,-1,0),(0,0,1)} ele é uma base/ ele é linearmente independente e gera o W/ o IR^3.

[...]

Teorema 3: Sejam $v_1, v_2, ..., v_k \in R^n$ vetores que geram o subespaço Vetorial W de IR^n. Então, dentre estes vetores, podemos extrair uma base para W.

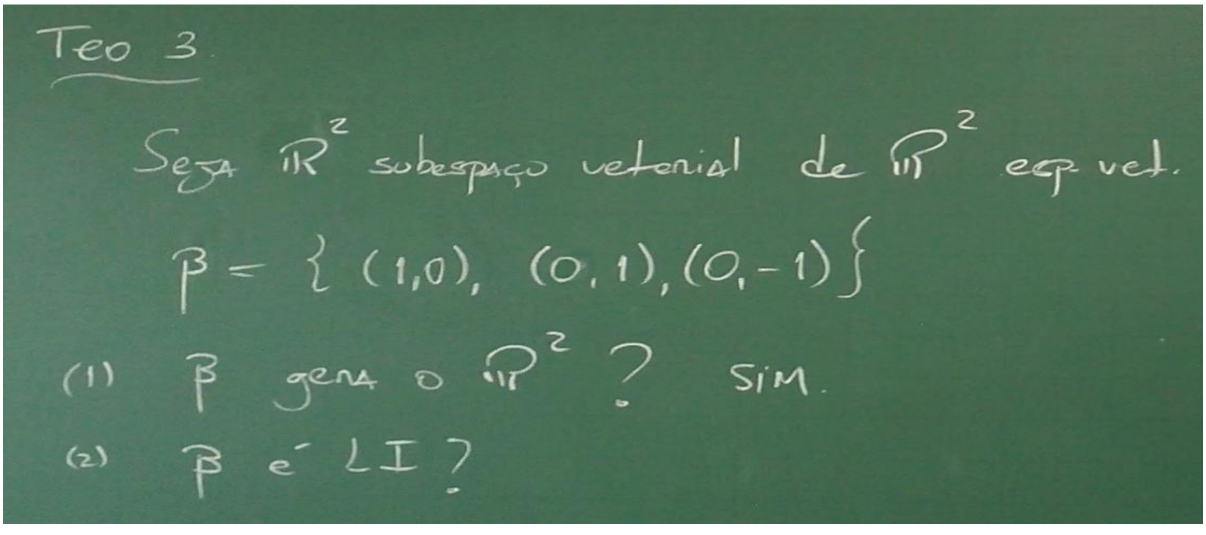


FIGURA 5.5: Exemplo numérico do Teorema 3 feito pelos pesquisadores no quadro.

Passamos a discutir os Teoremas motivando sua discussão por meio de exemplos. No decorrer da discussão, Euclides nos questiona:

Euclides: Espera aí, só porque surgiu uma dúvida na minha cabeça, pra eu provar que gera, eu tenho que provar que todo mundo pode ser escrito como combinação linear desses vetores.

Professor: Você consegue ver se esse conjunto β gera todos os vetores de IR^2?

Euclides: Olhando sim, mas alguma maneira de eu/ eu esqueci. Eu teria que fazer o sistema né? Só de olho não dá pra afirmar não?

Professor: À medida em que você vai acostumando, se você só quiser analisar, vai dar sim.

Euclides: Mas numa prova teria que mostrar, fazer a combinação linear, fazer uma qualquer e mostrar que/

Professor: Igualar a (x,y).

Euclides: Tá. Então gera e é linearmente independente.

Nesta situação, vemos que Euclides pensa em realizar a análise sem efetuar o desenvolvimento, pois pergunta: “Só de olho não dá pra afirmar não?”

Professor: Se é L.D. então devemos retirar um vetor.

Simba: E verificar se ele é L.I. e se gera, pois posso retirar um vetor que faça falta.

Professor: Isso. E se ele for L.D. ou se não gerar, você retorna com o vetor e retira outro.

[...]

Professor: Viram porque o conjunto já tem que ser gerador? Porque se não gera eu ainda vou extrair mais vetores?

Euclides: O exemplo tudo bem, mas o Teorema em si. [...] A primeira parte que gera tudo bem, mas/

Simba: Porque o conjunto pode ser L.I.

Euclides: Mas eu tenho certeza que eu posso tirar até ficar só L.I.? É isso que eu não estou... essa afirmação não está tão clara. Ah, não espera aí, beleza/ porque no máximo o que vai dar é eu ficar com um vetor só e um vetor só é L.I., ok.

Professor: Ou você pode pegar um conjunto que já é L.I.

Euclides: Não, tá, eu só queria provar que daria, a hipótese é que se eu tirar e ficar até com um vetor só e esse vetor gerar todo mundo seria L.I.

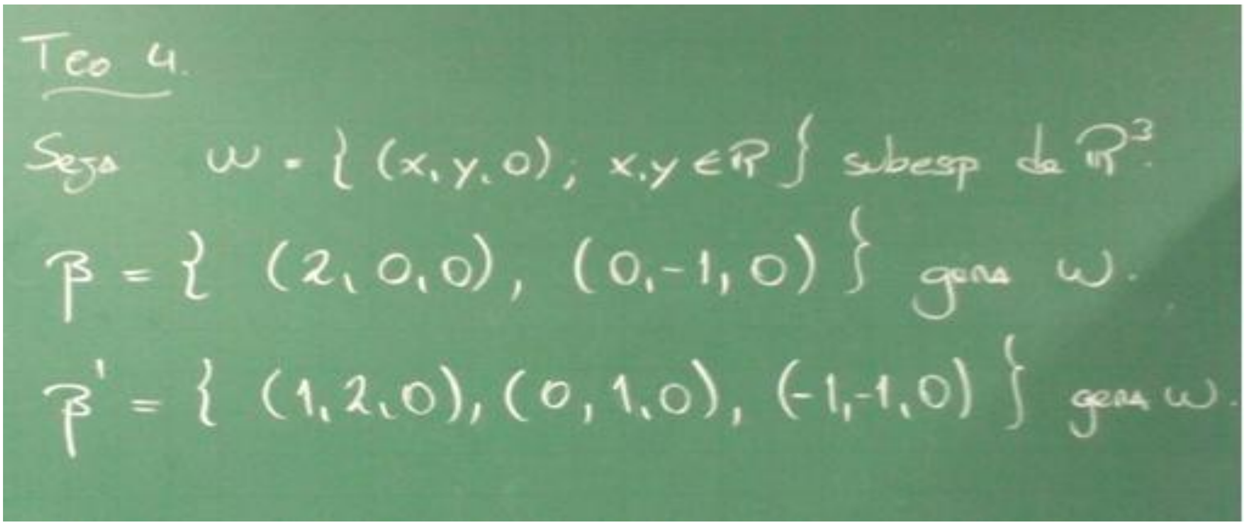


FIGURA 5.6: Exemplo numérico do Teorema 4 feito pelos pesquisadores no quadro.

Simba: Eu não concordo não. Porque não está falando que isso aqui é base. [...] Esses vetores, o IR^n que é gerado por esses vetores? O W?

Professor: Lembra que a gente falou assim que a base era um conjunto gerador minimal? Então se k já vão gerar, então eu não preciso de mais eu preciso de menos.

Simba: Certo.

Professor: Então mais de k vetores necessariamente têm que ser L.D. Porque pensa assim, se $v_1, ..., v_k$, já formam uma base, ou seja, já gera e já é L.I., se já é L.I. então eu vou pegar mais de k vetores eu vou colocar alguém que está sobrando, que não precisa, porque já tem uma base pronta.

Simba: Ah, entendi. Porque a base tem no máximo k vetores.

Professor: Porque se você pegar um conjunto e isso já for base, ele já é L.I.

Euclides: Mas é isso que eu estou/ mas aqui não está falando que ele é base, está?

Professor: Não, se você pegar um conjunto e ele for base, você tem certeza que ele é L.I. e gera, se ele é L.I. e eu colocar mais alguém, vai sobrar. Mas e se ele gerar, mas não for L.I.? Então ele é L.D., então temos um conjunto L.D. que gera, aí a gente "cai" no Teorema anterior, a gente pode extrair uma base. [...] Por que a gente colocou, "no máximo" k vetores?

Euclides: Porque se você conseguir formar com menos que isso. Porque se você fizer com menos, você está provando que tem um L.I. menor que gera também, não espera aí.

Simba: Se esses "v_k" aqui não forem L.I. forem L.D. eu vou tirar até eles ficarem L.I., eu vou diminuir.

Euclides: Eu não estou entendendo esse "no máximo".

Acreditamos que, a expressão "no máximo" incomoda Euclides no sentido de que dá uma certa "incerteza" ou variabilidade no número de vetores dos conjuntos L.I..

Simba: Então, olha só, ele é no máximo, k vetores, se esse daqui já for a base, ou seja, se esse aqui já for L.I., então vai ter k vetores. Se ele ainda for L.D. eu também tenho que retirar, até ficar L.I., ou seja, vai ficar/

Euclides: Tá, eu queria ver um com menos que isso.

Professor: Pensa no exemplo.

Discutimos o exemplo:

Professor: Aqueles dois conjuntos geram W? Primeiro, eu consigo escrever todos os vetores de W a partir dos vetores de β?

Euclides: É.

Professor: E ele é L.I. também? Peguei um conjunto gerador/

Euclides: É L.I. também, só olhar pro lance da coordenada.

Pela análise das falas de Euclides, percebemos que ele associa o número de coordenadas ao número de vetores que conterá um conjunto gerador, por exemplo, se o conjunto tem, como nesse exemplo de W, duas coordenadas não-nulas, então um conjunto gerador tem, no máximo, dois vetores.

Professor: E aí, repara ele tem dois vetores, nosso “k” (como do Teorema) aqui é dois, ele gera.

Simba: Mas você tinha que pegar “k” como três.

Professor: Primeiro vamos olhar pra um conjunto com dois. Você tem um “k” igual a dois/

Euclides: E ele gera o W.

Professor: Então eu estou dizendo aqui que, qualquer conjunto com mais de dois vetores é, necessariamente, L.D.. Concorda com isso? Ou seja, nesse primeiro conjunto se eu colocar mais alguém ele fica L.D.. Eu não sei se ele é L.I. ou L.D., eu sei que ele gera, mas se eu colocar mais alguém, eu tenho certeza de que ele fica L.D., ok?

Euclides: O que eu queria falar é, por exemplo, eu tenho o conjunto de baixo, eu sei que ele gera.

Professor: Você tem três vetores.

Euclides: Então isso não quer dizer que, ou melhor, ele gera, ele é... (ele relê o enunciado do Teorema). Ele gera, mas não fala que ele é base. O que eu queria/ se ele for base e, se ele for base, ele vai gerar e vai ser L.I., e todo mundo que for L.I. vai ter a mesma quantidade de vetores da base, é isso que eu estava querendo perguntar se era verdade. Era minha dúvida. Por exemplo, o “cara” é uma base de W, ou seja, ele gera W e é um conjunto L.I., todos os/ todo mundo que gera W também vai ter que ter a mesma quantidade de vetores que a base. É isso que eu estava querendo saber.

Professor: Sim.

Euclides: Eu não consigo pegar um com menos vetores e provar que ele também é base.

Professor: Exatamente. Era isso que eu estava querendo perguntar.

Vemos que com essa última colocação, Euclides antecipa o Teorema 5, que indica que toda base de um Espaço Vetorial possui o mesmo número de vetores. Acreditamos que, essa antecipação se deveu ao fato de que nas discussões deixamos que os alunos explorem todas as possibilidades que imaginarem a partir da teoria, sem vetar ou antecipar sua produção de significados.

[...]

Professor: Eu não se você lembra, mas em um outro encontro você me perguntou se para gerar um conjunto com três coordenadas ou duas coordenadas, eu vou precisar de, no máximo, dois vetores, três vetores, lembra que você falou isso? E eu te pedi pra olhar com cuidado. Olha os vetores de W, eles têm três coordenadas, mas você precisa de três pra gerar o W? Não, você só precisa de dois. E é esse “k, no máximo” aqui é isso que você tinha falado, você já tinha concluído esse Teorema olhando lá na teoria de Conjunto Gerador. Eu lembro que você até falou, não tem que ser exatamente, tem que ser no máximo três. Viu ali?

Euclides: Se eu provei que a base do “troço” tem dois vetores então com menos de dois, você não consegue, é isso que eu fiquei na dúvida. Se a base/ se eu já provei que eu tenho uma base com dois vetores e então eu estou provando que é, que qualquer subconjunto com menos de dois vetores não vai ser base.

Acreditamos que, nesta discussão o modo com que conduzimos a Ficha2, foi decisivo para a compreensão do conceito de base, que é central na teoria dos Espaços Vetoriais, pelo fato de que os alunos já possuíam um olhar mais refinado aos conceitos anteriores, principalmente os de Combinação Linear, Conjunto Gerador e Independência/Dependência Linear.

Tarefa 1:

Determine um subespaço de IR^3 cuja base é formada pelos vetores: (1, -1, 0) e (0, 0, 1).

Euclides: Mas esse jeito aqui eu já peguei e comecei a fazer isso, porque eu estava fazendo uns exercícios lá de Plano Complexo e eu vi uma amiga minha estava fazendo, ela fazia de um jeito e acabou que impregnou esse jeito de fazer.

Professor: Nesta tarefa vocês montaram o conjunto só que depois vocês tiveram a necessidade de ver que era L.I., o Euclides verificou e o Simba escreveu que era, “são L.I. portanto, são base”.

Simba: Eu mostrei, eu só troquei no sistema por (0,0,0). Na verdade eu não ia mostrar que era L.I., eu não me atentei a isso, mas aí ele não é base, então tem que mostrar que isso é L.I..

Professor: Mas olha o enunciado o que diz: cuja base é esse conjunto de vetores.

[...]

Professor: Porque a partir do momento que ele fala que ele é base, ele já informa que é L.I. e gera. Na verdade, o problema é saber o que o conjunto está gerando. Ele já é L.I., e gera, então o que ele gera? Na verdade o enunciado poderia ser/

Euclides: Então aqui ele já está afirmando que é base? Porque eu não encarei isso aqui como uma afirmação.

Os alunos acreditaram que deveriam exibir os cálculos confirmando que o conjunto dado é gerador e L.I., pois não levariam em conta que o conjunto já foi definido como uma base para algum subespaço de IR^3.

(5º Encontro – parte 3)

Tarefa 2:

Encontre uma base para o subespaço Vetorial de IR^3: $V = \{(x,y,z) \in R^3;\ \ x + 2y + 4z = 0\}$.

Professor: Como você chegou nessa base aqui?

Euclides: É eu fiquei pensando um tempão nisso, aí eu fiquei/ não pensei em isolar essa aqui no começo, depois ah não, vai dar trabalho, aí o outro jeito que eu tentei deu mais trabalho aí eu falei não eu vou isolar, aí eu voltei e isolei as outras.

[...]

Euclides: Neste aqui eu estou usando aquele lance de que já vai ser L.I., por causa das coordenadas. [...] Uma em cada coordenada, deixando as outras, por que aí já vai/ pra mim já, tipo, se eu tenho um negócio que é um monte de vetor, vamos supor e cada um tem uma coordenada e as outras zero ele já vai ser linearmente independente este conjunto de vetor. Eu vou ter que provar mas, por exemplo, eu tenho aqui um subconjunto que é assim, tenho um vetor que é (x,0,0,0) e o segundo (0,y,0,0), cada vetor desse conjunto só tem uma, e eu não tenho nenhum que tem a mesma coordenada, então esse conjunto é linearmente independente, aí eu fiz isso aqui. Peguei um que só tinha uma coordenada/ um vetor com cada coordenada e que essa combinação desse o vetor que eu queria lá.

Professor: Então verifica se ele gera.

Euclides: Que gera, gera, porque o “a” vai ser o “x”, espera aí.

Nesta tarefa, Euclides toma valores para x e para y e cria um terceiro vetor que conterá a coordenada z correspondente à restrição do conjunto:

$x = 1$; $y = 2$; $z = \dfrac{-x-2y}{4} = \dfrac{-1-2\bullet 2}{4} = -\dfrac{5}{4}$ criando os seguintes vetores:

x y z

$(1,0,0)$; $(0,2,0)$; $(0,0,-\frac{5}{4})$

Vemos que, nesta tarefa, Euclides produziu o seguinte significado para um conjunto L.I.: tomar vetores de “n” coordenadas que possuam uma coordenada não-nula e “n – 1” coordenadas nulas, variando as coordenadas não-nulas. Além disso, ele estipulou valores para x e y para serem utilizados na restrição do conjunto, mas construiu os vetores (1,0,0) e (0,2,0) utilizando os valores estipulados, mas que não pertenciam ao conjunto dado.

Professor: Ele gera?

Euclides começa a falar sobre o cálculo que fez para confirmar que o conjunto é gerador.

Euclides: [...] Aí eu chego, (x,y,z).

Professor: Mas aí ele gerou o quê? É esse espaço que ele quer que gera? Ele gera mesmo, mas ele gera o V?

Euclides para pra pensar.

Professor: Que conclusão que você chegou.

Euclides: Ah não, porque aqui eu não tinha que botar o “z” não, eu tinha que botar o “z” do jeito que eu fiz aqui. Aí na hora que eu substitui é que eu corri aqui.Esse “z” aqui não é o “z”. No caso, vai dar mais conta ainda. Vai ser demorado.

Vemos que, mesmo perguntando se o espaço gerado é o V, Euclides não identifica que o conjunto de vetores determinado por ele gera o IR^3.

Professor: Será que esse era o melhor jeito de isolar as variáveis?

Euclides: É, poderia isolar o “x”. Isolando o “x” daria menos conta.

Professor: O Simba fez e achou uma base. Tem quantos vetores sua base Simba?

Simba: Dois.

Professor: Você também achou uma base Euclides, e quantos vetores tem sua base?

Euclides: Três.

Professor: É possível obter duas bases, uma com dois outra com três vetores?

Euclides: Não, por causa daquele Teorema (Teorema 5).

Professor: Viu Euclides, tem alguma coisa que você fez quando você optou por tomar os vetores desse jeito que está causando um problema pra este conjunto. Deixa só eu colocar uma coisa aqui pra você ver. Os vetores de V são (x, y, z) e você falou que os vetores da base vão ser vetores de V? E os vetores vão ter que satisfazer quais condições? Você impôs essa condição aqui: z é $\frac{-x-2y}{4}$. Aí você falou assim, (1,0,0) esse estaria na base do V. Então deixa eu te fazer uma pergunta, esse vetor (1,0,0) está nesse conjunto?

Euclides: Mas pra ele estar na base ele tem que estar em V? Isso que eu não vi então.

Professor: Então vamos pensar, tem aí no material β é um subconjunto de vetores de W (na definição de base). Entendeu?

Euclides: Era esse detalhe da definição que eu não tinha visto.

Professor: Na verdade, quando você escreveu esses vetores, você estava preocupado de eles serem L.I.. Aí lembra que eu te falei no vetor não teria que ser (1,2, $-\frac{5}{4}$) no caso, porque teria, esses pontos são todos (x,y,z) aí, como você botou x = 1 e y = 2 então z seria $-\frac{5}{4}$, esse vetor estaria onde?

Euclides: Em V.

Professor: Aí bom, você teria que pegar vetores que satisfaçam essa condição, e que, além disso, sejam o que você falou L.I..

Euclides: Mas esses do Simba, são disso?

Professor: Simba fez de um jeito diferente.

Euclides: Mas esse vetor (o vetor (-2,1,0) do Simba) então não está na base, por exemplo?

Professor: Ele não está em V? Vamos fazer a conta: $x + 2y + 4z = 0 \rightarrow -2 + 2.1 + 4.0 = 0$.

Euclides: É, vai estar.

Professor: Pensa nesse que você fez mesmo. [...] Deixa eu te explicar esse jeito que o Simba fez. Primeiro verificamos como é a "cara" dos vetores de V.

Euclides: Eu tinha ele na cabeça, tanto que eu fiz aqui na hora de tentar provar que gera.

Professor: Então o que acontece nesses casos quando a gente tem condições desse tipo, primeiro que você pode desconfiar que não será o IR^3 todo, porque se tem essa condição aqui, são só os vetores que satisfazem-na, então pode não dar três, se der três, tem que ser quem? Se a base tem três vetores de três coordenadas quem que ela vai gerar?

Euclides: O IR^3.

Professor: Então, se eu tenho uma condição, já vou ver que vou precisar de menos vetores. Vamos tentar escrever a "cara" dos elementos.

Como Euclides não havia cursado Álgebra Linear, ele ainda não conhecia a "técnica" de determinação de Conjunto Gerador a partir do conjunto dado, no caso poderia ser, por exemplo:

$V\{(x,y,z) \in IR^3;\ x + 2y + 4z = 0\} = \{(-2y -4z ,y,z) \in IR^3\} =$

$\{(-2y -4z ,y,z) = y(-2,1,0) + z(-4,0,1),\ y,\ z \in IR\} = [(-2,1,0); (-4,0,1)]$

onde este último é um gerador de V.

Professor: O Simba conseguiu uma base diferente, pois “isolou” o “x” ao invés do “z”.

Simba: Então ele gerou um subespaço diferente do meu?

Professor: Não. Ele gerou o mesmo subespaço.

Euclides: Com base diferente.

6º Encontro: 25/01 – Dimensão

Professor: A princípio, quando vocês leem essa palavra, “dimensão”, o vem à cabeça de vocês?

Euclides: Tamanho. Medida, tamanho.

Simba: O meu não vem nada. Talvez medida, eu pensaria em alguma coisa do tipo. Qual a dimensão do quadro?

[...]

Simba:Por que definiu que isso era Dimensão do subespaço? Por que é o número de vetores?

Professor: Por que é?

Simba: Eu não consigo ver, porque o IR^3 tem dimensão três. Porque ele, assim é tão grande. Entende?

Vemos que, para Simba, é legítimo dizer que o IR^3 é “tão grande”, parece ser o espaço físico, portanto, limitá-lo à dimensão três, parece estranho.

Euclides: Mas aí é definição mesmo.

Professor: Matematicamente essa é a definição de dimensão. Dependendo do contexto que você estiver ela tem um significado diferente, por exemplo, vocês falaram que a primeira coisa que pensaram foi que dimensão seria tamanho, aí já é outra definição de dimensão.

[...]

Simba: Então a dimensão do IR^3 é três.

Professor: Por que seria três?

Simba: Porque a base dele tem três vetores, então é três, pela definição aí, mas, tipo assim, fica tão estranho falar dimensão três do IR^3.

[...]

Professor: Aí você falou que acha estranho falar que o IR^3 tem dimensão três, porque você o imagina como alguma coisa “grande”. Mas aí, você está olhando o IR^3 como um Espaço Vetorial, é aquele conjunto, ternas onde cada coordenada é um número real, operações e o Corpo.

Simba: Então por ser uma terna é que ele tem dimensão três?

Professor: Será?

Simba: Não, porque você tem subespaços dentro do IR^3 que não tem dimensão três.

Professor: Isso. A estrutura algébrica Espaço Vetorial IR^3, então é esse conjunto de ternas, o Corpo que a gente está usando é IR e as operações são as usuais. Nesse caso, pra construir essa estrutura, um jeito é através da base dele, e eu preciso de quantos vetores? Quantos elementos?

Simba: Três.

Acreditamos que Simba teve essa sensação de estranhamento ao analisar e dimensão do IR^3, pois não havia tido contato com a discussão da existência de vários significados para um mesmo conceito.

Ao iniciarmos a discussão das tarefas de Dimensão, Euclides retoma o que discutimos no encontro anterior sobre a “técnica” de determinação de um conjunto gerador a partir do espaço dado e pergunta:

Euclides: Quando você faz desse jeito, você já garante que o conjunto é gerador e L.I.?

Professor: Gerador sim, mas devemos verificar se ele é L.I.

Euclides: Isso que eu estava pensando agora. Só pra saber mesmo. [...] Mas eu gosto deste jeito de fazer agora.

[...]

Simba: Eu posso falar que não existe o IR^2 na nossa vida? Porque na verdade esse quadro está no IR^3, mas ele é um... ele tem dimensão dois.

Professor: Aí depende, o IR^2 pra nós em Álgebra Linear, ele não é o plano, ele o conjunto vetores da forma (x,y) com x e y números reais. É a estrutura algébrica que tem esse conjunto, o Corpo dos Reais e as duas operações, isso que é o IR^2 na Álgebra Linear. Uma coisa é olhar o IR^2 na Geometria Analítica, outra coisa é o IR^2 que a gente vê na Álgebra Linear. O IR^2 na Álgebra Linear é uma estrutura algébrica, que satisfaz todas aquelas condições. E a gente fica associando talvez a outras coisas, por exemplo, a gente associa vetor a uma "setinha", orientada e vetor pra gente não necessariamente é uma "setinha", é um elemento, pode ser uma matriz, aqui a gente só trabalha com n-uplas, mas poderia ser matriz, polinômio. Talvez fique mais estranho quando a gente toma espaços com dimensões superiores que a gente não pode representar geometricamente.

Tarefas de Dimensão:

Tarefa 1:

Determine a Dimensão dos seguintes Subespaços Vetoriais de IR^n:
b) $S = \{(x, y, z, t) \in R^4;\ x = 2y;\ z = t\}$

Após algumas discussões a respeito da "identificação" de um conjunto linearmente independente sem a realização dos cálculos, havíamos acreditado que Euclides efetuava essa análise direcionando seu foco para as coordenadas não nulas, mas no item b) surge o conjunto [(2,1,0,0), (0,0,1,1)] e segue o seguinte diálogo que nos fez repensar se o aluno realizava de maneira consciente a análise referida por nós.

Euclides: Então isso aqui gera o vetor S. O subespaço.

Professor: Aí quem seria a base para esse subespaço? A possível base?

Euclides: A possível base seria os dois. Aí seria entre parênteses. ([(2,1,0,0), (0,0,1,1)]).

Professor: Aí como você não sabe a dimensão de S você teria que mostrar que eles são o quê?

Euclides: L.I.

Professor: Mas só de olhar será que já dá pra saber se eles são L.I.?

Euclides: Não, não dá, eu estou botando aqui, mas só pra...fazer um negócio.

Vemos que, ele (Euclides) não “olhava” mais para os vetores procurando as entradas nulas e não nulas, pelo seu raciocínio e, até pelo modo como conduziu a resolução, Euclides sentia a necessidade de montar e resolver o sistema produzido a partir da combinação linear nula.

Professor: Gera você já sabe que gera. Basta mostrar que é L.I.. Se eu tivesse falado que S tem Dimensão 2, tinha acabado, mas como você não sabe a Dimensão.

b) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x = 2y ; z = t\}$

$\{(2y, y, t, t) \in \mathbb{R}^4 ; x = 2y ; z = t\}$

$\{(2y, y, 0, 0) + (0, 0, t, t) ; y, t \in \mathbb{R}\}$

$\{y(2, 1, 0, 0) + (0, 0, 1, 1)t ; y, t \in \mathbb{R}\}$

$[(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$

$\{(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ = base ?

$a(2, 1, 0, 0) + b(0, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$

$(2a, a, 0, 0) + (0, 0, b, b) = (0, 0, 0, 0)$

$(2a, a, b, b) = (0, 0, 0, 0)$

$\begin{cases} 2a = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ L.I.

Portanto $\dim S = 2$

FIGURA 6.1: Euclides: 1) (DIMENSÃO)

b) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = 2y;\ z = t\}$

$S = \{(2y, y, z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

$S = \{(2y, y, 0, 0) + (0, 0, z, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

$S = \{y(2, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

$S = [(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$

$(2y, y, 0, 0) + (0, 0, z, z) =$

$(2y, y, z, z) = (0, 0, 0, 0)$

$y = 0$ é L.I.

$z = 0$

Base de $S = \{(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$

Logo S tem dimensão 2

FIGURA 6.2: Simba: 1) (DIMENSÃO)

Tarefa 2:

Seja $W = [\ v_1 = (1,-1, 0, 0),\ v_2 = (0, 0, 1, 1),\ v_3 = (-2, 2, 1, 1),\ v_4 = (1, 0, 0, 0)\ ]$. a) $(2,-3, 2, 2) \in W$? Justifique. b) Exiba uma base para W. Qual a dimensão de W? c) $W = IR^4$? Por quê ?

Professor: Você está “zerando” um “cara” aqui. Por que você acha que tem que “zerar” ele?

Euclides: Porque eu não preciso/ só com essas três aqui eu monto essas quatro aqui, então eu não preciso desse “cara” aqui.

Professor: Esse vetor aqui, eu consigo escrever ele só com esses três?

Euclides: Consegue. Consegue? (Faz algumas contas de “cabeça”) Consegue.

Professor: Então você pode “enxugar” esse conjunto.

Euclides: É.

Nesta tarefa, de forma semelhante da anterior, Euclides utilizou o sistema, tanto para verificar que o vetor (2,-3,2,2) pertencia ao conjunto gerador dado, quanto para verificar que o conjunto resultante da exclusão do vetor (-2,2,1,1) (que é combinação linear dos outros) era L.I.

Simba: Eu já nem sei o que estou fazendo mais. Aí depois eu pensei assim, mas tem quatro vetores aqui e com quatro “entradas” então se eles pertencerem a IR^4, com certeza aquele ali ((2,-3,2,2)) vai pertencer. Aí mudei, eu pensei assim, vou provar que é L.I., aí depois eu vi que um pode ser escrito como combinação linear dos outros, aí eu comecei a fazer a combinação linear do outro.

Vemos que Simba, apesar de já ter feito a disciplina Álgebra Linear, não sabe como “atacar” o problema, utiliza diversas estratégias de solução para resolver a tarefa sem, contudo, analisar qual seria a mais correta e terminar o raciocínio das mesmas.

Simba: O que eu pensei? Você reparou que eu não provei que ele é L.I.? Aí eu vou explicar porquê. Que reparei que um desses vetores era escrito como combinação linear do outro, então eu retirei um deles, esse daqui eu consegui escrever como combinação linear dos outros três, eu não precisei dos três para escrever esse daqui, então, logo, esses três aqui ele tem que ser L.I. entre si.

Professor: Ele tem que ser gerador.

Simba: Na verdade, eu quero dizer que eles tem que ser L.I. porque eu precisei de três vetores para escrever um terceiro de W.

Professor: E se aqui fosse, por exemplo, (2,-2,0,0)?

Simba: Não, eu quero dizer que, tipo assim, se eu tivesse que “zerar” um eu teria que ver se eles são L.I., porque talvez um deles eu não precisaria usar.

Professor: Teria se você tivesse montado uma combinação linear genérica e chegado que no final que o sistema é possível e determinado, ou seja, a solução era única, os coeficientes só podiam ser 3,2 e -1, aí sim. O sistema poderia ser possível e indeterminado.

Euclides: Você quer dizer que pode montar a combinação com outros números?

Professor: Então, pode ser que, algum deles em alguma combinação fosse zero, que eles continuam gerando, eles já tinham o colchete, portanto, eles já eram geradores.

Simba: Então eu teria que provar que esse conjunto é L.I.?

Professor: É. Você vê a diferença daquele exemplo que deu um único vetor? Nesses casos específicos, você já bate o olho e vê que é L.I.

Vimos que Simba acreditava que, como três vetores geraram um quarto vetor, que eles constituíram um conjunto L.I..

a) $a v_1 + b v_2 + c v_3 + d v_4 = (2,-3,2,2)$

$3(v_1) + 2(v_2) + 0(v_3) - 1(v_4) = (2,-3,2,2)$

$(3,-3,0,0)+(0,0,2,2)+(0,0,0,0)+(-1,0,0,0)=(2,-3,2,2)$

$(3-1,-3+0,0+2,0+2)=(2,-3,2,2)$

logo o vetor pertence a W

b) Podemos ver que

$a(1,-1,0,0)+b(0,0,1,1)+c(1,0,0,0)=(0,0,0,0)$

$(a,-a,0,0)+(0,0,b,b)+(c,0,0,0)=(0,0,0,0)$

$(a+c,-a,b,b)=(0,0,0,0)$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ -a=0 \\ b=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b=0 \\ a=0 \\ c=0 \end{matrix} \quad \text{L.I}$$

Além disso

$(-2,2,1,1) = -2(1,-1,0,0)+1(0,0,1,1)$

logo $W=[(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)]$ e

$\{(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)\} = \beta$ é base

Portanto dim $W = 3$

c) $W = \mathbb{R}^4$

Não pois dim $\mathbb{R}^4 = 4$ e dim $W = 3$

FIGURA 6.3: Euclides: 2) (DIMENSÃO)

$2(1,-1,0,0) + (-2,2,1,1) = (0,0,1,1)$

a) $3(1,-1,0,0) + 2(0,0,1,1) - 1(1,0,0,0) = (2,-3,2,2)$

$\Rightarrow (2,-3,2,2) \in W$ pois consigo escrever como combinação linear de $(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)$.

b) $W = [(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)]$. A dimensão é 3.

$\beta = \{(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,0)\}$

c) Não, pois W têm dimensão 3 e o $\mathbb{R}^4$ tem dimensão 4.

$\gamma = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, pois γ é base do $\mathbb{R}^4$ que contém 4 vetores.

$\Rightarrow$ b) $a(1,-1,0,0) + b(0,0,1,1) + c(1,0,0,0) = (0,0,0,0)$

$(a,-a,b,b+c) = 0$

$a = 0$

$b = 0$ ①

$b + c = 0 \overset{①}{\Rightarrow} c = 0$

FIGURA 6.4: Simba: 2) (DIMENSÃO)

Terminamos o encontro agradecendo a eles pela participação e explicando-lhes que o seminário continuaria com o estudo das Transformações Lineares.