

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

**Avaliação Computacional do
Comportamento Dinâmico Estrutural de
Plataformas Fixas Submetidas a
Carregamento de Ondas Marítimas**

Elias Duarte Oliveira

JUIZ DE FORA
SETEMBRO, 2019

Avaliação Computacional do Comportamento Dinâmico Estrutural de Plataformas Fixas Submetidas a Carregamento de Ondas Marítimas

ELIAS DUARTE OLIVEIRA

Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional

Mestrado em Modelagem Computacional

Orientador: Flávio de Souza Barbosa

Coorientador: Marcelo Miranda Barros

JUIZ DE FORA

SETEMBRO, 2019

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Oliveira, Elias Duarte.

Avaliação Computacional do Comportamento Dinâmico Estrutural de Plataformas Fixas Submetidas a Carregamento de Ondas Marítimas / Elias Duarte Oliveira. -- 2019.

78 f. : il.

Orientador: Flávio de Souza Barbosa

Coorientador: Marcelo Miranda Barros

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, ICE/Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, 2019.

1. Modelagem Computacional. 2. Plataformas Fixas. 3. Análise Dinâmica. 4. Teorias de Ondas. 5. Método dos Elementos Finitos. I. Barbosa, Flávio de Souza, orient. II. Barros, Marcelo Miranda, coorient. III. Título.

AVALIAÇÃO COMPUTACIONAL DO COMPORTAMENTO
DINÂMICO ESTRUTURAL DE PLATAFORMAS FIXAS
SUBMETIDAS A CARREGAMENTO DE ONDAS MARÍTIMAS

Elias Duarte Oliveira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE
CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, COMO
PARTE INTEGRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM MODELAGEM COMPUTACIONAL.

Aprovado por:




Prof. D. Sc. Flávio de Souza Barbosa (orientador)

Universidade Federal de Juiz de Fora



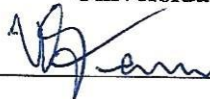
Prof. D. Sc. Marcelo Miranda Barros (coorientador)

Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D. Sc. Elson Magalhães Toledo

Universidade Federal de Juiz de Fora



Prof. D. Sc. Walnório Graça Ferreira

Universidade Federal do Espírito Santo

JUIZ DE FORA

12 DE SETEMBRO DE 2019

*À minha irmã Ana Paula, Aos meus pais Elena
e Sebastião, pelo apoio e sustento.
À Júnia Alves por nosso amor.*

Resumo

O projeto de plataformas de petróleo é influenciado por condições diferentes das encontradas nas estruturas usuais em terra firme. Por isso a análise destas condições é extremamente importante para segurança e eficiência da exploração de petróleo. As plataformas fixas do tipo jaqueta são estruturas tubulares, similares a torres, que permanecem fixadas aos leitos oceânicos e são muito utilizadas para exploração em águas rasas e intermediárias. Dentre as solicitações as quais este tipo de estrutura está submetida, o choque das ondas do mar é, na maior parte das vezes, a principal. Logo, caracterizar e mensurar, o que na literatura é chamado estado de mar, é a etapa fundamental para a modelagem, análise e projeto dessas estruturas *offshore*. Assim, o presente trabalho apresenta teorias de ondas utilizadas na modelagem do estado de mar, visando avaliar tanto o carregamento atuante sobre uma plataforma fixa do tipo jaqueta quanto seu comportamento dinâmico. A análise estrutural das plataformas é feita através de modelos de bidimensionais obtidos por meio do método dos elementos finitos. Os resultados obtidos são comparados com aqueles extraídos de modelos consolidados disponíveis na literatura e evidenciam a convergência dos resultados das teorias linear e de Stokes em ondas cuja a amplitude é pequena em relação a seu comprimento e a profundidade local. O que não se verificou quando essa relação é grande.

Palavras-chave: Estado de mar, Análise Dinâmica, Estruturas, Método dos Elementos Finitos, Plataformas Fixas, Teorias de Ondas, Modelagem Computacional.

Abstract

Oil platforms are influenced by loading conditions different from those encountered in usual structures onshore. Because of that, designers must consider a set of complementary analysis for keeping the safety and efficiency of the operation. Within this context, steel jacket platforms are tubular structures, similar to towers, that remain fixed to the ocean beds and are widely used for exploration in shallow and intermediate waters. In these platforms, the collision of the sea waves in most of the cases is considered to be the main loading. Therefore, the characterization and measurement of the sea waves loading is a fundamental stage for the modeling, analyses, and design of offshore structures. The main goal of this work is to present waves theories used in the modeling of the sea state, aiming to evaluate the loading on a jacket platform and its dynamic behavior. The structural analysis is done by using two-dimensional models obtained through the Finite Element Method. The results obtained were compared with consolidated data from models available in the literature and it shows convergence of the results of linear and Stokes theories in waves whose amplitude is small in relation to their length and local depth.

Keywords: Sea State, Dynamical Analysis, Finite Element Method, Steel Jacket Platform, Waves Theory, Computational Modeling.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me guiado por seu justo caminho. Mesmo sem entender creio que o melhor ainda está por vir.

À minha família pelo amor e apoio incondicional. À Júnia Alves Xavier que me alegra todos os dias com seu amor e otimismo.

Agradeço aos meu amigos e colegas do Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional: Denner, Lucas Berg, Pedro Arroyo, Vinícius Varela, Cleiston e Emanuel - Este trabalho conta com a colaboração direta de vocês, meu muito obrigado. Agradeço também ao meu amigo de longa data Rael Fonseca pelas diversas vezes em que fui ajudado e por sua amizade.

Agradeço aos Professores Flávio Barbosa e Marcelo Miranda pela orientação e incentivo dado. Aos professores Elson Toledo e Walnônio Graça pelas importantes contribuições dadas na avaliação deste trabalho. A Fundação Capes pelo auxílio financeiro e fomento da pesquisa.

Aos amigos, professores e família meu muito obrigado. A vida continua, os desafios se renovam, as vitórias também.

”Deus é o nosso refúgio e fortaleza, socorro bem presente na angústia.

Portanto não temeremos, ainda que a terra se mude, e ainda que os montes se transportem para o meio dos mares.

Ainda que as águas rujam e se perturbem, ainda que os montes se abalem pela sua braveza”

Salmos 46:1-3

Conteúdo

Lista de Figuras	8
Lista de Tabelas	10
1 Introdução	11
1.1 Tipos de Plataformas	11
1.1.1 Plataformas Flutuantes	11
1.1.2 Plataformas Fixas	12
1.1.3 Plataformas Mistas	13
1.2 Esforços Principais em Estruturas <i>offshore</i>	14
1.3 Cargas Ambientais	15
1.3.1 Vento	15
1.3.2 Correntes	16
1.3.3 Ondas	16
1.3.4 Terremotos	17
1.3.5 Variação de Temperatura	17
1.3.6 Colisão de placas de gelo	17
1.3.7 Movimento do solo oceânico	18
1.3.8 Crescimento de Vegetação Marinha	18
1.4 Estado de Mar e Teorias de Onda	19
2 Teoria Linear de Onda	21
2.1 Função Potencial de Velocidade	23
2.1.1 Condição de Contorno do Fundo Oceânico	25
2.1.2 Condição de Contorno Dinâmica da Superfície Livre	26
2.1.3 Condição de Contorno Cinemática da Superfície Livre	29
2.2 Relação de Dispersão de Onda	30
2.3 Trajetória de Partículas	31
3 Teoria de Stokes de Segunda Ordem	35
4 Equação de Morison	39
5 Método dos Elementos Finitos	41
5.1 Modelo de Viga de Euler-Bernoulli	41
5.2 Formulação Variacional do Problema	42
5.3 Aproximação Via Método dos Elementos Finitos	43
5.4 Elemento de Pórtico Plano	47
5.5 Método de Newmark	49
6 Análise Dinâmica de Estruturas	51
6.1 Conceitos Básicos de Vibração	51
6.1.1 Vibração	51
6.1.2 Componentes de um sistema oscilatório	51
6.1.3 Graus de liberdade	51

6.1.4	Sistemas Contínuos e Discretos	51
6.2	Classificação de Vibrações	53
6.2.1	Vibração Livre e Forçada	53
6.2.2	Vibrações amortecidas e não amortecidas	53
6.3	Vibração Linear e não-linear	54
6.4	Vibração Determinística e Vibração Aleatória	54
6.5	Análise Determinística e Análise Dinâmica Aleatória	55
6.6	Dinâmica Linear - Sistemas com um grau de liberdade	55
6.7	Sistema Com Múltiplos Graus de Liberdade	56
7	Simulações e Resultados	58
7.1	Exemplo 1	58
7.2	Exemplo 2	65
7.2.1	Caracterização das Ondas do Mar	66
7.2.2	Resposta Estrutural	68
8	Considerações Finais e Conclusões	70
	Bibliografia	72

Lista de Figuras

1.1	Plataforma Flutuante Semi-Submersível. [21]	11
1.2	Plataforma Fixa de Gravidade. [9]	12
1.3	Plataforma Fixa do Tipo Jaqueta. [21]	13
1.4	Plataforma Autoelevatória. [21]	13
1.5	<i>Tension Leg Platform - TLP</i> . [21]	14
1.6	Perfil de velocidades do vento. [13]	16
1.7	Choque de placas de gelos em plataformas fixas.[18]	17
1.8	Acúmulo de vegetação no perímetro dos pilares.[20]	19
2.1	Onda Regular Sobre Superfície Oceânica. Fonte: [24]	22
2.2	Histórico de elevações - ponto fixo no domínio do tempo - Adaptado de [14]	23
2.3	Histórico de elevações - tempo fixo domínio do espaço - Adaptado de [14]	23
2.4	Condição de Contorno do Fundo Oceânico - <i>no-leak condition</i> Fonte: [14]	25
2.5	Condição de Contorno Dinâmica da Superfície Livre. Fonte: [14]	27
2.6	Condição de Contorno Cinemática da Superfície livre. Fonte:[14]	29
2.7	Decomposição de ondas irregulares a partir da dispersão. [35]	32
2.8	Campo vetorial de velocidades. Fonte: [14]	33
2.9	Trajatória de partículas em diferentes profundidades relativas. Fonte: [6]	34
3.1	Elevação da superfície - Stokes de 2ª Ordem.	37
3.2	Regiões de validade das teorias analíticas de onda. [10]	37
3.3	Trajórias de partículas. [30].	38
3.4	Trajórias de partículas próximas ao fundo oceânico. [4]	38
4.1	Força em cilindro perpendicular à direção de fluxo	39
5.1	Elemento de Viga	43
5.2	Massa discreta em elemento de viga. Fonte:[2]	47
5.3	Elemento do tipo pórtico plano. [8]	48
6.1	Sistemas Discretos com dois e três graus de liberdade.[23]	52
6.2	Sistema contínuo com infinitos graus de liberdade. [23]	52
6.3	Excitação Determinística. [23]	54
6.4	Excitação Aleatória. [23]	55
6.5	Sistema massa mola - Um grau de liberdade.	56
7.1	Plataforma Fixa. [32]	58
7.2	Plataforma Fixa. [36] e [29]	59
7.3	Modelo implementado.	60
7.4	Discretização da estrutura em 850 elementos.	60
7.5	Modos de vibração à flexão.	61
7.6	Elevação da superfície marinha modelada no exemplo 1.	62
7.7	Deslocamento horizontal do ponto mais elevado. $f_{onda} = 0,5573$ Hz $\xi = 1\%$	63
7.8	Deslocamento horizontal considerando vibração não-amortecida $f = 1,80$ Hz	63
7.9	Deslocamento horizontal $f = 1,80$ Hz $\xi = 1\%$.	64
7.10	Modelo estrutural - plataforma fixa.	65

7.11	Perfil de Elevação da Superfície Oceânica.	67
7.12	Carregamento Hidrodinâmico atuante ao nível da superfície $h = 32\text{m}$	67
7.13	Carregamento Hidrodinâmico atuante. $t = 5$ segundos.	68
7.14	Deslocamento horizontal para o ponto mais elevado da plataforma.	69
8.1	Diferença percentual entre a força hidrodinâmica obtida pelas teorias linear e de Stokes em função da profundidade local h	71

Lista de Tabelas

4.1	Coeficientes de Arrasto e Inércia	40
5.1	Parâmetros do Método Iterativo de Newmark	50
7.1	Propriedades Geométricas dos membros	59

1 Introdução

A participação dos combustíveis renováveis na matriz energética brasileira é uma das mais altas do mundo. Contudo os recursos não renováveis ainda predominam. De acordo com o Balanço Energético Nacional de 2019, os combustíveis não renováveis representam 54,7% da matriz energética brasileira, sendo o petróleo e seus derivados responsável por 34,4% desta contribuição. Segundo dados da Agência Nacional do Petróleo, a exploração *offshore* convencional e o pré-sal correspondem juntas a 92% da produção nacional de petróleo e gás.

A exploração *offshore* é feita a partir de plataformas que são classificadas em três tipos. Plataformas Flutuantes, Plataformas Fixas e Plataformas Mistas.

1.1 Tipos de Plataformas

1.1.1 Plataformas Flutuantes

As plataformas flutuantes, também chamadas de plataformas semi-submersíveis, ver figura 1.1, são utilizadas para exploração em águas profundas e são formadas por conveses que se apoiam em colunas de flutuadores submersos. A ancoragem é feita a partir do uso de cabos ou por posicionamento dinâmico.

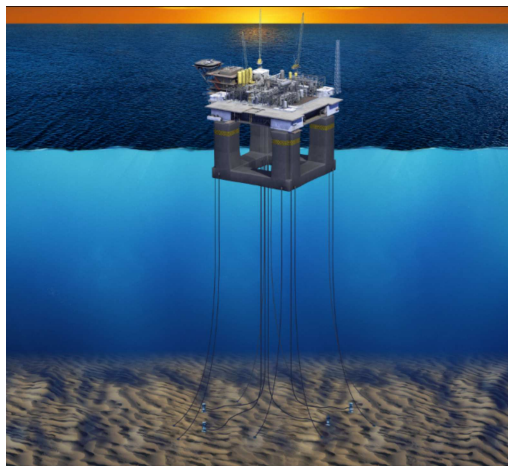


Figura 1.1: Plataforma Flutuante Semi-Submersível. [21]

1.1.2 Plataformas Fixas

As plataformas fixas apoiam-se no fundo do mar e seu posicionamento é fixo, diferente do que ocorre com as plataformas semi-submersíveis.

As plataformas fixas de gravidade, Figura 1.2, geralmente são constituídas de concreto e a fixação ao leito oceânico é feita em função de seu elevado peso próprio. Elas são utilizadas em regiões onde a viabilidade de instalação dos pilares é remota. Sua instalação é mais comum em localidades de elevada atividade geológica e movimentação do solo oceânico. As principais solicitações a que estão sujeitas são provenientes das correntes marinhas, das ondas, do peso próprio e do vento.

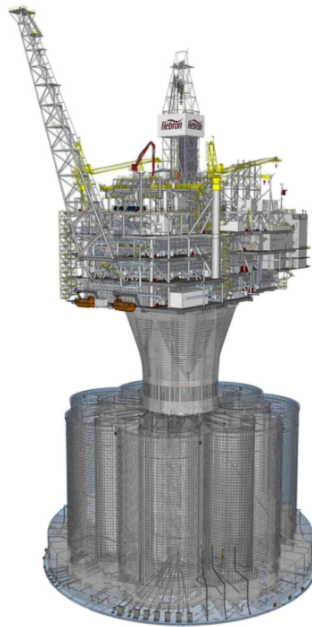


Figura 1.2: Plataforma Fixa de Gravidade. [9]

As plataformas fixas do tipo jaqueta, Figura 1.3, são utilizadas na perfuração de poços e na produção de petróleo e gás. Elas são compostas por uma estrutura tridimensional de membros tubulares que oferece suporte a superestrutura (*deck*). Este por sua vez abriga os equipamentos e módulos de instalações da plataforma. As principais solicitações a que este tipo de estrutura está sujeita são provenientes da ação das correntes marinhas, das ondas, do peso próprio e do vento.

As plataformas autoelevatórias, ou autoeleváveis, Figura 1.4, são usadas para perfuração de poços em águas rasas. São unidades móveis compostas por uma balsa e

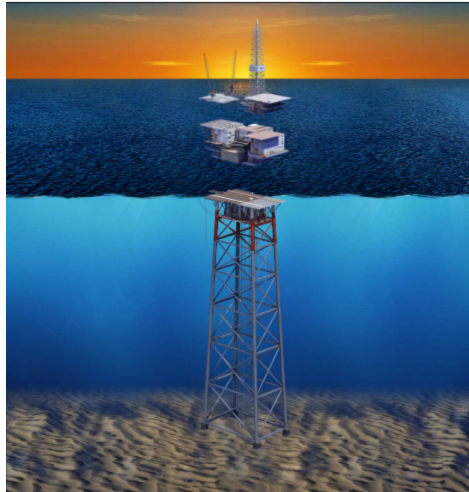


Figura 1.3: Plataforma Fixa do Tipo Jaqueta. [21]

três (ou mais) pernas que quando em operação são baixadas até atingirem o fundo do mar. Os esforços principais são semelhantes à da plataforma fixa, contudo nas plataformas autoelevatórias os esforços dinâmicos são ainda maiores em decorrência da maior flexibilidade das pernas.

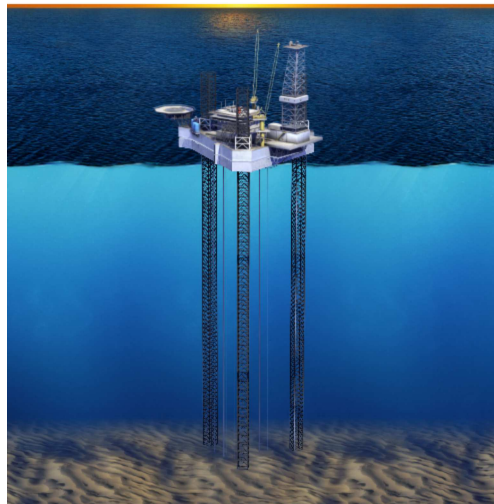


Figura 1.4: Plataforma Autoelevatória. [21]

1.1.3 Plataformas Mistas

As plataformas mistas, conforme o nome sugere, são uma mistura dos modos de fixação fixo e flutuante. Estas plataformas possuem flutuadores e ao mesmo tempo são fixas ao fundo oceânico, como por exemplo os *TLP's*.

TLP

TLP, Figura 1.5 - *Tension Leg Platform* também chamadas de plataformas de pernas atirantadas, são estruturas flutuantes fixadas ao solo marinho através de tendões que são mantidos esticados pelos flutuadores, o que gera uma tensão no cabo entre a superfície do mar e o fundo.

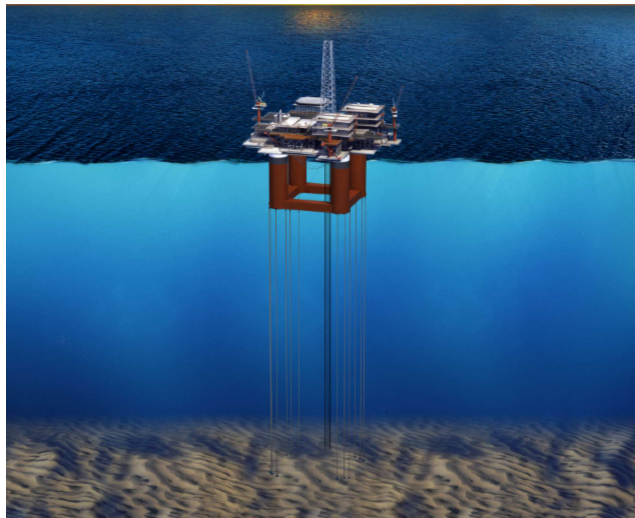


Figura 1.5: *Tension Leg Platform* - TLP. [21]

1.2 Esforços Principais em Estruturas *offshore*

Segundo a norma americana [26] (*Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms—Working Stress Design*), os carregamentos atuantes em estruturas *offshore* são classificados nos seguintes grupos:

- Cargas permanentes - *Dead Loads*
- Cargas de operação - *operating loads or live loads*
- Cargas construção e instalação - *construction and installation loads*
- Cargas acidentais - *accidental loads*
- Cargas ambientais - *environmental loads*

As cargas permanentes são provenientes do peso próprio da estrutura e equipamentos que compõe a plataforma, estas são constantes ao longo de toda a vida da

estrutura e incluem as forças hidrostáticas atuantes na estrutura como o empuxo. As cargas de operação estão relacionadas às cargas variáveis em função do uso da plataforma, elas incluem alterações em função da remoção ou acréscimo de novos equipamentos, como quartos e pouso de helicópteros. Cargas de instalação e construção referem-se aos esforços que surgem durante os processos de fabricação, transporte e instalação. As cargas acidentais referem-se a possíveis acidentes como a colisão de navios contra a plataforma ou explosões. Cargas ambientais são cargas impostas por fenômenos da natureza.

As estruturas *offshore* diferem-se das estruturas *onshore* principalmente pela natureza do carregamento ambiental. Nas construções em terra firme as cargas permanentes e de operação tendem a serem as ações principais, já nas plataformas *offshore* as forças geradas pelos fenômenos naturais, na maior parte dos casos, predominam, especialmente as causadas pelas ondas e pelo vento durante os estágios de instalação e operação das plataformas. Por se tratar de ações diretamente envolvidas nos estudos realizados no presente trabalho, as ações ambientais serão melhor detalhadas no próximo item.

1.3 Cargas Ambientais

São classificadas como cargas ambientais as forças provenientes de fenômenos típicos do ambiente marinho como: o vento, as correntes marinhas, as ondas, terremotos, variações de temperatura, os choques de placas de gelo, os movimentos do solo oceânico e a força indireta gerada pelo crescimento de vegetação marinha.

1.3.1 Vento

Assim como nas estruturas em terra firme, o vento atua acima do nível médio da superfície gerando forças que são proporcionais à densidade do ar (ρ), ao quadrado da velocidade de escoamento do vento (u_w) e área exposta da estrutura (A), Equação 1.1. O perfil de velocidades é aproximadamente zero na superfície e converge para um valor máximo velocidade na camada limite, Figura 1.6.

$$F_{vento} = \frac{\rho}{2} u_w^2 C_s A \quad (1.1)$$

Onde C_s é denominado coeficiente de forma.

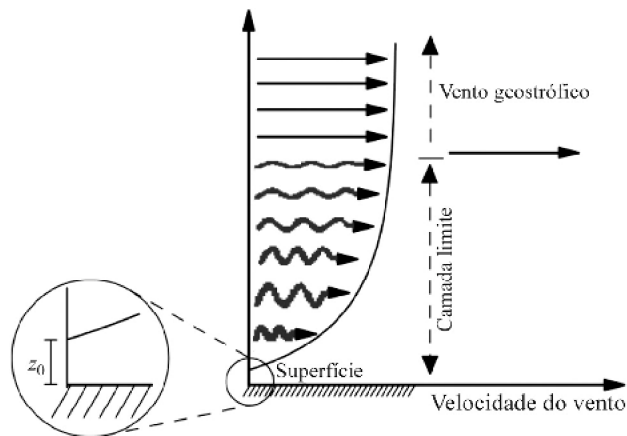


Figura 1.6: Perfil de velocidades do vento. [13]

1.3.2 Correntes

Correntes oceânicas exercem forças inerciais e de arrasto sobre a estrutura. Seu efeito é sobreposto ao das ondas marinhas somando se vetorialmente as velocidades do fluido.

1.3.3 Ondas

A ação das ondas é o principal componente das cargas ambientais em plataformas fixas. A natureza deste tipo de carregamento é dinâmica e essencialmente complexa. Sua determinação é essencial para previsão dos deslocamentos da estrutura. A estimativa das forças de onda é feita com base na identificação do estado de mar para computar as forças nos membros da plataforma.

A etapa de identificação do estado de mar é feita a partir da escolha de uma teoria de onda capaz de representar a condição geral da superfície do mar, de modo que, partindo-se dela, seja possível determinar a cinemática das partículas do fluido (componentes horizontais e verticais das acelerações e velocidades). Após determinar a velocidade e aceleração das partículas do fluido como função da posição e do tempo, calcula-se a força aplicada nos membros individuais da estrutura e conseqüentemente determina-se a força aplicada na estrutura inteira.

1.3.4 Terremotos

Segundo a norma americana API RP – 2A, sismos devem ser considerados no projeto de plataformas offshore, em regiões em que com base em registros anteriores de frequência de ocorrência e magnitude, possuam histórico de terremotos. “A atividade sísmica de uma área para fins de projeto de estruturas offshore, é classificada em termos riscos de danos à estrutura.” [26].

1.3.5 Variação de Temperatura

A variação de temperatura na estrutura decorre do gradiente térmico existente entre a superfície do corpo da água e o leito oceânico. Esta diferença gera um acréscimo de tensões nos membros da estrutura. Este acréscimo é calculado considerando os valores extremos estimados para a vida útil da estrutura.

1.3.6 Colisão de placas de gelo

A colisão de placas de gelos, Figura 1.7 é um problema típico de regiões próximas aos polos em países frios. O choque de placas de gelo gera fortes tensões localizadas na estrutura. Segundo [18], não há como calcular de forma exata a força causada pelo choque. Contudo existem equações empíricas que permitem estimar a força com base na tensão de trituração do gelo. Equação 1.2.

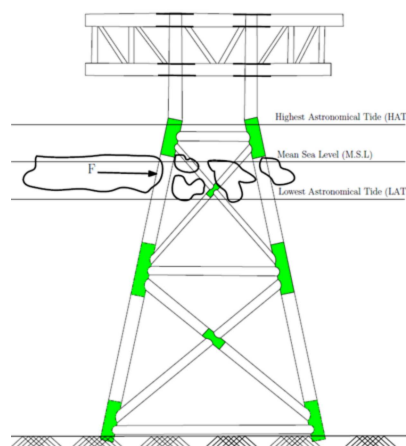


Figura 1.7: Choque de placas de gelos em plataformas fixas.[18]

$$F_{ice} = C f A \quad (1.2)$$

Onde:

F_{ice} - a força causada pelo impacto.

C - coeficiente de força do gelo.

f - tensão de "trituração" do gelo.

A - área atingida pelo bloco de gelo.

1.3.7 Movimento do solo oceânico

As estruturas fixas estão diretamente sujeitas as movimentações do fundo oceânico. Os movimentos do solo podem ocorrer em decorrência dos processos geológicos, da pressão gerada pelas ondas durante as tempestades, dos terremotos, do peso próprio da estrutura e até mesmo da redução de pressão causada pela extração do petróleo. As forças decorrentes da movimentação do solo oceânico são obtidas a partir de estudos geotécnicos e sondagens do solo.

1.3.8 Crescimento de Vegetação Marinha

O crescimento de vegetação marinha sobre as plataformas, Figura 1.8, é um fator de grande importância na análise e projeto de plataformas fixas uma vez que o acúmulo de algas no perímetro da estrutura altera as forças hidrodinâmicas atuantes sobre ela. Isto ocorre pois a vegetação nos pilares e vigas gera um acréscimo do diâmetro da estrutura, isto por sua vez, aumenta quadraticamente a componente inercial e linearmente a componente de arrasto. Além disto, o acúmulo de vegetação acrescenta massa à estrutura e aumenta a rugosidade da mesma.

Tendo em vista que os diversos aspectos apresentados acerca das cargas ambientais as quais as plataformas estão submetidas, destaca-se que esse trabalho de mestrado tem por foco a análise de cargas provenientes de ondas, que segue melhor detalhado nos próximos trechos do texto.



Figura 1.8: Acúmulo de vegetação no perímetro dos pilares.[20]

1.4 Estado de Mar e Teorias de Onda

As diversas teorias de ondas existentes buscam representar a condição geral em que se encontra a superfície livre do mar. O estado de mar se caracteriza pela aleatoriedade das medições ao longo do tempo. Assim sendo, mesmo quando medido no mesmo local sob condições climáticas semelhantes os resultados obtidos não são iguais.

As principais teorias de onda existentes e seus respectivos nomes usualmente encontrados na literatura são:

- Teoria linear de Airy [6] - Linear Wave Theory;
- Teoria onda de Stokes - Stokes Wave Theory [34]
- Teoria da onda solitária [12] - Solitary wave theory
- Teoria de onda Cnoidal [7] - Cnoidal theory
- Função de corrente de Dean [5]- Dean's stream function theory
- Teoria numérica de Chappellear [3] - Numerical theory by Chappellear

Neste trabalho serão abordadas as Teorias Linear de Airy e a Teoria de Stokes de Segunda Ordem.

A teoria Linear de Airy é a mais simples das teorias de ondas. Ela apresenta os princípios que servem como fundamentos para teorias de ordem superior. A teoria de ondas de Stokes é a mais antiga e a melhor estudada das teorias não-lineares. A razão para estudá-la é que, além de ser a mais simples, ela também descreve bem a maioria dos efeitos associados a ondas não lineares [30].

2 Teoria Linear de Onda

A teoria linear é também conhecida como teoria de pequenas amplitudes ou teoria de primeira ordem. Ela foi proposta pelo matemático e astrônomo britânico George Biddell Airy no século 19. Como o nome sugere, esta teoria fornece uma descrição linearizada da propagação de ondas em um fluido ideal, sendo a amplitude destas ondas pequena em relação ao seu comprimento e a profundidade local.

Segundo [15], a formulação matemática do movimento das ondas parte das seguintes considerações:

1. O fluido é homogêneo, incompressível e irrotacional;
2. A tensão superficial é desprezada;
3. A pressão na superfície livre é uniforme e constante;
4. O fluido é invíscido;
5. O fundo é um limite plano horizontal, fixo e impermeável;
6. A amplitude de onda é constante e pequena em relação ao comprimento e profundidade;
7. A forma da onda não varia no tempo nem no espaço;
8. A propagação da onda se dá no plano bidimensional xz .

A teoria de Airy considera que as ondas do mar são regulares e se propagam bidimensionalmente em fluido ideal. Segundo [24], este tipo de consideração é um ponto de partida razoável para ondas oceânicas pois elas não são muito influenciadas pela viscosidade, tensão superficial ou turbulência.

Considerando uma onda regular, figura 2.1, a elevação de um ponto x sobre a superfície livre do mar em um instante específico de tempo t é denotado como (η) . Esta elevação é descrita como uma função harmônica de onda, conforme Equação 2.1.

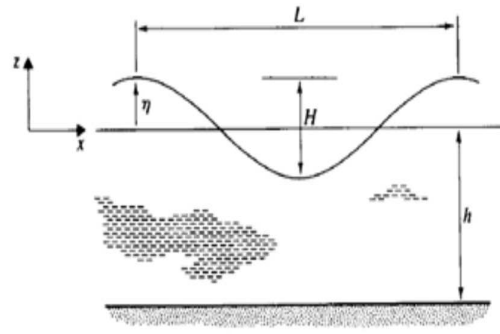


Figura 2.1: Onda Regular Sobre Superfície Oceânica. Fonte: [24]

$$\eta(x, t) = \frac{H}{2} \cos \left(2\pi \left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right) \right) \quad (2.1)$$

Onde:

H é a altura da onda, x é distância medida sobre o eixo horizontal do referencial, L é o comprimento de onda, T é o período de onda e t é o instante de tempo.

A velocidade de propagação de uma onda regular na direção x , denominada celeridade (C), ou velocidade de fase, é definida como sendo a relação entre o comprimento de onda (L) e o período (T), Equação 2.2.

$$C = \frac{L}{T} \quad (2.2)$$

A expressão que define a elevação da superfície oceânica em ondas regulares é uma função escalar de duas variáveis, uma espacial e outra temporal. Ao fixarmos um ponto do referencial x obtemos o “histórico” de elevações deste ponto ao longo do tempo, conforme mostra a figura 2.2. Se por outro lado for estabelecido um domínio de observação e for tomado como fixo o tempo, obtem-se o perfil oceânico descrito pelas ondas regulares naquele instante, seria como se fotografásse o mar naquele momento (representação Euleriana), Figura 2.3 [14].

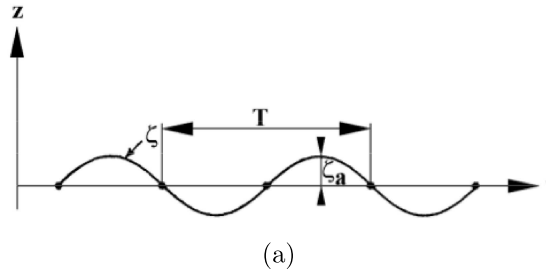


Figura 2.2: Histórico de elevações - ponto fixo no domínio do tempo - Adaptado de [14]

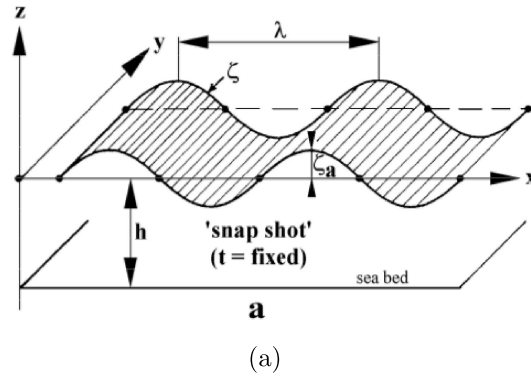


Figura 2.3: Histórico de elevações - tempo fixo domínio do espaço - Adaptado de [14]

2.1 Função Potencial de Velocidade

A primeira e quarta hipóteses da teoria linear admitem que o fluido em escoamento é incompressível, invíscido e irrotacional. Matematicamente, isto pode ser descrito através das Equações 2.3, 2.4 e 2.5. Onde \vec{V} representa o campo vetorial de velocidades.

- Escoamento de fluido incompressível (densidade $\rho = cte$) – Equação da Continuidade.

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.3)$$

- Escoamento de fluido invíscido (viscosidade $\mu = 0$) – Equação de Euler

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p \quad (2.4)$$

- Escoamento irrotacional

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \quad (2.5)$$

A consideração de um campo de velocidades irrotacional permite que admita-se a existência de uma função escalar de potencial de velocidades. Para obtermos esta

função escalar potencial ϕ , devemos assumir que o perfil de uma onda regular de pequenas amplitudes e inclinações é descrito a partir do produto de um termo cíclico variável no tempo por outro que represente o movimento da partícula de água a partir da profundidade z . Logo a função escalar potencial de velocidade assume a forma mostrada na Equação 2.6.

$$\phi(x, z, t) = P(z) \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (2.6)$$

Onde z é posição vertical em relação ao referencial, $k = \frac{2\pi}{L}$ é chamado número de onda e $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência angular da onda.

Para que as hipóteses de movimento irrotacional e incompressibilidade do fluido sejam verdadeiras, o potencial de velocidades deve obedecer à equação da continuidade ou equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.7)$$

A propagação bidimensional é uma das considerações da teoria linear, sendo assim a equação passa a ser:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.8)$$

Substituindo 2.6 em 2.8 tem-se:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 P(z) \cdot \sin(kx - \omega t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(z) \cdot \sin(kx - \omega t)}{\partial z^2} = 0 \quad (2.9)$$

$$\sin(kx - \omega t) \cdot \left[\frac{\partial^2 P(z)}{\partial z^2} - k^2 \cdot P(z) \right] = 0 \quad (2.10)$$

Para que a Equação 2.10 seja verdade ela deve satisfazer uma dentre as equações:

$$\frac{\partial^2 P(z)}{\partial z^2} - k^2 \cdot P(z) = 0 \quad (2.11)$$

$$\sin(kx - \omega t) = 0 \quad (2.12)$$

Admitindo que uma solução para $P(z)$ pode ser escrita como:

$$P(z) = c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz} \quad (2.13)$$

Substituindo a equação 2.13 na equação 2.6 tem-se:

$$\Phi(x, z, t) = (c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz}) \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (2.14)$$

Onde:

Φ - Potencial de onda ou Potencial de Velocidade (m^2/s)

e - Número de Euler

c_1, c_2 - Constantes a serem determinadas

k - Número de onda (m^{-1})

t - Tempo (s)

x - Distância horizontal (m)

z - Distância vertical (m)

ω - Frequência angular de onda (rad/s)

A função potencial de uma onda harmônica precisa atender às restrições impostas pelas seguintes condições:

- Condição de Contorno do Fundo Oceânico - *Sea bed boundary condition*.
- Condição de Contorno Dinâmica da Superfície Livre
- Condição de Contorno Cinemática da Superfície Livre

2.1.1 Condição de Contorno do Fundo Oceânico

A condição de contorno de fundo oceânico diz que a velocidade vertical das partículas de água no fundo oceânico w é zero uma vez que este é considerado impermeável (*no-leak condition*). Como mostrado na Figura 2.4.

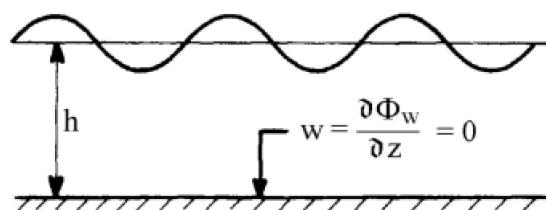


Figura 2.4: Condição de Contorno do Fundo Oceânico - *no-leak condition* Fonte: [14]

Em $z = -h$,

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (2.15)$$

Substituindo 2.14 em 2.15:

$$\frac{\partial ((c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz}) \cdot \sin(kx - \omega t))}{\partial z} = 0 \quad (2.16)$$

$$(kc_1 e^{-kh} - kc_2 e^{kh}) = 0 \quad (2.17)$$

$$c_1 e^{-kh} = c_2 e^{kh} \quad (2.18)$$

Definindo $\frac{C}{2} = c_1 e^{-kh} = c_2 e^{kh}$

$$c_1 = \frac{C}{2} e^{kh} \quad (2.19)$$

$$c_2 = -\frac{C}{2} e^{-kh} \quad (2.20)$$

$$P(z) = c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz} \quad (2.21)$$

$$P(z) = \frac{C}{2} e^{kh} \cdot e^{kz} - \frac{C}{2} e^{-kh} \cdot e^{-kz} \quad (2.22)$$

$$P(z) = \frac{C}{2} (e^{k(h+z)} - e^{-k(h+z)}) \quad (2.23)$$

$$P(z) = C \cdot \cosh(k(h+z)) \quad (2.24)$$

Substituindo 2.24 em 2.6,

$$\Phi(x, z, t) = C \cdot \cosh(k(h+z)) \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (2.25)$$

2.1.2 Condição de Contorno Dinâmica da Superfície Livre

Segunda a Condição de Contorno Dinâmica da Superfície Livre, a pressão na superfície livre é uniforme ao longo da onda. Esta consideração é válida somente para perfis de pequena elevação η , o que está em concordância com a quarta consideração da teoria, Figura 2.5.

A equação de Bernoulli para um fluido transiente e irrotacional com a velocidade

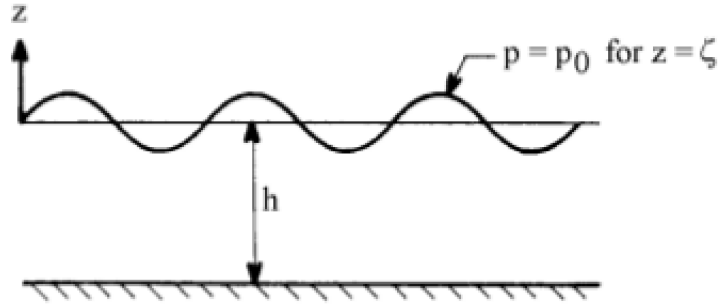


Figura 2.5: Condição de Contorno Dinâmica da Superfície Livre. Fonte: [14]

em termo de suas três componentes é

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C^* \quad (2.26)$$

Para o fluxo bidimensional no plano xz , $v = 0$. Assumindo que as ondas tenham pequenas amplitudes e pequenas inclinações u e w poderão ser desconsiderados, assim obtém-se:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = C^* \quad (2.27)$$

Na superfície livre, $z = \eta$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g\eta = C^* \quad (2.28)$$

“O valor das constantes $\frac{p}{\rho} - C^*$ pode ser incluído em $\frac{d\Phi}{dt}$; isso não influenciará as velocidades obtidas a partir do potencial Φ ” [14].

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad (2.29)$$

Realizando a expansão do potencial na superfície livre através da série de Taylor, lembrando que o deslocamento vertical η é pequeno:

$$\Phi(x, z, t)_{z=\eta} = \Phi(0, t) + \frac{\partial \Phi(0, t)}{\partial z} \cdot z + \frac{\partial^2 \Phi(0, t)}{\partial z^2} \cdot \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(0, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi(0, t)}{\partial z} \right) \cdot z + o(z^2) \quad (2.31)$$

Desse jeito obtemos a forma linearizada da condição de contorno dinâmica da superfície livre.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} g \eta = 0 \quad \text{em } z=0 \quad (2.32)$$

$$\eta = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \cdot \frac{1}{g} \quad (2.33)$$

Utilizando a equação 2.25 em 2.33 temos:

$$\eta = -\frac{\partial}{\partial t} (C \cdot \cosh(k(h+z)) \cdot \sin(kx - \omega t)) \cdot \frac{1}{g} \quad (2.34)$$

$$= -C \cosh(k(h+z)) \cdot \omega \cos(kx - \omega t) \quad (2.35)$$

$$\eta = \frac{-\omega \cdot C \cdot \cosh(k(h+z)) \cdot \cos(kx - \omega t)}{g} \quad (2.36)$$

Fazendo

$$\frac{-\omega \cdot C \cdot \cosh(k(h+z))}{g} = \zeta_a \quad (2.37)$$

$$\eta = \zeta \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (2.38)$$

Onde ζ equivale a amplitude de uma onda regular, $\zeta = H/2$. Dessa forma foi possível obter a partir da função potencial de velocidade, a equação que fornece a elevação da superfície do mar de acordo com as considerações impostas pelo modelo linear de Airy.

A constante C , poderá ser calculada a partir das características conhecidas do mar (amplitude, comprimento, frequência, e profundidade local) através da expressão abaixo.

$$C = \frac{\zeta_a \cdot g}{\omega \cdot \cosh(kh)} \quad (2.39)$$

Substituindo a Equação 2.39 em 2.25 obtem-se a equação completa para o potencial de velocidade de onda.

$$\Phi(x, z, t) = \frac{-H \cdot g [\cosh(k(h+z)) \cdot \sin(kx - \omega t)]}{2 \cdot \omega \cdot \cosh(kh)} \quad (2.40)$$

Rearranjando a expressão:

$$\Phi(x, z, t) = \frac{\zeta_0 g}{\omega} \cdot \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (2.41)$$

2.1.3 Condição de Contorno Cinemática da Superfície Livre

Similar à condição de contorno do fundo oceânico, a velocidade vertical na superfície livre é zero (*no-leak condition*).

Em $z = \eta$:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \right) \quad (2.42)$$

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (2.43)$$

Uma vez que admite-se que a amplitude das ondas é pequena em relação ao seu comprimento, pode-se dizer que a derivada da elevação da superfície é próxima de zero, Figura 2.6.

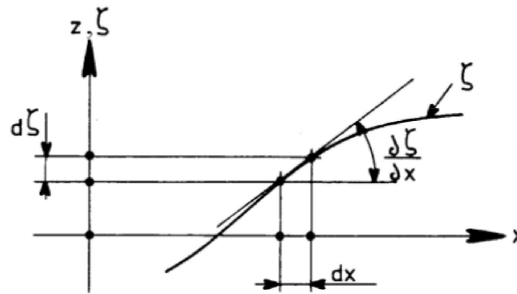


Figura 2.6: Condição de Contorno Cinemática da Superfície livre. Fonte:[14]

Assim como na Equação 2.29, a expansão através da série de Taylor permite reescrever a equação como:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{em } z=0 \quad (2.44)$$

Derivando a equação da condição dinâmica da superfície livre com relação ao tempo,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{para } z=0 \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{em } z=0 \quad (2.46)$$

Reunindo as Equações 2.44 e 2.46 obtem-se a Equação 2.47, conhecida como *Cauchy-Poisson Condition*.

$$\frac{dz}{dt} + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.47)$$

2.2 Relação de Dispersão de Onda

Susbtituindo a Equação do potencial de velocidades descrita em 2.40 na condição de Cauchy-Poisson, Equação 2.47, encontramos a Equação 2.48 conhecida como relação de dispersão de onda.

$$\omega^2 = kg \tanh(kh) \quad (2.48)$$

Esta equação é importante para a teoria linear por estabelecer uma única relação entre frequência (ω), número de onda (k) e profundidade local (h). Logo, conhecendo-se duas dessas variáveis a terceira estará unicamente definida através dessa relação.

Utilizando a velocidade de fase definida em 2.2 na equação 2.48 obtem-se:

$$C = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T} \quad (2.49)$$

$$C^2 k^2 = kg \tanh(kh) \quad (2.50)$$

$$C^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) \quad \text{lembrando que } k = \frac{2\pi}{L} \quad (2.51)$$

Através da relação de dispersão de onda é possível perceber que:

- Para águas profundas ou pequenos comprimentos de onda:

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} \tanh(kh) = 1 \quad (2.52)$$

$$C^2 = \frac{g}{k} = \frac{gL}{2\pi} \quad (2.53)$$

$$\omega = \sqrt{gk} \quad (2.54)$$

- Em águas rasas ou ondas longas:

$$\tanh(kh) \approx kh \quad \text{quando } kh \approx 0 \quad (2.55)$$

$$C^2 = gh \quad (2.56)$$

$$\omega = k\sqrt{gh} \quad (2.57)$$

Em águas profundas a velocidade de fase depende do número de onda k , este por sua vez é inversamente proporcional ao comprimento de onda, com isso conclui-se que ondas mais longas “[...]se propagam mais rapidamente do que ondas mais curtas, havendo, portanto, dispersão.” [15]. Em águas rasas a velocidade de propagação independe dos parâmetros da onda sendo função apenas da profundidade local. A partir disto podemos concluir que:

- Em águas profundas ondas com diferentes características se propagam com diferentes velocidades, o que caracteriza a dispersão.
- Em águas rasas, ondas com diferentes características se propagam com a mesma velocidade sendo que a velocidade é função apenas da profundidade, isso caracteriza a perda do caráter dispersivo.

O fato de haver dispersão em águas profundas é que torna possível a decomposição de um estado de mar composto por ondas irregulares em uma sobreposição de ondas regulares mais simples, Figura 2.7. Segundo [15], “[...] o estado aparentemente caótico da superfície do mar pode ser entendido como uma sobreposição de um número infinito de trens de ondas senoidais simples com diferentes características [...]”.

2.3 Trajetória de Partículas

A partir da definição de uma função que expresse o potencial de velocidade em qualquer ponto do domínio é possível a partir da derivação deste campo encontrar as velocidades, acelerações e deslocamentos que definem a trajetória das partículas.

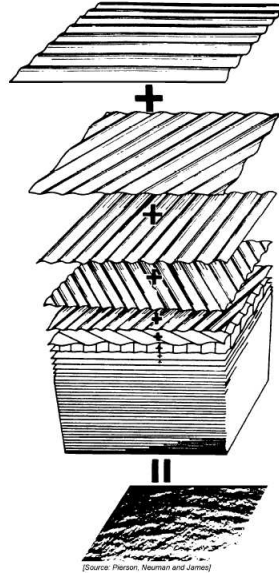


Figura 2.7: Decomposição de ondas irregulares a partir da dispersão. [35]

Velocidades e Acelerações

A derivada da função potencial com relação ao espaço fornece um campo vetorial de velocidades das partículas \vec{V} , onde u e w representam as componentes horizontal e vertical respectivamente.

$$\vec{V} = f(u, w) \quad (2.58)$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{dx}{dt} = \zeta_a \cdot \frac{kg}{\omega} \cdot \frac{\cosh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cdot \cos(kx - \omega t) \quad (2.59)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{dz}{dt} = \zeta_a \cdot \frac{kg}{\omega} \cdot \frac{\sinh(k(h+z))}{\cosh(kh)} \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (2.60)$$

Onde ζ_a é a amplitude da onda. A partir da relação de dispersão de onda temos que:

$$kg = \frac{\omega^2}{\tanh(kh)} \quad (2.61)$$

Substituindo 2.61 em 2.59 e 2.60 chegamos a:

$$u = \zeta_a \omega \frac{\cosh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t) \quad (2.62)$$

$$w = \zeta_a \omega \frac{\sinh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad (2.63)$$

$$(2.64)$$

O campo vetorial \vec{V} definido pelas componentes u e w está mostrado na Figura 2.8 abaixo.

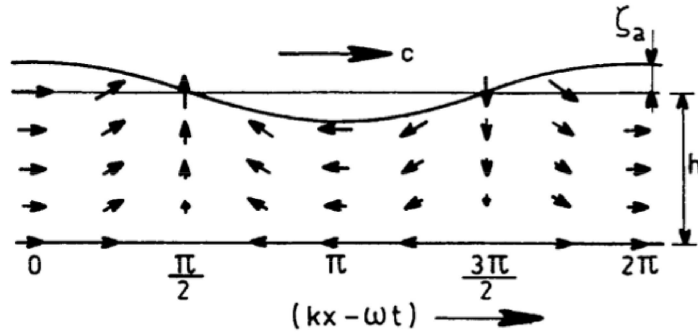


Figura 2.8: Campo vetorial de velocidades. Fonte: [14]

De forma equivalente, e por definição, obtêm-se as acelerações das partículas do fluido derivando as componentes do campo velocidade com relação ao tempo.

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \zeta_a \cdot \omega^2 \cdot \frac{\cosh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (2.65)$$

$$\dot{w} = \frac{dw}{dt} = -\zeta_a \cdot \omega^2 \cdot \frac{\sinh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \cdot \sin(kx - \omega t) \quad (2.66)$$

Nas equações que descrevem a cinemática das partículas nota-se um primeiro termo que representa a magnitude das ondas, um segundo termo que descreve a variação exponencial em função da profundidade e um terceiro termo cíclico responsável por descrever a variação temporal das ondas.

Deslocamentos das Partículas

Por definição a integral da velocidade com relação ao tempo fornecerá os deslocamentos das partículas em relação à sua posição inicial (x_1, z_1) .

$$x = \int u dt = -\zeta_a \cdot \frac{\cosh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \cdot \sin(kx_1 - \omega t) + C_1 \quad (2.67)$$

$$z = \int w dt = \zeta_a \cdot \frac{\sinh(k(h+z))}{\sinh(kh)} \cdot \cos(kx_1 - \omega t) + C_2 \quad (2.68)$$

$$(2.69)$$

Segundo [14], A partícula de água irá realizar uma oscilação nas direções x e z sobre o ponto (C_1, C_2) . Este ponto dificilmente se desviará da posição de repouso, dessa forma:

$$C_1 \approx x_1; \quad C_2 \approx z_1 \quad (2.70)$$

Ao eliminarmos os termos C_1 e C_2 da equação, vê-se que as partículas descrevem órbitas fechadas e elípticas, Equação 2.71. Isso põe em evidência o fato de que a teoria linear de Airy não considera o transporte de massa.

$$\frac{(x - x_1)^2}{\left(\zeta_a \cdot \frac{\cosh(k(h + z_1))}{\sinh(kh)}\right)^2} + \frac{(z - z_1)^2}{\left(\zeta_a \cdot \frac{\sinh(k(h + z_1))}{\sinh(kh)}\right)^2} = 1 \quad (2.71)$$

O aspecto assintótico das equações hiperbólicas torna a excentricidade das trajetórias maior a medida que se diminui a profundidade. Logo, quanto maior a profundidade mais próxima de descrever uma trajetória circular a partícula estará, Figura 2.9.

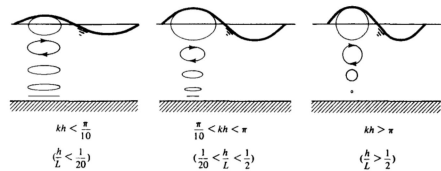


Figura 2.9: Trajetória de partículas em diferentes profundidades relativas. Fonte: [6]

3 Teoria de Stokes de Segunda Ordem

A partir da consideração do potencial de velocidade foi possível obter a equação linearizada de uma onda se propagando em um fluido ideal. Contudo, a teoria linear está restrita a ondas de pequenas amplitudes. Por isso é necessário adotar equações não lineares para obter uma descrição mais realista de ondas com grandes amplitudes [27].

A teoria proposta por Stokes apresenta uma expansão de todas as variáveis em uma série de potências da amplitude ζ . Para isso, Stokes utiliza um método de perturbação para solucionar a equação governante:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.1)$$

sendo:

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots + \epsilon^n \phi_n \quad (3.2)$$

Onde, ϕ é o campo escalar potencial de velocidades, e ϵ é um parâmetro de perturbação. Segundo [25], “A teoria de perturbação é uma coleção de métodos iterativos para a obtenção de soluções aproximadas de problemas que envolvem um pequeno parâmetro, $\epsilon \ll 1$, também chamado de parâmetro de perturbação. De modo genérico a teoria de perturbação realiza uma decomposição de um problema em um número infinito de problemas relativamente mais fáceis de se obter a solução. As potencialidades dessa teoria residem no fato de que, em geral, os primeiros termos das séries de solução, são suficientes para revelar características importantes da solução de um problema”.

O primeiro termo da série representa o termo linear da teoria de onda de Airy, e cada termo de ordem superior representa uma correção dos termos anteriores. A elevação da superfície em águas profundas dada pela expansão da série fornece:

$$\eta = a_1 \cos(\theta) + \frac{1}{2} k a_2^2 \cos(2\theta) + \frac{3}{8} k^2 a_3^3 \cos(3\theta) + \dots \quad (3.3)$$

sendo:

$$\theta = (kx - \omega t) \quad k = \frac{2\pi}{L} \quad (3.4)$$

Onde, ω e L representam a frequência e comprimento da onda respectivamente. A teoria de segunda ordem considera a contribuição até o segundo termo da série. A elevação da superfície para a teoria de segunda ordem é dada por:

$$\eta(x, t) = \frac{H}{2} \cos(\theta) + k \frac{H^2}{16} \cdot \frac{\cosh(kh)}{\sinh^3(kh)} (2 + \cosh(2kh)) \cdot \cos(2\theta) \quad (3.5)$$

Sendo, h é a profundidade local. As velocidades horizontal u e vertical w do campo de velocidades $V(x, z)$ são dadas por:

$$V_x = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \cdot \cos(\theta) + \frac{3(\pi H)^2}{4TL} \cdot \frac{\cosh[2k(z+h)]}{\sinh^4(kh)} \cdot \cos(2\theta) \quad (3.6)$$

$$V_z = \frac{\pi H}{T} \cdot \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \cdot \cos(\theta) + \frac{3(\pi H)^2}{4TL} \cdot \frac{\sinh[2k(z+h)]}{\sinh^4(kh)} \cdot \sin(2\theta) \quad (3.7)$$

As acelerações nas direções x são mostradas abaixo:

$$a_x = \frac{2\pi^2 H}{T^2} \cdot \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \cdot \sin(\theta) + \frac{3\pi^3 H^2}{T^2 L} \cdot \frac{\cosh[2k(z+h)]}{\sinh^4(kh)} \cdot \sin(2\theta) \quad (3.8)$$

$$a_z = \frac{-2\pi^2 H}{T^2} \cdot \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \cdot \cos(\theta) - \frac{3\pi^3 H^2}{T^2 L} \cdot \frac{\sinh[2k(z+h)]}{\sinh^4(kh)} \cdot \cos(2\theta) \quad (3.9)$$

As ondas não lineares de Stokes, Figura 3.1 são a sobreposição da onda linear de Airy η_1 com um termo de segunda ordem η_2 . O resultado dessa superposição gera ondas com cristas mais nítidas e vales mais planos que as ondas lineares [27].

A velocidade de fase das ondas (c) quando em águas profundas é dada pela equação 3.10. A relação de dispersão para ondas não lineares se propagando em águas profundas mostra que a velocidade de fase das ondas a partir do segundo termo da expansão depende da amplitude A . Logo, tendo um mesmo comprimento de onda, ondas com grandes amplitudes deslocam-se mais rapidamente que ondas de pequenas amplitudes. A dependência entre a velocidade de fase e a amplitude das ondas é uma característica da não-linearidade [27].

$$c^2 = \frac{g}{k} (1 + k^2 A^2) + \dots \quad (3.10)$$

A não-linearidade das ondas se torna importante em águas rasas onde a relação entre a amplitude da onda e a profundidade local (H/h) é pequena e também em ondas

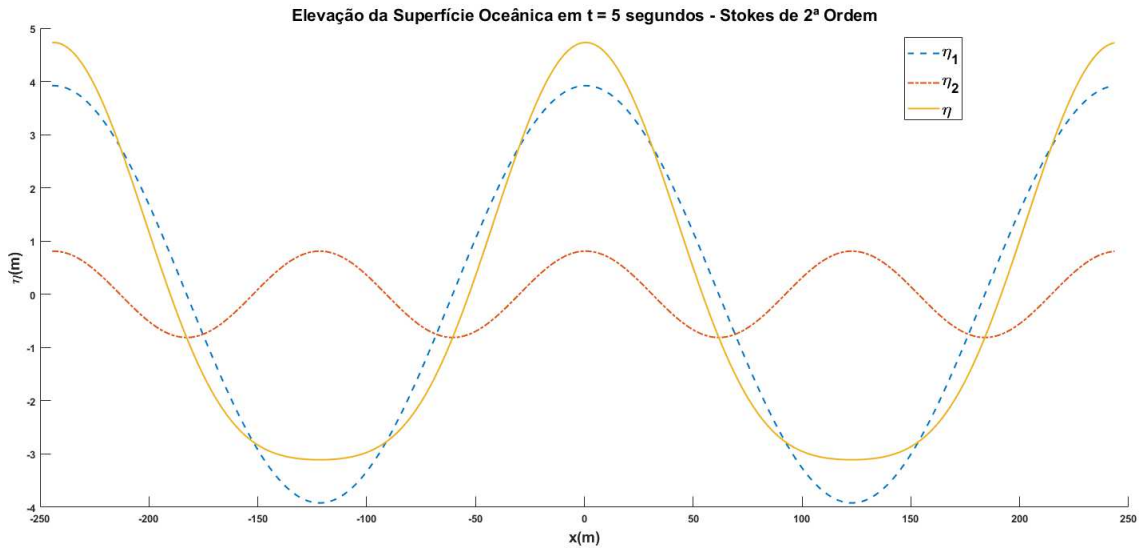


Figura 3.1: Elevação da superfície - Stokes de 2ª Ordem.

que possuem grandes inclinações¹, figura 3.2.

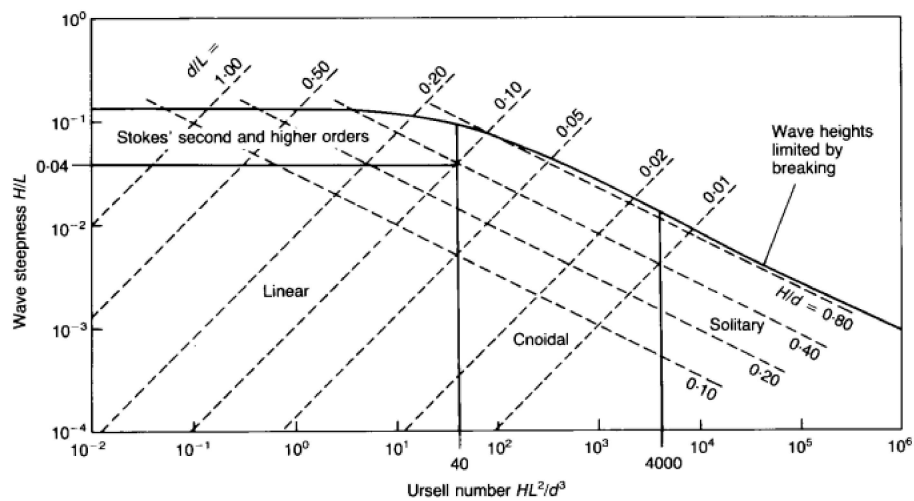


Figura 3.2: Regiões de validade das teorias analíticas de onda. [10]

A teoria de Stokes admite o transporte de massa, sendo assim, as partículas descrevem órbitas não fechadas, Figura 3.4. Na Figura 3.3 são mostrados os deslocamentos de uma partícula no fluido. As linhas preenchidas representam o “caminho” percorrido pela partícula a partir da teoria de Stokes de segunda ordem enquanto as linhas tracejadas mostram os deslocamentos com base na teoria linear. As ondas modeladas pela teoria de

¹ wave steepness - $\frac{H}{L}$

pequenas amplitudes oscilam em órbitas fechadas em torno de um ponto de equilíbrio (x_0, z_0) . Segundo a teoria de Stokes, a trajetória das partículas descrevem uma “rede” de deslocamentos [30].

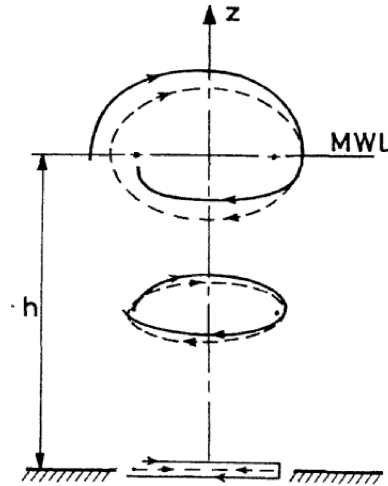


Figura 3.3: Trajetórias de partículas. [30].

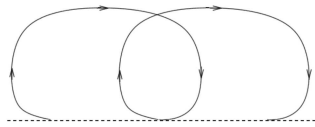


Figura 3.4: Trajetórias de partículas próximas ao fundo oceânico. [4]

4 Equação de Morison

Nas plataformas fixas, a força exercida pelas ondas e pelo vento são os fatores de maior contribuição no cômputo das forças atuantes.

A equação de Morison é o fundamento utilizado para o cálculo do carregamento imposto pelas ondas sobre um membro isolado da estrutura. Em sua formulação Morison não considera a interação fluido-estrutura. O escoamento do fluido, independente de sua natureza, é avaliado apenas como uma força externa atuante sobre a estrutura.

Em 1950 [17] propuseram de forma semi-empírica uma equação para a estimativa da força exercida por ondas superficiais em um cilindro perpendicular à direção do fluxo. Segundo Morison a força resultante é dada pela soma de duas componentes: uma componente inercial e uma de arrasto. A força inercial é proporcional a componente horizontal da aceleração exercida sobre a massa de água deslocada pelo pilar. O segundo termo é denominado Força de Arrasto e é proporcional, em intensidade, ao quadrado da velocidade. Equação 4.1.

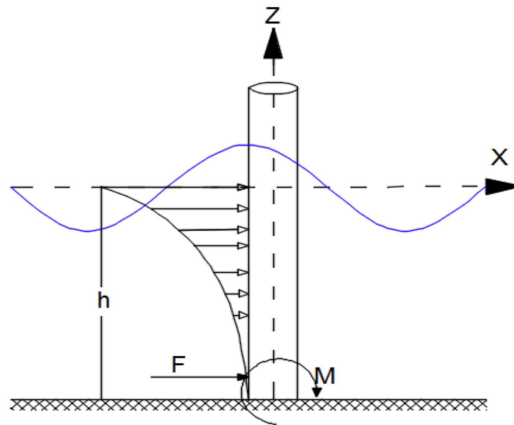


Figura 4.1: Força em cilindro perpendicular à direção de fluxo

$$F = C_m \left(\rho \cdot \frac{\pi D^2}{4} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + C_d \cdot \rho \frac{D}{2} u \cdot |u| \quad (4.1)$$

onde:

C_m - Coeficiente de inércia.

C_d - Coeficiente de arrasto.

ρ - Densidade da água.

D - Diâmetro do pilar (ou tubo).

u - Velocidade horizontal das partículas do do fluido em um ponto

$\frac{\partial u}{\partial t}$ - aceleração.

O modelo proposto por Morison considera que as dimensões do cilindro não influenciam significativamente nas características da onda incidente e por isso a presença da estrutura não é considerada no cálculo da cinemática das partículas do fluido. Essa consideração limita a aplicação da equação de Morison a cilindros cuja relação entre o diâmetro D e o comprimento da onda L é inferior a 0,2.

Os coeficientes de arrasto C_d , e de inércia C_m são obtidos a partir de análises experimentais. A tabela 4, retirada da norma API-RP-2A, apresenta valores recomendados para os coeficientes de arrasto e inércia segundo a rugosidade da superfície. A determinação da velocidade e aceleração das partículas do fluido é feita com base nos resultados obtidos a partir da escolha de uma teoria de onda.

Superfície	C_d	C_m
Lisa	0.65	1.6
Rugosa	1.05	1.2

Tabela 4.1: Coeficientes de Arrasto e Inércia

5 Método dos Elementos Finitos

5.1 Modelo de Viga de Euler-Bernoulli

O modelo de Viga de Euler-Bernoulli é uma simplificação da teoria da elasticidade linear que permite determinar o comportamento de elementos de vigas sob flexão. Este modelo, conhecido como modelo clássico, segundo [11], admite as seguintes proposições:

1. O formato da viga é um prisma reto, cujo comprimento é muito maior que as outras dimensões.
2. O Coeficiente de Poisson é negligenciável.
3. A seção transversal é simétrica em relação ao plano vertical, de forma que a linha neutra está contida nele.
4. Planos perpendiculares à linha neutra permanecem planos e perpendiculares depois da deformação.
5. O ângulo de rotação é muito pequeno.
6. O efeitos de momento de inércia de rotação é desprezado
7. A energia envolvida no cisalhamento é desprezada.
8. A viga é constituída de material homogêneo com densidade ρ .

A equação diferencial parcial que descreve o comportamento dinâmico de uma viga sob flexão de acordo com esse modelo é dada por:

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) = q(x, t) \quad (5.1)$$

Onde:

$v \rightarrow$ deslocamento transversal da viga;

$\rho \rightarrow$ densidade do material que compõe a viga;

$EI \rightarrow$ Módulo de Elasticidade e Momento de Inércia da viga (rigidez);

$q(x, t) \rightarrow$ Carregamento externo;

$t, x \rightarrow$ tempo e espaço.

O deslocamento dos pontos ao longo da viga é dado por uma equação diferencial parcial de quarta ordem, logo, a solução desta equação é uma função $v(x, t)$ que fornece o deslocamento para cada ponto de coordenada x no tempo t . Este tipo de avaliação é chamada de Análise Dinâmica da Estrutura, o qual se diferencia da análise estática justamente por estudar o comportamento da estrutura ao longo do tempo.

5.2 Formulação Variacional do Problema

O Método do Elementos Finitos é um método numérico para solução de equações diferenciais que na busca pela solução se utiliza de um problema equivalente ao original, chamado de Formulação Fraca do problema. Mais detalhes podem ser obtidos em [22].

A forma Fraca do problema original é obtida:

- Definindo um espaço de funções $V = \{v : v \text{ é função contínua em } [0, 1], \frac{\partial v}{\partial x} \text{ é limitada e contínua por partes } v(0) = v(1) = 0\}$;
- Multiplicando a equação do problema original por uma função qualquer de V e integrando a equação em um domínio Ω .

$$\int_0^L \left[\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dx + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) - q(x, t) \right] w dx = 0 \quad (5.2)$$

Integrando por partes o termo diferencial de quarta ordem temos que:

$$\int \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) w dx = w EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \Big|_0^L - \int_0^L EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \frac{\partial w}{\partial x} dx \quad (5.3)$$

Integrando novamente por partes temos que:

$$\int_0^L EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \frac{\partial w}{\partial x} dx = \frac{\partial w}{\partial x} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_0^L - \int_0^L EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (5.4)$$

Da engenharia estrutural sabe-se que $EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = V$, onde V representa o esforço cortante. De forma semelhante podemos dizer que $EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = M$, onde M é o momento fletor atuante na viga.

Substituindo as equações 5.4 e 5.3 em 5.2 chegamos a forma fraca do problema:

$$\rho \int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} w dx + \left(Vw - M \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_0^L + EI \int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \int_0^L q(x, t) w dx = 0 \quad (5.5)$$

5.3 Aproximação Via Método dos Elementos Finitos

A aproximação através do Método dos Elementos Finitos fornece o problema discretizado que consiste em encontrar vh com w_h qualquer tal que:

$$\rho \int_0^L \frac{\partial^2 v_h}{\partial t^2} w_h dx + Vw_h - M \frac{\partial w_h}{\partial x} + EI \int_0^L \frac{\partial^2 v_h}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_h}{\partial x^2} dx - \int_0^L q(x, t) w_h dx = 0 \quad \forall v_h \in V_{h,0} \quad (5.6)$$

Onde $V_{h,0}$ é um subespaço de V de dimensão finita de funções contínuas no intervalo $[0, 1]$.

O elemento de viga possui quatro graus de liberdade, dois relacionados a translação, v_1 e v_2 , dois relacionados a rotação θ_1 e θ_2 , conforme mostrado na figura 5.1.

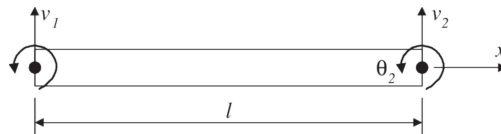


Figura 5.1: Elemento de Viga

As translações e rotações na viga de Euler-Bernoulli se relacionam através da seguinte equação diferencial:

$$\theta(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} \quad (5.7)$$

Para aproximar as deflexões nodais do elemento são utilizadas funções de interpolação no domínio do espaço. Estas por sua vez são chamadas funções de forma e para o problema em estudo elas são de terceira ordem, e por isso, podem ser escritas como:

$$v(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (5.8)$$

Da consideração feita anteriormente em 5.7 temos que:

$$\theta(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 \quad (5.9)$$

Avaliando os deslocamentos (v) e as rotações (θ) nodais do elemento temos:

$$\begin{aligned} v(0) &= c_0 = v_1 \\ \theta(0) &= c_1 = \theta_1 \\ v(l) &= c_0 + c_1l + c_2l^2 + c_3l^3 = v_2 \\ \theta(l) &= c_1 + 2c_2l + 3c_3l^2 = \theta_2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ao determinarmos os coeficientes c_i em termos das variáveis nodais v_i e θ_i na equação 5.10 encontramos o polinômio utilizado para aproximação.

$$v(x) = H_1(x)v_1 + H_2(x)\theta_1 + H_3(x)v_2 + H_4(x)\theta_2 \quad (5.11)$$

Onde as H_i funções são chamadas Polinômios de Hermite e são dadas por:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \\ H_2(x) &= x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \\ H_3(x) &= \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \\ H_4(x) &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{aligned}$$

A partir da aplicação do polinômio interpolador dado em 5.11 ao quarto termo da equação 5.6 obtem-se a matriz de rigidez do elemento.

$$[K^e] = \int_0^l [B]^T EI [B] dx \quad (5.12)$$

onde:

$$[B] = \{H_1'' \ H_2'' \ H_3'' \ H_4''\} \quad (5.13)$$

Considerando que o termo de rigidez da viga é constante, a matriz de rigidez do elemento se torna:

$$[K^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

O quinto termo da equação 5.6 fornece o vetor de forças sobre o elemento. Este, por sua vez, é escrito conforme a natureza do carregamento atuante. Para um carregamento qualquer distribuído sobre o elemento, o vetor de força é:

$$\{F^e\} = \int_0^l q(x) \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} dx \quad (5.15)$$

Quando temos um carregamento uniformemente distribuído sobre o elemento de intensidade q_0 , o vetor de forças se torna:

$$\{F^e\} = \int_0^l q_0 \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{bmatrix} dx = \frac{q_0}{12} \begin{bmatrix} 6l \\ l^2 \\ 6l \\ -l^2 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Para análise dinâmica as forças inerciais, representadas pelo primeiro termo da equação 5.6, deverão ser consideradas. Além disto, as deflexões transversais da estruturas variam em função da posição x e do instante de tempo considerado t . Sendo assim a função de interpolação da deflexão no elemento de viga assume a forma:

$$v(x, t) = H_1(x)v_1(t) + H_2(x)\theta_1(t) + H_3(x)v_2(t) + H_4(x)\theta_2(t) \quad (5.17)$$

Desta forma, as funções de forma H_i realizam a interpolação da deflexão no

domínio do espaço enquanto as variáveis nodais v_i representam sua variação no tempo.

O primeiro termo de 5.6 se torna:

$$\int_0^l \rho [H]^T [H] dx \{ \ddot{d}^e \} \quad (5.18)$$

onde:

$$[H] = [H_1 \ H_2 \ H_3 \ H_4] \quad (5.19)$$

Da Equação 5.18 temos que a matriz de massa do elemento é dada por:

$$\begin{aligned} [M^e] &= \int_0^l \rho A [H]^T [H] dx \\ &= \frac{\rho A l}{420} \cdot \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.20)$$

A matriz mostrada em 5.20 é chamada matriz de massa consistente. É possível observar que nesta matriz a massa do elemento influencia nos graus de liberdade translacionais e rotacionais. A soma dos elementos da matriz de massa que estão associados apenas aos deslocamentos nodais (translações) fornece a massa total do elemento, Equação 5.21.

$$M(1,1) + M(1,3) + M(3,1) + M(3,3) = \rho A L \quad (5.21)$$

Em dinâmica estrutural a matriz de massa frequentemente pode ser escrita como sendo uma matriz diagonal. A necessidade de inversão desta matriz torna esta aproximação mais vantajosa em virtude do menor custo computacional.

Nas matrizes diagonais de massa considera-se que metade da massa do elemento está concentrada em cada grau de liberdade associado a translação, Figura 5.2. Partindo desta consideração, a matriz de massa assume a forma mostrada em 5.22. A esta matriz

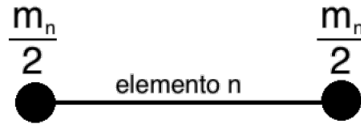


Figura 5.2: Massa discreta em elemento de viga. Fonte:[2]

chamamos matriz de massa discreta, ou matriz de massa agrupada.

$$[M^e] = \frac{\rho Al}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Desta forma a aproximação via Método dos Elementos Finitos para problemas dinâmicos é:

$$[M]\{\ddot{d}\} + [K]\{d\} = \{F(t)\} \quad (5.23)$$

5.4 Elemento de Pórtico Plano

Um pórtico, ou quadro, é um elemento estrutural plano ou tridimensional composto por vigas e pliares conectados entre si. Pórticos planos geralmente estão submetidos a esforços axiais e fletores, conseqüentemente, estes deverão apresentar deslocamentos axiais, transversais e rotacionais.

Considerando o estado de pequenas deformações é possível admitir que a matriz de rigidez de um pórtico é dado pela sobreposição das matrizes de rigidez dos elementos do tipo treliça e viga. Um elemento de treliça, admite apenas deformações axiais, sua rigidez é representada pela matriz dada em 5.24:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Sendo assim, a matriz de rigidez do elemento mostrado na Figura 5.3 é dado superposição das matrizes 5.14 e 5.24.

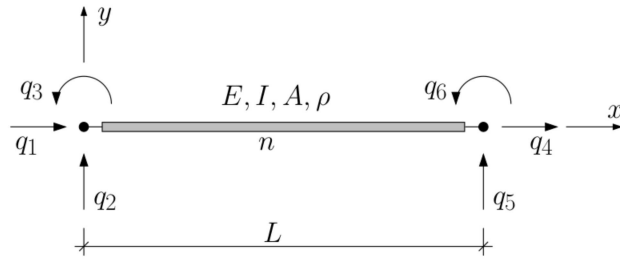


Figura 5.3: Elemento do tipo pórtico plano. [8]

$$[K^e] = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} Al^2 & 0 & 0 & -Al^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12I & 6Il & 0 & -12I & 6Il \\ 0 & 6Il & 4Il^2 & 0 & -6Il & 2Il^2 \\ -Al^2 & 0 & 0 & Al^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12I & -6Il & 0 & 12I & -6Il \\ 0 & 6Il & 2Il^2 & 0 & -6Il & 4Il^2 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

De forma semelhante a matriz de massa global do elemento pode ser obtida a partir da sobreposição das matrizes globais de massa dos elementos de treliça e viga.

Na análise estática da estrutura o termo transiente da equação é desprezado e a matriz de rigidez juntamente com o vetor de carga resultam em um sistema de equações dado por:

$$[K]\{d\} = \{F\} \quad (5.26)$$

Onde $[K]$ é a matriz de rigidez global da estrutura, $\{d\}$ é um vetor de deslocamentos dos graus de liberdade da estrutura e $\{F\}$ é o vetor global de forças atuantes.

Contudo, a análise das deflexões na estrutura considerando uma excitação dinâmica demanda um esquema de integração no tempo para obter a solução da Equação 5.27 denominada equação de equilíbrio dinâmico.

$$[M]\{\ddot{d}\}^t + [C]\{\dot{d}\}^t + [K]\{d\}^t = \{F\}^t \quad (5.27)$$

O fenômeno do amortecimento pode ser expresso a partir da Matriz de amortecimento de Rayleigh no sistema de coordenadas modais. Esta é proporcional a taxa de

amortecimento (ξ) e a matriz de massa modal M_{modal} .

$$[C_{modal}] = 2\xi\omega[M_{modal}] \quad (5.28)$$

Existem diversos métodos numéricos para solução do problema de marcha no tempo. Dentre eles podemos destacar o método de Euler explícito e o Método de Integração Implícita de Newmark, este último foi o utilizado no presente trabalho.

5.5 Método de Newmark

O método de Newmark [19], é um método numérico para solução de equações diferenciais. Este método frequentemente é utilizado para integração numérica no domínio do tempo em problemas dinâmicos. O esquema de integração possui a seguinte forma geral:

$$\dot{u}(t + \Delta t) = \dot{u}(t) + (1 - \gamma)\ddot{u}(\Delta t) + \gamma\ddot{u}(t + \Delta t)\Delta t \quad (5.29)$$

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t)\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{u}(t)\Delta t^2 + \beta\ddot{u}(t + \Delta t)\Delta t^2 \quad (5.30)$$

Esse par de equações é utilizado iterativamente para calcular o deslocamento nos graus de liberdade para cada passo de tempo. As variáveis u, \dot{u}, \ddot{u} representam respectivamente o deslocamento, a velocidade e a aceleração. γ e β são parâmetros que conforme a escolha conduzem a diferentes métodos. Baseado em seus estudos, Newmark chegou as seguintes conclusões [1]:

- Se $\gamma \neq \frac{1}{2}$, a integração irá introduzir um amortecimento espúrio no sistema.
- Se $\gamma = 0$, obtem-se um amortecimento negativo, isto induz uma auto-excitação no sistema em função do procedimento de integração.
- Se $\gamma > 1$, obtêm-se um amortecimento positivo que irá reduzir a resposta do sistema.

Newmark mostrou que $\gamma = 0,5$ é um valor razoável para sua regra de integração. O parâmetro β geralmente é escolhido dentro de um intervalo de 0 a $\frac{1}{2}$. Um valor tipicamente adotado é $\beta = \frac{1}{4}$. A tabela 5.5 adaptada pelo autor de [31] mostra a relação entre as constantes e o método desenvolvido.

γ	β	Método de integração	Estabilidade	Resolução
1/2	1/4	Aceleração média	Incondicionalmente estável	Implícito
1/2	1/6	Aceleração Linear	Condicionalmente estável	Implícito
1/2	1/12	Fox - Goodwin	Condicionalmente estável	Implícito
1/2	0	Diferenças Centrais	Condicionalmente estável	Explícito

Tabela 5.1: Parâmetros do Método Iterativo de Newmark

Abaixo é apresentado um dos procedimentos utilizados para realizar a integração no tempo da equação de equilíbrio dinâmica utilizando o Método de Newmark [1].

Algoritmo 1: Método Iterativo de Newmark

1 início

2 Inicialização das Variáveis

a. $\ddot{v}(0) = \frac{P(0) - c\dot{v}(0) - cv(0)}{m}$

b. $\bar{k} = k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m$

c. $A = \frac{1}{\beta\Delta t}m + \frac{\gamma}{\beta}c$

d. $B = \frac{1}{2\beta}m + \Delta t(\frac{\gamma}{2\beta} - 1)c$

;

3 Para cada instante i faça

a. $\Delta\bar{P}_i = \Delta P_i + A\dot{v}_i + B\ddot{v}_i$

b. $\Delta v_i = \frac{\Delta\bar{P}_i}{\bar{k}}$

c. $\Delta\dot{v}_i = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta v_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{v}_i + \Delta t(1 - \frac{\gamma}{2\beta})\ddot{v}_i$

d. $\Delta\ddot{v}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta v_i - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{v}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{v}_i$

e. $v_{i+1} = v_i + \Delta v_i, \dot{v}_{i+1} = \dot{v}_i + \Delta\dot{v}_i, \ddot{v}_{i+1} = \ddot{v}_i + \Delta\ddot{v}_i$

;

4 Repita o passo 3, i com $i + 1$ até o passo final;

5 fim

6 Análise Dinâmica de Estruturas

6.1 Conceitos Básicos de Vibração

6.1.1 Vibração

”Qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo é denominado vibração ou oscilação”. [23].

6.1.2 Componentes de um sistema oscilatório

Em geral, um sistema vibratório inclui um meio para armazenar energia potencial (mola ou elasticidade), um meio para armazenar energia cinética (massa ou inércia) e um meio de perda gradual de energia (amortecedor).

A vibração de um sistema envolve a transferência alternada de sua energia potencial para energia cinética e de energia cinética para energia potencial. Se o sistema for amortecido, certa quantidade de energia é dissipada em cada ciclo de vibração e deve ser substituída por uma fonte externa, se for preciso manter um regime permanente de vibração. [23].

6.1.3 Graus de liberdade

São os deslocamentos independentes de um sistema necessários para representar o efeito da força inercial.

6.1.4 Sistemas Contínuos e Discretos

Os sistemas que podem ser descritos através de um número finito de graus de liberdade são chamados sistemas discretos ou de parâmetros concentrados. São exemplos de sistemas discretos, os pêndulos e o sistema massa-mola. Figura 6.1.

Os sistemas que têm um número infinito de graus de liberdade são chamados sis-

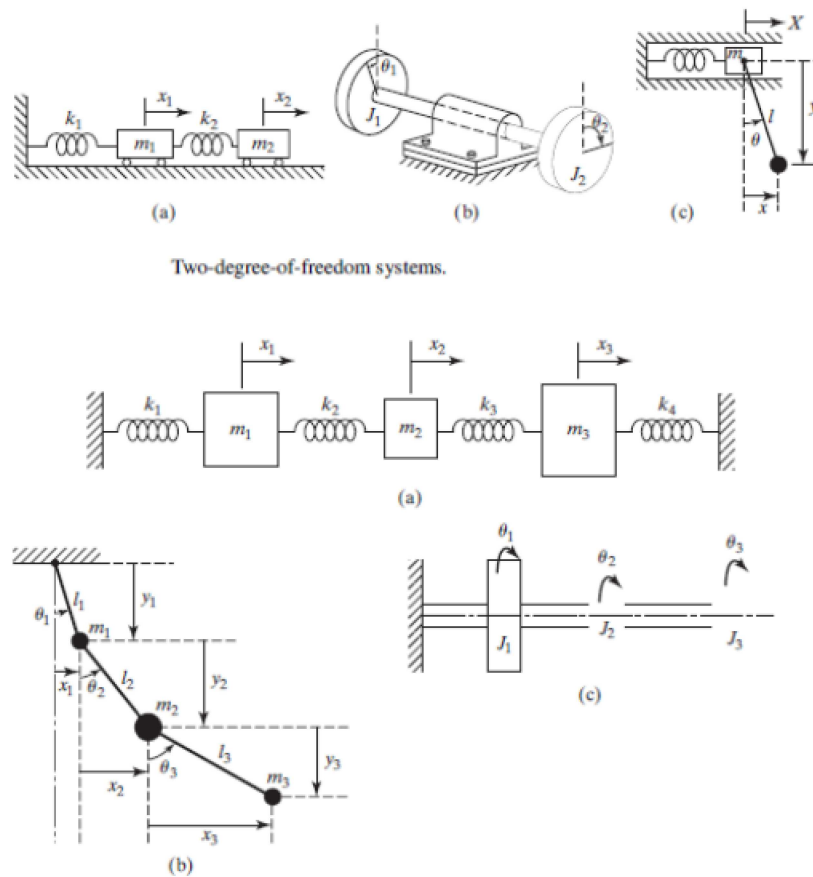


Figura 6.1: Sistemas Discretos com dois e três graus de liberdade.[23]

temas contínuos ou distribuídos. Estes são comumente encontrados em elementos elásticos contínuos como a viga mostrada abaixo, Figura 6.2, nos quais para representarmos sua configuração deformada precisamos de um número infinito de coordenadas, visto que a mesma possui infinitos pontos de massa.

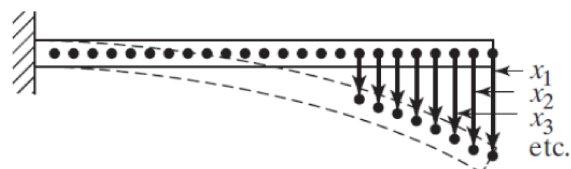


Figura 6.2: Sistema contínuo com infinitos graus de liberdade. [23]

6.2 Classificação de Vibrações

6.2.1 Vibração Livre e Forçada

Vibração Livre

Uma vibração é dita livre quando, após uma perturbação inicial o sistema continua a oscilar mesmo sem a existência de uma força externa, $f(t)$, atuando sobre a estrutura. Um exemplo de vibração livre é a oscilação de um pêndulo simples.

Vibração Forçada

Se um sistema está sujeito à ação de uma força externa f , periódica ou não, a vibração é dita forçada. Quando a frequência da força externa $f(t)$ coincide com a frequência natural da estrutura ocorre o fenômeno da ressonância, onde a estrutura passa a oscilar em amplitudes cada vez maiores em decorrência da amplificação dinâmica gerada por tal fenômeno.

6.2.2 Vibrações amortecidas e não amortecidas

Vibração amortecida

Uma vibração é considerada amortecida se durante a oscilação ocorre à perda gradual de energia do sistema. O amortecimento poderá ocorrer em virtude do atrito ou de outro efeito que gere dissipação da energia.

Vibração não amortecida

Quando no sistema não ocorre nenhuma perda de energia este é dito não amortecido. Em muitos problemas de engenharia, a taxa de amortecimento é tão pequena que a idealização de um sistema real como sendo não amortecido se torna razoável, contudo, a consideração do efeito do amortecimento se torna importante na análise de sistemas próximos de alcançar a ressonância, dada sua influência na frequência natural da estrutura.

6.3 Vibração Linear e não-linear

Segundo [23]: “Se todos os componentes básicos de um sistema vibratório – a mola, a massa e o amortecedor – comportam-se linearmente, a vibração resultante é conhecida como vibração linear. Contudo, se qualquer dos elementos se comportar não linearmente, a vibração é denominada vibração não linear.” A classificação da vibração quanto à linearidade determinará quão mais complexo o problema poderá ser tornar. [23] afirma que, para vibrações lineares o princípio da superposição é válido e as equações diferenciais que governam o comportamento estão bem desenvolvidas, o que não ocorre para vibrações não lineares as quais necessitam técnicas de análise mais elaboradas.

6.4 Vibração Determinística e Vibração Aleatória

Se a variação temporal da força é completamente conhecida, ou seja, é possível conhecer a história completa do carregamento atuante, a excitação é denominada determinística. Consequentemente a vibração resultante também é determinística. Figura 6.3.



Figura 6.3: Excitação Determinística. [23]

Se o comportamento da excitação não é completamente conhecido, ou seja, não é possível prever o valor da força em um dado instante, a excitação é aleatória. Fenômenos aleatórios só poderão ser tratados estatisticamente através de um conjunto de registros que busquem de certa forma, uma regularidade do evento. Constituem exemplos de fenômenos aleatórios: o vento, a ação de ondas marinhas, o movimento do solo durante terremotos etc. Se a excitação é aleatória, Figura 6.4, a resposta da estrutura também será, sendo, portanto denominada resposta à vibração aleatória, e a análise estrutural é realizada de forma probabilística.

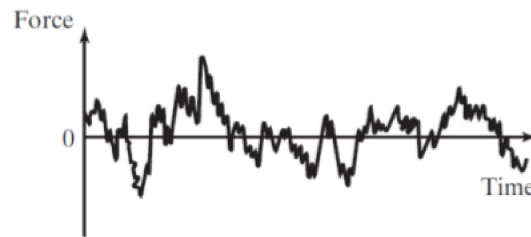


Figura 6.4: Excitação Aleatória. [23]

6.5 Análise Determinística e Análise Dinâmica Aleatória

Segundo [33] :

”[...]fenômenos ambientais como vento e mar apresentam uma componente turbulenta, variável ao longo do tempo, com características randômicas. Uma abordagem para tratar o carregamento devido à ação do mar é a adoção de uma onda regular de altura e períodos definidos, que represente o estado de mar. Este procedimento é o utilizado na análise dinâmica determinística. A outra abordagem é a utilização do espectro de energia das ondas ou função de densidade espectral das elevações da superfície do mar, que fornece a distribuição da variância das ondas elementares em função das frequências e direções de incidência. Esse é o procedimento utilizado na análise dinâmica aleatória.”

No presente trabalho, foi realizada a Análise Dinâmica Determinística, sendo considerado que a onda de projeto, (para um período de recorrência de 100 anos - como recomenda a norma americana API-RP-2A) já é conhecida. A tese de Ana Lucia Fernandes Lima Torres [33] apresenta um exemplo de procedimento para a Análise Dinâmica Aleatória (Random wave analysis).

6.6 Dinâmica Linear - Sistemas com um grau de liberdade

A equação diferencial linear de equilíbrio de um sistema com um grau de liberdade, Figura 6.5, é mostrado na Equação 6.1:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p(t) \quad (6.1)$$

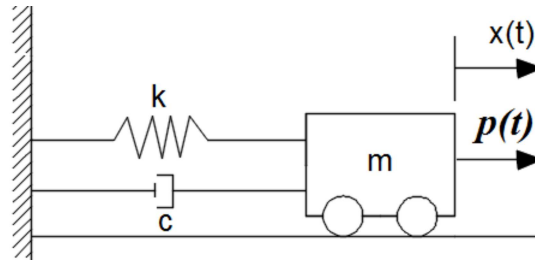


Figura 6.5: Sistema massa mola - Um grau de liberdade.

Nessa equação m representa a massa, c é chamada constante de amortecimento, k é a rigidez da mola, $p(t)$ é uma força externa em função do instante de tempo t . v, \dot{v}, \ddot{v} representam respectivamente o deslocamento, velocidade e aceleração do sistema. Neste modelo o amortecimento é considerado como viscoso (proporcional à velocidade) e a força elástica é proporcional ao deslocamento.

A equação 6.1 descreve um sistema de um grau de liberdade sob vibração forçada e amortecida. O caso mais simples é obtido quando a vibração é livre e não apresenta amortecimento, Equação 6.2.

$$m\ddot{v}(t) + kv(t) = 0 \quad (6.2)$$

A solução de 6.2 é mostrada abaixo, onde x é o deslocamento em um instante de tempo t , ϕ é o autovetor do problema, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência natural não amortecida.

$$v = \phi e^{-i\omega t} \quad (6.3)$$

6.7 Sistema Com Múltiplos Graus de Liberdade

A Equação 6.1 pode ser estendida para um sistema com N graus de liberdade. Esta equação na forma matricial é mostrada na equação abaixo e corresponde ao mesmo problema discretizado via método dos elementos finitos.

$$[M]\{\ddot{v}\} + [C]\{\dot{v}\} + [K]\{v\} = \{F(t)\} \quad (6.4)$$

Para vibrações livres não amortecidas, a equação do movimento é:

$$[M]\{\ddot{v}\} + [K]\{v\} = \{0\} \quad (6.5)$$

A solução de 6.5 tem a forma:

$$\{v(t)\} = \{\phi\}e^{st} \quad (6.6)$$

Onde ϕ é um vetor de n componentes invariáveis com o tempo e s é um número complexo.

Substituindo 6.6 em 6.5,

$$[s^2[M] + [K]]\{\phi\}e^{st} = 0 \quad (6.7)$$

Sabendo que $e^{st} \neq 0$ e substituindo $-s^2$ por λ tem-se:

$$[[K] - \lambda[M]]\{\phi\} = 0 \quad (6.8)$$

Rearranjando 6.8 encontramos um problema de autovalor.

$$[K]\{\phi\} = \lambda[M] \quad (6.9)$$

ϕ e λ são respectivamente os autovetores e autovalores do problema. Para cada grau de liberdade i , o sistema possuirá um autovalor λ_1 correspondente.

A raiz quadrada do autovalor λ_i corresponde à i -ésima frequência natural de vibração da estrutura, enquanto o autovetor ϕ_i é conhecido como o modo de vibração pois apresenta a configuração deformada da estrutura quando ela vibra na frequência i .

7 Simulações e Resultados

7.1 Exemplo 1

A primeira simulação tem objetivo validar os resultados do presente trabalho com base no trabalho de [36], que é um modelo consolidado e amplamente citado no meio. A implementação dos métodos foi realizada através da linguagem de programação *Matlab* ©.

Descrição da Estrutura

A plataforma considerada é similar à mostrada na figura 7.1 e possui seis pernas. A estrutura da jaqueta é composta por membros de aço com módulo de elasticidade longitudinal $E = 210$ GPa e massa específica $\rho = 7730,7$ kg/m³. Todos os elementos estão soldados não permitindo a rotação relativa entre si. O ponto mais elevado da plataforma encontra-se a 97,44 metros. As pernas encontram-se igualmente espaçadas a 45,72 metros de distância uma das outras. O nível médio da superfície do mar no local de instalação é de 76,20 m. As propriedades geométricas dos membros são mostradas na Tabela 7.1 [29].

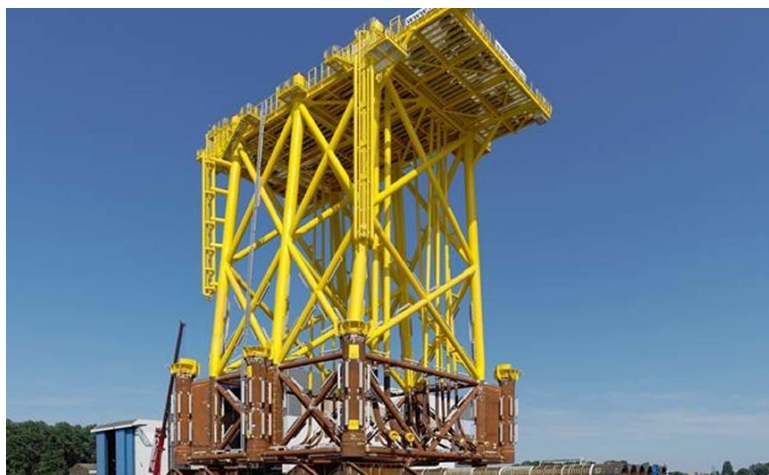


Figura 7.1: Plataforma Fixa. [32]

Modelo Estrutural

O modelo estrutural adotado por [36] para o problema é mostrado na figura 7.2.

Membros	Diâmetro Externo (m)	Diâmetro Interno (m)	Área (m^2)	Momento de Inércia m^4
Verticais	1,22	1,14	0,141	0,02301
Horizontais	0,61	0,59	0,023	0,00096
Diagonais	0,61	0,59	0,023	0,00096

Tabela 7.1: Propriedades Geométricas dos membros

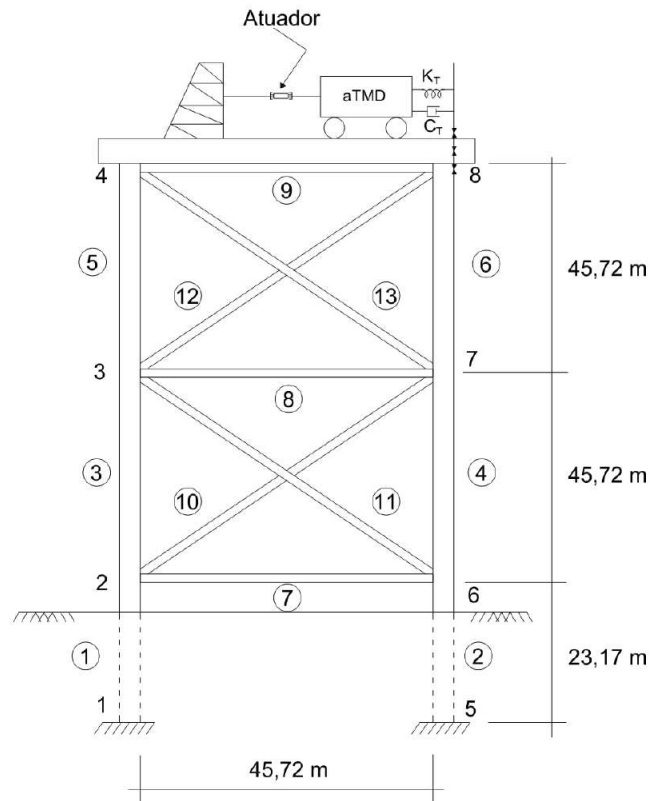


Figura 7.2: Plataforma Fixa. [36] e [29]

No trabalho proposto por [36], não foram encontradas informações que possibilitassem o estudo da interação solo-estrutura. Sendo assim, a vinculação da estrutura ao solo foi realizada a partir das considerações de que os pilares encontram-se completamente engastados na ponta e existe uma rigidez à translação horizontal causada pelo solo no trecho enterrado, Figura 7.3.

Cada membro da estrutura mostrada na Figura 7.3 foi discretizada em 50 elementos do tipo pórtico plano. A malha gerada por essa discretização é mostrada em 7.4. A maior discretização da estrutura no presente trabalho se dá em função da necessidade de aplicação do carregamento hidrodinâmico que é variável em função da profundidade.

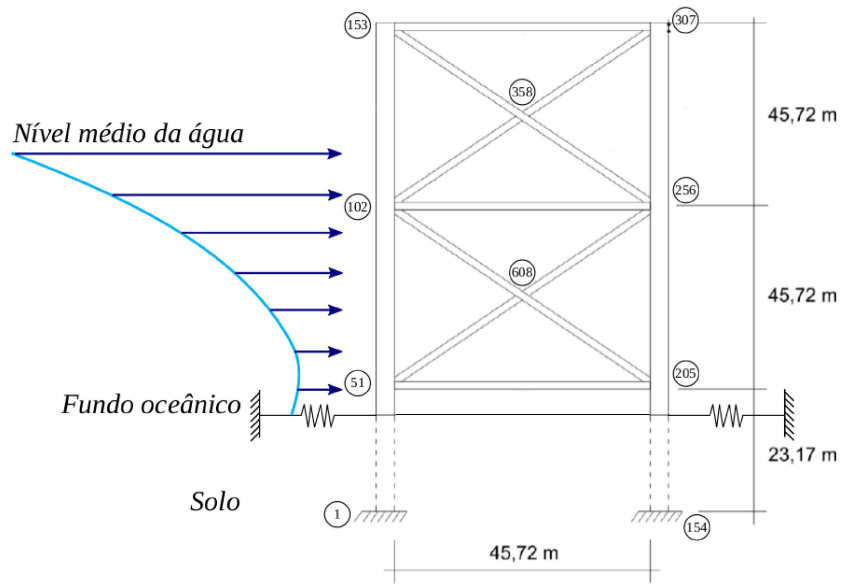


Figura 7.3: Modelo implementado.

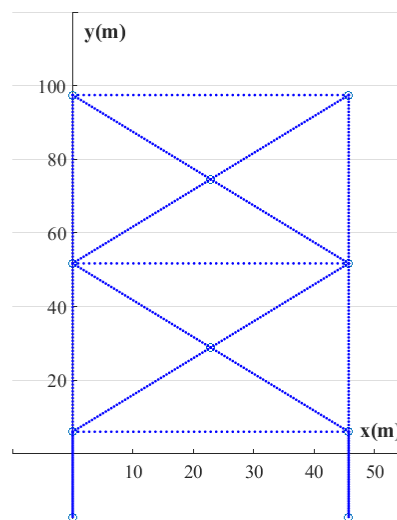
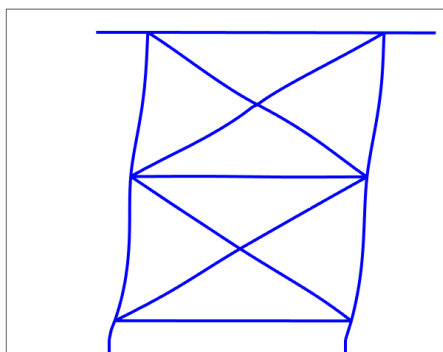


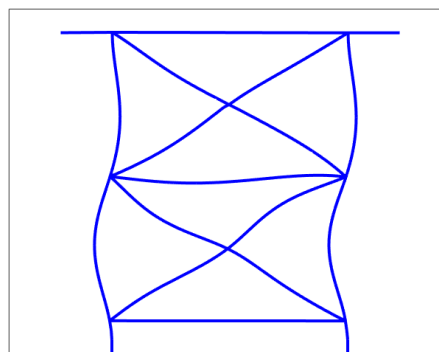
Figura 7.4: Discretização da estrutura em 850 elementos.

Frequências Naturais e Modos de Vibração

As frequências naturais e modos de vibração foram obtidos a partir das matrizes globais de massa e rigidez do pórtico plano modelado com o uso do MEF. A primeira frequência natural associada ao modo de flexão da estrutura (ver figura 7.5) vale 1,822 Hz, enquanto que a segunda frequência vale 10,237 Hz.



(a) 1º modo à flexão $f_1 = 1,822\text{Hz}$



(b) 2º modo à flexão $f_2 = 10,237\text{Hz}$

Figura 7.5: Modos de vibração à flexão.

As frequências e modos de vibração encontrados referem-se à estrutura e a massa dos elementos da superestrutura não são considerados. Esta situação corresponde ao estágio da instalação anterior ao início da operação.

Força Hidrodinâmica

A fim de obter a resposta da estrutura considerou-se as seguintes características para a onda de projeto:

- Altura da onda $H = 12,19\text{ m}$
- Lâmina d'água $h = 76,2\text{ m}$
- comprimento de onda $L = 182,88\text{m}$

Foram simulados duas ações de ondas com as frequências de 0,5573 Hz e 1,80 Hz. A força hidrodinâmica atuante foi calculada a partir das velocidades e acelerações das teorias linear de Airy e de segunda ordem de Stokes. A aplicação da ação é feita

considerando o carregamento hidrodinâmico como uniformemente distribuído ao longo do comprimento de cada elemento.

Para o estado de mar considerado, a relação entre a altura das ondas e a profundidade local é pequena ($H/L = 0,06$ e $\frac{HL^2}{h^3} = 0,92$), e conforme mostrado na figura 3.2, a teoria linear se aplica bem a esta região. O carregamento hidrodinâmico imposto pelas teorias linear e de Stokes é o mesmo. Como pode ser visto na figura 7.6 o perfil de elevações das teorias converge para um mesmo valor.

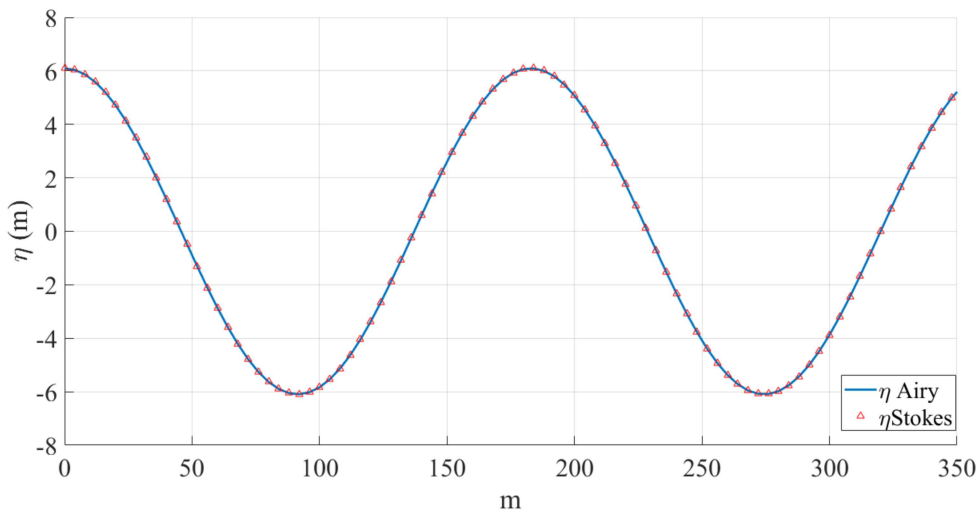


Figura 7.6: Elevação da superfície marinha modelada no exemplo 1.

Resposta Estrutural

Na figura 7.7 está o deslocamento do ponto mais elevado da estrutura no domínio do tempo para uma frequência de onda $f = 0,5573$ Hz e taxa de amortecimento $\xi = 0,01$.

A reação da estrutura a uma excitação de onda com frequência $f = 1,80$ Hz é mostrada em 7.8. Nesta simulação, considerou-se que não há amortecimento e a estrutura encontra-se em um regime de vibrações forçadas não-amortecidas. A proximidade da frequência do carregamento com primeira frequência natural de vibração faz com que os deslocamentos cresçam a um nível que oferece risco a segurança estrutural da plataforma. O padrão de oscilações encontrado descreve claramente o fenômeno do batimento.

Na figura 7.9 está apresentado o deslocamento da estrutura para $f = 1,80$ Hz e taxa de amortecimento $\xi = 0,01$. O amortecimento estrutural se mostra um importante

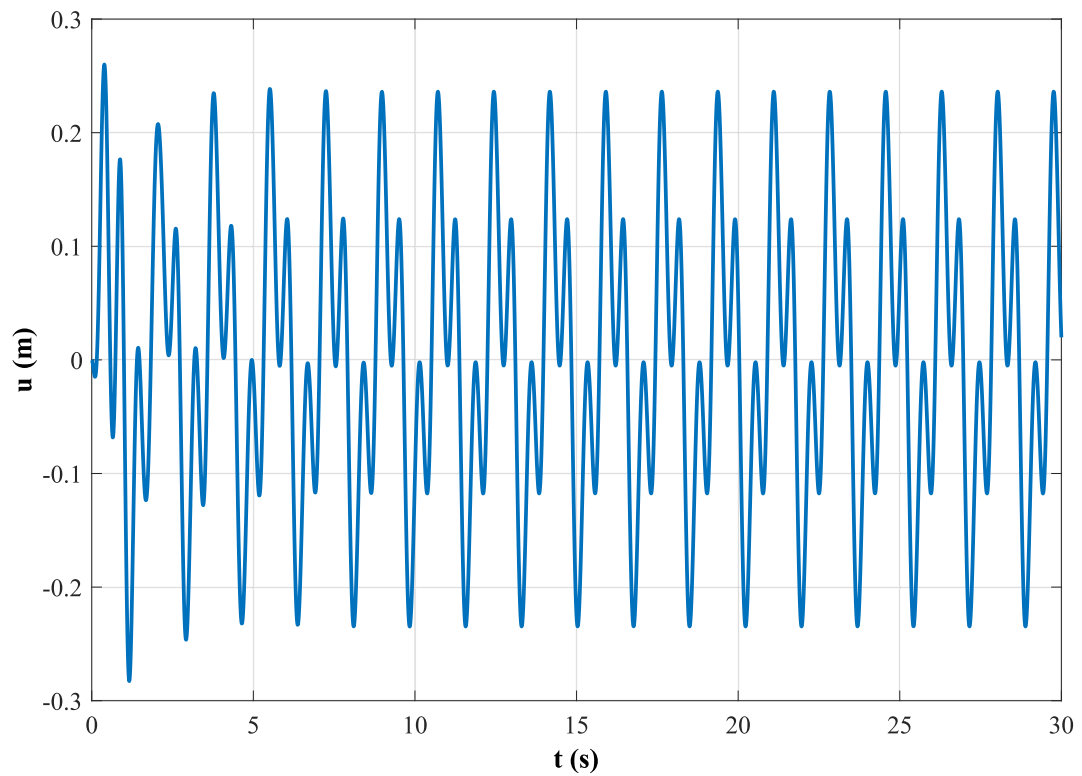


Figura 7.7: Deslocamento horizontal do ponto mais elevado. $f_{onda} = 0,5573$ Hz $\xi = 1\%$

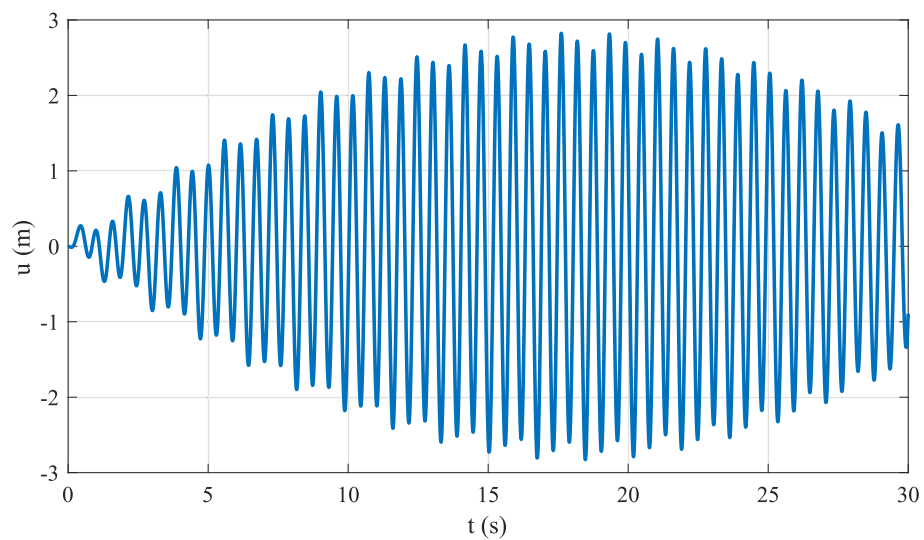


Figura 7.8: Deslocamento horizontal considerando vibração não-amortecida $f = 1,80$ Hz

elemento no controle das vibrações excessivas. Os deslocamentos horizontais nos pontos mais elevados da plataforma são reduzidos pela ação do amortecimento, figura 7.9. A perda de energia do sistema pelo amortecimento é capaz de estabilizar a amplitude das oscilações. Contudo os deslocamentos ainda são expressivos, atingindo o valor máximo de 1,452 m.

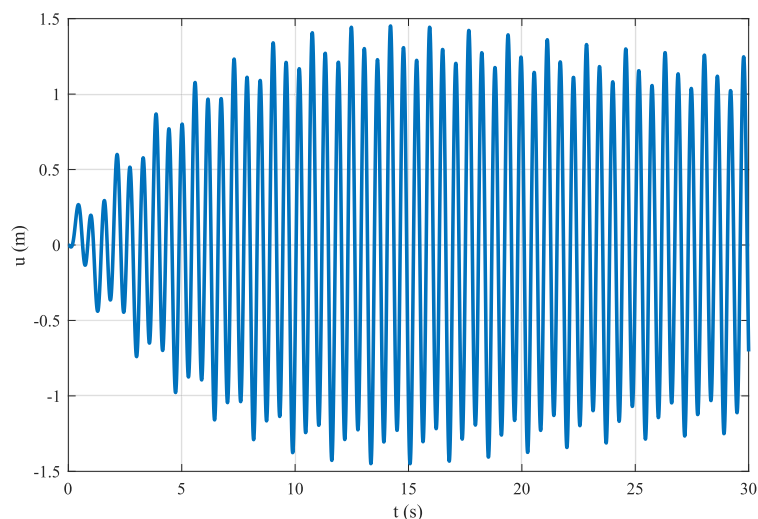


Figura 7.9: Deslocamento horizontal $f = 1,80\text{Hz}$ $\xi = 1\%$.

Comparação com o modelo de referência

O modo correspondente à primeira frequência natural é o que mais contribui na resposta da estrutura. O valor encontrado no presente trabalho para a primeira frequência é 1,822 Hz enquanto que [36] encontra 1,818 Hz. Isto equivale a uma diferença percentual de 0,2 % com relação ao trabalho de referência.

O deslocamento horizontal máximo encontrado pelo modelo implementado no ponto mais elevado da estrutura vale 0,2715 m. No trabalho de [29] o deslocamento máximo encontrado é 0,2607 m. Isto corresponde a uma diferença percentual de 4 %. Esta diferença provavelmente ocorre em função das considerações de vinculação e discretização adotadas por cada autor.

7.2 Exemplo 2

Tendo em vista que para o estado de mar mostrado no exemplo 1 as teorias de ondas convergem para um mesmo valor, procede-se à simulação 2 que objetiva destacar as diferenças entre as teorias linear de Stokes de segunda ordem. Nesta simulação utiliza-se um pórtico plano como modelo estrutural de uma plataforma fixa para simular a resposta estrutural à ondas que se propagam em águas rasas. A simulação visa também obter as frequências naturais da estrutura quando considerada a massa da superestrutura (*deck*).

Descrição da Estrutura

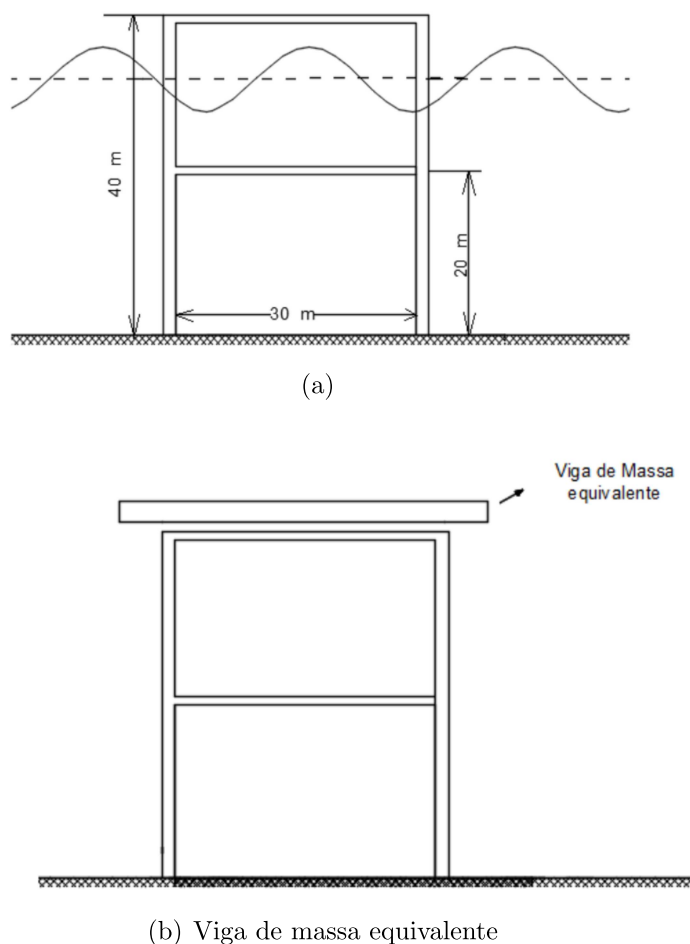


Figura 7.10: Modelo estrutural - plataforma fixa.

O pórtico considerado possui 40 metros de altura, 30 metros de distância entre os membros verticais e 20 metros entre os membros horizontais. A seção dos pilares é circular vazada e possui 1500 milímetros de diâmetro por 40 milímetros de espessura. Enquanto as vigas possuem 1000 milímetros de diâmetro por 40 milímetros de espessura.

Todos os elementos estruturais da jaqueta são de aço ($E = 200GPa$) e soldados entre si, não permitindo a rotação e translação relativa entre os membros. Dessa forma, é assegurado que as forças e momentos atuantes são transmitidos integralmente de um elemento a outro. Os pilares estão engastados em uma base plana e indeslocável. As dimensões da plataforma utilizadas neste trabalho foram adotadas baseadas nas medidas da plataforma do tipo jaqueta descrita no trabalho de [16]. No supracitado trabalho, os valores considerados estão em concordância com os fabricados pela indústria naval, neste trabalho por não se tratar de situação de projeto as dimensões foram arredondadas apenas para simplificação. A massa dos elementos da superestrutura apoiada sobre a jaqueta é de 35227 toneladas, esta encontram-se distribuída sobre 2500 m^2 (50x50m). Para fins de simplificação do problema, foi considerado que a massa encontra-se uniformemente distribuída sobre a área do *deck*. Logo a massa média por m^2 é:

$$G = \frac{35227}{2500} = 14,10t/m^2 \quad (7.1)$$

Para o modelo considerado, a área do deck é de 900 m^2 (30m X 30m). Logo $G = 12.690$ toneladas. Seguindo a consideração de que a massa encontra-se distribuída uniformemente por unidade de área, podemos afirmar que a reação de apoio distribuída ao longo das vigas superiores é a mesma e vale um quarto da massa total G . A forma encontrada para representar a massa da plataforma no pórtico bidimensional, foi incluir uma “viga equivalente” de densidade tal que o produto com o seu volume resultasse em $G/4$. Figura 7.10.

7.2.1 Caracterização das Ondas do Mar

Elevação da Superfície

A onda de projeto considerada corresponde a uma onda centenária para a Bacia de Campos incidente na direção sudoeste. Esta possui as seguintes características [28]:

- Comprimento de onda $L = 244,46$ m;
- Período $T = 15.55$ segundos;

- Altura da onda $H = 7.84$ m;
- Profundidade Local = 32 m;

O perfil de elevação da superfície oceânica utilizando as teorias de onda linear e Stokes de Segunda Ordem é mostrado na figura abaixo.

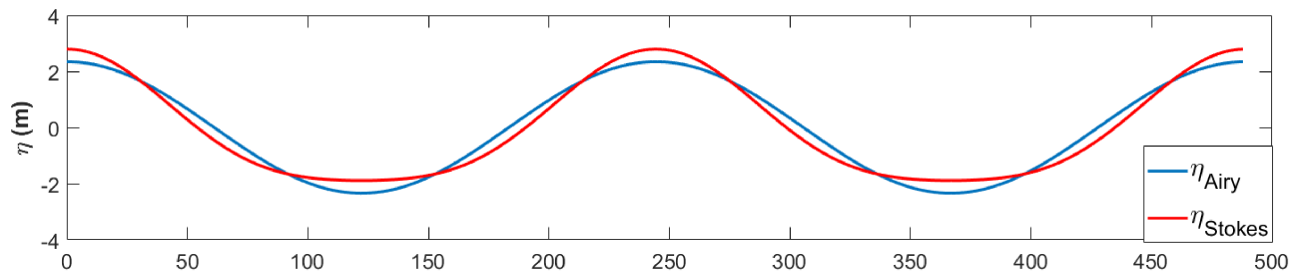


Figura 7.11: Perfil de Elevação da Superfície Oceânica.

Como é possível perceber, mesmo adotando os mesmos parâmetros de comprimento de onda, amplitude e frequência, o perfil gerado a partir do modelo de Stokes apresenta uma inclinação mais acentuada (chamada de *wave steepness* - H/L) que o do modelo linear. Isto decorre do fato de que a teoria linear considera que as ondas possuem pequena amplitude, enquanto que na Teoria de Stokes a contribuição de maiores amplitudes influencia em sua não linearidade.

Força Hidrodinâmica

O carregamento hidrodinâmico atuante ao nível da superfície é mostrado em 7.12. O perfil

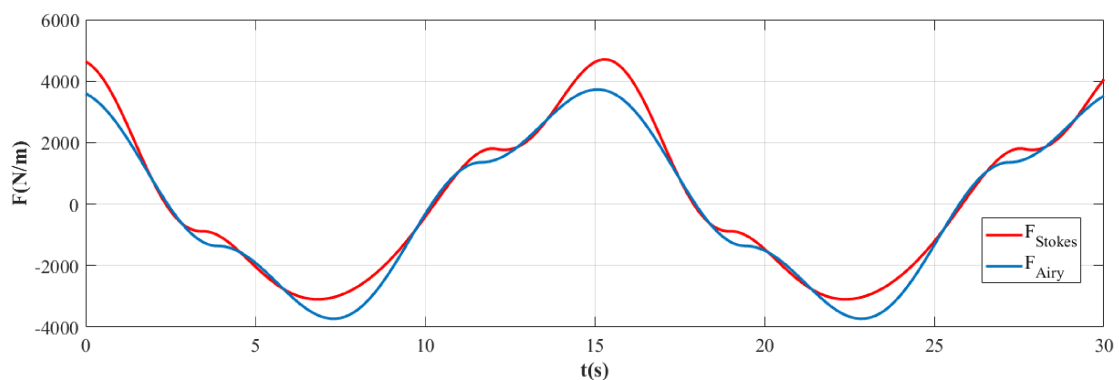


Figura 7.12: Carregamento Hidrodinâmico atuante ao nível da superfície $h = 32$ m.

descrito por essas forças em um instante de tempo $t = 5$ segundos é mostrado abaixo, ver figura 7.13. Como é de se esperar, o carregamento imposto sobre a estrutura quando consideramos as velocidades e acelerações das partículas fornecidas pela teoria de Stokes é mais intenso que o fornecido pela teoria linear. Para este caso, a diferença entre os valores máximos observados em todos os instantes de tempo da simulação é de 26,23 %. Apenas para fim de comparação, quando consideramos uma onda com o mesmo comprimento e período mas amplitude 50% menor esta diferença cai para 3,5297%.

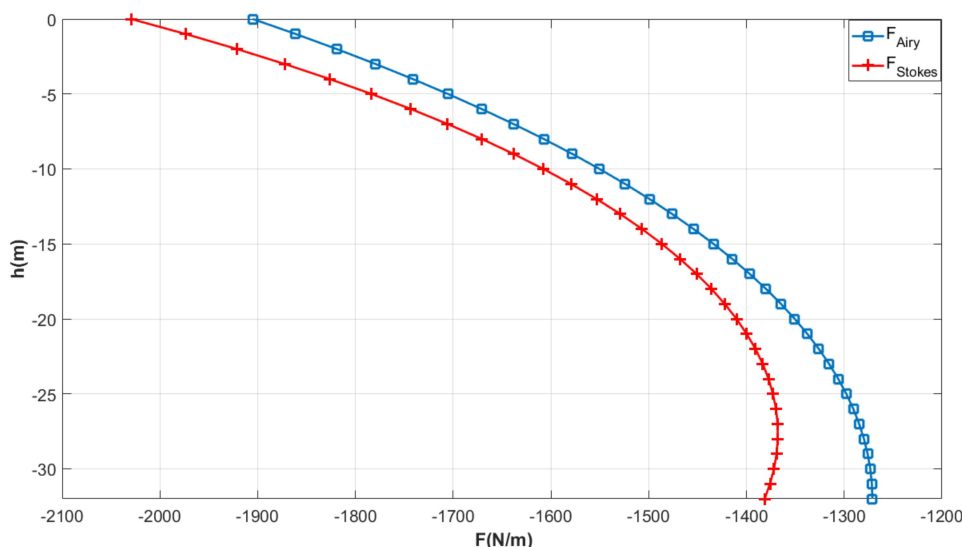


Figura 7.13: Carregamento Hidrodinâmico atuante. $t = 5$ segundos.

7.2.2 Resposta Estrutural

As frequências naturais e modos de vibração foram obtidos a partir das matrizes globais de massa e rigidez do pórtico plano modelado com o uso do MEF. Tomando as ações obtidas através da aplicação da equação de Morison às teorias de onda, foi determinada a resposta dinâmica da estrutura. A primeira frequência natural é 0,168 Hz, enquanto que a segunda frequência vale 1,136 Hz. O deslocamento referente ao ponto mais elevado da estrutura de suporte (jaqueta) ao ser submetida a este carregamento é mostrado na Figura 7.14. A taxa de amortecimento considerada é de 1% [16].

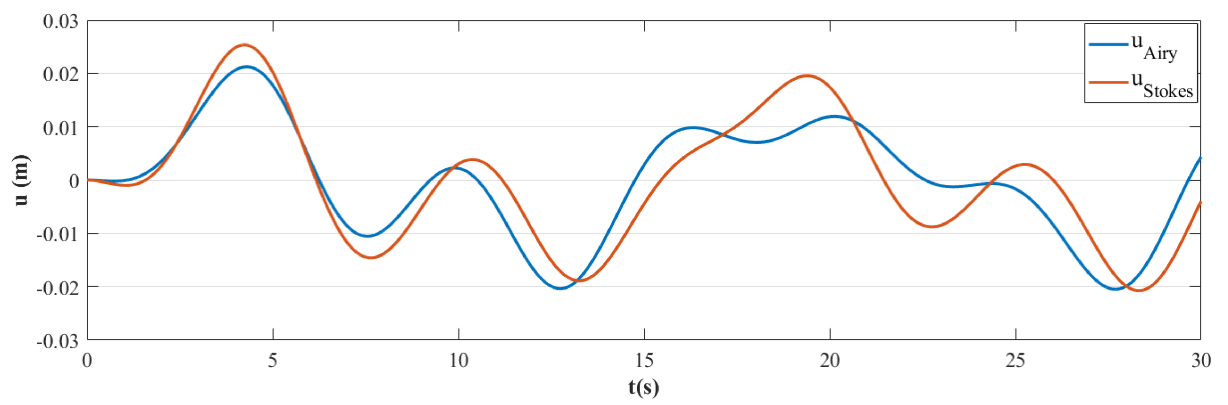


Figura 7.14: Deslocamento horizontal para o ponto mais elevado da plataforma.

8 Considerações Finais e Conclusões

A modelagem do estado de mar e das forças atuantes em estruturas offshore é complexa e engloba múltiplas áreas.

Foi possível observar a diferença entre as teorias linear e de segunda ordem sobretudo em águas rasas. Como mostrado no exemplo 2 onde a diferença entre os máximos valores de ações hidrodinâmicas foi de 26,23%. Isto reforça necessidade da escolha apropriada de uma teoria de onda que irá descrever o estado de mar. Embora possua uma ampla região de aplicabilidade, a teoria linear de onda fornecerá valores subestimados sempre que a relação entre a amplitude de suas oscilações e o comprimento de onda ou profundidade local não obedecer o princípio das pequenas amplitudes. Por outro lado, se a profundidade local é grande em relação à amplitude os resultados da forma linearizada são praticamente os mesmo dos encontrados em teorias de mais alta ordem. Na figura 8.1 é possível ver a diferença percentual entre a máxima força hidrodinâmica calculada em função da profundidade local h . Esta diferença é calculada tomando por base a máxima força hidrodinâmica fornecida pela teoria linear, equação 8.1. Como é possível observar, a diferença da força hidrodinâmica entre as teorias converge para zero a medida que a profundidade do local em que a onda se propaga aumenta. Isto é uma consequência da teoria linear e pode ser explicado pela fato de que o aumento na profundidade sem alteração na amplitude da onda reduz o termo de segunda ordem a um valor próximo de zero. O mesmo ocorre também na medida em que se reduz a relação entre amplitude e comprimento de onda.

$$\epsilon(\%) = \frac{(F_{stokes_{max}} - F_{Airy_{max}})}{(F_{Airy_{max}})}; \quad (8.1)$$

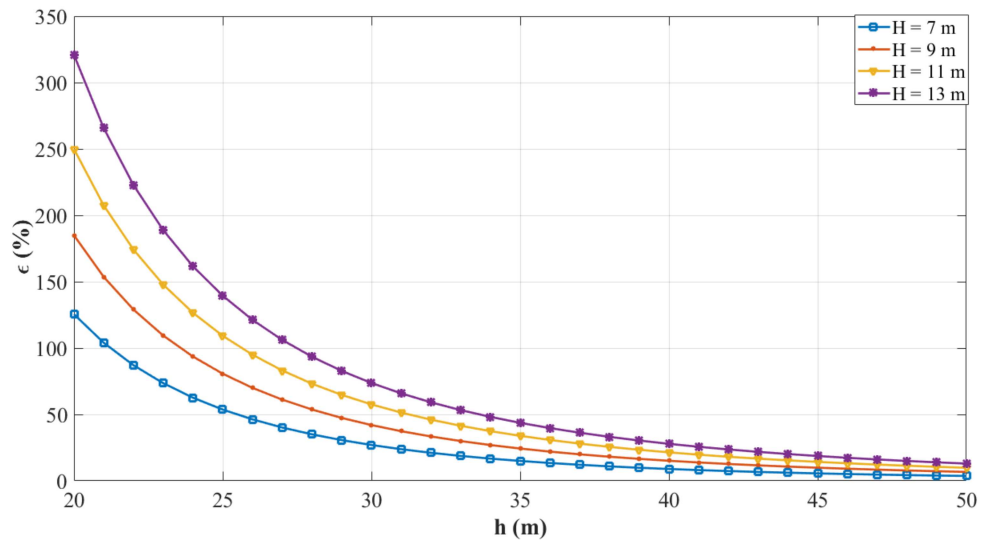


Figura 8.1: Diferença percentual entre a força hidrodinâmica obtida pelas teorias linear e de Stokes em função da profundidade local h .

As propriedades físicas das ondas oceânicas assim como o próprio ambiente marinho tornam mais provável a ocorrência de ondas com maiores períodos o que deve ser um ponto de atenção na análise de projetos de plataformas offshore tendo em vista que estruturas mais esbeltas e pesadas tendem a apresentar frequências naturais mais baixas. Quando não é possível aumentar a rigidez da estrutura com elementos estruturais como contraventamentos a adoção de um sistema de controle de vibrações, seja ele ativo ou passivo, é necessária.

O amortecimento estrutural é uma importante característica dinâmica que atua como limitador dos deslocamentos através da dissipação de energia. Outro elemento importante no controle das vibrações é a massa da superestrutura. Ela contribui para reduzir a frequência natural da estrutural podendo torná-la exposta aos efeitos de amplificação dinâmica de ondas com maior período. Contudo, seu efeito no termo inercial da equação de equilíbrio dinâmico pode ser suficiente para reduzir significativamente a amplitude dos deslocamentos.

Como sugestão de trabalhos futuros fica a análise dos deslocamentos e dos ciclos de tensão e deformação que levam à fadiga considerando um estado de mar modelado como um sobreposição de ondas lineares e não lineares. A reprodução de um estado de mar caótico poderá ser feito com base em uma propriedade fractal: a existência de autossimilaridade nas amplitudes das ondas.

Bibliografia

- [1] James C Anderson and Farzad Naeim. *Basic structural dynamics*. Wiley Online Library, 2012.
- [2] Flávio de Souza Barbosa. *Notas de Aula em Dinâmica das Estruturas*. Ufjf, 2018.
- [3] JE Chappellear. Direct numerical calculation of wave properties. *Journal of Geophysical Research*, 66(2):501–508, 1961.
- [4] Adrian Constantin. The trajectories of particles in stokes waves. *Inventiones mathematicae*, 166(3):523–535, 2006.
- [5] Robert G Dean. Stream function representation of nonlinear ocean waves. *Journal of Geophysical Research*, 70(18):4561–4572, 1965.
- [6] Robert G Dean and Robert A Dalrymple. *Water wave mechanics for engineers and scientists*, volume 2. World Scientific Publishing Company, 1991.
- [7] John D Fenton. The cnoidal theory of water waves. In *Developments in offshore engineering*, pages 55–100. Elsevier, 1999.
- [8] Anderson Carlos Gatti et al. Análise dinâmica linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos. 2006.
- [9] Hebron. Hebron Project. www.hebronproject.com/project/index.aspx, 2019. [Online; acessado em 10-Agosto-2019].
- [10] TS Hedges and URSELL. Regions of validity of analytical wave theories. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Water Maritime and Energy*, 112(2):111–114, 1995.
- [11] Russell Charles Hibbeler. *Resistência dos materiais*. Pearson Educación, 2010.
- [12] Willy Malfliet. Solitary wave solutions of nonlinear wave equations. *American Journal of Physics*, 60(7):650–654, 1992.
- [13] Fernando Ramos MARTINS, Ricardo André GUARNIERI, and Enio Bueno PEIREIRA. O aproveitamento da energia eólica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 30(1):1304, 2008.
- [14] WW Massie and JM Journée. Offshore hydromechanics. *Delft University of Technology: Delft, The Netherlands*, 2001.
- [15] Saulo MEIRELLES and Nelson VIOLANTE-CARVALHO. Modelagem computacional da propagação de ondas superficiais no oceano: um subsídio para a compreensão dos fenômenos ópticos. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(4):555–563, 2007.
- [16] Poonam Mohan, KR Aswin Sidhaarth, and V SanilKumar. Modeling and analysis of offshore jacket platform. 2013.

- [17] JR Morison, JW Johnson, SA Schaaf, et al. The force exerted by surface waves on piles. *Journal of Petroleum Technology*, 2(05):149–154, 1950.
- [18] S Nallayarasu. *Offshore Structures*. Department of Ocean Engineering Indian Institute of Technology Madras, Chennai, 2007.
- [19] Nathan Mortimore Newmark et al. A method of computation for structural dynamics. American Society of Civil Engineers, 1959.
- [20] Found Ocean. FoundOcean expands its subsea and offshore services with the introduction of Marine Growth Prevention and Control products. <http://www.foundocean.com/en/media-centre/news/foundocean-introduces-marine-growth-control-products/>, 2019. [Online; acessado em 30-Agosto-2019].
- [21] Petrobras. Tipos de Plataformas. <http://www.petrobras.com.br/infograficos/tipos-de-plataformas/desktop/index.html>, 2019. [Online; acessado em 30-Agosto-2019].
- [22] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, and Fausto Saleri. *Numerical mathematics*, volume 37. Springer Science & Business Media, 2010.
- [23] Singiresu S Rao. *Vibration of continuous systems*, volume 464. Wiley Online Library, 2007.
- [24] Dominic Reeve, Andrew Chadwick, and Christopher Fleming. *Coastal engineering: processes, theory and design practice*. CRC Press, 2012.
- [25] Eugênio Spanó Rosa. *Introdução aos Métodos de Perturbação*. FEM-DE UNICAMP, 2014.
- [26] API RP2A-WSD. Recommended practice for planning, designing and constructing fixed offshore platforms—working stress design—. In *Twenty-*, 2000.
- [27] Rick Salmon. Introduction to ocean waves. *Scripps Institution of Oceanography, University of California, San Diego*, 2008.
- [28] Augusto Antunes dos Santos. *Projeto estrutural de uma Jaqueta para Plataforma de Manutenção de Aeronaves na Bacia de Campos*. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2006.
- [29] Luciano da Silva et al. Análise modal e controle de plataformas offshore sujeitas a perturbações persistentes. 2014.
- [30] Ib A Svendsen. *Introduction to nearshore hydrodynamics*, volume 24. World Scientific, 2006.
- [31] Ricardo Teixeira. *Computational modelling of structures using discrete and finite elements*. Swansea University (United Kingdom), 2009.
- [32] TenneT. Borssele 1 preps for platform jacket. renews.biz/47078/borssele-1-preps-for-platform-jacket/, 2018. [Online; acessado em 10-Agosto-2019].

-
- [33] ALFL TORRES. *Análise Dinâmica Aleatória Aplicada a Estrutura de Plataformas Marítimas*. PhD thesis, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1993.
- [34] Gerald Beresford Whitham. *Linear and nonlinear waves*, volume 42. John Wiley & Sons, 2011.
- [35] World Meteorological Organization WMO. *Guide to Wave Analysis and Forecasting*, volume 702. Secretariat of the World Meteorological Organization – Geneva – Switzerland, 1998.
- [36] Mohamed Zribi, Naif Almutairi, Mohamed Abdel-Rohman, and Mohamed Terro. Nonlinear and robust control schemes for offshore steel jacket platforms. *Nonlinear Dynamics*, 35(1):61–80, 2004.