

Universidade Federal de Juiz de Fora  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Sérgio Corrêa Neto**

**Dinâmica de Translações em Espaços Projetivos**

Juiz de Fora

2019

**Sérgio Corrêa Neto**

**Dinâmica de Translações em Espaços Projetivos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Geometria e Topologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Laércio José dos Santos

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Corrêa Neto, Sérgio.

Dinâmica de Translações em Espaços Projetivos / Sérgio Corrêa Neto.  
– 2019.

143 f. : il.

Orientador: Laércio José dos Santos

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto  
de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2019.

1. Decomposição de Morse. 2. Hiperbolicidade Normal. 3. Espaço  
Projetivo. I. Santos, Laércio José, orient. II. Título.

**Sérgio Corrêa Neto**

**Dinâmica de Translações em Espaços Projetivos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Geometria e Topologia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 29 de agosto de 2019

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Laércio José dos Santos - Orientador  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. Jair Koiller  
Universidade Federal de Juiz de Fora

---

Professor Dr. Mauro Moraes Alves Patrão  
Universidade de Brasília

*Dedico este trabalho aos meus maravilhosos sobrinhos Carolayni Helena, Nicollas José e Vitória Cristina que me trazem sempre a vivacidade de um amor puro e pulsante de modo que, por eles, eu sei que jamais desistirei.*

## AGRADECIMENTOS

Um percurso singular se completa com este trabalho e o mesmo se deve à grandes contribuições. Assim agradeço em especial:

À Jeová Deus que muito me abençoou me dando forças, saúde e determinação para conciliar os percursos da vida acadêmica e pessoal.

Ao meu pai José Ivanei e minha mãe Rosiene da Conceição que acima de tudo me deram a vida e trabalharam arduamente para contribuir com meu crescimento pessoal me tornando a pessoa que sou hoje pelos valores e ensinamentos que recebi. Agradeço junto a eles à minha irmã Juliana pelo carinho ímpar, apoio, amor e credibilidade que sempre depositaram para minha trajetória.

À minha tia Eliane Corrêa que doou muito de si cuidando de mim tal como um filho e sendo fundamental para essa minha conquista do mestrado. Junto à ela agradeço ao meu tio Marco Aurélio e minha prima Layla por todo apoio e amor nessa jornada.

Aos meus inestimáveis amigos Carolina Chipana, Danilo Tereza, Dilcilene, Leidlaine Medeiros, Leidy Alejandra, Patrick Lucas, Paula Reis, Rosilene e Sebastian Corrêa que acompanharam de perto o processo desse trabalho e me ajudaram das mais variadas formas a enriquecê-lo, além do apoio em manter o foco e a determinação, doando, cada um, um pouco de si, para fortalecer essa amizade que levarei para vida.

Ao meu orientador Laércio José que muito fez pelo meu crescimento acadêmico. Agradeço imensamente à toda a credibilidade, preocupação, apoio, instrução e construção de conhecimentos onde desde o primeiro semestre da graduação me apresentou um modelo incrível de profissional tanto como professor quanto pesquisador tratando-me sempre como um igual. Ao professor Mário Jorge que me ajudou a desbravar o até então desconhecido campo de Sistemas Dinâmicos contribuindo grandemente para essa pesquisa e para meu crescimento profissional. Aos professores Jair Koiller e Mauro Patrão por suas considerações, conselhos e críticas construtivas para lapidar esse trabalho.

À CAPES pelo seu imprescindível apoio financeiro que contribui para diversas outras pesquisas e trabalhos acadêmicos como este e à UFJF por todo o suporte que sempre me proporcionou.

À todos estes expresso meu mais sincero obrigado. Essa conquista é de todos nós!

“Pois, tendo aprendido algo, jamais neguei, fazendo o conhecimento ser como uma descoberta minha; mas louvo como sábio o que me instruiu, tornando públicas as coisas que aprendi com ele.”

(Platão, *Hippias Menor*, 371 c5 – 8)

## RESUMO

Nesse trabalho estudamos a dinâmica de fluxos induzidos por transformações lineares de espaços vetoriais de dimensão finita em espaços projetivos, chamados de translações. A ideia é descrever as componentes de Morse, da decomposição de Morse mais fina do fluxo, assim como os conjuntos recorrente e recorrente por cadeias. Isso é feito por meio das componentes de Jordan da decomposição de Jordan multiplicativa do fluxo. Ainda, estudamos o fibrado tangente ao espaço projetivo e subfibrados vetoriais à ele que caracterizam a restrição do fibrado tangente à cada componente de Morse. Com esse estudo iremos demonstrar que as componentes de Morse, da decomposição de Morse mais fina, são normalmente hiperbólicas. A generalização desse resultado, estudado sobre variedades flag, é abordado nos artigos [5] e [20] por meio da linguagem da Teoria de Lie semissimples. Uma vez que espaços projetivos são exemplos de variedades flag o estudo deste trabalho serve de exemplo dessa teoria, cujo desenvolvimento é matricial, e não requer os mesmos argumentos de Teoria de Lie semissimples.

Palavras-chave: Decomposição de Morse. Hiperbolicidade Normal. Espaço Projetivo.

## ABSTRACT

In this work we study the dynamics of flows induced by linear transformations of finite dimension vector spaces in projective spaces, called translations. The idea is to describe the Morse components of the finest Morse decomposition of the flow, as well as the recurrent and recurrent chain sets. This is done in terms of the Jordan components of the multiplicative Jordan decomposition of the flow. Also, we study the tangent bundle to the projective space and vector subbundles to it that characterize the tangent bundle restricted to each Morse component. With this study we will demonstrate that the Morse components, of the finest Morse decomposition, are normally hyperbolic. The generalization of this result, studied about flag manifolds, is presented in the articles [5] and [20] through the language of the semisimple Lie Theory. Since projective spaces are examples of flag manifolds, the study of this work serves as an example of this theory, whose development is performed in matrix, and does not require the same arguments as the semisimple Lie Theory.

Key-words: Morse Decomposition. Normal Hyperbolicity. Projective Space

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Fluxo em $\mathbb{S}^1$ induzido pela curva $e^{tY}$ para $t > 1$ . . . . .	22
Figura 2 – Órbitas correspondentes à $c < 0$ , $c = 0$ e $c > 0$ . . . . .	23
Figura 3 – Fluxo do plano para a esfera. . . . .	24
Figura 4 – Uma $(\varepsilon, T)$ –cadeia para um fluxo . . . . .	33
Figura 5 – Uma decomposição de Morse sobre $X$ . . . . .	52
Figura 6 – Vizinhanças atratoras (pontilhadas) em $\mathbb{S}^1$ . . . . .	58
Figura 7 – (a) Fluxo induzido por $X_4$ e (b) Fluxo induzido por $X_5$ . . . . .	92

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\phi^t$	Fluxo ou sistema dinâmico.
$\alpha(X)$	Conjunto $\alpha$ -limite de $x$ .
$\omega(X)$	Conjunto $\omega$ -limite de $x$ .
$\Omega(Y)$	Conjunto cadeia limite de $Y$ .
$\text{Fix}(\phi^t)$	Conjunto dos pontos fixos em relação à $\phi^t$ .
$\mathcal{R}(\phi^t)$	Conjunto dos pontos recorrentes em relação à $\phi^t$ .
$\mathcal{R}^C(\phi^t)$	Conjunto dos pontos recorrentes por cadeias em relação à $\phi^t$ .
$\text{Per}(\phi^t)$	Conjunto dos pontos periódicos em relação à $\phi^t$ .
$\mathcal{M}_i$	Componente de Morse.
$(A, A^*)$	Par atrator-repulsor.
$\mathbb{P}(V)$	Espaço projetivo em relação ao espaço vetorial $V$ .
$e^t$	Componente elíptica da decomposição multiplicativa de Jordan.
$e^t$	Função exponencial.
$G_x$	Grupo de isotropia de $x$ .
$G_h$	Centralizador de $h$ em $\text{Sl}(V)$ .
$K_h$	Centralizador de $h$ em $\text{SO}(V)$ .
$\text{est}(F)$	Espaço estável de $F$ .
$\text{inst}(F)$	Espaço instável de $F$ .

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>DINÂMICA TOPOLÓGICA . . . . .</b>	<b>16</b>
2.1	Fluxos . . . . .	16
2.2	Conjuntos Invariantes . . . . .	18
2.3	Recorrência . . . . .	20
2.3.1	Pontos Fixos e Pontos Periódicos . . . . .	20
2.3.2	Conjuntos Limites . . . . .	26
2.3.3	Recorrência por Cadeias . . . . .	32
<b>3</b>	<b>DECOMPOSIÇÃO DE MORSE DE SISTEMAS DINÂMICOS .</b>	<b>51</b>
3.1	Atratores e Repulsores . . . . .	57
3.2	Decomposição de Morse e Atratores . . . . .	63
<b>4</b>	<b>TRANSLAÇÕES NO ESPAÇO PROJETIVO . . . . .</b>	<b>76</b>
4.1	Espaço Projetivo . . . . .	76
4.2	Decomposição de Jordan . . . . .	78
4.3	Dinâmica de Translações . . . . .	80
4.4	Recorrência e Recorrência por Cadeias . . . . .	85
<b>5</b>	<b>COMPONENTES DE MORSE VIA ÓRBITAS DE GRUPOS . .</b>	<b>93</b>
5.1	Espaços Homogêneos de Grupos de Lie . . . . .	93
5.2	Espaço Projetivo como Espaço Homogêneo . . . . .	99
<b>6</b>	<b>HIPERBOLICIDADE NORMAL . . . . .</b>	<b>114</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>128</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>129</b>
	<b>APÊNDICE A – Topologia Geral . . . . .</b>	<b>131</b>

	<b>APÊNDICE B – Variedades Diferenciáveis . . . . .</b>	<b>134</b>
B.1	<b>Ações de Grupos . . . . .</b>	<b>134</b>
B.2	<b>Campos de Vetores . . . . .</b>	<b>136</b>
B.3	<b>Grupos de Lie e Álgebras de Lie . . . . .</b>	<b>137</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo acerca dos sistemas dinâmicos surge da Mecânica e sua necessidade em estudar equações diferenciais onde cada ponto do espaço de fase  $X$  determina uma possível configuração do sistema e, dessa forma, o fluxo tem a função de descrever a maneira pela qual essa configuração atua, isto é, se modifica, ao longo do tempo. Essa descrição se dá por meio das órbitas de cada ponto e seu possível comportamento recorrente. Em meio à algumas dificuldades de realizar tal análise, ferramentas e conjuntos são definidos e estudados com o objetivo de auxiliar nessa descrição. Para um fluxo induzido por uma transformação linear de um espaço vetorial de dimensão finita, podemos estudar a ação correspondente no espaço projetivo e, sendo este um espaço métrico compacto, obtemos diversas técnicas para descrever o comportamento do fluxo. Neste trabalho estudaremos o caso específico de fluxos induzidos pela ação de grupos lineares no espaço projetivo em que esses grupos são, além de topológicos, grupos de Lie.

Nos artigos [5] e [20] é estudado a dinâmica de fluxos lineares induzidos por ações diferenciáveis de um grupo linear  $G$  sobre variedades flag generalizadas  $\mathbb{F}$ . Tomando  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie de  $G$  denota-se por  $g^t$  o fluxo em tempo contínuo induzido por  $X \in \mathfrak{g}$ , a saber,  $g^t = \exp(tX)$  e para o fluxo em tempo discreto temos que  $g^t$  é  $t$ -iterada de  $g \in G$ . No primeiro artigo é feita uma descrição das componentes de Morse, da decomposição de Morse mais fina, do conjunto recorrente e do conjunto recorrente por cadeias e, no segundo, mostra-se que as componentes de Morse, da decomposição de Morse mais fina, são normalmente hiperbólicas. Isso é feito utilizando as decomposições de grupos e álgebras de Lie semissimples (veja [6], [8], [19], [22] e [23]) e a decomposição de Jordan do fluxo (veja [6], [18] e [19]). Seguindo em grande parte o estudo destes artigos o principal objetivo deste trabalho é estudar a dinâmica de fluxos induzidos por operadores lineares em espaços projetivos, que é um exemplo de variedade flag. Nesse sentido descrevemos as componentes de Morse, o conjunto recorrente e o conjunto recorrente por cadeias, nesse exemplo. Além disso, mostramos que as componentes de Morse são normalmente hiperbólicas. Uma vantagem de estudar esse exemplo é que, nesse caso, evitamos a linguagem e os resultados da Teoria de Lie semissimples.

Uma vantagem de estudar Decomposição de Morse, é expressar a transiência e a recorrência do sistema de maneira equivalente à função de Lyapunov no sentido de que se tivermos uma função de Lyapunov para a decomposição de Morse mais fina, as órbitas

onde essa função tem valor constante (os *platôs*) são a parte recorrente do sistema. Nesse contexto, o conceito de recorrência por cadeias surge quando estudamos condições para que um determinado ponto deva necessariamente pertencer à alguma componente de Morse e um ponto que é recorrente por cadeias é tal que qualquer que seja a função de Lyapunov definida, esta função deverá ser constante em toda a órbita deste ponto. Essa relação entre decomposição de Morse e função de Lyapunov é apresentada em [24]. Por outro lado, o estudo da hiperbolicidade normal das componentes de Morse é uma generalização natural da hiperbolicidade de um ponto fixo, uma vez que, análogo ao Teorema de Hartan-Grobman, garante a existência de uma linearização numa vizinhança da componente de Morse. Este estudo, sobre variedades invariantes, é apresentado em [21].

A seguir descrevemos cada capítulo da dissertação.

No Capítulo 2, introduzimos os principais conceitos que serão utilizados nesse trabalho. Formalizamos o conceito de fluxo e estudamos a dinâmica pelo aspecto topológico. Para a análise geral do fluxo introduzimos o conceito de conjuntos limites para descrever o que chamamos de comportamento assintótico das órbitas e nossa primeira classe de recorrência o conjunto  $\mathcal{R}$  dos pontos recorrentes. Estudamos os conceitos de recorrência mais gerais através da generalização de trajetórias abordada por Conley [4] que nos leva à noção de conjuntos transitivos por cadeias e, para uma dada relação entre os pontos do espaço de fase, identificamos o conjunto onde essa relação é de equivalência, a saber, o conjunto  $\mathcal{R}^C$  dos pontos recorrentes por cadeias. A última seção deste capítulo dedica-se ao estudo desses conjuntos transitivos por cadeias e suas propriedades.

No Capítulo 3, definimos uma coleção de subconjuntos invariantes do espaço topológico que capturam o comportamento do fluxo em tempo positivo e negativo. Essa coleção é denominada Decomposição de Morse. Estudamos sua estrutura e propriedades estabelecendo uma ordem entre os elementos dessa coleção chamados componentes de Morse. Baseando-se ainda no trabalho de Conley [4] introduzimos o conceito de Atratores e Repulsores que colaboram no estudo das trajetórias quando  $t \rightarrow \pm\infty$ . A seção 3.2 apresenta a relação intrínseca entre esses dois conceitos caracterizando uma decomposição de Morse em termos de atratores e repulsores (Teorema 3.2.1). Ainda, semelhante à noção de refinamento de topologias, apresentamos o conceito de uma decomposição de Morse ser mais fina que outra e, dentre tantas decomposições, o conceito da decomposição de Morse *mais fina* para o fluxo. As condições para a existência da decomposição de Morse mais fina e a descrição de suas

componentes são relacionadas ao conjunto recorrente por cadeias e suas componentes conexas como apresentado no Teorema 3.2.11.

No Capítulo 4, definimos o espaço projetivo  $\mathbb{P}(V)$  associado a um espaço vetorial de dimensão finita e algumas de suas propriedades topológicas. Na seção 4.2 introduzimos brevemente o conceito de decomposição de Jordan onde, através da decomposição de Jordan aditiva de  $X \in \mathfrak{g}$ , o fluxo induzido para  $g \in G$  é decomposto na forma multiplicativa de Jordan por  $g^t = e^{th^t u^t}$ . Já na seção 4.3 iniciamos o estudo da dinâmica de translações no espaço projetivo onde a ação correspondente ao fluxo é apresentada em mais detalhes no capítulo 5. Para descrever o comportamento do fluxo estudamos o comportamento das suas componentes de Jordan em especial as componentes elíptica e hiperbólica. Na última seção determinamos uma decomposição de Morse em função dos autoespaços associados à componente hiperbólica do fluxo além de exibir seus espaços estável e instável para finalmente descrevermos os conjunto recorrente e recorrente por cadeias em função das componentes de Jordan do fluxo e, em particular, obtendo a decomposição de Morse mais fina.

No Capítulo 5, estudamos os conceitos de ação diferenciável de um grupo de Lie  $G$  numa variedade  $F$  e seus elementos como órbita da ação e grupo de isotropia. Identificamos o espaço projetivo como uma variedade diferenciável por meio da linguagem de espaço homogêneo através da ação transitiva de  $G \in \{\text{Sl}(V), \text{SO}(V)\}$  em  $\mathbb{P}(V)$  e caracterizamos o espaço tangente à cada ponto de  $\mathbb{P}(V)$  por meio de uma ação infinitesimal (veja definição 5.1.6). Apresentados esses conceitos, o objetivo desse capítulo é descrever as componentes de Morse da decomposição de Morse mais fina e os espaços estável e instável como órbitas de um ponto em  $\mathbb{P}(V)$  por meio do conjunto estabilizador da componente de Jordan  $h$  em  $G$ , o conjunto  $G_h$ . Ainda, introduzimos algumas subálgebras de Lie de  $\mathfrak{sl}(V)$  e relações entre elas que são importantes para o estudo de fibrado vetorial.

Finalmente, no Capítulo 6, introduzimos o conceito de Hiperbolicidade Normal de uma variedade invariante com base nos estudos apresentados em [7], [19], [20], e [21]. Determinamos uma métrica Riemanniana apropriada em  $\mathbb{P}(V)$  e com isso o produto interno de Cartan em  $T_x\mathbb{P}(V)$ . Introduzimos o conceito de espaço de raízes e os funcionais lineares que são os autovalores da adjunta de um operador cuja representação matricial é diagonal. Com esses conceitos determinamos explicitamente os subfibrados vetoriais do fibrado tangente  $T(\mathbb{P}(V))$  sobre cada componente de Morse onde, cada um desses subfibrados é determinado através da ação infinitesimal do capítulo 5, sua relação com a caracterização do espaço tangente

à cada ponto de  $\mathbb{P}(V)$  e a descrição das componentes de Morse via órbitas da ação. O resultado principal desse capítulo garante que cada componente de Morse da decomposição de Morse mais fina para as translações no espaço projetivo são normalmente hiperbólicas (veja o Teorema 6.0.16).

## 2 DINÂMICA TOPOLÓGICA

Neste capítulo analisaremos o conceito de sistemas dinâmicos e veremos algumas das ferramentas pelas quais podemos descrever, de certo modo, seu comportamento no espaço estudado ao longo de suas trajetórias para cada um de seus pontos. Inicialmente definimos o conceito de fluxos e órbitas e, a partir daí, estudamos conceitos de recorrência como pontos fixos, periódicos, invariância pelo fluxo, conjuntos limites e recorrência por cadeias. O presente capítulo baseia-se, principalmente, nas referências [1] e [3].

### 2.1 Fluxos

**Definição 2.1.1** Um **fluxo** (ou **sistema dinâmico**) sobre um espaço topológico  $X$  é uma função contínua  $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  tal que:

(i)  $\phi(t, \cdot) : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo para cada  $t \in \mathbb{R}$ , e

(ii)  $\phi(t + s, x) = \phi(s, \phi(t, x))$  para todo  $x \in X$  e todos  $s, t \in \mathbb{R}$ .

O espaço topológico  $X$  é o espaço de fase (ou espaço estado) do fluxo  $\phi$ . Por um abuso de linguagem, também dizemos que  $\phi^t$  é um fluxo sobre  $X$ .

**Proposição 2.1.2** Se  $\phi^t$  é um fluxo sobre o espaço topológico  $X$ , então

(i)  $\phi(0, \cdot)$  é a aplicação identidade sobre  $X$ , e

(ii) Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos que  $(\phi^t)^{-1} = \phi^{-t}$ .

Demonstração:

(i) Pela definição 2.1.1(ii), para todo  $x \in X$ ,

$$\phi^0(x) = \phi^0(\phi^0(x)).$$

Uma vez que  $\phi^0$  é, em particular, injetiva, segue que  $\phi^0(x) = x$ , para todo  $x \in X$ . Portanto,  $\phi^0$  é a aplicação identidade sobre  $X$ .

- (ii) De acordo com a definição 2.1.1(i), a aplicação  $\phi^t$  é invertível para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Pelo item (ii) da definição 2.1.1, segue que

$$\phi^t(\phi^{-t}(x)) = \phi^{-t}(\phi^t(x)) = \phi^0(x) = x$$

para todo  $x \in X$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $(\phi^t)^{-1} = \phi^{-t}$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

□

Exemplos:

1. Seja  $A$  uma matriz real  $n \times n$ . Considere a equação diferencial linear

$$\dot{x} = Ax$$

sobre  $\mathbb{R}$ . O fluxo  $\phi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  associado a essa equação diferencial é

$$\phi^t(x) = e^{At}x$$

onde a exponencial de matriz é a matriz definida em B.3.5.

2. Considere a equação diferencial logística

$$\dot{x} = x(1 - x)$$

sobre  $[0, 1]$ . O fluxo  $\phi^t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  correspondendo à equação logística é

$$\phi^t(x) = \frac{xe^t}{1 + x(e^t - 1)}.$$

3. Seja  $\mathfrak{gl}(n)$  o espaço das matrizes reais  $n \times n$  e considere  $A \in \mathfrak{gl}(n)$ . Por  $A$  definimos a curva  $g(t) = e^{tA}$  em  $\text{Gl}(n)$ , onde  $\text{Gl}(n)$  é o espaço das matrizes reais  $n \times n$  invertíveis. Esta curva, induz um fluxo sobre a esfera  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ (t, x) &\longmapsto \frac{g(t)x}{\|g(t)x\|}. \end{aligned}$$

□

**Definição 2.1.3** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço topológico  $X$ . Para um subconjunto  $A \subset X$ , define-se a **órbita** de  $A$  em relação à  $\phi^t$  como o conjunto*

$$\mathcal{O}(A) = \{\phi^t(x); t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in A\}.$$

*A **órbita positiva** e a **órbita negativa** são os conjuntos*

$$\mathcal{O}^+(A) = \{\phi^t(x); t \geq 0 \text{ e } x \in A\} \quad \text{e} \quad \mathcal{O}^-(A) = \{\phi^t(x); t \leq 0 \text{ e } x \in A\}.$$

*Quando  $A = \{x\}$ , escrevemos a órbita de  $A$  apenas como  $\mathcal{O}(x) = \{\phi^t(x); t \in \mathbb{R}\}$ .*

Pela definição 2.1.3, podemos perceber que a órbita de um elemento  $x \in X$  é a imagem do caminho  $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow X$ .

**Proposição 2.1.4** *A órbita, a órbita positiva e a órbita negativa de um ponto em relação a um fluxo são conexas por caminhos e, conseqüentemente, conexas.*

*Demonstração:* Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço topológico  $X$ . Uma vez que  $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow X$  é contínua e  $\mathbb{R}$  é conexo por caminhos, sua imagem  $\mathcal{O}(x) = \{\phi^t(x); t \in \mathbb{R}\}$  é um conjunto conexo por caminhos. Analogamente  $\mathcal{O}^+(x)$  e  $\mathcal{O}^-(x)$  são conexos por caminhos. Conseqüentemente, são conexos uma vez que todo conjunto conexo por caminhos é, também, conexo.  $\square$

## 2.2 Conjuntos Invariantes

Nessa seção veremos uma classe de conjuntos específicos, os conjuntos invariantes, e algumas de suas propriedades.

**Definição 2.2.1** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre o espaço topológico  $X$ . Um subconjunto  $A \subset X$  é **positivamente invariante** por  $\phi^t$  se  $\phi^t(A) \subseteq A$  para todo número real positivo, isto é,  $\mathcal{O}^+(A) \subseteq A$ . Analogamente,  $A$  é dito **negativamente invariante** por  $\phi^t$  se  $\mathcal{O}^-(A) \subseteq A$ . Um subconjunto  $A \subset X$  é dito **invariante** por  $\phi^t$  se  $A$  é positivamente e negativamente invariante; neste caso,  $\mathcal{O}(A) \subseteq A$ .*

*Observação:* Se  $A$  é invariante por  $\phi^t$ , então  $\phi^t$  restrito a  $A$  é um fluxo sobre  $A$ . Além disso,  $A$  é invariante se, e somente se,  $\phi^t(A) = A$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . De fato, se  $\phi^t(A) \subset A$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ , aplicando  $\phi^t$  em ambos os lados de  $\phi^{-t}(A) \subset A$  teremos que, para todo  $t$ ,  $A = \phi^t(\phi^{-t}(A)) \subset \phi^t(A)$ , ou seja,  $A = \phi^t(A)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Proposição 2.2.2** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço topológico  $X$ .*

- (i) *O complemento de qualquer conjunto que é (positivamente, negativamente) invariante por  $\phi^t$  é (negativamente, positivamente) invariante por  $\phi^t$ .*
- (ii) *A interseção e a união de qualquer coleção de conjuntos que são invariantes pelo fluxo é invariante pelo fluxo.*
- (iii) *O fecho de um conjunto que é (positivamente, negativamente) invariante por  $\phi^t$  é (positivamente, negativamente) invariante por  $\phi^t$ .*

Demonstração:

- (i) Seja  $A$  um subconjunto de  $X$  que é positivamente invariante por  $\phi^t$ . Se  $X \setminus A$  não é negativamente invariante por  $\phi^t$ , então existe  $x \in X \setminus A$  e  $\tau \in \mathbb{R}$ , tal que  $\tau < 0$  e  $\phi^\tau(x) \notin X \setminus A$ , ou seja,  $\phi^\tau(x) \in A$ . Consequentemente,  $x = \phi^{-\tau}(\phi^\tau(x)) \in A$ , contradizendo o fato de que  $x \in X \setminus A$ . Portanto,  $X \setminus A$  é negativamente invariante por  $\phi^t$ .

As demonstrações das outras duas afirmações são análogas.

- (ii) Seja  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  uma coleção de subconjuntos de  $X$  invariantes por  $\phi^t$ . Sejam  $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ ,  $y \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  e  $\tau \in \mathbb{R}$ . Por um lado, para cada  $\lambda \in \Lambda$ , o ponto  $\phi^\tau(x) \in A_\lambda$  já que  $x \in A_\lambda$  e  $A_\lambda$  é invariante. Logo,  $\phi^\tau(x) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ . Portanto  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  é invariante por  $\phi^t$ .

Por outro lado, segue que  $y \in A_{\lambda'}$  para algum  $\lambda' \in \Lambda$ . Sendo  $A_{\lambda'}$  invariante, temos que  $\phi^\tau(y) \in A_{\lambda'} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ . Portanto,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  é invariante por  $\phi^t$ .

- (iii) Se  $A$  é positivamente invariante por  $\phi^t$ , então é suficiente mostrar que o conjunto dos pontos limites de  $A$  é positivamente invariante por  $\phi^t$ . Sejam  $x$  um ponto limite de  $A$ ,  $\tau > 0$  e  $U \subset X$  um aberto contendo  $\phi^\tau(x)$ . Pela continuidade de  $\phi^\tau$ , o conjunto  $\phi^{-\tau}(U)$  é aberto e contém  $x$ . Como  $x$  é ponto limite de  $A$ , existe  $y \in A \cap \phi^{-\tau}(U)$ . Como  $A$  é positivamente invariante,  $\phi^\tau(y) \in A \cap U$ . Assim,  $\phi^\tau(x)$  é um ponto limite de

$A$ . Portanto,  $\bar{A}$  é positivamente invariante por  $\phi^t$ . Para  $A$  negativamente invariante, a prova é análoga.

Agora, se  $A$  é invariante então, por definição,  $A$  é positivamente e negativamente invariante por  $\phi^t$ . Pelo parágrafo anterior, segue que  $\bar{A}$  é invariante por  $\phi^t$ .

□

## 2.3 Recorrência

Um dos objetivos de estudar sistemas dinâmicos é descrever o eventual comportamento das órbitas de uma aplicação ou fluxo. Se  $\phi^t : X \rightarrow X$  é um fluxo, então nosso objetivo central é compreender o comportamento de  $\phi^t(x)$  com  $t \rightarrow \pm\infty$  para cada  $x \in X$ .

Soluções de equações diferenciais frequentemente tendem para soluções de equilíbrio ou soluções periódicas em tempo positivo ou negativo. Uma solução de equilíbrio ou solução periódica apresenta recorrência no sentido que retornam para suas condições iniciais com frequência. Contudo, soluções de equações diferenciais também podem tender à soluções que apresentam comportamento recorrente mais complicado. Para descrever esses tipos mais complicados de comportamento assintótico buscamos compreender mais intrinsecamente formas de recorrência. Dessa maneira estudaremos nessa seção diversos tipos de recorrência e algumas das relações existentes entre esses conjuntos recorrentes. Para um estudo mais aprofundado de recorrência veja [1] e para complementar tal estudo veja [3].

### 2.3.1 Pontos Fixos e Pontos Periódicos

**Definição 2.3.1** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço topológico  $X$ . Um ponto  $x \in X$  é um **ponto fixo** (ou **ponto de equilíbrio**) de  $\phi^t$  se  $\phi^t(x) = x$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . O conjunto de todos os pontos fixos é denotado por  $\text{Fix}(\phi^t)$ .*

**Proposição 2.3.2** *Seja  $f$  um campo vetorial diferenciável sobre uma variedade  $F$ . Se  $\phi^t : F \rightarrow F$  é um fluxo diferenciável satisfazendo:*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi^t(x) = f(x)$$

*para todo  $x \in F$ , então  $\text{Fix}(\phi^t) = \{x \in F; f(x) = 0\}$ .*

Demonstração: Se  $x$  é um ponto fixo de  $\phi^t$ , então  $\phi^t(x) = x$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi^t(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x = 0.$$

Reciprocamente, se  $x \in F$  é tal que  $f(x) = 0$ , então  $\phi^t(x) = x$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  é uma solução para a equação diferencial

$$\dot{y} = f(y)$$

com a condição inicial  $y(0) = x$ . Sendo  $f$  diferenciável, o Teorema de Existência e Unicidade para equações diferenciais ordinárias garante que essa solução é única. Assim,  $x$  é um ponto fixo de  $\phi^t$ . Portanto, os pontos fixos de  $\phi^t$  são exatamente os zeros de  $f$ .  $\square$

Exemplos:

1. Seja  $A \in \mathfrak{gl}(n)$ . Pela proposição 2.3.2 o conjunto dos pontos fixos do fluxo correspondente à equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$  sobre  $\mathbb{R}^n$  é o núcleo da transformação linear que  $A$  representa.
2. Considerando a equação diferencial logística  $\dot{x} = x(1 - x)$  sobre  $[0, 1]$ , pela proposição 2.3.2, os pontos fixos do fluxo correspondentes são exatamente os zeros da função  $f(x) = x(1 - x)$ . Portanto,

$$\text{Fix}(\phi^t) = \{0, 1\}.$$

3. Consideremos a equação diferencial

$$\dot{\theta} = \text{sen}^2(\theta)$$

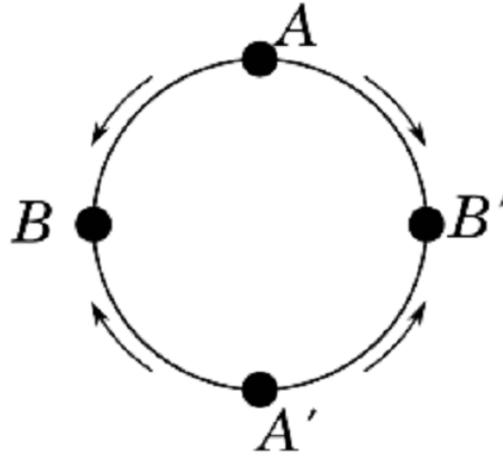
na coordenada angular  $\theta$  sobre  $\mathbb{S}^1$ . Pela proposição 2.3.2, os pontos fixos do fluxo são os pontos com coordenadas angulares  $0$  e  $\pi$ .

4. Seja  $Y \in \mathfrak{gl}(2)$ . Consideremos o fluxo sobre a esfera  $\mathbb{S}^1$  induzido pela curva  $g(t) = e^{tY}$  em  $\text{Gl}(2)$ , dado por:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (t, x) &\longmapsto \frac{g(t)x}{\|g(t)x\|}. \end{aligned}$$

$$\text{Para } Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ teremos } e^{tY} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Figura 1 – Fluxo em  $\mathbb{S}^1$  induzido pela curva  $e^{tY}$  para  $t > 1$ .



Fonte: [24]

O fluxo  $\phi^t$  é como esboçado na Figura 1, acima. Os pontos fixos  $A = (0, 1)$ ,  $A' = (0, -1)$ ,  $B = (-1, 0)$  e  $B' = (1, 0)$  são determinados através do cálculo direto de

$$\frac{g(t)x}{\|g(t)x\|} = x,$$

para todo  $x \in \mathbb{S}^1$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ .

5. Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}.$$

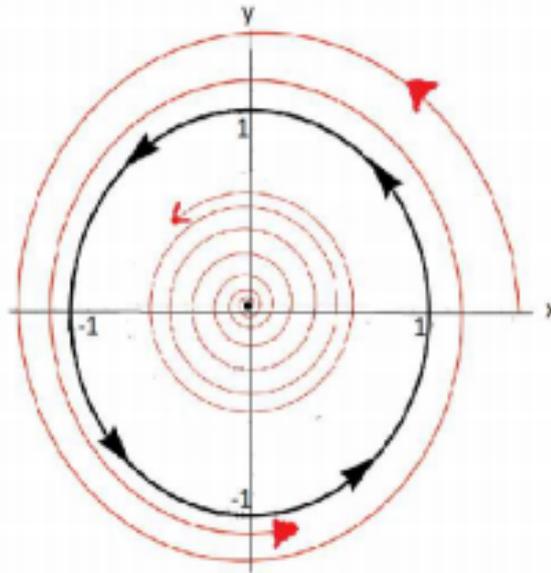
Fazendo substituição em coordenadas polares, chegamos à solução do sistema como sendo  $(x(t), y(t)) = (0, 0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  ou

$$(x(t), y(t)) = r(t)(\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0)),$$

com  $\theta_0, c \in \mathbb{R}$  e  $r(t) = \frac{1}{\sqrt{1+ce^{-2t}}}$ .

Com a condição inicial em que  $\theta_0 = 0$  analisamos as situações. Se  $c = 0$  temos a circunferência  $(x, y) = (\cos t, \sin t)$  anti-horária. Se  $c < 0$  então temos  $r(t) < 1$  para todo  $t$ . Se  $c > 0$  então  $r(t) > 1$  para todo  $t$ . As órbitas, portanto, são como esboçadas na Figura 2, abaixo.

Figura 2 – Órbitas correspondentes à  $c < 0$ ,  $c = 0$  e  $c > 0$ .



Fonte: [17]

6. Considerando o fluxo  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  gerado pelo sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases},$$

iremos definir um sistema dinâmico na esfera

$$\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2 = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; (x_1)^2 + (x_2)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

de raio  $\frac{1}{2}$ , centrada em  $(0, 0, \frac{1}{2})$  e com a topologia métrica induzida de  $\mathbb{R}^3$ .

Sejam  $N = (0, 0, 1)$  e  $S = (0, 0, 0)$  o pólo norte e o pólo sul de  $\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2$ , respectivamente.

Tomemos a projeção estereográfica

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \left( \frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right), \end{aligned}$$

e consideremos a aplicação  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2 \longrightarrow \mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2$  dada por

$$F(t, x) = \rho^{-1} \circ \varphi \circ (\text{id}_{\mathbb{R}} \times \rho)(t, x).$$

Como  $F$  é uma composição de homeomorfismos, temos que  $F$  é homeomorfismo. Além disso, para todo  $x \in \mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2 \setminus \{N\}$  e  $t, s \in \mathbb{R}$  segue que

$$F(0, x) = \rho^{-1} \circ \varphi(0, \rho(x)) = \rho^{-1}(\rho(x)) = x,$$

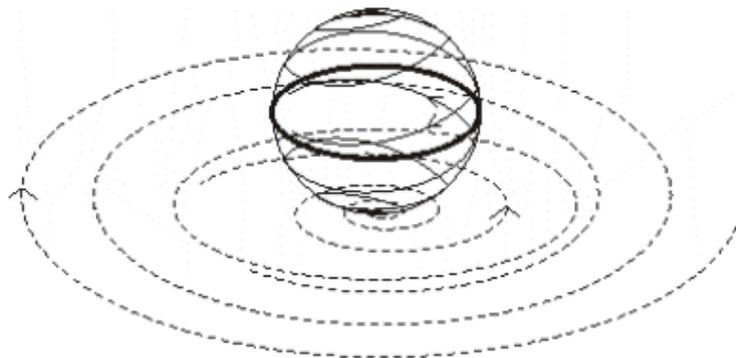
e

$$\begin{aligned}
F(t, F(s, x)) &= \rho^{-1} \circ \varphi \circ (\text{id}_{\mathbb{R}} \times \rho) (t, \rho^{-1} \circ \varphi(s, \rho(x))) \\
&= \rho^{-1} \circ \varphi(t, \varphi(s, \rho(x))) \\
&= \rho^{-1} \circ \varphi(t + s, \rho(x)) \\
&= \rho^{-1} \circ \varphi \circ (\text{id}_{\mathbb{R}} \times \rho)(t + s, x) \\
&= F(t + s, x).
\end{aligned}$$

Agora, definimos em  $\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2$  o fluxo  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2 \longrightarrow \mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2$  dado por

$$\phi(t, x) = \begin{cases} F(t, x) & \text{se } x \neq N \\ N & \text{se } x = N \end{cases}.$$

Figura 3 – Fluxo do plano para a esfera.



Fonte: [25]

Nesse sistema, os pontos  $N$  e  $S$  são os pontos fixos. Na Figura 3, acima, podemos analisar o fluxo no plano e na esfera. Como se pode perceber, inicialmente os pontos da esfera  $\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2$  são projetados no plano, estes seguem as órbitas conforme o exemplo 5 e, por fim, essa trajetória é trazida à esfera novamente pela inversa da projeção estereográfica, descrevendo as trajetórias na esfera conforme a figura. Vale ressaltar que por cálculo direto obtém-se que o equador  $E$  da esfera  $\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2$  é projetado no círculo unitário  $(\cos(t), \sin(t), 0)$  no plano  $xy$ .

□

**Definição 2.3.3** Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço topológico  $X$ . Um ponto  $x \in X$  é um **ponto periódico** de  $\phi^t$  se existe número real positivo  $\tau \in \mathbb{R}$  tal que  $\phi^\tau(x) = x$ . O **período** de um ponto periódico  $x$  é o número real dado por

$$\inf\{\tau > 0; \phi^\tau(x) = x\}.$$

O conjunto dos pontos periódicos de  $\phi^t$  é denotado por  $\text{Per}(\phi^t)$ .

**Proposição 2.3.4** Seja  $\phi^t$  um fluxo. Se  $p$  é um ponto periódico de  $\phi^t$  com período  $T$  e  $\{p\}$  é um conjunto fechado, então  $\phi^T(p) = p$ .

Demonstração: Seja  $A = \{\tau > 0; \phi^\tau(p) = p\}$ . Pela definição de período,  $T = \inf A$  e, então,  $T \in \bar{A}$ . Como  $\{p\}$  é fechado,  $(T, p) \in \bar{A} \times \{p\} = \overline{(A \times \{p\})}$ . Sendo  $\phi$  contínua e  $\{p\}$  fechado,

$$\phi^T(p) = \phi(T, p) \in \phi(\overline{A \times \{p\}}) \subset \overline{\phi(A \times \{p\})} = \overline{\{p\}} = \{p\}.$$

Portanto,  $\phi^T(p) = p$ . □

**Proposição 2.3.5**  $\text{Fix}(\phi^t) \subseteq \text{Per}(\phi^t)$ .

Demonstração: Se  $x$  é um ponto fixo de um fluxo, então  $\phi^t(x) = x$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e, assim,  $0 = \inf\{\tau > 0; \phi^\tau(p) = p\}$  é o período de  $x$ . Portanto, todo ponto fixo é um ponto periódico com período 0. □

Exemplos:

1. Consideremos a matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  e a equação linear diferencial

$$\dot{x} = Ax$$

sobre  $\mathbb{R}^2$ . pelo Exemplo 1 da página 17 o fluxo associado com essa equação diferencial é  $\phi^t = e^{At}x$ . Usando a definição de exponencial de matrizes B.3.5 mostra-se que

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & -\text{sen } t \\ \sin t & \text{cost} \end{bmatrix}.$$

Portanto,  $\phi^t(x) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} x$ . Uma vez que  $\sin t$  e  $\cos t$  são funções periódicas e ambas têm período  $2\pi$ , cada ponto de  $\mathbb{R}^2$  é ponto periódico de  $\phi^t$  com período  $2\pi$ .

2. Conforme esboçadas, na Figura 2, as órbitas dos pontos de  $\mathbb{R}^2$  do Exemplo 5 da página 22, temos que todo ponto pertencente ao círculo unitário  $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = 1\}$  é ponto periódico.

□

### 2.3.2 Conjuntos Limites

A análise global de sistemas dinâmicos se inicia com conjuntos limites, isto é, com a questão, aonde as trajetórias vão para  $t \rightarrow \pm\infty$ . Nesse contexto são introduzidos os conjuntos  $\alpha$ - e  $\omega$ -limites para capturar o eventual comportamento de  $\phi^t(x)$  em tempos negativo e positivo.

**Definição 2.3.6** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço topológico Hausdorff  $X$ . Considere um subconjunto  $Y \subset X$ . O conjunto  $\alpha$ -**limite** de  $Y$  é definido como*

$$\alpha(Y) = \left\{ z \in X ; \exists (x_n) \text{ em } Y \text{ e } t_n \rightarrow -\infty \text{ em } \mathbb{R} \text{ com } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, x_n) = z \right\},$$

e analogamente o conjunto  $\omega$ -**limite** de  $Y$  é definido como

$$\omega(Y) = \left\{ z \in X ; \exists (x_n) \text{ em } Y \text{ e } t_n \rightarrow +\infty \text{ em } \mathbb{R} \text{ com } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, x_n) = z \right\}.$$

Quando o conjunto  $Y$  consistir de um único ponto  $x$ ,  $Y = \{x\}$ , apenas escrevemos os conjuntos limites como  $\alpha(x)$  e  $\omega(x)$ , respectivamente.

**Proposição 2.3.7** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço topológico Hausdorff  $X$ . Se  $p \in \text{Per}(\phi^t)$ , então*

(i)  $\mathcal{O}(p)$  é compacta e fechada.

(ii)  $\alpha(p) = \omega(p) = \mathcal{O}(p)$ .

Demonstração:

- (i) Seja  $T$  o período de  $p$ . Uma vez que  $[0, T]$  é compacto e  $\phi(\cdot, p) : \mathbb{R} \rightarrow X$  é contínua,  $\phi([0, T], p) = \mathcal{O}(p)$  é compacto. Como  $\mathcal{O}(p) \subset X$  e  $X$  é Hausdorff, segue que  $\mathcal{O}(p)$  é fechada.
- (ii) Uma vez que  $\mathcal{O}(p)$  é fechada conforme o item (i),  $\mathcal{O}(p)$  contém todos os seus pontos limites. Assim,  $\alpha(p) \subseteq \mathcal{O}(p)$  e  $\omega(p) \subseteq \mathcal{O}(p)$ .

Por outro lado, se  $x \in \mathcal{O}(p)$ , então existe um número real  $\tau$  tal que  $x = \phi^\tau(p)$ . Se  $T$  é o período de  $p$ , então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{\tau \pm nT}(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^\tau(\phi^{\pm nT}(p)) = \phi^\tau(p) = x.$$

Assim,  $x \in \alpha(p)$  e  $x \in \omega(p)$ . Consequentemente,  $\mathcal{O}(p) \subseteq \alpha(p)$  e  $\mathcal{O}(p) \subseteq \omega(p)$ .

□

**Proposição 2.3.8** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço topológico de Hausdorff  $X$ . Seja  $x \in X$ .*

- (i) *Se  $y \in \mathcal{O}(x)$ , então  $\omega(y) = \omega(x)$  e  $\alpha(y) = \alpha(x)$ .*
- (ii) *Se  $A \subseteq X$  é fechado e positivamente invariante e  $x \in A$ , então  $\omega(x) \subseteq A$ . Se  $A \subseteq X$  é fechado e negativamente invariante e,  $x \in A$ , então  $\alpha(x) \subseteq A$ .*
- (iii) *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Se  $\mathcal{O}^+(x)$  está contida em um subconjunto compacto de  $X$ , então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi^t(x), \omega(x)) = 0.$$

*Se  $\mathcal{O}^-(x)$  está contida em um subconjunto compacto de  $X$ , então*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi^{-t}(x), \alpha(x)) = 0.$$

- (iv) *Se  $A \subset B$ , então  $\omega(A) \subset \omega(B)$ .*
- (v) *Se  $A, B \subset X$ , então  $\omega(A \cup B) = \omega(A) \cup \omega(B)$ .*

**Demonstração:** Iremos demonstrar os resultados apenas para o conjunto  $\omega$ -limite uma vez que para o caso  $\alpha$ -limite a demonstração é análoga.

- (i) Se  $y \in \mathcal{O}(x)$ , então  $y = \phi^\tau(x)$  para algum  $\tau \in \mathbb{R}$ . Se  $z \in \omega(x)$ , então existe uma sequência  $(t_n)$  de números reais tal que  $t_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$  e

$$z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{t_n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{t_n}(\phi^{-\tau}(y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{t_n - \tau}(y).$$

Uma vez que  $t_n - \tau \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , obtemos  $z \in \omega(y)$ .

Por outro lado, se  $z \in \omega(y)$ , então existe uma sequência  $t_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$  e

$$z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{t_n}(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{t_n}(\phi^\tau(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{t_n + \tau}(x).$$

Como  $t_n + \tau \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$  temos que  $z \in \omega(x)$ . Portanto,  $\omega(x) = \omega(y)$ .

- (ii) Seja  $x \in A$ . Uma vez que  $A$  é positivamente invariante,  $\mathcal{O}^+(x) \subseteq A$ . Como  $A$  é fechado,  $A$  contém todos os pontos limites de  $\mathcal{O}^+(x)$ . Portanto,  $\omega(x) \subseteq A$ .
- (iii) Suponhamos, por contradição, que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi^t(x), \omega(x)) \neq 0$ . Logo, existem  $\delta > 0$  e uma sequência  $(t_n)$  de números reais tal que  $t_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$  e  $d(\phi^{t_n}(x), \omega(x)) \geq \delta$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Como  $\mathcal{O}^+(x)$  está contida em um subconjunto compacto de  $X$ , a sequência  $(\phi^{t_n}(x))$  tem um ponto limite  $z \notin \omega(x)$ , pois do contrário existiria  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(\phi^{t_n}(x), \omega(x)) < \delta$  para todo  $n \geq n_0$ . Mas  $z \in \omega(x)$  pela definição do conjunto  $\omega$ -limite de  $x$ . Isso é uma contradição. Portanto,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi^t(x), \omega(x)) = 0$ .

- (iv) Sejam  $A, B \subset X$  tais que  $A \subset B$ . Seja  $z \in \omega(A)$ . Logo, existem sequências  $(x_n)$  em  $A$  e  $(t_n)$  em  $\mathbb{R}$  tais que  $t_n \rightarrow +\infty$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x_n) = z$ . Uma vez que  $A \subset B$ , segue que  $(x_n)$  é sequência em  $B$  e, conseqüentemente,  $z \in \omega(B)$ . Portanto,  $\omega(A) \subset \omega(B)$ .
- (v) Seja  $z \in \omega(A) \cup \omega(B)$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $z \in \omega(A)$ . Logo, existem sequências  $(x_n)$  em  $A$  e  $(t_n)$  em  $\mathbb{R}$  tais que  $t_n \rightarrow +\infty$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, x_n) = z$ . Note que, como  $A \subset A \cup B$ , então  $(x_n)$  é sequência em  $A \cup B$  e, portanto,  $z \in \omega(A \cup B)$ . Reciprocamente, seja  $z \in \omega(A \cup B)$ . Logo, existem sequências  $(x_n)$  em  $A \cup B$  e  $(t_n)$  em  $\mathbb{R}$  tais que  $t_n \rightarrow +\infty$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, x_n) = z$ . Observe que, como  $(x_n)$  é sequência em  $A \cup B$ , existem infinitos elementos de  $(x_n)$  em  $A$  ou em  $B$ ; sem perda de generalidade suponhamos que seja em  $A$ . Logo, a subsequência  $(x_{n_j})$  formada por esses elementos é tal que  $\lim_{n_j \rightarrow +\infty} \phi(t_{n_j}, x_{n_j}) = z$  e, portanto,  $z \in \omega(A) \subset \omega(A) \cup \omega(B)$ .

□

**Proposição 2.3.9** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço topológico de Hausdorff  $X$  que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade. Seja  $x \in X$ .*

(i) *Se  $A \subset X$ , então*

$$\omega(A) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\phi^t(A) ; t \geq T\}} \quad e \quad \alpha(A) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\phi^{-t}(A) ; t \geq T\}}.$$

(ii) *Se  $A \subset X$ , então  $\omega(A)$  e  $\alpha(A)$  são fechados e invariantes.*

(iii) *Se  $\mathcal{O}^+(x)$  está contida em um subconjunto compacto de  $X$ , então  $\omega(x)$  é não vazio, compacto e conexo. Se  $\mathcal{O}^-(x)$  está contido num subconjunto compacto de  $X$ , então  $\alpha(x)$  é não vazio, compacto e conexo.*

(iv) *Se  $y \in \omega(x)$ , então  $\omega(y) \subseteq \omega(x)$ , e  $\alpha(y) \subseteq \omega(x)$ . Se  $y \in \alpha(x)$ , então  $\alpha(y) \subseteq \alpha(x)$  e  $\omega(y) \subseteq \alpha(x)$ .*

Demonstração: Análogo à proposição 2.3.8, demonstraremos os resultados para  $\omega$ -limite e a demonstração para o conjunto  $\alpha$ -limite é análoga.

(i) Seja  $y \in \omega(A)$ . Pela definição de conjunto  $\omega$ -limite,

$$y \in \overline{\{\phi^t(A) ; t \geq T\}} \quad \text{para cada } T \geq 0.$$

Assim,  $\omega(A) \subseteq \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\phi^t(A) ; t \geq T\}}$ .

Seja  $y \in \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\phi^t(A) ; t \geq T\}}$ . Em particular, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $y \in \overline{\{\phi^t(A) ; t \geq n\}}$ .

Uma vez que  $X$  satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, existe uma base enumerável  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  para  $y$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  o conjunto  $B_n = \bigcap_{k=1}^n U_k$  é uma vizinhança de  $y$ . Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe um número real  $t_n \geq n$  e um elemento  $x_n \in A$  tal que  $\phi^{t_n}(x_n) \in B_n$ . Temos que  $t_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Vamos mostrar que  $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{t_n}(x_n)$ .

Seja  $V$  uma vizinhança de  $y$ . Já que  $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  é uma base para  $y$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $U_{n_0} \subseteq V$ . Assim,

$$\phi^{t_n}(x_n) \in B_n \subseteq B_{n_0} \subseteq U_{n_0} \subseteq V$$

para todo  $n \geq n_0$  e, então,  $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{t_n}(x_n)$ . Daí,  $y \in \omega(A)$ .

Portanto, como  $X$  satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade, então

$$\omega(A) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\phi^t(A) ; t \geq T\}}.$$

- (ii) Pelo item (i), para  $A \subseteq X$ , os conjuntos  $\omega(A)$  e  $\alpha(A)$  são interseções de conjuntos fechados. Portanto,  $\omega(A)$  e  $\alpha(A)$  são fechados.

Se  $y \in \omega(A)$ , então existe uma sequência  $(t_n)$  de números reais tais que  $t_n \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$  e uma sequência  $(x_n)$  de elementos de  $A$  tais que  $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{t_n}(x_n)$ .

Assim,

$$\phi^\tau(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^\tau(\phi^{t_n}(x_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi^{t_n + \tau}(x_n)$$

para cada  $\tau \in \mathbb{R}$ . Como  $t_n + \tau \rightarrow +\infty$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , temos que  $\phi^\tau(y) \in \omega(A)$ . Portanto,  $\omega(A)$  é invariante.

- (iii) Se  $\mathcal{O}^+(x)$  está contida em um subconjunto compacto de  $X$ , então  $\overline{\{\phi^t(x) ; t \geq T\}}$  é compacto para cada  $T \geq 0$ . Além disso, os conjuntos  $\{\phi^t(x) ; t \geq T\}$  são conexos para cada  $T \geq 0$  já que são as imagens dos conjuntos conexos  $[T, \infty)$  pela função contínua  $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow X$ .

Por (i), para  $A = \{x\}$ ,

$$\omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\phi^t(x) ; t \geq T\}}.$$

Desse modo,  $\omega(x)$  é a interseção de conjuntos compactos, conexos e encaixados. Portanto, pela Propriedade de Cantor (proposição A.0.5),  $\omega(x)$  é não vazio, compacto e conexo.

- (iv) Seja  $y \in \omega(x)$ . O conjunto  $\omega(x)$  é fechado e invariante por (ii). Então  $\omega(y) \subseteq \omega(x)$  e, pela proposição 2.3.8(ii),  $\alpha(y) \subseteq \omega(x)$ .

□

**Lema 2.3.10** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço topológico  $X$  que satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.*

- (i) Se  $A \subset X$ , então  $\omega(A) = \omega(\overline{A})$ ;
- (ii) Se  $A \subset X$  é fechado e invariante, então  $\omega(A) = A = \alpha(A)$ .
- (iii) Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega(\phi^t(A)) = \omega(A)$  e  $\alpha(\phi^t(A)) = \alpha(A)$ .

Demonstração:

(i) Primeiramente, observemos que para  $T \geq 0$

$$\begin{aligned} \overline{\{\phi^t(A); t \geq T\}} &\subset \overline{\{\phi^t(\bar{A}); t \geq T\}} \\ &\subset \overline{\{\phi^t(A); t \geq T\}} \\ &\subset \overline{\overline{\{\phi^t(A); t \geq T\}}} \\ &= \overline{\{\phi^t(A); t \geq T\}} \end{aligned}$$

Portanto,  $\overline{\{\phi^t(A); t \geq T\}} = \overline{\{\phi^t(\bar{A}); t \geq T\}}$ . Desse modo,

$$\omega(A) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\phi^t(A); t \geq T\}} = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\phi^t(\bar{A}); t \geq T\}} = \omega(\bar{A}).$$

(ii) Como  $A$  é fechado e invariante, segue da observação da página 18 que:

$$\omega(A) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\phi^t(A); t \geq T\}} = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{A; t \geq T\}} = \bigcap_{T \geq 0} \bar{A} = \bigcap_{T \geq 0} A = A.$$

De maneira análoga temos que  $\alpha(A) = A$ .

(iii) A afirmação é válida, pois, para  $T \geq 0$ ,

$$\{\phi^t(\phi^s(A)); t \geq T\} = \{\phi^{t+s}(A); t+s \geq T\} \text{ e } \mathbb{R} = \mathbb{R} + s.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \omega(\phi^s(A)) &= \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\phi^t(\phi^s(A)); t \geq T\}} \\ &= \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\phi^{t+s}(A); t \geq T\}} \\ &= \bigcap_{T+s \geq 0} \overline{\{\phi^{t'}(A); t' \geq T+s\}} \\ &= \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\phi^t(A); t \geq T\}} = \omega(A), \end{aligned}$$

onde  $t' = t + s$ . Analogamente teremos  $\alpha(\phi^t(A)) = \alpha(A)$ .

□

**Definição 2.3.11** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço topológico Hausdorff  $X$ . Um ponto  $x \in X$  é dito  $\omega$ -**recorrente** ou, simplesmente, **recorrente** em relação à  $\phi^t$  se  $x \in \omega(x)$ . O conjunto recorrente de  $\phi^t$ , denotado por  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\phi^t)$ , é o conjunto de todos os pontos recorrentes em relação à  $\phi^t$ , isto é,*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\phi^t) = \{x \in X ; x \in \omega(x)\}.$$

Exemplo: Seja  $p$  um ponto periódico. Segundo a proposição 2.3.7(ii) sabemos que  $\mathcal{O}(p) = \omega(p)$ . Portanto, como  $p \in \mathcal{O}(p)$ , segue que todo ponto periódico é recorrente. Em particular, todo ponto fixo é recorrente.

Assim, se  $\phi^t$  é um fluxo sobre um espaço topológico Hausdorff então

$$\text{Fix}(\phi^t) \subseteq \text{Per}(\phi^t) \subseteq \mathcal{R}(\phi^t).$$

□

**Proposição 2.3.12** *O conjunto de pontos recorrentes em relação a um fluxo  $\phi^t$  sobre um espaço topológico Hausdorff  $X$  é invariante pelo fluxo.*

Demonstração: Seja  $x \in \mathcal{R}(\phi^t)$  e seja  $\tau \in \mathbb{R}$ . Como  $x$  é recorrente,  $x \in \omega(x)$  e, pela Proposição 2.3.9(ii),  $\phi^\tau(x) \in \omega(x) = \omega(\phi^\tau(x))$ , onde a igualdade segue do Lema 2.3.10(iii). Portanto,  $\mathcal{R}(\phi^t)$  é invariante por  $\phi^t$ . □

### 2.3.3 Recorrência por Cadeias

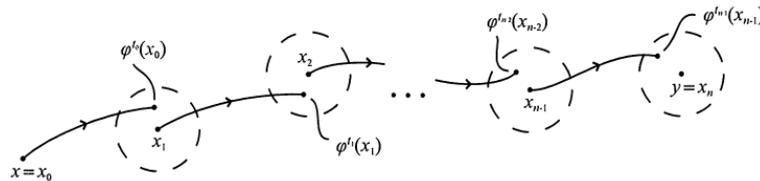
Nesta subseção introduzimos o conceito de cadeias, que admite pequenos saltos. Essa é uma generalização das trajetórias, introduzida por Conley [4], que nos leva à noção de conjuntos transitivos por cadeias.

**Definição 2.3.13** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $(X, d)$ . Dados  $\varepsilon > 0$ ,  $T > 0$  e  $x, y \in X$ , uma  $(\varepsilon, T)$ -**cadeia** de  $x$  para  $y$  em relação à  $\phi^t$  e  $d$  é um par de sequências finitas*

$$x_0 = x, \dots, x_n = y \in X \quad e \quad t_0, \dots, t_{n-1} \geq T; \quad n \in \mathbb{N}$$

tal que

$$d(\phi(t_i, x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Figura 4 – Uma  $(\varepsilon, T)$ –cadeia para um fluxo

Fonte: [1]

Observação: Note que o número  $n$  de saltos na definição de  $(\varepsilon, T)$ –cadeia não é limitado. Como a notação sugere, apenas valores pequenos de  $\varepsilon > 0$  são de interesse. Em particular, “saltos triviais” onde  $x_{i+1} = \phi(t_i, x_i)$  são permitidos.  $\square$

**Definição 2.3.14** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $(X, d)$ . Dados  $\varepsilon, T > 0$  e pontos  $x, y, z \in X$  tais que existam  $(\varepsilon, T)$ –cadeias de  $x$  para  $y$  e de  $y$  para  $z$  dadas pelos pares de seqüências*

$$x_0 = x, \dots, x_n = y \in X \quad e \quad t_0, \dots, t_{n-1} \geq T; \quad n \in \mathbb{N}$$

e

$$y_0 = y, \dots, y_m = z \in X \quad e \quad t'_0, \dots, t'_{m-1} \geq T; \quad m \in \mathbb{N},$$

a **concatenação** dessas  $(\varepsilon, T)$ –cadeias é um par de seqüências definido pela “união” das seqüências de cada  $(\varepsilon, T)$ –cadeia, a saber

$$x_0 = x, \dots, x_n = y_0 = y, \dots, y_m = z \in X \quad e \quad t_0, \dots, t_{n-1}, t'_0, \dots, t'_{m-1} \geq T; \quad n, m \in \mathbb{N}$$

Observação: Vale observarmos que a concatenação pode ser feita para uma quantidade finita de  $(\varepsilon, T)$ –cadeias, sempre concatenando uma com a seguinte tendo em vista o ponto em comum entre elas. Além disso, a concatenação de duas  $(\varepsilon, T)$ –cadeias, é uma  $(\varepsilon, T)$ –cadeia. De fato, o par de seqüências da concatenação na definição 2.3.14 pode ser reescrito por

$$x_0 = x, \dots, x_{n+m} = z \in X \quad e \quad t_0, \dots, t_{n+m-1} \geq T; \quad n + m \in \mathbb{N},$$

onde  $x_{n+j} = y_j$ , e  $t_{n+j} = t'_j$  para todo  $j \in \{0, \dots, m\}$ . Logo, pela definição 2.3.13 e pelas  $(\varepsilon, T)$ –cadeias da definição 2.3.14 esse par de seqüência é tal que

$$d(\phi(t_i, x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \quad \text{para} \quad i = 0, 1, \dots, n + m - 1$$

e, portanto, determina uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $z$ .  $\square$

**Definição 2.3.15** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico  $(X, d)$ . O conjunto **limite por cadeia** de  $x \in X$  em relação à  $\phi^t$  e  $d$  é o conjunto*

$$\Omega(x) = \bigcap_{\varepsilon, T > 0} \{y \in X ; \exists (\varepsilon, T) \text{ - cadeia de } x \text{ para } y\}.$$

**Definição 2.3.16** *Definimos a relação  $\prec$  por*

$$x \prec y \Leftrightarrow y \in \Omega(x).$$

**Proposição 2.3.17** *A relação  $\prec$  definida em 2.3.16 é transitiva.*

Demonstração: Sejam  $x, y, z \in X$  tais que  $x \prec y$  e  $y \prec z$ . Logo,  $y \in \Omega(x)$  e  $z \in \Omega(y)$ , isto é, para todos  $\varepsilon, T > 0$  existem  $(\varepsilon, T)$ -cadeias de  $x$  para  $y$  e de  $y$  para  $z$ . Concatenando essas  $(\varepsilon, T)$ -cadeias obtemos, para cada  $\varepsilon, T > 0$ , uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $z$  e, desse modo,  $z \in \Omega(x)$ , ou seja,  $x \prec z$ . Portanto, a relação é transitiva.  $\square$

**Definição 2.3.18** *Definimos a relação  $\sim$  por*

$$x \sim y \Leftrightarrow x \prec y \text{ e } y \prec x.$$

**Proposição 2.3.19** *A relação  $\sim$  definida em 2.3.18 é simétrica e transitiva.*

Demonstração: Sejam  $x, y, z \in X$ . Primeiramente, suponhamos que  $x \sim y$ . Logo, por definição,  $x \prec y$  e  $y \prec x$ . Reescrevendo temos  $y \prec x$  e  $x \prec y$  donde segue que  $y \sim x$ . Portanto,  $\sim$  é simétrica.

Por outro lado, suponhamos  $x \sim y$  e  $y \sim z$ . Assim,  $x \prec y$ ,  $y \prec x$ ,  $y \prec z$  e  $z \prec y$ . Uma vez que  $x \prec y$  e  $y \prec z$  segue da proposição 2.3.17 que  $x \prec z$ . Analogamente, segue de  $z \prec y$ ,  $y \prec x$  e da proposição 2.3.17 que  $z \prec x$ . Portanto,  $x \sim z$  e concluímos que  $\sim$  é transitiva.  $\square$

**Proposição 2.3.20** *Se  $x \sim y$ , então  $x \sim x$  e  $y \sim y$ .*

Demonstração: Sejam  $x, y \in X$  tais que  $x \sim y$ . Assim,  $x \prec y$  e  $y \prec x$ . Segue da proposição 2.3.17 que  $x \prec x$  e, conseqüentemente,  $x \sim x$ . Analogamente,  $y \prec x$  e  $x \prec y$  implicam em  $y \sim y$ .  $\square$

As proposições 2.3.19 e 2.3.20 nos levam à busca por um subconjunto de  $X$  onde a relação  $\sim$  seja uma relação de equivalência e, uma vez apresentada a simetria e transitividade desta relação, resta apenas encontrar um conjunto que garanta a reflexividade, isto é,  $x \sim x$  ou, equivalentemente,  $x \in \Omega(x)$ . Portanto, definimos assim o conjunto dos pontos recorrentes por cadeias.

**Definição 2.3.21** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico  $(X, d)$ . Um ponto  $x \in X$  é chamado **recorrente por cadeias** em relação à  $\phi^t$  e  $d$  quando  $x \in \Omega(x)$ . Denotamos por*

$$\mathcal{R}^C = \mathcal{R}^C(\phi^t) = \{x \in X ; x \in \Omega(x)\}$$

o conjunto de todos os pontos recorrentes por cadeias. O fluxo  $\phi^t$  é recorrente por cadeias se  $\mathcal{R}^C = X$ .

**Proposição 2.3.22** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico  $X$ . A relação  $\sim$  definida em 2.3.18, restrita ao conjunto recorrente por cadeias, é uma relação de equivalência.*

Demonstração: Se  $x \in \mathcal{R}^C$  então  $x \in \Omega(x)$ , ou seja,  $x \prec x$  que por sua vez implica em  $x \sim x$ . Logo  $\sim$  é reflexiva sobre  $\mathcal{R}^C$ .

A simetria e transitividade seguem imediatamente da proposição 2.3.19 uma vez que  $\mathcal{R}^C \subset X$ . Portanto, restrita à  $\mathcal{R}^C$ ,  $\sim$  é uma relação de equivalência.  $\square$

**Definição 2.3.23** *Um subconjunto não vazio  $K \subset X$ , fechado e invariante em relação ao fluxo  $\phi^t$  é dito **transitivo por cadeias** quando para cada  $x, y \in K$ ,  $x \sim y$ . O fluxo  $\phi^t$  é chamado transitivo por cadeias se  $X$  é um conjunto transitivo por cadeias.*

Observação: Note que as  $(\varepsilon, T)$ –cadeias usadas para a definição de um conjunto transitivo por cadeias  $K$  não precisam estar contidas em  $K$ . Um conjunto consistindo de pontos recorrentes

por cadeias não precisa ser transitivo por cadeias. Todo ponto em um conjunto transitivo por cadeias é recorrente por cadeias. De fato, sejam  $K$  um conjunto transitivo por cadeias e pontos  $x, y \in K$ . Segue que  $x \sim y$ . Logo, pela proposição 2.3.20,  $x \sim x$  e, daí,  $x$  é recorrente por cadeias.  $\square$

Exemplo: Considere a equação diferencial linear autônoma sobre  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

com soluções  $x(t) = (e^t x_1^0, e^t x_2^0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Agora, considere a projeção  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$  na esfera unitária  $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = 1\}$  que é um espaço métrico compacto com a métrica induzida por  $\mathbb{R}^2$  onde  $\|x\|$  denota a norma Euclidiana de  $x \in \mathbb{R}^2$ . As projeções das trajetórias  $s(t) := \pi(x(t)) = \frac{x(t)}{\|x(t)\|}$  definem um fluxo sobre a esfera unitária  $\mathbb{S}^1$ . De fato, a regra da cadeia implica que

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \frac{\dot{x}(t)\|x(t)\| - x(t)\langle \dot{x}(t), x(t) \rangle / \|x(t)\|}{\|x(t)\|^2} \\ &= \frac{Ax(t)\|x(t)\| - x(t)\langle Ax(t), x(t) \rangle / \|x(t)\|}{\|x(t)\|^2} \\ &= (A - s(t)^T A s(t) \cdot I) s(t), \end{aligned}$$

onde  $A$  é a matriz da equação  $\dot{x} = Ax$ .

Tomando  $h(s) = (A - s^T A s \cdot I) s$ , podemos escrever a igualdade acima como

$$\dot{s}(t) = h(s(t)).$$

Portanto, as trajetórias projetadas são as trajetórias de uma equação diferencial não linear deixando a esfera unitária invariante.

Para o sistema dinâmico induzido sobre a esfera unitária obtida pela projeção, todo ponto é um equilíbrio e, conseqüentemente, um conjunto  $\omega$ -limite conforme a proposição 2.3.7(ii). Como segue,

$$s(t) = \pi(x(t)) = \frac{x(t)}{\|x(t)\|} = \frac{(e^t x_1^0, e^t x_2^0)}{\sqrt{e^{2t}(x_1^0)^2 + e^{2t}(x_2^0)^2}} = \frac{(x_1^0, x_2^0)}{\sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}} = \frac{x^0}{\|x^0\|}.$$

Agora, observe que a esfera é transitiva por cadeias. De fato, dados  $\varepsilon, T > 0$  pode-se obter de qualquer ponto  $s_1$  na esfera para qualquer ponto  $s_2$  uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia construída

como se segue: fique em  $s_1$  por um tempo  $t_1 \geq T$ , então pule para outro ponto de equilíbrio com distância menor que  $\varepsilon$ . Fique lá por um tempo  $t_2 \geq T$ , e faça isso sucessivamente até que  $s_2$  seja alcançado.  $\square$

Note que, no exemplo acima, os conjuntos  $\omega$ -limites não isolados formam um único conjunto transitivo por cadeias.

**Definição 2.3.24** *Uma classe de equivalência da relação  $\sim$  em  $\mathcal{R}^C(\phi^t)$  é chamada **componente por cadeias** de  $\phi^t$ .*

*Quando  $x \sim y$ , dizemos que  $x$  e  $y$  são **equivalentes por cadeias**.*

Mostraremos que uma componente por cadeias é um conjunto transitivo por cadeias maximal.

**Proposição 2.3.25** *Toda componente por cadeias de um fluxo sobre um espaço métrico compacto é invariante pelo fluxo.*

Demonstração: Seja  $C$  uma componente por cadeias de um fluxo  $\phi^t$  sobre um espaço métrico. Sejam  $x \in C$  e  $\tau \in \mathbb{R}$ . Devemos mostrar que  $\phi(\tau, x) \in C$ . Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $T > 0$ . Iremos determinar  $(\varepsilon, T)$ -cadeias de  $\phi(\tau, x)$  para  $x$  e de  $x$  para  $\phi(\tau, x)$ .

Uma vez que  $x$  é recorrente por cadeias, existe uma  $(\varepsilon, T + |\tau|)$ -cadeia

$$x = x_0, x_1, \dots, x_n = x; \quad t_0, \dots, t_{n-1} \geq T + |\tau|$$

de  $x$  nele mesmo. Consequentemente,

$$\phi(\tau, x), x_1, \dots, x_n = x; \quad t_0 - \tau, t_1, \dots, t_{n-1} \geq T$$

é uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $\phi(\tau, x)$  para  $x$ . De fato,  $t_0 - \tau \geq T$ , pois

$$t_0 - \tau \geq T + |\tau| - \tau = \begin{cases} T & \text{se } \tau \geq 0 \\ T - 2\tau & \text{se } \tau < 0 \end{cases}$$

e  $d(\phi(t_0 - \tau, \phi(\tau, x)), x_1) = d(\phi(t_0, x_0), x_1) < \varepsilon$ .

Para obter uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $\phi(\tau, x)$ , a continuidade uniforme de  $\phi^\tau$  garante que existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) < \delta$ , então  $d(\phi(\tau, x), \phi(\tau, y)) < \varepsilon$ . Uma vez que  $x$  é recorrente por cadeias, para  $\eta = \min\{\delta, \varepsilon\}$ , existe uma  $(\eta, T + |\tau|)$ -cadeia

$$x = x_0, x_1, \dots, x_n = x; \quad t_0, \dots, t_{n-1} \geq T + |\tau|$$

de  $x$  nele mesmo. Como  $d(\phi(t_{n-1}, x_{n-1}), x) < \delta$  obtemos

$$d(\phi(t_{n-1} + \tau, x_{n-1}), \phi(\tau, x)) < \varepsilon.$$

Então,

$$x = x_0, \dots, x_{n-1}, \phi(\tau, x); \quad t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1} + \tau \geq T$$

é uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $\phi^\tau(x)$ .

Concatenando a  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $\phi(\tau, x)$  para  $x$  com a  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $\phi(\tau, x)$  criamos uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $\phi(\tau, x)$  nele mesmo. Assim,  $\phi(\tau, x)$  é um ponto recorrente por cadeias e, além disso,  $\phi(\tau, x) \sim x$ . Consequentemente,  $\phi(\tau, x)$  e  $x$  estão na mesma componente por cadeias, a saber,  $C$ .

Portanto, cada componente por cadeias de  $\phi^t$  é invariante por  $\phi^t$ . □

**Corolário 2.3.26** *O conjunto recorrente por cadeias de um fluxo sobre um espaço métrico compacto é invariante pelo fluxo.*

Demonstração: O conjunto recorrente por cadeias de um fluxo  $\phi^t$  sobre um espaço métrico é a união das componentes por cadeias de  $\phi^t$ . Pela proposição 2.3.25, cada componente por cadeias é invariante. Toda união de conjuntos invariantes é invariante, pela proposição 2.2.2(ii). Portanto, o conjunto recorrente por cadeias de  $\phi^t$  é invariante pelo fluxo. □

**Proposição 2.3.27** *O conjunto recorrente por cadeias sobre um espaço métrico compacto é fechado.*

Demonstração: Sejam  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $(X, d)$  e  $y \in \overline{\mathcal{R}^C(\phi^t)}$ . Dados  $\varepsilon, T > 0$ , devemos mostrar que  $y \in \mathcal{R}^C(\phi^t)$  construindo uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  nele mesmo.

Pela continuidade uniforme de  $\phi^T$ , existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, y) < \delta$ , então

$$d(\phi(T, x), \phi(T, y)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Uma vez que  $y$  é um ponto limite de  $\mathcal{R}^C(\phi^t)$ , existe um ponto  $x$  recorrente por cadeias tal que  $d(x, y) < \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{2}\}$ . Então,

$$y, \phi(T, x); \quad T$$

é uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  para  $\phi^T(x)$ . Como  $x$  é recorrente por cadeias, existe uma  $(\frac{\varepsilon}{2}, 2T)$ -cadeia

$$x = x_0, \dots, x_n = x; \quad t_0, \dots, t_{n-1} \geq 2T$$

de  $x$  nele mesmo. Desse modo,

$$\phi(T, x), x_1, \dots, x_{n-1}; \quad t_0 - T, t_1, \dots, t_{n-2} \geq T$$

é uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $\phi(T, x)$  para  $x_{n-1}$ . Pela desigualdade triangular,

$$d(\phi(t_{n-1}, x_{n-1}), y) \leq d(\phi(t_{n-1}, x_{n-1}), x) + d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Consequentemente,

$$x_{n-1}, y; \quad t_{n-1} \geq T$$

é uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x_{n-1}$  para  $y$ . Concatenando essas  $(\varepsilon, T)$ -cadeias, obtemos

$$y, \phi(T, x), x_1, \dots, x_{n-1}, y; \quad T, t_0 - T, t_1, \dots, t_{n-1} \geq T,$$

que é uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  nele mesmo. Portanto,  $\mathcal{R}^C(\phi^t)$  é fechado.  $\square$

As componentes por cadeias são, além de invariantes, fechadas.

**Proposição 2.3.28** *Cada componente por cadeias de um fluxo sobre um espaço métrico compacto é fechada.*

*Demonstração:* Seja  $C$  uma componente por cadeias de um fluxo  $\phi^t$  sobre um espaço métrico compacto  $(X, d)$  e seja  $z \in \overline{C}$ . Devemos mostrar que  $z \in C$ . Sejam  $y \in C$  e  $\varepsilon, T > 0$ . Mostraremos que existem  $(\varepsilon, T)$ -cadeias de  $z$  para  $y$  e de  $y$  para  $z$ .

A continuidade uniforme de  $\phi^T$  implica que existe  $\delta > 0$  tal que se  $d(x, z) < \delta$ , então

$$d(\phi(T, x), \phi(T, z)) < \varepsilon.$$

Seja  $\eta = \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ . Como  $z$  é um ponto limite de  $C$ , existe  $x \in C$  tal que  $d(x, z) < \eta$ . Uma vez que  $x, y \in C$ , existe uma  $(\eta, 2T)$ -cadeia

$$x = x_0, x_1, \dots, x_n = y; \quad t_0, t_1, \dots, t_{n-1} \geq 2T$$

de  $x$  para  $y$ . Sendo  $d(x, z) < \eta \leq \delta$ , temos

$$d(\phi^T(x), \phi^T(z)) < \varepsilon.$$

Então,

$$z, \phi(T, x), x_1, \dots, x_n = y; \quad T, t_0 - T, t_1, \dots, t_{n-1} \geq T$$

é uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $z$  para  $y$ .

Para obter uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  para  $z$ , note que existe uma  $(\frac{\varepsilon}{2}, T)$ -cadeia

$$y = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x; \quad t_0, \dots, t_{n-1} \geq T$$

de  $y$  para  $x$ . Pela desigualdade triangular

$$d(\phi(t_{n-1}, x_{n-1}), z) \leq d(\phi(t_{n-1}, x_{n-1}), x) + d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Assim,

$$y = x_0, \dots, x_{n-1}, z; \quad t_0, \dots, t_{n-1} \geq T$$

é uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  para  $z$ . Concatenando a  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $z$  para  $y$  com a  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  para  $z$  obtemos uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $z$  nele mesmo. Consequentemente,  $z$  é um ponto recorrente por cadeias e  $z \sim y$ . Assim,  $z \in C$ . Portanto, cada componente por cadeias de  $\phi^t$  é fechada.  $\square$

Agora provaremos, entre outros resultados, que uma componente por cadeias é um conjunto transitivo por cadeias maximal.

**Proposição 2.3.29** (i) *Toda componente por cadeias de um fluxo sobre um espaço métrico compacto é transitivo por cadeias em relação ao fluxo.*

(ii) *Todo conjunto transitivo por cadeias em relação a um fluxo sobre um espaço métrico compacto é um subconjunto de uma única componente por cadeias do fluxo.*

*Em particular, toda componente por cadeias é um conjunto transitivo por cadeias maximal.*

Demonstração:

- (i) Uma componente por cadeias é não vazia, uma vez que é uma classe de equivalência, é fechada, pela proposição 2.3.28, e é invariante pela proposição 2.3.25. Além disso, quaisquer dois pontos em uma componente por cadeias são equivalentes por cadeia, por definição. Portanto, uma componente por cadeias é um conjunto transitivo por cadeias.
- (ii) Pela definição 2.3.23, quaisquer dois pontos em um conjunto transitivo por cadeias são equivalentes por cadeias. Assim, cada conjunto transitivo por cadeias está contido numa componente por cadeias. Uma vez que componentes por cadeias são classes de equivalência, elas são disjuntas. Portanto, essa componente por cadeias é única e, em particular, pelo item (i), toda componente por cadeias é um conjunto transitivo por cadeias maximal. □

**Lema 2.3.30** *Seja  $X$  um espaço métrico compacto e  $\phi^t$  um fluxo sobre  $X$ . Se  $x, y \in X$  são tais que existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  então os tempos  $t_i$  podem ser tomadas de tal forma que  $t_i \in [T, 2T]$ .*

Demonstração: Se existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  então existem sequências

$$x = x_0, \dots, x_n = y, \quad t_0, \dots, t_{n-1} \geq T$$

tais que

$$d(\phi(t_i, x_i), x_{i+1}) < \varepsilon \text{ para } i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Temos que  $t_i \geq T$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Se  $t_i \leq 2T$ , para todo  $i$ , não há nada o que fazer. Se existir  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $t_j > 2T$  podemos dividir  $t_j$  em espaços de tempo maiores ou iguais a  $T$  e menores que  $2T$ , isto é,  $t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_k} \in [T, 2T]$  tais que  $\sum_{i=1}^k t_{j_i} = t_j$ . De fato,  $[T, +\infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [kT, (k+1)T]$ . Logo, se  $t_j > 2T$ , então existe  $k \geq 2$  tal que  $t_j \in [kT, (k+1)T]$  e, assim,  $t_j - (k-1)T \in [T, 2T]$ . Portanto,  $t_j = (t_j - (k-1)T) + \underbrace{T + T + \dots + T}_{k-1}$ . Por fim, definimos saltos triviais  $x_{j_{i+1}} = \phi(t_{j_i}, x_{j_i})$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$  substituindo  $x_j$  pelos pontos  $x_{j_i}$ . Fazendo isto para todo  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $t_j > 2T$  teremos uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  tal que os tempos  $t_i \in [T, 2T]$ . □

**Proposição 2.3.31** *Seja  $\phi$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ . Um conjunto  $K \subset X$  é transitivo por cadeia se, e somente se, para todos  $x, y \in K$  e todo  $\varepsilon > 0$  existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  com todos os tempos  $t_i \in [1, 2]$ .*

Demonstração: Se  $K \subset X$  é transitivo por cadeias, então para todos  $x, y \in K$  e todos  $\varepsilon, T > 0$ , existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . Pelo lema 2.3.30, dada uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia podemos tomar os tempos  $t_i \in [T, 2T]$ . Assim, para  $T = 1$ ,  $t_i \in [1, 2]$  e o resultado segue.

Para a recíproca é suficiente mostrar: “Sejam  $x, y \in K$  e seja  $\tau > 0$ . Se para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma  $(\varepsilon, \tau)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ , então para todo  $\varepsilon, T > 0$  existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ ” (pois por hipótese existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia com  $T \in (0, 2]$ ). Esse resultado, por sua vez, segue se conseguirmos mostrar que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma  $(\varepsilon, 2\tau)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ .

Pela compacidade de  $X$ , a aplicação  $\phi$  é uniformemente contínua sobre  $[0, 3\tau] \times X$ . Logo, existe  $\delta > 0$  tal que para todos  $a, b \in X$  e  $t \in [0, 3\tau]$  temos que  $d(a, b) < \delta$  implica

$$d(\phi(t, a), \phi(t, b)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Note que podemos tomar  $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{3})$ . Agora, seja uma  $(\delta, \tau)$ -cadeia  $x = x_0, \dots, x_n = y$  com tempos  $\tau_0, \dots, \tau_{n-1} \geq \tau$ . Pelo lema 2.3.30 podemos supor que  $\tau_i \in [\tau, 2\tau]$ . Também podemos supor que  $n \geq 2$ , pois podemos concatenar essa cadeia com uma cadeia de  $y$  para  $y$  (tal cadeia existe tomando, na hipótese,  $x = y$ ). Assim, existem  $q \in \mathbb{N}$  e  $r \in \{2, 3\}$  com  $n = 2q + r$ . Obtemos uma  $(\varepsilon, 2\tau)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  dada pelos pontos

$$y_0 = x, y_1 = x_2, y_2 = x_4, \dots, y_q = x_{2q}, y_{q+1} = x_n = y$$

com tempos

$$t_0 = \tau_0 + \tau_1, t_1 = \tau_2 + \tau_3, \dots, t_q = \sum_{j=2q}^{n-1} \tau_j.$$

De fato,

$$t_i = \tau_{2i} + \tau_{2i+1} \geq 2\tau \quad \text{para todo } i.$$

Segue da definição de  $(\delta, \tau)$ -cadeia e da continuidade uniforme de  $\phi$  sobre  $[0, 3\tau] \times X$  que:

Para  $i \neq q$  ou  $r = 2$ :

$$\begin{aligned}
d(\phi(t_i, y_i), y_{i+1}) &= d(\phi(\tau_{2i} + \tau_{2i+1}, x_{2i}), x_{2i+2}) \\
&< d(\phi(\tau_{2i} + \tau_{2i+1}, x_{2i}), \phi(\tau_{2i+1}, x_{2i+1})) + d(\phi(\tau_{2i+1}, x_{2i+1}), x_{2i+2}) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \delta \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Para  $i = q$  e  $r = 3$ :

$$\begin{aligned}
d(\phi(t_q, y_q), y_{q+1}) &= d(\phi(\tau_{2q} + \tau_{2q+1} + \tau_{2q+2}, x_{2q}), x_{2q+3}) \\
&< d(\phi(\tau_{2q} + \tau_{2q+1} + \tau_{2q+2}, x_{2q}), \phi(\tau_{2q+1} + \tau_{2q+2}, x_{2q+1})) + \\
&\quad d(\phi(\tau_{2q+1} + \tau_{2q+2}, x_{2q+1}), \phi(\tau_{2q+2}, x_{2q+2})) + \\
&\quad d(\phi(\tau_{2q+2}, x_{2q+2}), x_{2q+3}) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \delta \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

**Corolário 2.3.32** *Seja  $X$  um espaço métrico compacto e  $\phi^t$  um fluxo sobre  $X$ . Se para todos  $x, y \in K \subset X$  existe uma  $(\varepsilon, 1)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  então  $K$  é transitivo por cadeias.*

Demonstração: Se para todos  $x, y \in K$  existe uma  $(\varepsilon, 1)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ , então existe uma  $(\varepsilon, \tau)$ -cadeia de  $x$  para  $y$  com  $\tau \in (0, 1]$ , já que  $t_i \geq 1$ , para todo  $i$  na  $(\varepsilon, 1)$ -cadeia. Assim, pelo lema 2.3.30 podemos tomar  $t_i \in [1, 2]$ , para todo  $i$  e, conseqüentemente, pela proposição 2.3.31,  $K$  é transitivo por cadeias. □

**Proposição 2.3.33** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ . O fluxo restrito a uma componente por cadeias é transitivo por cadeias. Em particular, o fluxo restrito ao conjunto recorrente por cadeias  $\mathcal{R}^C$  é recorrente por cadeias.*

Demonstração: Uma componente transitiva por cadeias  $C$  e o conjunto recorrente por cadeias  $\mathcal{R}^C$  são invariantes pela proposição 2.3.25 e pelo corolário 2.3.26, respectivamente.

Consequentemente, é suficiente mostrar que quaisquer dois pontos em  $C$  podem ser conectados por cadeias com pontos  $x_i \in C$ . Sejam  $y, y' \in C$ . Uma vez que  $C$  é transitivo por cadeias, segundo a proposição 2.3.29(i), para cada  $p \in \mathbb{N}$  existe uma  $(\frac{1}{p}, 1)$ -cadeia, em  $X$ , de  $y$  para  $y'$ , digamos com  $x_0 = y, x_1, \dots, x_m = y' \in X$  e tempos  $T_0, \dots, T_{m-1}$ . Pelo lema 2.3.30 podemos considerar os tempos  $T_i \in [1, 2]$ . Analogamente, existe uma  $(\frac{1}{p}, 1)$ -cadeia, em  $X$ , de  $y'$  para  $y$  na qual, por conveniência, denotamos por  $x_m = y', \dots, x_n = y$  com tempos  $T_m, \dots, T_{n-1} \in [1, 2]$ . Para cada  $p \in \mathbb{N}$ , seja  $K^p$  o conjunto compacto definido por

$$K^p = \bigcup_{i=0}^n \phi([0, T_i], x_i),$$

onde  $T_n \geq 0$ . Pelo teorema de Blaschke, teorema A.0.10, existe uma subsequência de  $K^p$  convergindo na métrica de Hausdorff  $d_H$  para algum subconjunto compacto  $K \subset X$ ,  $K \neq \emptyset$ , com  $y, y' \in K$  uma vez que, para todo  $p \in \mathbb{N}$ ,  $y = \phi(0, x_0), y' = \phi(0, x_m) \in K^p$ .

**Afirmção:** Para todos  $x, z \in K$  e todo  $q \in \mathbb{N}$  existe uma  $(\frac{1}{q}, 1)$ -cadeia em  $K$  com tempos  $\tau_0, \dots, \tau_{r-1} \in [1, 2]$  de  $x$  para  $z$ .

De fato, sejam  $x, z \in K$  e  $q \in \mathbb{N}$ . Pela continuidade uniforme de  $\phi$  sobre  $[0, 2] \times X$  existe um número  $\delta \in (0, \frac{1}{3q})$  tal que  $d(a, b) < \delta$  implica

$$d(\phi(t, a), \phi(t, b)) < \frac{1}{6q}, \quad \forall t \in [0, 2], a, b \in X.$$

Escolhendo  $p \in \mathbb{N}$  com  $p > \max\{6q, \frac{1}{\delta}\}$  e  $d_H(K^p, K) < \delta$ , podemos construir uma  $(\frac{1}{q}, 1)$ -cadeia de  $x$  para  $z$  em  $K$  como desejado. Com efeito, existem pontos  $\tilde{x} = \phi(t_1, x_k)$  e  $\tilde{z} = \phi(t_2, x_l)$  em  $K^p$  com  $d(x, \tilde{x}) < \delta$ ,  $d(z, \tilde{z}) < \delta$ ,  $t_1 \in [0, T_k]$ ,  $t_2 \in [0, T_l]$  e  $k, l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $l \geq k+3$  (caso contrário, segue-se a cadeia de  $\tilde{x}$  para  $y$ , depois de volta para  $\tilde{x}$  e depois para  $\tilde{z}$ ). Desse modo, definimos uma cadeia em  $K^p$  como segue:

$$\xi_0 := \tilde{x}, \quad \xi_1 := x_{k+2}, \quad \xi_2 := x_{k+3}, \quad \dots, \quad \xi_{l-k-2} := x_{l-1}, \quad \xi_{l-k-1} := \tilde{z},$$

e tempos

$$\tau_0 := T_k - t_1 + T_{k+1}, \quad \tau_1 := T_{k+2}, \quad \tau_2 := T_{k+3}, \quad \dots, \quad \tau_{l-k-2} := T_{l-1} + t_2.$$

Note que  $\tau_0 = \underbrace{T_k - t_1}_{\geq 0} + \underbrace{T_{k+1}}_{\geq 1} \geq 1$ ,  $\tau_i = T_{k+i+1} \geq 1$  e  $\xi_j = x_{k+j+1}$  para  $i \in \{1, \dots, l-k-3\}$  e

$j \in \{1, \dots, l - k - 2\}$ . Pela escolha de  $\delta$  e  $p$  vemos que

$$\begin{aligned}
d(\phi(\tau_0, \xi_0), \xi_1) &= d(\phi(T_k - t_1 + T_{k+1}, \tilde{x}), x_{k+2}) \\
&= d(\phi(T_k - t_1 + T_{k+1}, \phi(t_1, x_k)), x_{k+2}) \\
&= d(\phi(T_k + T_{k+1}, x_k), x_{k+2}) \\
&\leq d(\phi(T_k + T_{k+1}, x_k), \phi(T_{k+1}, x_{k+1})) + d(\phi(T_{k+1}, x_{k+1}), x_{k+2}) \\
&= d(\phi(T_{k+1}, \phi(T_k, x_k)), \phi(T_{k+1}, x_{k+1})) + d(\phi(T_{k+1}, x_{k+1}), x_{k+2}) \\
&< \frac{1}{6q} + \frac{1}{p} \\
&< \frac{1}{6q} + \frac{1}{6q} \\
&= \frac{1}{3q}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
d(\phi(\tau_{l-k-2}, \xi_{l-k-2}), \xi_{l-k-1}) &= d(\phi(T_{l-1} + t_2, x_{l-1}), \tilde{z}) \\
&= d(\phi(T_{l-1} + t_2, x_{l-1}), \phi(t_2, x_l)) \\
&= d(\phi(t_2, \phi(T_{l-1}, x_{l-1})), \phi(t_2, x_l)) \\
&< \frac{1}{6q} \\
&< \frac{1}{3q}.
\end{aligned}$$

Além disso, para os outros saltos tem-se

$$d(\phi(\tau_i, \xi_i), \xi_{i+1}) = d(\phi(T_{k+i+1}, x_{k+i+1}), x_{k+i+2}) < \frac{1}{p} < \frac{1}{3q}.$$

Assim, construímos uma  $(\frac{1}{3q}, 1)$ -cadeia em  $K^p$ . Pelo lema 2.3.30, podemos assumir que todos os tempos  $\tau_i \in [1, 2]$ . Uma vez que  $d_H(K^p, K) < \delta$ , encontramos  $\eta_i \in K$  com  $d(\xi_i, \eta_i) < \delta$  para  $i = 1, \dots, l - k - 2$  e seja  $\eta_0 = x$  e  $\eta_{l-k-1} = z$ . Então, para todo  $i = 0, 1, \dots, l - k - 2$ , segue que

$$\begin{aligned}
d(\phi(\tau_i, \eta_i), \eta_{i+1}) &\leq d(\phi(\tau_i, \eta_i), \phi(\tau_i, \xi_i)) + d(\phi(\tau_i, \xi_i), \xi_{i+1}) + d(\xi_{i+1}, \eta_{i+1}) \\
&< \frac{1}{6q} + \frac{1}{3q} + \delta \\
&< \frac{1}{3q} + \frac{1}{3q} + \frac{1}{3q} \\
&= \frac{1}{q}.
\end{aligned}$$

Isso mostra que construímos uma  $(\frac{1}{q}, 1)$ -cadeia de  $x$  para  $z$  com todos  $\eta_i \in K$ .

Como  $y, y' \in K \cap C$ , segue da afirmação e da proposição 2.3.31 que  $K$  é transitivo por cadeias. Assim pelo corolário 2.3.32 e pela proposição 2.3.29(ii) temos que  $K \subset C$  e, conseqüentemente, segue que  $y, y' \in C$  podem ser conectados por cadeias com pontos em  $K \subset C$  e o resultado segue.  $\square$

Para mostrar que as componentes por cadeias de um fluxo sobre um espaço métrico compacto são exatamente as componentes conexas do conjunto recorrente por cadeias, começamos mostrando que uma componente por cadeias é um conjunto conexo.

**Proposição 2.3.34** *Se um fluxo  $\phi^t$  sobre um espaço métrico compacto  $X$  é transitivo por cadeias, então  $X$  é conexo.*

Demonstração: Se  $X$  não é conexo, então ele pode ser escrito como a união disjunta de conjuntos abertos não vazios  $V$  e  $W$ . Logo esses conjuntos são também fechados e, conseqüentemente, compactos em  $X$ . Assim, tomemos

$$\varepsilon_0 := \inf\{d(v, w) ; v \in V, w \in W\} > 0.$$

Desse modo, para  $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$  não pode existir uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de um elemento de  $V$  para um elemento de  $W$ , isto é,  $X$  não é transitivo por cadeias.  $\square$

**Corolário 2.3.35** *Toda componente por cadeias de um fluxo sobre um espaço métrico compacto é conexa.*

Demonstração: Pelas proposições 2.3.25 e 2.3.28 temos que toda componente por cadeias é invariante pelo fluxo e fechada. Logo são compactas em  $X$ . Pela proposição 2.3.33 segue que o fluxo restrito a uma componente por cadeias é transitivo por cadeias. Conseqüentemente, pela proposição 2.3.34 toda componente por cadeias é conexa.  $\square$

**Lema 2.3.36** *Sejam  $0 < k < 1$ ,  $\varepsilon, T > 0$  e  $x, y \in X$ . Se  $x \in \mathcal{R}^C$  e  $d(x, y) < k\varepsilon$ , então existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ .*

Demonstração: Seja  $x \in \mathcal{R}^C$ . Dados  $\varepsilon, T > 0$ , existe uma  $((1 - k)\varepsilon, T)$ -cadeia

$$x = x_0, \dots, x_n = x; \quad t_0, \dots, t_{n-1} \geq T$$

de  $x$  nele mesmo. Uma vez que  $d(x, y) < k\varepsilon$ , pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} d(\phi(t_{n-1}, x_{n-1}), y) &\leq d(\phi(t_{n-1}, x_{n-1}), x) + d(x, y) \\ &< (1 - k)\varepsilon + k\varepsilon \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Assim,

$$x = x_0, \dots, x_{n-1}, y; \quad t_0, \dots, t_{n-1} \geq T$$

é uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . □

O teorema à seguir provê uma caracterização das componentes por cadeias. Fornece informações fundamentais sobre a estrutura dos fluxos sobre espaços métricos compactos.

**Teorema 2.3.37** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ . As componentes por cadeias do conjunto recorrente por cadeias  $\mathcal{R}^C$  são as componentes conexas de  $\mathcal{R}^C$ .*

Demonstração: Seja  $C$  uma componente por cadeias de um fluxo  $\phi^t$  sobre um espaço métrico  $(X, d)$ . Pelo corolário 2.3.35,  $C$  é conexa. Assim, existe uma única componente conexa  $A$  de  $\mathcal{R}^C$  tal que  $C \subseteq A$ . É suficiente mostrarmos que  $A \subseteq C$ .

Seja  $y \in A$ . Vamos provar que  $y$  é equivalente por cadeias à cada ponto de  $C$ . Sejam  $x \in C$  e  $\varepsilon, T > 0$ . Construiremos  $(\varepsilon, T)$ -cadeias de  $x$  para  $y$  e de  $y$  para  $x$ . O conjunto  $\mathcal{R}^C$  é fechado pela proposição 2.3.27. Assim,  $A$  é fechado pois é uma componente conexa de um conjunto fechado. Como  $A$  é fechado e  $X$  é compacto,  $A$  é compacto. Consequentemente, existem  $z_1, \dots, z_k \in A$  tais que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B\left(z_i, \frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Uma vez que  $A$  é conexo, reindexando se necessário, existe uma coleção finita

$$\left\{ B\left(z_1, \frac{\varepsilon}{3}\right), \dots, B\left(z_n, \frac{\varepsilon}{3}\right) \right\}$$

de bolas tais que  $x \in B\left(z_1, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ ,  $y \in B\left(z_n, \frac{\varepsilon}{3}\right)$  e

$$B\left(z_i, \frac{\varepsilon}{3}\right) \cap B\left(z_{i+1}, \frac{\varepsilon}{3}\right) \neq \emptyset$$

para  $i = 1, \dots, n - 1$ . Como o ponto  $x$  é recorrente por cadeias e  $d(x, z_1) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ , pelo lema 2.3.36, existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $z_1$ .

Para cada  $i = 1, \dots, n - 1$  o ponto  $z_i$  é recorrente por cadeias e, por construção,  $d(z_i, z_{i+1}) < \frac{2\varepsilon}{3}$  então, pelo lema 2.3.36, existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $z_i$  para  $z_{i+1}$ . Concatenando essas cadeias para  $i = 1, \dots, n - 1$  obtemos uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $z_1$  para  $z_n$ .

O ponto  $z_n$  é recorrente por cadeias e  $d(z_n, y) < \frac{\varepsilon}{3}$  logo, pelo lema 2.3.36, existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $z_n$  para  $y$ .

Concatenando as cadeias de  $x$  para  $z_1$ , de  $z_1$  para  $z_n$  e de  $z_n$  para  $y$  formamos uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . Analogamente, existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  para  $x$ . Assim,  $y \in C$ . Logo,  $A \subseteq C$ . Portanto, as componentes por cadeias de  $\phi^t$  são as componentes conexas de  $\mathcal{R}^C$ .  $\square$

**Proposição 2.3.38** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ . Para todo  $x \in X$  o conjunto  $\omega(x)$  é transitivo por cadeias.*

Demonstração: Primeiramente, como  $X$  é espaço métrico segue que  $X$  satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade e pela proposição 2.3.9 itens (ii) e (iii), o conjunto  $\omega(x)$  é fechado, não vazio e invariante.

Sejam  $y, z \in \omega(x)$ . Pela continuidade de  $\phi^t$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $y_1$  com  $d(y_1, y) < \delta$  tem-se  $d(\phi(2, y_1), \phi(2, y)) < \varepsilon$ . Por definição de  $\omega(x)$  existem tempos  $S > 0$  e  $T > S + 3$  tais que

$$d(\phi(S, x), y) < \delta \quad \text{e} \quad d(\phi(T, x), z) < \varepsilon.$$

Note que

- $d(\phi(2, y), \phi(S + 2, x)) = d(\phi(2, y), \phi(2, \phi(S, x))) < \varepsilon$ ;
- $d(\phi(T - (S + 2), \phi(S + 2, x)), z) = d(\phi(T, x), z) < \varepsilon$ .

Assim, a cadeia  $y_0 = y$ ,  $y_1 = \phi(S + 2, x)$ ,  $y_2 = z$  com tempos  $t_0 = 2$ ,  $t_1 = T - (S + 2) > 1$  é uma  $(\varepsilon, 1)$ -cadeia de  $y$  para  $z$  e a afirmação segue do corolário 2.3.32.  $\square$

**Corolário 2.3.39** *Se  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ , então*

$$\mathcal{R}(\phi^t) \subset \mathcal{R}^C(\phi^t).$$

Demonstração: Seja  $x \in \mathcal{R}(\phi^t)$ . Logo,  $x \in \omega(x)$  e, pela proposição 2.3.38 segue que  $x \in \Omega(x)$ , ou seja,  $x \in \mathcal{R}^C(\phi^t)$ . Portanto,  $\mathcal{R}(\phi^t) \subset \mathcal{R}^C(\phi^t)$ .  $\square$

À seguir apresentamos um resultado que será útil ao final do capítulo 2, na construção de um exemplo, mas será demonstrado aqui por já possuímos as ferramentas necessárias para demonstrá-lo.

**Lema 2.3.40** *Todo ponto periódico é recorrente por cadeias.*

*Em particular, todo ponto fixo é recorrente por cadeias.*

Demonstração: Do exemplo da página 32 temos que  $\text{Fix}(\phi^t) \subseteq \text{Per}(\phi^t) \subseteq \mathcal{R}(\phi^t)$ . Assim, pelo Corolário 2.3.39 o resultado segue.  $\square$

**Proposição 2.3.41** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ .*

(i) *Sejam  $x, y \in X$ . Se para todos  $\varepsilon, T > 0$  existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ , então o fluxo em tempo reverso  $\phi^{-t}$  tem a propriedade que para todos  $\varepsilon, T > 0$  existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  para  $x$ .*

(ii) *Um conjunto transitivo por cadeias  $K$  para  $\phi^t$  é, também, transitivo por cadeias para o fluxo em tempo reverso.*

Demonstração: Inicialmente, vamos provar o item (i). Dados  $\varepsilon, T > 0$ , pela compacidade de  $X$ , a aplicação  $\phi$  é uniformemente contínua sobre  $[-3T, 0] \times X$ . Logo, existe  $\delta > 0$  tal que para todos  $a, b \in X$  e  $t \in [0, 3T]$  temos que  $d(a, b) < \delta$  implica  $d(\phi(-t, a), \phi(-t, b)) < \varepsilon$ .

Agora, seja uma  $(\delta, T)$ -cadeia  $x = x_0, \dots, x_n = y$  com tempos  $T_0, \dots, T_{n-1} \geq T$ . Pelo lema 2.3.30 podemos assumir que  $T_i \in [T, 2T]$ . Obtemos uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  para  $x$ , em relação à  $\phi^{-t}$ , dada pelos pontos:

$$y_0 = x_n = y, y_1 = x_{n-1}, \dots, y_n = x_0 = x$$

com tempos

$$t_0 = T_{n-1}, \dots, t_{n-1} = T_0,$$

isto é,  $x_i = y_{n-i}$  e  $T_i = t_{n-i-1}$ ; De fato, como  $d(\phi(T_i, x_i), x_{i+1}) < \delta$  com  $T_i \in [T, 2T] \subset [0, 3T]$ ,  $\forall i$ , segue que

$$\begin{aligned} d(\phi(-t_{n-i-1}, y_{n-i-1}), y_{n-i}) &= d(y_{n-i}, \phi(-t_{n-i-1}, y_{n-i-1})) \\ &= d(x_i, \phi(-T_i, x_{i+1})) \\ &= d(\phi(-T_i, \phi(T_i, x_i)), \phi(-T_i, x_{i+1})) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo,  $d(\phi(-t_j, y_j), y_{j+1}) < \varepsilon$  para todo  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ .

O item (ii) segue imediatamente de (i), uma vez que se  $K$  é transitivo por cadeias então para quaisquer  $x, y \in K$  e todos  $\varepsilon, T > 0$  existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para  $y$ . Assim, pelo item (i) existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  para  $x$  em relação ao fluxo em tempo reverso. Sendo  $x$  e  $y$  arbitrários,  $K$  é transitivo por cadeias em relação à  $\phi^{-t}$ .  $\square$

**Corolário 2.3.42** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ . Para todo  $x \in X$  o conjunto  $\alpha(x)$  é transitivo por cadeias.*

Demonstração: Uma vez que o conjunto  $\alpha(x)$  é o conjunto  $\omega$ -limite de  $x$  sob o fluxo em tempo reverso, segue das proposições 2.3.38 e 2.3.41(ii), que  $\alpha(x)$  é transitivo por cadeias.  $\square$

**Corolário 2.3.43** *Seja  $\phi^t$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ . Cada conjunto  $\omega$ -limite  $\omega(x)$  e cada conjunto  $\alpha$ -limite  $\alpha(x)$  está contido em uma componente por cadeias.*

Demonstração: O resultado segue imediatamente da proposição 2.3.38, do corolário 2.3.42 e da proposição 2.3.29(ii).  $\square$

### 3 DECOMPOSIÇÃO DE MORSE DE SISTEMAS DINÂMICOS

Neste capítulo introduziremos decomposição de Morse para sistemas dinâmicos em espaços métricos compactos e apresentaremos algumas de suas propriedades. A ideia básica é descrever a estrutura global de um fluxo por especificar subconjuntos invariantes do espaço topológico e uma ordem entre eles capturando o comportamento limite do fluxo em tempo positivo e negativo, por isso estudamos os conjuntos atratores e repulsores, sua relação com a decomposição de Morse e o conjunto recorrente por cadeias, finalizando por caracterizar a decomposição de Morse mais fina de um fluxo, quando existe, com seu conjunto recorrente por cadeias. Este capítulo é baseado principalmente nas referências [1] e [3].

**Definição 3.0.1** *Uma decomposição de Morse de  $\phi$ , sobre um espaço métrico compacto  $X$ , é uma coleção  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l\}$  de subconjuntos de  $X$  tais que:*

1. *são não vazios, dois a dois disjuntos, compactos e invariantes;*

2. *para todo  $x \in X$ , tem-se que  $\omega(x), \alpha(x) \subset \bigcup_{i=1}^l \mathcal{M}_i$ ;*

3. *se existem índices  $j_0, \dots, j_n$  e pontos  $x_1, \dots, x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^l \mathcal{M}_i$  tais que*

$$\alpha(x_i) \subset \mathcal{M}_{j_{i-1}} \text{ e } \omega(x_i) \subset \mathcal{M}_{j_i},$$

*para todo  $i = 1, \dots, n$ , então  $\mathcal{M}_{j_0} \neq \mathcal{M}_{j_n}$ .*

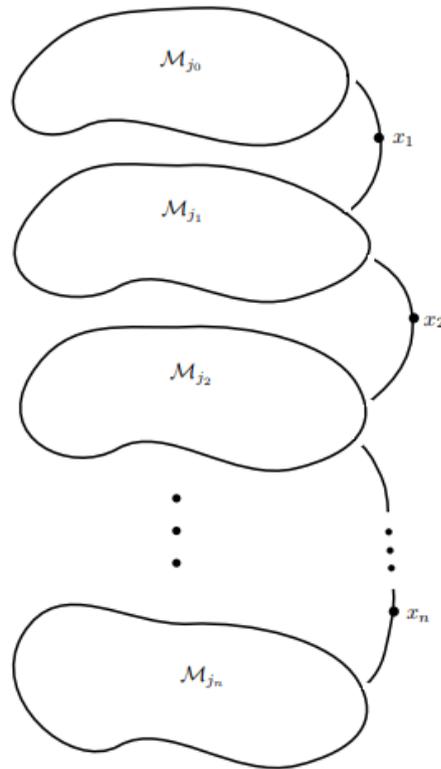
*Os elementos de uma decomposição de Morse são chamados **componentes de Morse**.*

**Proposição 3.0.2** *Seja  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l\}$  uma decomposição de Morse para um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ . Se para algum  $x \in X$  e  $j \in \{1, \dots, l\}$  tem-se  $\omega(x) \cup \alpha(x) \subset \mathcal{M}_j$ , então  $x \in \mathcal{M}_j$ .*

Demonstração: Como  $X$  é espaço métrico, segue que  $X$  é espaço de Hausdorff e satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade e, pela sua compacidade, segue da proposição 2.3.9(iii) que os conjuntos  $\alpha(x)$  e  $\omega(x)$  são não vazios. Seja  $x \in X$  tal que  $\alpha(x) \cup \omega(x) \subset \mathcal{M}_j$ . Suponhamos que  $x \notin \bigcup_{i=1}^l \mathcal{M}_i$ . Como  $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_j$  e  $\omega(x) \subset \mathcal{M}_j$ , segue do item 3 da definição 3.0.1 que  $\mathcal{M}_j \neq \mathcal{M}_j$ . Desse absurdo, temos que  $x \in \mathcal{M}_k$  para algum  $k \in \{1, \dots, l\}$ . O fato

de  $\mathcal{M}_k$  ser invariante, implica que  $\alpha(x), \omega(x) \subset \mathcal{M}_k$ . Finalmente, como as componentes de Morse são duas a duas disjuntas, temos que  $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_j$ . Portanto,  $x \in \mathcal{M}_j$ .  $\square$

Figura 5 – Uma decomposição de Morse sobre  $X$ .



**Definição 3.0.3** *Sejam  $E_1, E_2 \subset X$ . Definimos  $\preceq$  por:  $E_1 \preceq E_2$  se existem conjuntos  $E_{j_0}, E_{j_1}, \dots, E_{j_n} \subset X$  e pontos  $x_1, \dots, x_n \in X$  tais que  $E_{j_0} = E_1, E_{j_n} = E_2$  e*

$$\alpha(x_k) \subset E_{j_{k-1}} \text{ e } \omega(x_k) \subset E_{j_k}$$

*para  $k = 1, \dots, n$ .*

O resultado a seguir descreve o fluxo entre componentes de Morse e dá uma primeira informação que decomposições de Morse podem caracterizar o comportamento global de um sistema dinâmico.

**Proposição 3.0.4** *Seja  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l\}$  uma decomposição de Morse. A relação  $\preceq$  definida em 3.0.3, restrita à  $\mathcal{M}$ , é uma relação de ordem.*

*Demonstração:* Uma ordem sobre um conjunto é uma relação reflexiva, antissimétrica e transitiva. Assim, vamos mostrar que a relação  $\preceq$  atende à essas características.

- Reflexividade: Sejam  $i \in \{1, \dots, l\}$  e  $x_i \in \mathcal{M}_i$ . Temos, pela invariância de  $\mathcal{M}_i$  que  $\alpha(x_i) \subset \mathcal{M}_i$  e  $\omega(x_i) \subset \mathcal{M}_i$ . Portanto,  $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_i$ .
- Transitividade: Se  $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$  e  $\mathcal{M}_j \preceq \mathcal{M}_s$  então existem índices  $j_0, \dots, j_n$  e  $s_0, \dots, s_m$  tais que  $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{j_0}$ ,  $\mathcal{M}_j = \mathcal{M}_{j_n} = \mathcal{M}_{s_0}$ ,  $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s_m}$  e pontos  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X$  tais que

$$\alpha(x_k) \subset \mathcal{M}_{j_{k-1}} \text{ e } \omega(x_k) \subset \mathcal{M}_{j_k}; \quad \alpha(y_l) \subset \mathcal{M}_{s_{l-1}} \text{ e } \omega(y_l) \subset \mathcal{M}_{s_l}$$

para  $k = 1, \dots, n$  e  $l = 1, \dots, m$ . Assim, tomando  $j_{n+l} = s_l$  temos índices  $j_0, \dots, j_{n+m}$  tais  $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{j_0}$ ,  $\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{j_{n+m}}$  e pontos  $x_1, \dots, x_{n+m} \in X$ , onde  $x_{n+l} = y_l$ , tais

$$\alpha(x_t) \subset \mathcal{M}_{j_{t-1}} \text{ e } \omega(x_t) \subset \mathcal{M}_{j_t}$$

para  $t = 1, \dots, n+m$ . Portanto,  $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_s$ .

- Antissimetria: Sejam  $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$  e  $\mathcal{M}_j \preceq \mathcal{M}_i$ . Suponhamos que  $\mathcal{M}_i \neq \mathcal{M}_j$ . Segue de  $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$  que existem índices  $j_0, \dots, j_n$  e pontos  $x_1, \dots, x_n \in X$  tais que  $\mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_i$ ,  $\mathcal{M}_{j_n} = \mathcal{M}_j$  e

$$\alpha(x_k) \subset \mathcal{M}_{j_{k-1}} \text{ e } \omega(x_k) \subset \mathcal{M}_{j_k}$$

para  $k = 1, \dots, n$ . Como cada  $\mathcal{M}_{j_k}$  é invariante pelo fluxo podemos supor  $x_1, \dots, x_n \in X \setminus \bigcup_{k=1}^n \mathcal{M}_{j_k}$ . De modo análogo,  $\mathcal{M}_j \preceq \mathcal{M}_i$  implica que existem índices  $j_{n+1}, \dots, j_{n+m}$

e pontos  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m} \in X \setminus \bigcup_{k=n+1}^{n+m} \mathcal{M}_{j_k}$  tais que  $\mathcal{M}_{j_{n+1}} = \mathcal{M}_j$ ,  $\mathcal{M}_{j_{n+m}} = \mathcal{M}_i$  e

$$\alpha(x_k) \subset \mathcal{M}_{j_{k-1}} \text{ e } \omega(x_k) \subset \mathcal{M}_{j_k}$$

para  $k = n+1, \dots, n+m$ . Logo, existem índices  $j_0, \dots, j_{n+m}$  e pontos  $x_1, \dots, x_{n+m} \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{n+m} \mathcal{M}_{j_k}$  tais que  $\mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_i = \mathcal{M}_{j_{n+m}}$  e

$$\alpha(x_k) \subset \mathcal{M}_{j_{k-1}} \text{ e } \omega(x_k) \subset \mathcal{M}_{j_k}$$

para  $k = 1, \dots, n+m$ . Mas isso contradiz o fato de ser decomposição de Morse. Portanto,  $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_j$ .

□

Esse resultado nos apresenta que enumerando as componentes de Morse de tal forma que  $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$  implique  $i \leq j$ , a decomposição de Morse descreve o comportamento do fluxo de um sistema dinâmico a partir de uma componente de Morse menor (em relação a ordem  $\preceq$ ) para uma componente de Morse maior por trajetórias que não se iniciam em uma das componentes de Morse. Mas note que  $i < j$  não implica  $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$  e, em particular, não implica a existência de  $x \in X$  com  $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_i$  e  $\omega(x) \subset \mathcal{M}_j$ .

**Teorema 3.0.5** *Seja  $\phi$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ . Uma coleção finita de subconjuntos de  $X$  dada por  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l\}$  define uma decomposição de Morse se, e somente se,*

- (i) os elementos da coleção são não vazios e dois a dois disjuntos;
- (ii) cada  $\mathcal{M}_i$  é compacto e invariante em relação ao fluxo;
- (iii) para todo  $x \in X$  temos  $\omega(x), \alpha(x) \subset \bigcup_{i=1}^l \mathcal{M}_i$ ;
- (iv)  $\alpha(x), \omega(x) \subset \mathcal{M}_i$  implica  $x \in \mathcal{M}_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, l\}$  e todo  $x \in X$ ;
- (v) a relação  $\preceq$  definida em 3.0.3 é de ordem entre os conjuntos  $\mathcal{M}_i$

Demonstração: Se  $\mathcal{M}$  é uma decomposição de Morse, então as condições (i) – (iii) são satisfeitas por definição, a condição (iv) segue da proposição 3.0.2 e a condição (v) segue da proposição 3.0.4.

Reciprocamente, suponhamos válidas as condições (i) – (v). Vamos mostrar que  $\mathcal{M}$  é uma decomposição de Morse. Para obtermos o resultado, basta mostrarmos que a coleção  $\mathcal{M}$  satisfaz a condição (3) da definição 3.0.1. Suponhamos por absurdo que existam conjuntos  $\mathcal{M}_{j_0}, \dots, \mathcal{M}_{j_n}$  e pontos  $x_1, \dots, x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^l \mathcal{M}_i$  tais que

$$\alpha(x_k) \subset \mathcal{M}_{j_{k-1}} \quad \text{e} \quad \omega(x_k) \subset \mathcal{M}_{j_k}$$

para  $k = 1, \dots, n$  e  $\mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_{j_n}$ . Para todo  $k = 1, \dots, n - 1$ , temos que  $\mathcal{M}_{j_0} \preceq \mathcal{M}_{j_k}$  e  $\mathcal{M}_{j_k} \preceq \mathcal{M}_{j_n} = \mathcal{M}_{j_0}$ . Como  $\preceq$  é uma relação de ordem, temos que  $\mathcal{M}_{j_k} = \mathcal{M}_{j_0}$  para todo  $k = 1, \dots, n$ . Dessa forma,  $\alpha(x_k) \subset \mathcal{M}_{j_0}$  e  $\omega(x_k) \subset \mathcal{M}_{j_0}$  para todo  $k = 1, \dots, n$ . Segue pela hipótese (iv) que  $x_k \in \mathcal{M}_{j_0}$  para todo  $k = 1, \dots, n$ , contradizendo o fato de  $x_k \in X \setminus \bigcup_{i=1}^l \mathcal{M}_i$ .

Portanto, temos que  $\mathcal{M}_{j_0} \neq \mathcal{M}_{j_k}$ . □

Exemplos:

1. No fluxo do exemplo 4 da página 21 identificamos uma decomposição de Morse, a saber,  $\mathcal{M} = \{\{A\}, \{A'\}, \{B\}, \{B'\}\}$ . De fato, os conjuntos dessa coleção são não vazios, compactos invariantes, dois a dois disjuntos,  $\alpha(x), \omega(x) \subset \{A\} \cup \{A'\} \cup \{B\} \cup \{B'\}$  conforme a figura 1, a relação  $\preceq$  é de ordem entre os elementos de  $\mathcal{M}$  já que as únicas relações possíveis são  $\{A\} \preceq \{A\}, \{A\} \preceq \{B\}, \{A\} \preceq \{B'\}, \{A'\} \preceq \{A'\}, \{A'\} \preceq \{B\}, \{A'\} \preceq \{B'\}, \{B\} \preceq \{B\}$  e  $\{B'\} \preceq \{B'\}$ . Finalmente, se  $\alpha(x), \omega(x) \subset \{A\}$  então  $x = A$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^1$ , analogamente para os demais conjuntos. Portanto, pelo teorema 3.0.5 segue que  $\mathcal{M}$  é uma decomposição de Morse.
2. No fluxo do exemplo 6 da página 22 as coleções  $\mathcal{M}_1 = \{E, \{N\}, \{S\}\}$  e  $\mathcal{M}_2 = \{H_n, \{S\}\}$  são algumas das decomposições de Morse para o fluxo, onde  $E$  representa o equador da esfera  $\mathbb{S}^2_{\frac{1}{2}}$  e  $H_n$  seu hemisfério norte. De fato atendem à todas as condições do teorema 3.0.5 conforme análise feita no exemplo acima (ver figura 3). Para verificar que a relação  $\preceq$  é de ordem sobre  $\mathcal{M}_1$  e  $\mathcal{M}_2$  basta verificar que as únicas relações possíveis são  $E \preceq E, \{N\} \preceq \{N\}, \{N\} \preceq E, \{S\} \preceq \{S\}$  e  $\{S\} \preceq E$  para  $\mathcal{M}_1$  e, para  $\mathcal{M}_2$  temos  $H_n \preceq H_n, \{S\} \preceq \{S\}$  e  $\{S\} \preceq H_n$ . □

**Definição 3.0.6** *Uma decomposição de Morse  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l\}$  é chamada **mais fina** que uma decomposição de Morse  $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_k\}$ , se para todo  $j \in \{1, \dots, k\}$  existir  $i \in \{1, \dots, l\}$  tal que  $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{N}_j$ . Uma decomposição de Morse é dita **a mais fina** quando não existe outra decomposição de Morse mais fina do que ela.*

Exemplo: A decomposição de Morse  $\mathcal{M} = \{E, \{N\}, \{S\}\}$  é a decomposição de Morse mais fina para o fluxo do exemplo 6 da página 22. □

**Definição 3.0.7** *Sejam  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l\}$  e  $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_k\}$  duas decomposições de Morse para um fluxo sobre o espaço métrico compacto  $X$ . A **interseção de decomposições***

*de Morse* é o conjunto definido por

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{\mathcal{M}_i \cap \mathcal{N}_j; i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, n \text{ e } \mathcal{M}_i \cap \mathcal{N}_j \neq \emptyset\}$$

**Proposição 3.0.8** *Se  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l\}$  e  $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_k\}$  são duas decomposições de Morse para um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ , então  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$  é uma decomposição de Morse.*

Demonstração: Vamos verificar as condições da Definição 3.0.1.

1. Cada elemento de  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$  é não vazio por definição; são dois a dois disjuntos, pois são formados por componentes de outras decomposições de Morse e são compactos invariantes uma vez que essas propriedades são preservadas por interseções finitas.
2. Seja  $x \in X$ . Existem índices  $i \in \{1, \dots, l\}$  e  $j \in \{1, \dots, k\}$ , tais que  $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_i$  e  $\alpha(x) \subset \mathcal{N}_j$ . Portanto,  $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_i \cap \mathcal{N}_j$ . Analogamente para  $\omega(x)$ .
3. Suponhamos que existam  $\mathcal{M}_{i_0} \cap \mathcal{N}_{j_0}, \dots, \mathcal{M}_{i_n} \cap \mathcal{N}_{j_n}$  e pontos  $x_1, \dots, x_n \in X \setminus \bigcup_{i,j} \mathcal{M}_i \cap \mathcal{N}_j$  tais que

$$\alpha(x_k) \subset \mathcal{M}_{i_{k-1}} \cap \mathcal{N}_{j_{k-1}} \quad \text{e} \quad \omega(x_i) \subset \mathcal{M}_{i_k} \cap \mathcal{N}_{j_k}$$

para  $k = 1, \dots, n$ . Como  $\mathcal{M}_{i_k} \cap \mathcal{N}_{j_k} \subset \mathcal{M}_{i_k}$  para todo  $k = 0, \dots, n$ , segue que  $\mathcal{M}_{i_0} \neq \mathcal{M}_{i_n}$ . Logo,  $\mathcal{M}_{i_0} \cap \mathcal{N}_{j_0} \neq \mathcal{M}_{i_n} \cap \mathcal{N}_{j_n}$ .

Por (1), (2) e (3), temos que  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$  é uma decomposição de Morse. □

Observação: Como consequência da proposição 3.0.8 temos, pelo princípio de indução matemática, que uma interseção finita de decomposições de Morse para um fluxo sobre um espaço métrico  $X$  é uma decomposição de Morse.

Note que, em geral, interseções infinitas de decomposições de Morse não define uma decomposição de Morse. Além disso, não existe, necessariamente, a decomposição de Morse mais fina para um fluxo. □

Exemplo: Considere sobre o intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  a equação diferencial ordinária:

$$\dot{x} = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right); & x \in (0, 1] \\ 0; & x = 0. \end{cases}$$

Os pontos  $x_0 = 0$  e  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \geq 1$ , são pontos de equilíbrio já que  $\sin\left(\frac{\pi}{x_n}\right) = \sin(n\pi) = 0$  para  $n \geq 1$ . Consequentemente, todo conjunto  $\{x_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é invariante pelo fluxo associado, além de ser compacto.

Para todo  $n \in \mathbb{N}$  os dois conjuntos

$$\mathcal{M}_1^n := \left\{ \frac{1}{2n} \right\}, \quad \mathcal{M}_2^n := \left[ 0, \frac{1}{2n+1} \right] \cup \left[ \frac{1}{2n-1}, 1 \right]$$

formam uma decomposição de Morse  $\mathcal{M}^n = \{\mathcal{M}_1^n, \mathcal{M}_2^n\}$  do fluxo associado. De fato, para todo  $n \in \mathbb{N}$  os conjuntos são não vazios, disjuntos, compactos e invariantes. Além disso, para todo  $x \in [0, 1]$ , os conjuntos  $\alpha(x)$  e  $\omega(x)$  estão em algum desses conjuntos e, finalmente, atendem à condição (3) da Definição 3.0.1.

Vamos analisar algumas destas decomposições de Morse.

$$\mathcal{M}^1 = \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \left[ 0, \frac{1}{3} \right] \cup \{1\} \right\}, \quad \mathcal{M}^2 = \left\{ \left\{ \frac{1}{4} \right\}, \left[ 0, \frac{1}{5} \right] \cup \left[ \frac{1}{3}, 1 \right] \right\} \text{ e } \mathcal{M}^3 = \left\{ \left\{ \frac{1}{6} \right\}, \left[ 0, \frac{1}{7} \right] \cup \left[ \frac{1}{5}, 1 \right] \right\}.$$

Assim,

$$\mathcal{M}^1 \cap \mathcal{M}^2 = \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{4} \right\}, \left[ 0, \frac{1}{5} \right] \cup \left\{ \frac{1}{3} \right\} \cup \{1\} \right\}$$

e

$$\mathcal{M}^1 \cap \mathcal{M}^2 \cap \mathcal{M}^3 = \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \left\{ \frac{1}{4} \right\}, \left\{ \frac{1}{6} \right\}, \left[ 0, \frac{1}{7} \right] \cup \left\{ \frac{1}{5} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{3} \right\} \cup \{1\} \right\}$$

Note que  $\mathcal{M}^1 \cap \mathcal{M}^2$  é mais fina que as decomposições de Morse  $\mathcal{M}^1$ ,  $\mathcal{M}^2$  e  $\mathcal{M}^3$ . Ainda,  $\mathcal{M}^1 \cap \mathcal{M}^2 \cap \mathcal{M}^3$  é mais fina que todas as decomposições de Morse anteriores. Assim, realizando a interseção,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}^n$  de todas essas decomposições de Morse, a família de conjuntos  $\left\{ \left\{ \frac{1}{2n} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \right\}$  estará contida nessa interseção e, portanto,  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}^n$  não é uma decomposição de Morse, uma vez que decomposições de Morse contêm uma quantidade finita de componentes de Morse. Ainda, esse sistema não possui a decomposição de Morse mais fina uma vez que para cada  $n \in \mathbb{N}$  consegue-se uma decomposição de Morse mais fina do que as anteriores não havendo, portanto, a mais fina devido ao conjunto  $\mathbb{N}$  ser ilimitado superiormente.  $\square$

### 3.1 Atratores e Repulsores

**Definição 3.1.1** *Seja  $\phi$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ . Um subconjunto  $A \subset X$  compacto e invariante é um **atrator** se ele admite uma vizinhança  $N$  tal que*

$\omega(N) = A$ . Um **repulsor** é um subconjunto compacto e invariante  $R \subset X$  que admite uma vizinhança  $N^*$  tal que  $\alpha(N^*) = R$ .

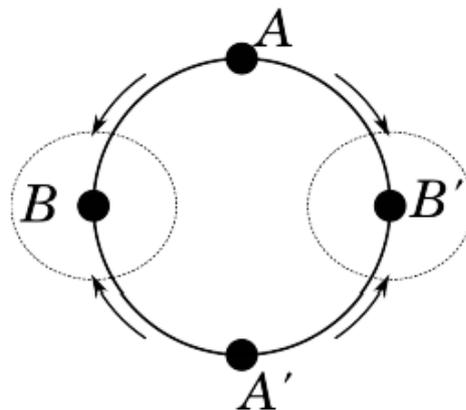
Observação:

1. Permite-se o conjunto  $\emptyset$  como um atrator ou repulsor.
2. Uma vizinhança  $N$  como na Definição 3.1.1 é chamada uma vizinhança atratora e  $N^*$  é chamada uma vizinhança repulsora.
3. Todo atrator é compacto e invariante e um repulsor é um atrator para o fluxo no tempo reverso.
4. Se  $A$  é um atrator em  $X$  e  $Y \subset X$  é um conjunto compacto invariante, então  $A \cap Y$  é um atrator para o fluxo restrito à  $Y$ .
5. Na definição 3.1.1 é suficiente que  $\omega(N) \subset A$ . De fato, se  $A$  é compacto e invariante e  $N$  é vizinhança de  $A$  com  $\omega(N) \subset A$ , então uma vez que  $A \subset N$  segue da proposição 2.3.8(iv) e do lema 2.3.10(ii) que  $A = \omega(A) \subset \omega(N)$  e, portanto,  $\omega(N) = A$ .

□

Exemplo: Na Figura 1 do exemplo 4 da página 21 além do conjunto vazio os conjuntos  $\{B\}$ ,  $\{B'\}$ ,  $\{B, B'\}$  e  $\mathbb{S}^1$  são atratores. Para os repulsores é análogo, com os pontos  $A$  e  $A'$ . □

Figura 6 – Vizinhanças atradoras (pontilhadas) em  $\mathbb{S}^1$ .



Fonte: [24]

**Proposição 3.1.2** *Se  $A$  é um atrator em um espaço métrico compacto  $X$  e  $Y \subset X$  é um conjunto compacto e invariante, então  $A \cap Y$  é um atrator para o fluxo restrito à  $Y$ .*

Demonstração: Consideremos  $Y$  com a topologia induzida e tomemos uma vizinhança atratora  $N$  de  $A$ . Se  $A \cap Y = \emptyset$  não há o que demonstrar. Seja  $A \cap Y \neq \emptyset$ . Notemos que  $N \cap Y$  é uma vizinhança de  $A \cap Y$  em  $Y$ . Como  $\omega(N) = A$ , temos que  $\omega(N) \cap Y = A \cap Y$ . Logo,  $N \cap Y$  é vizinhança de  $\omega(N) \cap Y$  em  $Y$  e, portanto, se  $x \in \omega(N) \cap Y$ , então  $x \in \text{int}_Y(N \cap Y)$  e existe uma sequência  $(\phi(t_n, x_n))$  convergindo para  $x$ , com  $t_n \rightarrow +\infty$  e  $x_n \in N$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, a sequência  $(\phi(t_n, x_n))$  está contida em  $N \cap Y$  exceto para um número finito de termos. Pela invariância de  $Y$  temos que  $x_n \in Y$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $\phi(t_n, x_n) \rightarrow x$ , com  $t_n \rightarrow +\infty$  e  $(x_n)$  sequência em  $N \cap Y$ . Ou seja,  $x \in \omega(N \cap Y)$ . Portanto,  $\omega(N) \cap Y \subset \omega(N \cap Y)$ . Desta forma, temos que  $A \cap Y \subset \omega(N \cap Y)$ . Por outro lado, como  $\omega(Y) \subset Y$  temos que  $\omega(N \cap Y) \subset Y$ . Além disso,  $\omega(N \cap Y) \subset \omega(N) = A$ . Logo,  $\omega(N \cap Y) \subset A \cap Y$ . Portanto,  $\omega(N \cap Y) = A \cap Y$ .  $\square$

Observação: A proposição 3.1.2 também vale para um repulsor  $A^*$  de  $X$ . Basta considerarmos o fluxo em tempo reverso.  $\square$

**Lema 3.1.3** *Se  $X$  é compacto,  $A \subset X$  é um atrator com vizinhança atratora  $N$  e  $K \subset X$  é um conjunto compacto tal que  $\omega(K) \subset A$ , então existe  $t^* \in \mathbb{R}$  tal que  $\overline{\phi([t^*, +\infty), K)} \subset \text{int}(N)$ . Em particular, se  $N$  for compacta, existe  $t^* \in \mathbb{R}$  tal que  $\overline{\phi([t^*, +\infty), N)} \subset \text{int}(N)$ .*

Demonstração: Seja  $V = \text{int}(N)$ . Suponha que não existe  $t^* \in \mathbb{R}$  tal que  $\overline{\phi([t^*, +\infty), K)} \subset V$ . Nesse caso, para todo  $t$  real, a sequência decrescente de compactos  $(X \setminus V) \cap \overline{\phi([t, +\infty), K)}$  não é vazia. Portanto, pela compacidade de  $X$ ,

$$\bigcap_{t \in \mathbb{R}} \left( (X \setminus V) \cap \overline{\phi([t, +\infty), K)} \right) \neq \emptyset.$$

Mas isso contradiz a hipótese de que  $\omega(K) \subset A$ , pois

$$\emptyset = (X \setminus V) \cap \omega(K) = (X \setminus V) \cap \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \overline{\phi([t, +\infty), K)} = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \left( (X \setminus V) \cap \overline{\phi([t, +\infty), K)} \right).$$

$\square$

**Lema 3.1.4** *Se  $A$  é um atrator, então o conjunto  $A^* = \{x \in X; \omega(x) \cap A = \emptyset\}$  é um repulsor.*

Demonstração: Seja  $N$  uma vizinhança atratora compacta de  $A$ . Pelo lema 3.1.3 existe  $t^* > 0$  tal que  $\overline{\phi([t^*, +\infty), N)} \subset \text{int}(N)$ . Defina um conjunto aberto  $V$  por

$$V = X \setminus \overline{\phi([t^*, +\infty), N)}.$$

Temos que  $X = N \cup V$  e  $\phi((-\infty, -t^*], V) \subset X \setminus N$ . Portanto,  $V$  é uma vizinhança de  $\alpha(V) \subset X \setminus N \subset V$ . De fato, se  $x \in V$ , e  $s \geq t^*$ , então  $\phi(s, \phi(-s, x)) = x \notin \overline{\phi([t^*, +\infty), N)}$ . Daí,  $\phi(-s, x) \notin N$ . Portanto,  $V$  é uma vizinhança repulsora. Seja  $x \in \alpha(V)$ . Pela invariância de  $\alpha(V)$  segue que  $\omega(x) \subset \alpha(V) \subset X \setminus N$ . Assim,  $\omega(x) \cap A = \emptyset$ , pois  $A \subset N$ . Logo,  $x \in A^*$ .

Por outro lado, note que  $x \in A^*$  implica  $x \notin N$ , assim  $x \in V$ . Além disso,  $\omega(x) \cap A = \emptyset$  implica, para todo  $t$ , que  $\omega(\phi(t, x)) \cap A = \emptyset$  e, conseqüentemente,  $\phi(t, x) \in A^* \subset V$ , para todo  $t$ . Assim,  $x = \phi(-t, \phi(t, x))$ , para todo  $t \geq 0$  e, portanto,  $x \in \alpha(V)$ .

Uma vez mostrado que  $A^* = \alpha(V)$  segue que  $A^*$  é compacto e invariante pela proposição 2.3.9(ii). Portanto,  $A^*$  é um repulsor.  $\square$

**Definição 3.1.5** *O conjunto  $A^*$  definido no lema 3.1.4 é chamado **repulsor complementar** de  $A$  e  $(A, A^*)$  é chamado um par **atrator-repulsor**.*

Exemplo: Considerando o fluxo do exemplo 6 da página 22 os atratores para o fluxo são os conjuntos:  $\emptyset$ ,  $E$  (equador),  $H_n$  (hemisfério norte),  $H_s$  (hemisfério sul) e  $\mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2$ . Os repulsores complementares de  $E$ ,  $H_n$  e  $H_s$  são  $E^* = \{N, S\}$ ,  $H_n^* = \{S\}$  e  $H_s^* = \{N\}$ , respectivamente.  $\square$

Observação: Note que um atrator  $A$  e seu repulsor complementar  $A^*$  são sempre disjuntos. De fato, se  $x \in A \cap A^*$ , então  $\omega(x) \cap A = \emptyset$  e  $\omega(x) \subset A$ , o que é uma contradição. Existe sempre os pares atrator-repulsor triviais  $A = X$ ,  $A^* = \emptyset$  e  $A = \emptyset$ ,  $A^* = X$ .  $\square$

**Proposição 3.1.6** *Se  $(A, A^*)$  é um par atrator-repulsor e  $x \notin A \cup A^*$ , então  $\alpha(x) \subset A^*$  e  $\omega(x) \subset A$ .*

Demonstração: Sejam  $x \notin A \cup A^*$  e  $N$  uma vizinhança atratora de  $A$ . Pela definição de  $A^*$  segue que  $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$ . Assim, existe  $t_0 > 0$  tal que  $\phi(t_0, x) \in N$ . Daí, pelo lema 2.3.10(iii),

$\omega(x) = \omega(\phi(t_0, x)) \subset \omega(N) = A$ . Agora, suponha que existe  $y \in \alpha(x) \setminus A^*$ . Assim, pela definição de  $A^*$ , temos que  $\omega(y) \cap A \neq \emptyset$ . Seja  $z \in \omega(y) \cap A$ . Usando  $\omega(y) \subset \alpha(x)$ , existe  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $\phi(-t_n, x) \rightarrow z \in A$ . Assim, para  $n$  suficientemente grande,  $\phi(-t_n, x) \in N$ . Como  $\phi(t_n, \phi(-t_n, x)) \rightarrow x$  temos que  $x \in \omega(N) = A$ , contradizendo a escolha de  $x$ . Portanto,  $\alpha(x) \subset A^*$ .  $\square$

Uma vez que podemos restringir o fluxo de um espaço  $X$  a qualquer conjunto invariante é válido considerar atratores e repulsores relativos a este conjunto invariante. Desse modo, considerando que um atrator  $A \subset X$  é invariante, podemos considerar um atrator  $A' \subset A$ , relativo à  $A$ . Vamos mostrar nos dois resultados à seguir que  $A'$  é também um atrator relativo ao espaço  $X$ . Segue da observação 3 da página 58 que o mesmo vale para um repulsor relativo a outro repulsor, para isso, basta considerarmos o fluxo inverso.

**Proposição 3.1.7** *Um conjunto compacto invariante  $A$  é um atrator se, e somente se, existe uma vizinhança compacta  $N$  de  $A$  tal que  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset N$  para todo  $x \in N \setminus A$ .*

Demonstração: Sejam  $A$  um atrator e  $N$  uma vizinhança atratora compacta de  $A$ . Seja  $x \in N \setminus A$ . Se  $\phi((-\infty, 0], x) \subset N$  então  $\alpha(x) \subset \overline{\phi((-\infty, 0], x)} \subset \overline{N} = N$ . Tomando  $y \in \alpha(x) \subset N$  temos, pela invariância de  $\alpha(x)$ , que  $\omega(y) \subset \alpha(x)$  e, como  $y \in N$  e  $\omega(N) = A$  segue que  $\omega(y) \cap A \neq \emptyset$ . Pelo argumento da proposição 3.1.6,  $x \in A$ . Isso contradiz o fato de tomarmos  $x \in N \setminus A$ . Portanto,  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset N$ , para todo  $x \in N \setminus A$ .

Reciprocamente, seja  $N$  uma vizinhança compacta de  $A$  tal que  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset N$ , para todo  $x \in N \setminus A$ .

**Afirmção 1:** Existe  $t^* > 0$  tal que  $\phi([-t^*, 0], x) \not\subset N$  para todo  $x$  no conjunto compacto  $N \cap (\overline{X \setminus N})$ . Suponhamos, por contradição, que tal  $t^*$  não exista. Logo, para todo  $n > 0$ , existe sequência  $(x_n)$  em  $N \cap (\overline{X \setminus N})$  tal que  $\phi([-n, 0], x_n) \subset N$ . Como  $(x_n)$  é sequência no compacto  $N \cap (\overline{X \setminus N})$  existe uma subsequência convergente, digamos,  $x_{n_j} \rightarrow x \in N \cap (\overline{X \setminus N})$ . Assim,  $\phi((-\infty, 0], x) \subset N$ . De fato, seja  $y \in \phi((-\infty, 0], x)$  e escrevamos  $y = \phi(-t, x)$ ,  $t \geq 0$ . Existe  $j$  tal que  $n_j > t$ . Logo,  $y = \phi(-t, x) \in \phi([-n_j, 0], x) \subset N$ . Mas isso contradiz a hipótese, uma vez que  $x \in N \cap (\overline{X \setminus N})$  e  $A \subset \text{int}(N)$  implicam em  $x \in N \setminus A$  e, daí,  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset N$ .

**Afirmção 2:** Existe vizinhança  $V$  de  $A$  tal que  $\phi([0, t^*], V) \subset N$ . Seja  $U = \phi^{-1}(N) \subset \mathbb{R} \times X$ . Pela invariância de  $A$  segue que, para todo  $x \in A$ ,  $U$  é vizinhança de  $[0, t^*] \times \{x\}$ . Para cada  $(t, x) \in [0, t^*] \times \{x\}$  temos uma vizinhança aberta de  $(t, x)$  contida em  $U$ , na forma  $I_t \times V_t^x$ .

Como  $[0, t^*] \times \{x\}$  é compacto, existe um número finito dessas vizinhanças  $I_1 \times V_1^x, \dots, I_n \times V_n^x$  cobrindo  $[0, t^*] \times \{x\}$ . Tome  $V^x = V_1^x \cap \dots \cap V_n^x$ . Desse modo,  $[0, t^*] \times V^x \subset U$ , ou seja,  $\phi([0, t^*], V^x) \subset N$ . Portanto, tomando  $V = \bigcup_{x \in A} V^x$  temos que  $V \supset A$  e é tal que  $\phi([0, t^*], V) \subset N$ .

**Afirmção 3:**  $\phi([0, +\infty), V) \subset N$ . Se  $\phi([0, +\infty), V) \not\subset N$ , então existe  $t > 0$  e  $y \in V$  tal que  $\phi(t, y) \notin N$ . Segue disso e da Afirmção 2 que  $t > t^*$ . Consideremos  $t^{**}$  definido por

$$t^{**} = \inf\{t > 0 ; \phi(t, y) \notin N\} \geq t^*.$$

Assim,  $x := \phi(t^{**}, y) \in N \cap \overline{(X \setminus N)}$ , pois é limite de sequências em cada um dos conjuntos, que são fechados. Logo,  $\phi([-t, 0], x) \subset N, \forall t \in [0, t^*]$ . De fato, seja  $s \in [-t, 0]$ . Queremos mostrar que  $\phi(s, x) \in N$ . Temos

- $\phi(s, x) = \phi(s, \phi(t^{**}, y)) = \phi(s + t^{**}, y)$ ;
- $t \in [0, t^*] \Rightarrow t \leq t^* \Rightarrow -t \geq -t^*$ .

Logo

$$0 \leq -t + t^* \leq s + t^* \leq s + t^{**} \leq t^{**}.$$

Assim, pela propriedade de ínfimo, concluímos que  $\phi(s, x) \in N$ . Mas isso contradiz a Afirmção 1. Portanto,  $\phi([0, +\infty), V) \subset N$ .

**Afirmção 4:**  $A$  é um atrator. De fato,  $A \subset V$  e, como  $A$  é fechado e invariante, segue do lema 2.3.10(ii) que  $A = \omega(A) \subset \omega(V)$ . Como  $\phi([0, +\infty), V) \subset N$  temos  $\omega(V) \subset N$ . Seja  $x \in \omega(V) \subset N$ . Como  $\omega(V)$  é invariante temos que  $\phi((-\infty, 0], x) \subset \omega(V) \subset N$ . Por hipótese,  $x \in A$ . Logo,  $\omega(V) \subset A$ . Portanto,  $\omega(V) = A$  e, com isso, segue que  $A$  é um atrator.  $\square$

**Corolário 3.1.8** *Seja  $A$  um subespaço de  $X$ . Se  $A'$  é um atrator em  $A$  e  $A$  é um atrator em  $X$  então  $A'$  é um atrator em  $X$ .*

Demonstração: Se  $A'$  é um atrator em  $A$ , segue da proposição 3.1.7 que existe uma vizinhança compacta  $V_A$  de  $A'$  em  $A$  tal que  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset V_A$  para todo  $x \in V_A \setminus A'$ . Consideremos a vizinhança compacta  $V$  de  $A'$  em  $X$  tal que  $V \cap A = V_A$ . Tomemos a vizinhança compacta  $N$  de  $A$  tal que  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset N$ , para todo  $x \in N \setminus A$ . Temos que  $V \cap N$  é uma vizinhança compacta de  $A'$  em  $X$ . Seja  $x \in (V \cap N) \setminus A'$ . Se  $x \in A$ , então  $x \in (V \cap A) \setminus A'$ ,

logo  $x \in V_A \setminus A'$  e, daí,  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset V \cap A = V_A$ . Como  $A$  é invariante, temos que  $\phi((-\infty, 0], x) \subset A$ . Logo,  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset V$  e, portanto,  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset V \cap N$ . Se  $x \notin A$ , temos que  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset N$ , pois  $x \in N \setminus A$ . Logo,  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset V \cap N$  para todo  $x \in (V \cap N) \setminus A'$  e o resultado segue da proposição 3.1.7.  $\square$

A proposição 3.1.7 implica a seguinte caracterização de pares atrator-repulsor.

**Proposição 3.1.9** *Um par  $(A, A^*)$  de conjuntos compactos invariantes disjuntos é um par atrator-repulsor se, e somente se,*

(i)  $x \in X \setminus A^*$  implica  $\phi([0, +\infty), x) \cap N \neq \emptyset$  para toda vizinhança  $N$  de  $A$ , e

(ii)  $x \in X \setminus A$  implica  $\phi((-\infty, 0], x) \cap N^* \neq \emptyset$  para toda vizinhança  $N^*$  de  $A^*$ .

Demonstração: A invariância de  $A$  e  $A^*$  junto da proposição 3.1.6 implicam que essas condições são necessárias.

Reciprocamente, suponha que (i) e (ii) valem e seja  $W$  uma vizinhança compacta de  $A$  tal que  $W \cap A^* = \emptyset$ . Assim, a condição (ii) implica que  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset W$  para todo  $x \in W \setminus A$ . Pela proposição 3.1.7 isso implica que  $A$  é um atrator. Mais ainda, segue de (i) que  $\omega(x) \cap A \neq \emptyset$  para todo  $x \in X \setminus A^*$ , então,  $\{x \in X ; \omega(x) \cap A = \emptyset\} \subset A^*$ . A igualdade segue do fato de que  $A$  e  $A^*$  são disjuntos e, para  $x \in A^*$ , segue de (ii) que  $\phi((-\infty, 0], x) \cap (X \setminus W) \neq \emptyset$ , onde  $X \setminus W$  é vizinhança de  $A^*$ . Portanto,  $A^*$  é o repulsor complementar de  $A$  pelo lema 3.1.4.  $\square$

## 3.2 Decomposição de Morse e Atratores

O seguinte resultado caracteriza decomposições de Morse via sequências de atrator-repulsor.

**Teorema 3.2.1** *Seja  $\phi$  um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$ . Uma coleção finita de subconjuntos  $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$  define uma decomposição de Morse se, e somente se, existe uma sequência estritamente crescente de atratores*

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n = X$$

tal que

$$\mathcal{M}_{n-i} = A_{i+1} \cap A_i^*, \quad \text{para } 0 \leq i \leq n-1$$

e  $A_i^*$  é o repulsor complementar de  $A_i$ .

Demonstração: Seja  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$  uma decomposição de Morse para o fluxo. Se  $n = 1$ , temos a decomposição de Morse trivial  $\mathcal{M} = \{X\}$ . A sequência de atratores é dada por

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 = X.$$

Procedendo por indução, suponhamos que o resultado é válido para valores  $m < n$ . Uma vez que  $X$  é espaço métrico, segue que  $X$  é espaço de Hausdorff e, dessa maneira, segue do corolário A.0.8 que existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $\mathcal{M}_n$  tal que  $V \cap \mathcal{M}_i = \emptyset$ , para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  e pelo lema A.0.9 existe vizinhança compacta  $U$  de  $\mathcal{M}_n$  tal que  $U \subset V$ , ou seja,  $U \cap \mathcal{M}_i = \emptyset$ , para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Se  $x \in U \setminus \mathcal{M}_n$ , temos que  $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_1 \cup \dots \cup \mathcal{M}_{n-1}$ , pois do contrário, devido à relação de ordem entre os conjuntos de Morse, teríamos  $\alpha(x), \omega(x) \subset \mathcal{M}_n$ . Logo, pela proposição 3.0.2,  $x \in \mathcal{M}_n$ , o que é uma contradição. Assim,  $\phi((-\infty, 0], x) \not\subset U$ , para todo  $x \in U \setminus \mathcal{M}_n$ . Da proposição 3.1.7 segue que  $\mathcal{M}_n$  é um atrator. Tomemos  $\mathcal{M}_n^*$  o repulsor complementar de  $\mathcal{M}_n$  em  $X$ . A coleção  $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{n-1}\}$  está contida em  $\mathcal{M}_n^*$  e define uma decomposição de Morse em  $\mathcal{M}_n^*$ . Pela hipótese de indução, existe uma sequência estritamente crescente de atratores

$$\emptyset = \hat{A}_1 \subset \hat{A}_2 \subset \dots \subset \hat{A}_n = \mathcal{M}_n^*$$

tais que  $\mathcal{M}_{n-j} = \hat{A}_{j+1} \cap \hat{A}_j^*$ , para  $j = 1, \dots, n-1$ . Observemos que  $\hat{A}_1^* = \mathcal{M}_n^*$  e  $\hat{A}_n^* = \emptyset$ . Como  $\hat{A}_i^*$  é um repulsor em  $\mathcal{M}_n^*$  e  $\mathcal{M}_n^*$  é um repulsor em  $X$ , segue do corolário 3.1.8 (considerando o fluxo em tempo reverso) que  $\hat{A}_i^*$  é um repulsor em  $X$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Dessa forma, seja  $A_i$  o atrator complementar de  $\hat{A}_i^*$  em  $X$ . Obtemos uma sequência de atratores

$$\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n = X$$

onde  $A_1 = \mathcal{M}_n$ . Como  $\mathcal{M}_n \subset A_i$  para  $i = 1, \dots, n$  temos que  $A_i^* \subset \mathcal{M}_n^*$ . Da proposição 3.1.2 temos que  $(A_i \cap \mathcal{M}_n^*, A_i^* \cap \mathcal{M}_n^*)$  é um par atrator-repulsor para o fluxo restrito à  $\mathcal{M}_n^*$ . Como  $A_i^* \cap \mathcal{M}_n^* = \hat{A}_i^*$  é o repulsor complementar de  $\hat{A}_i$  em  $\mathcal{M}_n^*$ , temos que  $A_i \cap \mathcal{M}_n^* = \hat{A}_i$ . Assim,

$$A_{i+1} \cap A_i^* = A_{i+1} \cap \mathcal{M}_n^* \cap A_i^* = \hat{A}_{i+1} \cap \hat{A}_i^* = \mathcal{M}_{n-i}$$

para  $i = 1, \dots, n-1$ . Para  $i = 0$ , temos que  $A_1 \cap A_0^* = \mathcal{M}_n$  e segue o resultado.

Reciprocamente, sejam os conjuntos  $\mathcal{M}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  definidos por uma sequência de atratores conforme o enunciado do teorema. Esses conjuntos são compactos e invariantes pois são propriedades preservadas pela interseção finita. Se  $i < j$ , então

$$\mathcal{M}_{n-i} \cap \mathcal{M}_{n-j} = A_{i+1} \cap A_i^* \cap A_{j+1} \cap A_j^* = A_{i+1} \cap A_j^* \subset A_j \cap A_j^* = \emptyset;$$

logo os conjuntos são dois a dois disjuntos.

Afirmamos que para  $x \in X$  ou  $\phi(\mathbb{R}, x) \subset \mathcal{M}_j$  para algum  $j$  ou existem índices  $i \leq j$  tais que  $\alpha(x) \subset \mathcal{M}_{n-j}$  e  $\omega(x) \subset \mathcal{M}_{n-i+1}$ . De fato, existe um menor inteiro  $i$  tal que  $\omega(x) \subset A_i$ , e existe um maior inteiro  $j$  tal que  $\alpha(x) \subset A_j^*$ . Notemos que,  $i > 0$  e  $j < n$ . Agora  $\omega(x) \not\subset A_{i-1}$ , isto é,  $x \in A_{i-1}^*$ , pois se  $x \notin A_{i-1}^*$ , então  $x \in A_{i-1}$  ou  $x \notin A_{i-1} \cup A_{i-1}^*$  em ambos os casos teremos  $\omega(x) \subset A_{i-1}$  que é uma contradição. Assim, por invariância,  $\phi(\mathbb{R}, x) \subset A_{i-1}^*$  e  $\omega(x) \subset A_{i-1}^*$ . Por outro lado,  $\alpha(x) \not\subset A_{j+1}^*$ . Se  $\phi(t, x) \notin A_{j+1}$  para algum  $t \in \mathbb{R}$  então pela proposição 3.1.6 e pelo lema 2.3.10(iv) temos que  $\alpha(x) \subset A_{j+1}^*$ , uma contradição. Logo  $\phi(\mathbb{R}, x) \subset A_{j+1}$ . Agora,  $j \geq i - 1$ , pois do contrário  $j + 1 \leq i - 1$  e, assim,  $A_{j+1} \subset A_{i-1}$ , o que implica  $\phi(\mathbb{R}, x) \subset A_{i-1}^* \cap A_{i-1} = \emptyset$ . Se  $j = i - 1$ , então  $\phi(\mathbb{R}, x) \subset A_{i-1}^* \cap A_i = \mathcal{M}_{n-i+1}$ . Se  $j > i - 1$ , então  $\mathcal{M}_{n-i+1} \neq \mathcal{M}_{n-j}$  e sabemos que  $\omega(x) \subset A_{i-1}^* \cap A_i = \mathcal{M}_{n-i+1}$  e  $\alpha(x) \subset A_j^* \cap A_{j+1} = \mathcal{M}_{n-j}$  ( $\alpha(x) \subset A_{j+1}$ , pois  $x \in \phi(\mathbb{R}, x) \subset A_{j+1}$ ). Isso prova a afirmação. Segue do teorema 3.0.5 que a coleção  $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$  é uma decomposição de Morse para o fluxo em  $X$ .  $\square$

Exemplo: Considere  $X = \mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2$  e o fluxo  $\phi$  como no exemplo 6 da página 22. Relembre os atratores e repulsores complementares desse fluxo descritos no exemplo da página 60. Tome a sequência de atratores

$$\emptyset = A_0 \subset E = A_1 \subset H_n = A_2 \subset \mathbb{S}_{\frac{1}{2}}^2 = A_3.$$

Temos que  $A_1 \cap A_0^* = E$ ,  $A_2 \cap A_1^* = \{N\}$  e  $A_3 \cap A_2^* = \{S\}$ . Assim, obtemos a decomposição de Morse  $\mathcal{M} = \{E, \{N\}, \{S\}\}$ .  $\square$

Agora construiremos os principais resultados para decomposição de Morse, entre eles, o de caracterizar a decomposição de Morse mais fina com o conjunto recorrente por cadeias  $\mathcal{R}^C$ .

Em toda essa seção, a partir daqui, consideremos um fluxo  $\phi$  sobre um espaço métrico compacto  $X$ .

**Definição 3.2.2** *Seja  $Y \subset X$  e sejam  $\varepsilon, T > 0$ , consideremos o conjunto*

$$\Omega(Y, \varepsilon, T) = \{z \in X ; \exists (\varepsilon, T)\text{-cadeia de algum } y \in Y \text{ para } z\}.$$

*Definimos o conjunto **limite por cadeias** de  $Y$  como*

$$\Omega(Y) = \bigcap_{\varepsilon, T > 0} \Omega(Y, \varepsilon, T).$$

Observação: Note que

$$\Omega(Y) = \{z \in X ; \forall \varepsilon, T > 0, \exists y \in Y \text{ e } \exists (\varepsilon, T)\text{-cadeia de } y \text{ para } z\}.$$

Para um conjunto unitário  $Y = \{x\}$  escrevemos também  $\Omega(x)$ , o que coincide com a definição 2.3.15. □

**Lema 3.2.3** *Se  $Y \subset X$ , então  $\omega(Y) \subset \Omega(Y)$ .*

Demonstração: Se  $y \in \omega(Y)$ , então existem seqüências  $(y_n)$  em  $Y$  e  $(t_n)$  em  $\mathbb{R}$  tais que  $t_n \rightarrow +\infty$  e  $\phi(t_n, y_n) \rightarrow y$ . Dados  $\varepsilon, T > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n \geq n_0$  implica  $d(\phi(t_n, y_n), y) < \varepsilon$ . Como  $t_n \rightarrow +\infty$ , podemos escolher  $t_k > \max\{t_{n_0}, T\}$ . Assim, existe um ponto  $y_k \in Y$  e um tempo  $t_k > T$  tais que  $d(\phi(t_k, y_k), y) < \varepsilon$ , ou seja, existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y_k$  para  $y$ . Logo,  $y \in \Omega(Y)$  e, portanto,  $\omega(Y) \subset \Omega(Y)$ . □

**Proposição 3.2.4** *Se  $Y \subset X$  então  $\Omega(Y)$  é invariante e fechado. Em particular,  $\omega(\Omega(Y)) = \Omega(Y)$ .*

Demonstração:  $\Omega(Y)$  é fechado, pois se  $x \in \overline{\Omega(Y)}$ , então para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $y \in \Omega(Y)$  tal que  $d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Assim, para todo  $T > 0$  existe uma  $(\frac{\varepsilon}{2}, T)$ -cadeia de algum  $z \in Y$  até  $y$ , digamos,

$$x_0 = z, \dots, x_n = y \quad \text{e} \quad t_0, \dots, t_{n-1} \geq T$$

e, portanto, substituindo  $y$  por  $x$  temos, pela desigualdade triangular

$$d(\phi(t_{n-1}, x_{n-1}), x) \leq d(\phi(t_{n-1}, x_{n-1}), y) + d(y, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tornando-se uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $z \in Y$  até  $x$ , ou seja,  $\overline{\Omega(Y)} \subset \Omega(Y)$ .

Agora, vamos mostrar que  $\Omega(Y)$  é invariante pelo fluxo. Seja  $x \in \Omega(Y)$  e seja  $s \in \mathbb{R}$ . Dados  $\varepsilon, T > 0$ , pela continuidade de  $\phi^s$ , existe  $0 < \delta_\varepsilon < \varepsilon$  tal que  $\phi^s(B(x, \delta_\varepsilon)) \subset B(\phi^s(x), \varepsilon)$ . Como  $x \in \Omega(Y)$ , existe  $y_{\delta_\varepsilon} \in Y$  e uma  $(\delta_\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y_{\delta_\varepsilon}$  para  $x$ . Substituindo o último tempo  $t_n$  dessa cadeia por  $t_n + s$ , temos uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y_{\delta_\varepsilon}$  para  $\phi(s, x)$ , pois  $d(\phi(t_n, x_n), x) < \delta_\varepsilon$  implica que  $d(\phi(t_n + s, x_n), \phi(s, x)) < \varepsilon$ . Sendo  $\varepsilon, T$  e  $s$  arbitrários, segue que  $\phi(s, x) \in \Omega(Y)$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$  e, portanto,  $\Omega(Y)$  é invariante pelo fluxo.

Por fim, sendo  $\Omega(Y)$  fechado e invariante segue do lema 2.3.10(ii) que  $\omega(\Omega(Y)) = \Omega(Y)$ .  $\square$

**Lema 3.2.5** *Se  $Y \subset X$  então para todos  $\varepsilon, T > 0$ , o conjunto  $\Omega(Y, \varepsilon, T)$  é aberto.*

Demonstração: Sejam  $x \in \Omega(Y, \varepsilon, T)$  e  $y \in Y$  tal que existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  para  $x$ . Seja  $t_n$  o último tempo dessa  $(\varepsilon, T)$ -cadeia, logo,  $d(\phi(t_n, x_n), x) < \varepsilon$ . Seja  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < r < \varepsilon - d(\phi(t_n, x_n), x)$  e tome  $B(x, r)$ . Note que, dado  $z \in B(x, r)$  temos

$$\begin{aligned} d(\phi(t_n, x_n), z) &\leq d(\phi(t_n, x_n), x) + d(x, z) \\ &< d(\phi(t_n, x_n), x) + r \\ &< d(\phi(t_n, x_n), x) + \varepsilon - d(\phi(t_n, x_n), x) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, substituindo  $x$  por  $z$  temos uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  para  $z$  e, daí,  $z \in \Omega(Y, \varepsilon, T)$ . Desse modo,  $B(x, r) \subset \Omega(Y, \varepsilon, T)$  donde concluímos que  $\Omega(Y, \varepsilon, T)$  é aberto.  $\square$

**Proposição 3.2.6** *Se  $Y \subset X$  então o conjunto  $\Omega(Y)$  é a interseção de todos os atratores que contêm  $\omega(Y)$ .*

Demonstração: Sejam  $A$  um atrator tal que  $\omega(Y) \subset A$  e  $N$  uma vizinhança atratora compacta de  $A$  disjunta de  $A^*$ . Tomando  $K = \overline{Y} \cup N$  temos que  $\omega(K) = A$ . De fato, pelo lema 2.3.10(i),  $\omega(\overline{Y}) = \omega(Y) \subset A$  e, daí,  $\overline{Y} \cap A^* = \emptyset$ . Por fim, segue da proposição 2.3.8(v), que  $\omega(K) = \omega(\overline{Y}) \cup \omega(N) = \omega(Y) \cup A = A$ . Pelo lema 3.1.3, existe  $t^* > 0$  tal que

$\overline{\phi([t^*, +\infty), K)} \subset \text{int}(N)$ . Sejam

$$0 < \varepsilon < \inf \left\{ d(y, z) ; y \notin \text{int}(N) \text{ e } z \in \overline{\phi([t^*, +\infty), K)} \right\}$$

e  $V$  uma  $\frac{\varepsilon}{2}$ -vizinhança (ver A.0.1) aberta de  $\overline{\phi([t^*, +\infty), K)}$ . Como  $\omega(Y) \subset A$ , podemos escolher um tempo  $T > t^*$  tal que  $\phi([T, +\infty), Y) \subset V$ . Seja  $y \in \Omega(Y)$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > T$  e  $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ , existem pontos  $x_0^n, x_1^n, \dots, x_{k_n}^n = y$  em  $X$ , com  $x_0^n \in Y$  e tempos  $t_0^n, t_1^n, \dots, t_{k_n-1}^n \geq n$  tais que

$$d(\phi(t_{i_n}^n, x_{i_n}^n), x_{i_n+1}^n) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como  $\phi(t_0^n, x_0^n) \in V$ , podemos tomar  $z \in \overline{\phi([t^*, +\infty), K)}$  tal que

$$d(\phi(t_0^n, x_0^n), z) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim temos

$$d(z, x_1^n) \leq d(z, \phi(t_0^n, x_0^n)) + d(\phi(t_0^n, x_0^n), x_1^n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pela escolha de  $\varepsilon$ , segue que  $x_1^n \in \text{int}(N) \subset K$ . Agora,  $\phi(t_1^n, x_1^n) \in \overline{\phi([t^*, +\infty), K)}$ , pois  $t_1^n > t^*$  e  $x_1^n \in K$  e como  $d(\phi(t_1^n, x_1^n), x_2^n) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$  temos que  $x_2^n \in K$ . Fazendo sucessivamente essa análise obtemos que  $d(\phi(t_{k_n-1}^n, x_{k_n-1}^n), y) < \frac{1}{n}$ , com  $x_{k_n-1} \in K$ . Agora, quando  $n \rightarrow +\infty$ , temos que  $\phi(t_{k_n-1}^n, x_{k_n-1}^n) \rightarrow y$  com  $t_{k_n-1}^n \rightarrow +\infty$  e  $x_{k_n-1}^n \in K$ . Logo,  $y \in \omega(K) = A$ . Portanto,  $\Omega(Y) \subset A$  e, daí,  $\Omega(Y)$  está contido na interseção de todos os atratores que contêm  $\omega(Y)$ .

Para  $\varepsilon, T > 0$ , seja  $N = \overline{\Omega(Y, \varepsilon, T)}$ . Vamos mostrar que  $A := \omega(N)$  é um atrator com vizinhança atratora  $N$ . Note que  $\Omega(Y, \varepsilon, T) \subset \text{int}(N)$ , pois  $\Omega(Y, \varepsilon, T)$  é aberto e está contido em  $N$ . Agora seja  $z \in \omega(N)$ . Existem sequências  $(t_n)$  em  $\mathbb{R}$  e  $(x_n)$  em  $N$  tais que  $t_n \rightarrow +\infty$  e  $\phi(t_n, x_n) \rightarrow z$ . Escolha  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $t_{n_0} > T$  e  $d(\phi(t_{n_0}, x_{n_0}), z) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Pela continuidade de  $\phi^{t_{n_0}}$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $y$  com  $d(y, x_{n_0}) < \delta$  temos  $d(\phi(t_{n_0}, y), \phi(t_{n_0}, x_{n_0})) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Seja  $p \in \Omega(Y, \varepsilon, T)$  com  $d(p, x_{n_0}) < \delta$ . Pela definição de  $p$ , existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de algum  $y \in Y$  para  $p$  donde obtemos

$$d(\phi(t_{n_0}, p), z) \leq d(\phi(t_{n_0}, p), \phi(t_{n_0}, x_{n_0})) + d(\phi(t_{n_0}, x_{n_0}), z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Acrescentando o ponto  $z$  e o tempo  $t_{n_0}$  à  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  para  $p$  determinamos uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $y$  para  $z$  e, assim,  $z \in \Omega(Y, \varepsilon, T)$ . Portanto,  $\omega(N) \subset \Omega(Y, \varepsilon, T) \subset \text{int}(N)$  e, com isso, mostramos que  $A := \omega(N)$  é um conjunto fechado e invariante com vizinhança atratora  $N$ , isto é,  $A$  é um atrator.

Como  $\Omega(Y) \subset \Omega(Y, \varepsilon, T)$ , temos que  $\Omega(Y) \subset N$  e, daí,  $\omega(\Omega(Y)) \subset \omega(N)$ . Uma vez que, pela proposição 3.2.4,  $\omega(\Omega(Y)) = \Omega(Y)$  e, pelo lema 3.2.3,  $\omega(Y) \subset \Omega(Y)$  temos que  $\omega(Y) \subset \Omega(Y) = \omega(\Omega(Y)) \subset \omega(N) = A$ . Assim,  $\omega(\overline{\Omega(Y, \varepsilon, T)})$  é atrator e  $\omega(Y) \subset \omega(\overline{\Omega(Y, \varepsilon, T)}) \subset \Omega(Y, \varepsilon, T)$ . Logo

$$\begin{aligned} \Omega(Y) &\subset \bigcap \{A \subset X ; A \text{ é atrator que contém } \omega(Y)\} \\ &\subset \bigcap_{\varepsilon, T > 0} \omega(\overline{\Omega(Y, \varepsilon, T)}) \\ &\subset \bigcap_{\varepsilon, T > 0} \Omega(Y, \varepsilon, T) \\ &= \Omega(Y). \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade vale em todas as inclusões.  $\square$

Observação: Essa proposição implica, em particular, que um fluxo transitivo por cadeias tem apenas atratores triviais  $A = \emptyset, X$ , pois para cada  $Y \subset X$  teremos  $\Omega(Y) = X$ .  $\square$

**Proposição 3.2.7** *O conjunto recorrente por cadeias  $\mathcal{R}^C$  satisfaz:*

$$\mathcal{R}^C = \bigcap \{A \cup A^* ; A \text{ é um atrator}\}.$$

Demonstração: Se  $A$  é um atrator e  $x \in X$ , então pela invariância de  $A$  e  $A^*$  e pela proposição 3.1.6 ou  $\omega(x) \subset A$  ou  $x \subset A^*$ . Se  $x \in \mathcal{R}^C$ , então  $x \in \Omega(x)$  e, pela proposição 3.2.6,  $x$  está em todo atrator que contém  $\omega(x)$ . Portanto,  $x \in A \cup A^*$  para todo atrator  $A$ .

Reciprocamente, se para todo atrator  $A$ ,  $x \in A \cup A^*$ , então  $x$  está em todo atrator que contém  $\omega(x)$ , pois não é possível que  $\omega(x) \subset A$  e  $x \in A^*$ , pela invariância de  $A^*$ . Portanto,

$$x \in \bigcap \{A \subset X ; A \text{ é um atrator que contém } \omega(x)\}.$$

Pela proposição 3.2.6,  $x \in \Omega(x)$  e, portanto,  $x \in \mathcal{R}^C$ .  $\square$

**Corolário 3.2.8** *Se  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$  é uma decomposição de Morse, e  $M \subset X$  é transitivo por cadeias, então existe  $\mathcal{M}_j \in \mathcal{M}$  tal que  $M \subset \mathcal{M}_j$ . Em particular,*

$$\mathcal{R}^C \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{M}_i.$$

Demonstração: Pelo teorema 3.2.1, temos uma sequência de atratores  $\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = X$ , tal que  $\mathcal{M}_{n-i} = A_{i+1} \cap A_i^*$ , para  $0 \leq i \leq n-1$ . Pela observação feita na página 35, temos que todo ponto de um conjunto transitivo por cadeias é recorrente por cadeias. Logo,  $M \subset \mathcal{R}^C$ . Para  $x \in M$ , seja  $i$  o maior índice tal que  $x \notin A_i$ . Pela proposição 3.2.7,  $x \in A_i^*$ . Assim,  $x \in A_{i+1} \cap A_i^* = \mathcal{M}_{n-i}$ . Para todo  $y \in M$ ,  $y \sim x$ , isto é,  $x$  e  $y$  são equivalentes por cadeia. Assim como para  $x$ , existe  $\mathcal{M}_{n-j}$  tal que  $y \in \mathcal{M}_{n-j}$ . Pela proposição 3.2.6 segue que  $\Omega(x) \subset A_{i+1} \cap A_i^* = \mathcal{M}_{n-i}$  e, analogamente,  $\Omega(y) \subset \mathcal{M}_{n-j}$ . Temos que  $x \in \mathcal{M}_{n-i}$ ,  $y \in \mathcal{M}_{n-j}$  e  $y \sim x$ , então  $x \in \Omega(y) \subset \mathcal{M}_{n-j}$  e  $y \in \Omega(x) \subset \mathcal{M}_{n-i}$ . Desse modo,  $\omega(x) \subset \omega(\Omega(y)) = \Omega(y) \subset \mathcal{M}_{n-j}$  e, analogamente,  $\omega(y) \subset \mathcal{M}_{n-i}$ . Logo,

$$\text{I. } \alpha(x) \subset \mathcal{M}_{n-i} \text{ e } \omega(x) \subset \mathcal{M}_{n-j} \Rightarrow \mathcal{M}_{n-i} \preceq \mathcal{M}_{n-j};$$

$$\text{II. } \alpha(y) \subset \mathcal{M}_{n-j} \text{ e } \omega(y) \subset \mathcal{M}_{n-i} \Rightarrow \mathcal{M}_{n-j} \preceq \mathcal{M}_{n-i}.$$

Por I. e II. e pela antissimetria de  $\preceq$  temos que  $\mathcal{M}_{n-i} = \mathcal{M}_{n-j}$  e, portanto,  $M \subset \mathcal{M}_{n-j}$ .

Uma vez que  $\mathcal{R}^C$  é particionado em componentes transitivas por cadeias, a última afirmação segue.  $\square$

**Lema 3.2.9** *Sejam  $E_l$  e  $E_t$  conjuntos transitivos por cadeias e considere a relação  $\preceq$  definida em 3.0.3. Se  $E_l \preceq E_t$  tal que cada  $E_{j_i}$  nessa relação seja transitivo por cadeias, então para todo  $x \in E_l$  e para todo  $y \in E_t$ , segue que  $x \prec y$ .*

Demonstração: Sejam  $E_l$  e  $E_t$  conjuntos transitivos por cadeias tais que  $E_l \preceq E_t$ . Logo, existem índices  $j_0, \dots, j_n$  com  $E_l = E_{j_0}$ ,  $E_t = E_{j_n}$  e pontos  $x_i \in X$  com

$$\alpha(x_i) \subset E_{j_{i-1}} \text{ e } \omega(x_i) \subset E_{j_i}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Sejam  $x \in E_l$  e  $y \in E_t$  pontos quaisquer. Notemos que  $x_i \in \Omega(\alpha(x_i))$  e como  $x_i$  é recorrente por cadeias segue que  $\omega(x_i) \subset \Omega(x_i)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Assim, tome  $z_1 \in \alpha(x_1) \subset E_{j_0} = E_l$  e  $z_2 \in \omega(x_1) \subset E_{j_1}$ . Segue da transitividade de  $E_l$  que  $x \prec z_1$ . Ainda,  $z_1 \prec x_1$  e  $x_1 \prec z_2$ , pois com a órbita positiva de  $x_1$  que se aproxima de  $z_2$  e com a órbita negativa que se aproxima de  $z_1$  podemos criar  $(\varepsilon, T)$ -cadeias de  $z_1$  para  $x_1$  e de  $x_1$  para  $z_2$ . Analogamente, sejam  $z_3 \in \alpha(x_2)$  e  $z_4 \in \omega(x_2)$ . Como  $\omega(x_1), \alpha(x_2) \subset E_{j_1}$ , segue da transitividade por cadeias de

$E_{j_1}$  que  $z_2 \prec z_3$ . Além disso,  $z_3 \prec x_2$  e  $x_2 \prec z_4$ .

Realizando esse processo sucessivamente, teremos

$$x \prec z_1 \prec x_1 \prec \cdots \prec z_{2n-1} \prec x_n \prec z_{2n} \prec y.$$

Portanto, pela transitividade de  $\prec$ , segue que  $x \prec y$ , para todos  $x \in E_l$  e  $y \in E_t$ .  $\square$

**Lema 3.2.10**  *$X$  é transitivo por cadeias se, e somente se, a decomposição de Morse trivial é a única existente.*

Demonstração: Pelo teorema 3.2.1 a decomposição trivial é a única existente se, e somente se, os únicos atratores são  $X$  e  $\emptyset$ . Pela proposição 3.2.6 isso acontece se, e somente se, para todo  $x \in X$ ,  $\Omega(x) = X$ . Ou seja, se e somente se,  $X$  é transitivo por cadeias.  $\square$

**Teorema 3.2.11** *Existe a decomposição de Morse mais fina se, e somente se, o conjunto recorrente por cadeias  $\mathcal{R}^C$  possui uma quantidade finita de componentes conexas. Neste caso, as componentes de Morse coincidem com as componentes por cadeia de  $\mathcal{R}^C$  e o fluxo restrito a cada componente de Morse é transitivo por cadeias e recorrente por cadeias.*

Demonstração: Se existe a decomposição de Morse  $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l\}$  mais fina, então o fluxo restrito a cada componente de Morse deve ser transitivo por cadeias. De fato, suponhamos que uma componente de Morse  $\mathcal{M}_k$  não é transitiva por cadeias e consideremos o fluxo restrito à  $\mathcal{M}_k$ . Então, pela proposição 3.2.6, existe  $x \in \mathcal{M}_k$  com  $\Omega(x) \neq \mathcal{M}_k$ . Pelo teorema 3.2.1 as componentes de Morse de um fluxo podem ser escritas via uma sequência de atratores por

$$\mathcal{M}_{n-i} = A_{i+1} \cap A_i^* \quad \text{para } 0 \leq i \leq n-1.$$

Pela invariância de  $\mathcal{M}_k$  temos  $\omega(x) \subset \mathcal{M}_k$ . Agora, proposição 3.2.6 implica que existe um atrator  $\hat{A}$  que contém  $\omega(x)$  e  $\mathcal{M}_k \not\subset \hat{A}$  (pois  $\Omega(x) \neq \mathcal{M}_k$ ). A sequência de atratores  $\emptyset \subsetneq \hat{A} \subsetneq \mathcal{M}_k$  em  $\mathcal{M}_k$  dá-nos a decomposição de Morse

$$\mathcal{M}'_1 = \mathcal{M}_k \cap \hat{A}^* = \hat{A}^*, \quad \mathcal{M}'_2 = \hat{A} \cap \mathcal{M}_k = \hat{A}$$

para o fluxo restrito à  $\mathcal{M}_k$ . Assim,  $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_{k-1}, \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}'_2, \mathcal{M}_{k+1}, \dots, \mathcal{M}_l\}$  é uma decomposição de Morse para  $X$ , mas isso contradiz a hipótese de que a decomposição de Morse

inicialmente tomada é a mais fina. Assim, mostramos que as componentes de Morse são transitivas por cadeias e, pela proposição 2.3.34, são conexas. Uma vez que são conexas e transitivas por cadeias, segue da proposição 2.3.29(ii) e do teorema 2.3.37 que cada componente de Morse na decomposição de Morse mais fina está contida em uma componente conexa do conjunto recorrente por cadeias  $\mathcal{R}^C$ . Pelo corolário 3.2.8, concluímos que  $\mathcal{M}$  é exatamente a coleção das componentes transitivas por cadeias de  $\mathcal{R}^C$ . Logo, como a quantidade de componentes de Morse é finita o resultado segue.

Reciprocamente, a quantidade finita de componentes conexas  $\mathcal{M}_i$  de  $\mathcal{R}^C$  definem uma decomposição de Morse. De fato, elas satisfazem as condições da definição 3.0.1 como mostramos a seguir.

As componentes conexas de  $\mathcal{R}^C$  são, pelo teorema 2.3.37, as componentes por cadeias de  $\mathcal{R}^C$ . Assim, pelas proposições 2.3.25 e 2.3.28, elas são fechadas e invariantes. Como  $X$  é compacto elas são, em particular, compactas. Por serem classes de equivalência, são duas a duas disjuntas e não-vazias. Para todo  $x \in X$  temos, pelo corolário 2.3.43, que  $\omega(x)$  e  $\alpha(x)$ , estão contidos cada qual numa componente conexa de  $\mathcal{R}^C$ , isto é, para todo  $x \in X$ , os conjuntos limites satisfazem  $\alpha(x), \omega(x) \subset \bigcup_{i=1}^l \mathcal{M}_i$ , onde  $\mathcal{R}^C = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_l\}$ .

Vamos mostrar que se  $x \in X$  tal que  $\alpha(x), \omega(x) \subset \mathcal{M}_j \in \mathcal{R}^C$ , então  $x \in \mathcal{M}_j$ . Basta notarmos que se  $y \in \omega(x)$ , então  $x \prec y$  e se  $z \in \alpha(x)$  então  $z \prec x$ . Portanto, se  $\omega(x)$  e  $\alpha(x)$  estão contidos numa mesma componente por cadeias, então  $y \sim z$  donde concluímos, por transitividade, que  $x$  é recorrente por cadeias e  $y \sim x$ , ou seja,  $x \in \mathcal{M}_j$ .

Agora, suponhamos que existam  $\mathcal{M}_{j_0}, \mathcal{M}_{j_1}, \dots, \mathcal{M}_{j_n}$  e  $x_1, \dots, x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^l \mathcal{M}_i$  com

$$\alpha(x_i) \subset \mathcal{M}_{j_{i-1}} \text{ e } \omega(x_i) \subset \mathcal{M}_{j_i} \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Devemos provar que  $\mathcal{M}_{j_0} \neq \mathcal{M}_{j_n}$ . Suponhamos por absurdo que  $\mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_{j_n}$ . Note que, para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $\mathcal{M}_{j_0} \preceq \mathcal{M}_{j_i} \preceq \mathcal{M}_{j_n}$ , conforme a definição 3.0.3. Pelo lema 3.2.9 concluímos que para todo  $x \in \mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_{j_n}$  e todo  $z \in \mathcal{M}_{j_i}$  teremos  $x \prec z$  e  $z \prec x$ . Logo,  $x \sim z$ . Pela maximalidade das componentes conexas e pela arbitrariedade de  $i$ , segue que  $\mathcal{M}_{j_i} = \mathcal{M}_{j_0} = \mathcal{M}_{j_n}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Assim, pelo parágrafo anterior, concluímos que  $x_i \in \mathcal{M}_{j_i}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  o que contradiz a hipótese de  $x_i \in X \setminus \bigcup_{k=1}^l \mathcal{M}_k$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Consequentemente,  $\mathcal{M}_{j_0} \neq \mathcal{M}_{j_n}$ . Daí, a quantidade finita de componentes conexas de  $\mathcal{R}^C$  definem uma decomposição de Morse. Por fim, a decomposição

de Morse  $\mathcal{M}$  dada pelas componentes conexas de  $\mathcal{R}^C$  é a mais fina. De fato, suponha que  $\mathcal{N}$  é outra decomposição de Morse. Então, dado  $M \in \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}_M = \{M \cap N ; N \in \mathcal{N}, M \cap N \neq \emptyset\}$  é uma decomposição de Morse de  $M$ . Uma vez que a restrição do fluxo a uma componente por cadeias é, pela proposição 2.3.33, transitivo por cadeias, segue do lema 3.2.10 que a decomposição  $\mathcal{N}_M$  é trivial. Em particular, não existe  $N \in \mathcal{N}$  tal que  $N \subsetneq M$ . Portanto,  $\mathcal{M}$  é a decomposição de Morse mais fina.  $\square$

Vale a pena notar que existem fluxos com quantidade não enumerável de componentes por cadeias como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo: Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$ . Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $f(a) = f(b) = 0$  e  $f(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ . Considere o fluxo  $\phi^t$ , sobre  $[a, b]$ , associado à equação diferencial

$$\dot{x} = f(x).$$

Nos referiremos a esse fluxo como o fluxo de segmento decrescente. Os pontos fixos de  $\phi^t$  são os zeros de  $f$ , assim,

$$\text{Fix}(\phi^t) = \{a, b\}.$$

Pelo lema 2.3.40, os pontos fixos são recorrentes por cadeia. Assim,

$$\{a, b\} \subseteq \mathcal{R}^C(\phi^t).$$

Mostraremos que  $\mathcal{R}^C(\phi^t) = \{a, b\}$ . Note que  $\phi^t(x)$  é uma função estritamente decrescente de  $t$  para todo  $x \in (a, b)$ , pois  $f(x) < 0$  para cada  $x \in (a, b)$ . Se  $x \in (a, b)$ , então  $x$  não é ponto fixo. Seja  $T > 0$ . Encontraremos um  $\varepsilon > 0$  tal que não exista uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia de  $x$  para ele mesmo. Primeiro, afirmamos que existe  $\delta > 0$  tal que se  $y < \phi(T, x) + \delta$ , então  $\phi(t, y) < \phi(T, x)$ ,  $\forall t \geq T$ . Isso significa que se começarmos com um ponto  $y$  menor que  $\phi(T, x) + \delta$  e seguirmos a órbita por pelo menos um tempo  $T$ , devemos terminar num ponto menor que  $\phi(T, x)$ . Seja  $\delta = x - \phi(T, x)$ . Uma vez que  $\phi^t$  é uma função estritamente decrescente de  $t$  e  $T > 0$ , temos que  $\delta > 0$ . Se  $y < \phi(T, x) + \delta = x$ , então

$$\phi(t, y) \leq \phi(T, y) < \phi(T, x) \quad \forall t \geq T,$$

pois  $\phi^T$  preserva orientação. Agora, seja  $\varepsilon = \delta$ . Suponhamos por absurdo que existe uma  $(\varepsilon, T)$ -cadeia

$$x = x_0, x_1, \dots, x_n = x; \quad t_0, t_1, \dots, t_{n-1} \geq T$$

de  $x$  nele mesmo. Se  $d$  denota a métrica canônica sobre  $[a, b]$ , então

$$|\phi(t_0, x_0) - x_1| = d(\phi(t_0, x_0), x_1) < \varepsilon = \delta.$$

Como  $t_0 \geq T$  e  $\phi(t_0, x_0)$  é uma função decrescente em relação a  $t$ ,

$$x_1 < \phi(t_0, x_0) + \delta \leq \phi(T, x_0) + \delta.$$

Sendo  $t_1 \geq T$ ,  $\phi(t_1, x_1) < \phi(T, x_0)$ . Agora,

$$|\phi(t_1, x_1) - x_2| = d(\phi(t_1, x_1), x_2) < \varepsilon = \delta,$$

então

$$x_2 < \phi(t_1, x_1) + \delta < \phi(T, x_0) + \delta.$$

Daí,

$$\phi(t_2, x_2) < \phi(T, x_0).$$

Continuando nesse processo obteremos

$$\phi(t_{n-1}, x_{n-1}) < \phi(T, x_0) < x_0.$$

Desde que  $x_n = x$  e  $t_{n-1} \geq T$ ,

$$\begin{aligned} |\phi(t_{n-1}, x_{n-1}) - x_n| &= |\phi(t_{n-1}, x_{n-1}) - x| \\ &= |x - \phi(t_{n-1}, x_{n-1})| \\ &= x - \phi(t_{n-1}, x_{n-1}) \\ &> x - \phi(T, x). \end{aligned}$$

Por outro lado, pela definição de  $\varepsilon$ ,

$$|\phi(t_{n-1}, x_{n-1}) - x_n| < \varepsilon = x - \phi(T, x).$$

Isto é uma contradição. Consequentemente  $x \notin \mathcal{R}^C(\phi^t)$ . Logo,  $\mathcal{R}^C(\phi^t) = \{a, b\}$ .

Com esse resultado geral, façamos algo mais concreto.

Seja  $\mathbf{C} \subset [0, 1]$  o conjunto ternário de Cantor (veja [2]). Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $f(x) = 0$ , para todo  $x \in \mathbf{C}$  e  $f(x) < 0$ , para todo  $x \in [0, 1] \setminus \mathbf{C}$ . Seja  $\phi^t$  o fluxo, sobre  $[0, 1]$ , associado à equação diferencial

$$\dot{x} = f(x).$$

Os pontos fixos são exatamente os zeros de  $f$ . Logo,  $\text{Fix}(\phi^t) = \mathbf{C}$ . Já que os pontos fixos são recorrentes por cadeias,  $\mathbf{C} \subseteq \mathcal{R}^C(\phi^t)$ . Afirmamos que  $\mathbf{C} = \mathcal{R}^C(\phi^t)$ . Seja  $x \in [0, 1] \setminus \mathbf{C}$ . Pela propriedade do conjunto ternário de Cantor, existem  $a, b \in \mathbf{C}$  tais que  $x \in [a, b]$  e  $(a, b) \cap \mathbf{C} = \emptyset$ . O fluxo  $\phi^t|_{[a, b]}$  é exatamente um fluxo do tipo estudado no caso geral acima. Esse estudo mostra que  $x \notin \mathcal{R}^C(\phi^t)$ . Portanto,  $\mathbf{C} = \mathcal{R}^C(\phi^t)$ .

Uma vez que o conjunto ternário de Cantor é totalmente desconexo, suas componentes conexas são precisamente seus subconjuntos unitários. Logo, como o conjunto ternário de Cantor é não enumerável, o fluxo  $\phi^t$  tem uma quantidade não enumerável de componentes conexas e, conseqüentemente, pelo teorema 3.2.11, não possui a decomposição de Morse mais fina. □

## 4 TRANSLAÇÕES NO ESPAÇO PROJETIVO

Neste capítulo, estudaremos fluxos induzidos pela ação de transformações lineares em um espaço projetivo. Para esse estudo consideramos o fluxo induzido pela ação de  $g^t$  no espaço projetivo  $\mathbb{P}(V)$  onde,  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita. Para  $t \in \mathbb{Z}$  e  $g \in \text{Gl}(V)$  temos que  $g^t$  são iterações de  $g$ , ou seja,  $g^t = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{t \text{ vezes}}$  para  $t > 0$  ou  $g^t = g^{-(-t)} = \underbrace{g^{-1} \circ \cdots \circ g^{-1}}_{-t \text{ vezes}}$  para  $t < 0$  e, para  $t \in \mathbb{R}$  e  $X \in \mathfrak{gl}(V)$ ,  $g^t = \exp(tX) \in \text{Gl}(V)$ . Ainda,  $\text{Gl}(V)$  é o grupo dos operadores de  $V$  invertíveis e  $\mathfrak{gl}(V)$  o conjunto de todos os operadores de  $V$ .

A decomposição de Jordan dos elementos do grupo linear  $\text{Gl}(V)$  determina componentes tais que caracterizam comportamentos do fluxo induzido no espaço projetivo como recorrência e recorrência por cadeias. Desse modo, os principais resultados deste capítulo são a caracterização do conjunto recorrente (veja 4.4.7) e a decomposição de Morse mais fina em termos dos pontos fixos das componentes de Jordan (veja 4.4.6). O presente capítulo é baseado principalmente em [5] e complementado por [24].

### 4.1 Espaço Projetivo

Nesta seção apresentaremos o espaço projetivo associado a um espaço vetorial  $V$ ,  $d$ -dimensional ( $d < \infty$ ).

**Definição 4.1.1** *O espaço projetivo,  $\mathbb{P}(V)$ , associado à  $V$  é definido por:*

$$\mathbb{P}(V) = \{[v]; v \in V \setminus \{0\}\}.$$

Observação: Utilizaremos a notação  $[v]$  para representar o espaço gerado por  $v \in V$ . Se  $V = \mathbb{R}^{n+1}$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ , então utilizamos a notação  $\mathbb{P}^n$  para representar  $\mathbb{P}(V)$ .  $\square$

**Proposição 4.1.2** *Se  $U \subset V$ ,  $tU \subset U$  para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $[w] \in \mathbb{P}(U)$ , então  $w \in U$ .*

Demonstração: Seja  $[w] \in \mathbb{P}(U)$ . Logo,  $[w] = \{tw \in V; t \in \mathbb{R}\}$ . Assim, se  $u \in [w]$ ,  $u \neq 0$ , então existe  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $u = tw$ . Uma vez que, por hipótese  $tU \subset U$  para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , segue que  $u = tw \in U$ , para todo  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Portanto, em particular,  $w \in U$ .  $\square$

**Proposição 4.1.3** *Seja  $\mathbb{P}(V)$  o espaço projetivo associado ao espaço vetorial normado  $V$ . Se  $d : \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{R}$  é a aplicação definida por  $([v], [w]) \mapsto d([v], [w]) = \min \left\{ \left\| \frac{v}{\|v\|} - \frac{w}{\|w\|} \right\|, \left\| \frac{v}{\|v\|} + \frac{w}{\|w\|} \right\| \right\}$  então  $d$  é uma métrica em  $\mathbb{P}(V)$ .*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que  $d$  está bem definida.

Note que para todos  $v, w \in V$  temos  $\left\| \frac{v}{\|v\|} - \frac{w}{\|w\|} \right\|, \left\| \frac{v}{\|v\|} + \frac{w}{\|w\|} \right\| \in \mathbb{R}$  e, portanto, existe  $\min \left\{ \left\| \frac{v}{\|v\|} - \frac{w}{\|w\|} \right\|, \left\| \frac{v}{\|v\|} + \frac{w}{\|w\|} \right\| \right\}$ . Assim, para assegurarmos a boa definição de  $d$ , precisamos provar que essa aplicação independe do representante das classes  $[v]$  e  $[w]$ . Sejam  $v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$  tais que  $[v_1] = [v_2]$  e  $[w_1] = [w_2]$ . Logo, existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $v_1 = av_2$  e  $w_1 = bw_2$ .

$$\begin{aligned} d([v_1], [w_1]) &= \min \left\{ \left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} - \frac{w_1}{\|w_1\|} \right\|, \left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} + \frac{w_1}{\|w_1\|} \right\| \right\} \\ &= \min \left\{ \left\| \frac{av_2}{|a|\|v_2\|} - \frac{bw_2}{|b|\|w_2\|} \right\|, \left\| \frac{av_2}{|a|\|v_2\|} + \frac{bw_2}{|b|\|w_2\|} \right\| \right\} \\ &= \min \left\{ \left\| \frac{v_2}{\|v_2\|} - \frac{w_2}{\|w_2\|} \right\|, \left\| \frac{v_2}{\|v_2\|} + \frac{w_2}{\|w_2\|} \right\| \right\} \\ &= d([v_2], [w_2]). \end{aligned}$$

Agora vejamos que  $d$  é uma métrica. Sejam  $v, w, z \in V$ . Sem perda de generalidade, consideremos  $\|v\| = \|w\| = \|z\| = 1$ .

$$\begin{aligned} d([v], [w]) = 0 &\iff \|v - w\| = 0 \text{ ou } \|v + w\| = 0 \\ &\iff v = w \text{ ou } v = -w \\ &\iff [v] = [w]. \end{aligned}$$

Note também que

$$d([v], [w]) = \min \left\{ \underbrace{\|v - w\|}_{\geq 0}, \underbrace{\|v + w\|}_{\geq 0} \right\} \geq 0.$$

Ainda,

$$\begin{aligned} d([v], [w]) &= \min\{\|v - w\|, \|v + w\|\} \\ &= \min\{\|-(v - w)\|, \|w + v\|\} \\ &= \min\{\|w - v\|, \|w + v\|\} \\ &= d([w], [v]). \end{aligned}$$

Agora, para a desigualdade triangular, observemos que:

$$\begin{aligned}\|v - w\| &= \|v - z + z - w\| \leq \|z - v\| + \|z - w\|; \text{ e} \\ \|v - w\| &= \|v + z - z - w\| \leq \|z + v\| + \|z + w\|.\end{aligned}$$

Assim,  $\|v - w\| \leq \min\{\|z - v\| + \|z - w\|, \|z + v\| + \|z + w\|\}$  e, analogamente,  $\|v + w\| \leq \min\{\|z - v\| + \|z + w\|, \|z + v\| + \|z - w\|\}$ . Daí,

$$\begin{aligned}d([v], [w]) &= \min\{\|v - w\|, \|v + w\|\} \\ &\leq \min\{\|z - v\| + \|z - w\|, \|z + v\| + \|z + w\|, \|z - v\| + \|z + w\|, \|z + v\| + \|z - w\|\} \\ &\leq \min\{\|z - v\|, \|z + v\|\} + \min\{\|z - w\|, \|z + w\|\} \\ &= d([z], [v]) + d([z], [w]).\end{aligned}$$

Portanto, pelos parágrafos anteriores, segue que  $d$  é uma métrica para  $\mathbb{P}(V)$ .  $\square$

**Corolário 4.1.4** *O espaço projetivo  $\mathbb{P}(V)$  é um espaço topológico compacto, conexo e de Hausdorff.*

Demonstração: Pela proposição anterior,  $(\mathbb{P}(V), d)$  é um espaço métrico e, uma vez que todo espaço métrico é de Hausdorff, segue que  $\mathbb{P}(V)$  é espaço de Hausdorff. A compacidade e conexidade é demonstrada em 5.2.5.  $\square$

## 4.2 Decomposição de Jordan

Esta seção dedica-se a apresentar os conceitos gerais acerca da decomposição de Jordan aditiva e multiplicativa de endomorfismos de  $V$ . Uma vez que faremos uso da decomposição de Jordan multiplicativa como ferramenta para os resultados principais desse trabalho, não faremos a demonstração da existência e unicidade dessas decomposições.

Considerando um espaço vetorial real  $V$  de dimensão finita e  $T$  um operador linear de  $V$ , denotemos  $V_{\mathbb{C}}$  o complexificado de  $V$ , isto é,  $V_{\mathbb{C}} = \{v + iw; v, w \in V\}$  onde  $V$  é identificado naturalmente por  $V = \{v + i0; v \in V\}$ . Dessa maneira, estendemos  $T$  à  $V_{\mathbb{C}}$  definindo  $T_{\mathbb{C}}(v + iw) = T(v) + iT(w)$  de modo que, assim, identificamos  $\mathfrak{gl}(V)$  com o

subconjunto das transformações em  $\mathfrak{gl}(V_{\mathbb{C}})$  que aplicam  $V \subset V_{\mathbb{C}}$  em  $V$  e, ainda, identificamos  $\mathrm{Gl}(V)$  como subconjunto de  $\mathrm{Gl}(V_{\mathbb{C}})$ .

**Definição 4.2.1 (Aditivo)** *Um operador linear  $T : V \rightarrow V$  é chamado:*

- **Nilpotente** se existir  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n = 0$ ;
- **Semissimples** se  $T$  é diagonalizável quando visto como um operador sobre  $V_{\mathbb{C}}$ ;
- **Hiperbólico** se  $T$  é semissimples e seus autovalores são todos reais;
- **Elíptico** se  $T$  é semissimples e seus autovalores são puramente imaginários.

Todos os operadores lineares de  $V$  podem ser escritos unicamente como a soma de três operadores lineares, sendo um elíptico, um hiperbólico e um nilpotente.

**Teorema 4.2.2** *Se  $T \in \mathfrak{gl}(V)$ , então  $T$  pode ser escrito unicamente como a soma*

$$T = E + H + N,$$

*onde  $E$  é elíptico,  $H$  é hiperbólico,  $N$  é nilpotente e  $E$ ,  $H$  e  $N$  comutam.*

Vale observar que é possível determinar  $E$ ,  $H$  e  $N$  por meio de polinômios reais que dependem das componentes real e imaginária dos autovalores de  $T$ .

Para o caso multiplicativo, faz-se necessário novos conceitos.

**Definição 4.2.3 (Multiplicativo)** *Um operador linear  $T : V \rightarrow V$  é chamado:*

- **Unipotente** se  $T - I$  é nilpotente;
- **Hiperbólico** se  $T$  é semissimples e seus autovalores são todos reais positivos;
- **Elíptico** se  $T$  é semissimples e seus autovalores têm valor absoluto igual a 1.

Finalmente o resultado à seguir nos dá a decomposição de Jordan multiplicativa.

**Teorema 4.2.4** *Se  $g \in \mathrm{Gl}(V)$ , então  $g$  pode ser escrito unicamente como um produto*

$$g = e.h.u,$$

*onde  $e$  é elíptico,  $h$  é hiperbólico,  $u$  é unipotente e  $e$ ,  $h$  e  $u$  comutam.*

Observação: Uma vez que os autovalores de  $e$  têm valor absoluto igual a 1 e a matriz que representa o operador linear  $u$  pode ser escrita de tal forma que sua diagonal principal tenha as entradas iguais à 1 segue que o módulo dos autovalores de  $g$  coincide com o módulo dos autovalores de  $h$ .  $\square$

A demonstração dos resultados sobre esse tema apresentados nessa seção e demais abordagens convenientes podem ser consultadas em [18], [24] (capítulo 2, seção 2.1, p.49 – 70), [6] (Lema IX.7.1, p. 430 - multiplicativa) e [8] (Proposição 4.2, p.17 - aditiva).

### 4.3 Dinâmica de Translações

No capítulo 5 abordaremos, com mais ênfase, o fluxo  $g^t$  em  $\mathbb{P}(V)$  induzido por uma ação onde  $g^t[v] = [g^t v]$  e, para esse fluxo, consideraremos sua decomposição de Jordan multiplicativa, a saber,  $g = e.h.u$  em que  $e = e^E$ ,  $h = e^H$  e  $u = e^N$ . Para o caso discreto,  $g^t = (e.h.t)^t = e^t.h^t.u^t$  onde a última igualdade se dá pela comutatividade dos elementos  $e$ ,  $h$  e  $u$  e, pela unicidade da decomposição de Jordan, essa é a decomposição de  $g^t$ . Para o caso contínuo,  $g^t = e^{tX} = e^{t(E+H+N)} = e^{tE+tH+tN}$  e, uma vez que  $E$ ,  $H$  e  $N$  comutam, segue que  $g^t = e^{tE}.e^{tH}.e^{tN} = e^t.h^t.u^t$ . Pela unicidade da decomposição de Jordan, essa é a decomposição de  $g^t$ . Para os resultados à seguir, consideramos  $g^t$  com sua respectiva decomposição de Jordan.

**Lema 4.3.1** *Se  $e \in \text{Gl}(V)$  é elíptica, então podemos escolher uma norma em  $V$ , tal que  $e^t$  é uma isometria para todo  $t$ .*

Demonstração: Uma vez que  $e \in \text{Gl}(V)$  é elíptica, existe uma base de  $V_{\mathbb{C}}$  formada por autovetores  $v_i$  de  $e$ . Definimos a seguinte norma em  $V_{\mathbb{C}}$ :

$$\|v\| = \max |\beta_i|, \quad \text{para } v = \sum_i \beta_i v_i.$$

Como todos os autovetores de  $e^t$  têm norma 1 e os vetores  $v_i$  são autovetores de  $e$ , temos que  $e^t$  é uma isometria nessa norma. De fato, seja  $v \in V_{\mathbb{C}}$ , logo  $v = \sum_i \beta_i v_i$ . Assim,

$$\begin{aligned} \|e(v)\| &= \left\| \sum_i \beta_i e(v_i) \right\| \\ &= \left\| \sum_i \beta_i \lambda_i v_i \right\| \\ &= \max \|\beta_i \lambda_i\| \\ &= \max |\beta_i| \cdot |\lambda_i| \\ &= \max |\beta_i| \\ &= \|v\| \end{aligned}$$

Basta então restringir a norma à  $V$ . A restrição de  $e^t$  à  $V$  continua sendo uma isometria.  $\square$

**Lema 4.3.2** *Seja  $V = U \oplus W$  e seja  $x_n = u_n + w_n$  uma sequência com  $u_n \in U$  e  $w_n \in W$ . Suponha que  $u_n \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e que  $\lim \frac{w_n}{\|u_n\|} = 0$ . Passando para o espaço projetivo; se  $[x_n] \in \mathbb{P}(V)$  converge para  $[x] \in \mathbb{P}(V)$ , então  $[x] \in \mathbb{P}(U)$ .*

Demonstração: Sem perda de generalidade podemos supor que  $\|u_n\| = 1$  e que  $\lim w_n = 0$  já que

$$[x_n] = \left[ \frac{x_n}{\|u_n\|} \right] = \left[ \frac{u_n}{\|u_n\|} + \frac{w_n}{\|u_n\|} \right] \text{ e } \lim \frac{w_n}{\|u_n\|} = 0.$$

Uma vez que  $\dim V < \infty$ , segue que  $\dim U < \infty$  e, assim,  $U$  é fechado em  $V$ . Ainda, sendo  $\|u_n\| = 1$ , temos que  $u_n$  pertence à esfera em  $U$  que é compacta. Desse modo, existe subsequência convergente  $u_{n_k} \rightarrow u \in U$ . Então,

$$[x] = \lim_{k \rightarrow \infty} [x_{n_k}] = \lim_{k \rightarrow \infty} [u_{n_k} + w_{n_k}] = [u] \in \mathbb{P}(U),$$

onde a última igualdade advém da continuidade da projeção  $[\cdot]$ .  $\square$

Observação: Seja  $V$  um espaço vetorial normado com uma norma  $\|\cdot\|$ , utilizamos  $\|\cdot\|$  também para denotar a norma de um operador linear sobre  $V$ . Sendo, portanto,  $\|\cdot\|$  uma norma sobre  $\mathfrak{gl}(V)$ , conforme definição à seguir.  $\square$

**Definição 4.3.3** *Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais normados e  $B(V, W)$  o conjunto de todas as aplicações lineares de  $V$  em  $W$ . Definimos a seguinte norma em  $B(V, W)$*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : B(V, W) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ T &\longmapsto \|T\| := \sup \{\|Tv\|; v \in V, \|v\| = 1\} \end{aligned}$$

**Lema 4.3.4** *Fixe uma norma  $\|\cdot\|$  em  $V$ . Se  $h = I$ , então para cada  $x \neq 0$  existe  $\varepsilon_x > 0$  tal que  $\|g^t x\| > \varepsilon_x$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Demonstração: Pela forma canônica de Jordan, em uma base apropriada,  $u$  pode ser escrita na forma triangular superior com “uns” na diagonal (já que qualquer transformação nilpotente, numa base apropriada, pode ser escrita como uma matriz triangular superior com valor 0 na diagonal). Escrevemos  $x$  nessa base como  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ , onde  $x_k$  é a última coordenada não nula de  $x$ . Então,  $u^t$  fixa a última coordenada  $x_k$  de  $x$ . Dessa forma, se tomarmos a norma euclidiana  $\|\cdot\|_1$  relativa à essa base, teremos que

$$\|u^t x\|_1 \geq |x_k| \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tomando a norma  $\|\cdot\|_2$  na qual  $e$  é uma isometria, temos que  $\|v\|_2 \geq C \cdot \|v\|_1$ , para todo  $v \in V$ , onde  $C > 0$  já que quaisquer duas normas definidas em  $V$  são equivalentes.

Uma vez que, por hipótese,  $g^t = e^t u^t$ , temos que

$$\|g^t x\|_2 = \|e^t u^t x\|_2 = \|u^t x\|_2 \geq C \|u^t x\|_1 \geq C |x_k|, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, usando a equivalência das normas em  $V$ , temos que existe  $D > 0$  tal que  $\|v\| \geq D \|v\|_2$  e, assim,

$$\|g^t x\| \geq D \|g^t x\|_2 \geq D \cdot C |x_k|.$$

O resultado segue tomando  $\varepsilon_x > D \cdot C |x_k|$ . □

**Definição 4.3.5** *Seja  $T \in B(V, V)$ . Definimos o raio espectral de  $T$  por*

$$r(T) = \max\{|\lambda|; \lambda \text{ é um autovalor de } T_{\mathbb{C}}\}.$$

**Lema 4.3.6** *Seja  $g \in \text{Gl}(V)$ . Se  $r(g) < 1$ , então  $\|g^t\| \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ .*

Demonstração: Seja  $g^t = e^t h^t u^t$  a decomposição de Jordan do fluxo linear  $g^t$ . Seja  $\beta = \{v_1, \dots, v_d\}$  base de  $V$  formada por autovetores de  $h^t$ . Considere o produto interno em  $V$  tal que  $\beta$  seja ortogonal e a norma  $\|\cdot\|_3$  associada a esse produto interno. Temos que essa norma é equivalente à  $\|\cdot\|$ .

**Afirmção 1:**  $\|h^t\| \leq c.r(g^t)$ ,  $c > 0$ .

De fato, dado  $v \in V$  e escrevendo  $v$  como combinação linear dos elementos de  $\beta$ , temos

$$\begin{aligned} \|h^t v\|_3^2 &= \left\| h^t \sum_{i=1}^d \alpha_i v_i \right\|_3^2 \\ &= \left\| \sum_{i=1}^d \alpha_i \lambda_i v_i \right\|_3^2 \\ &= \sum_{i=1}^d \|\alpha_i \lambda_i v_i\|_3^2 \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq d} \{|\lambda_i|^2\} \sum_{i=1}^d \|\alpha_i v_i\|_3^2 \\ &= \max_{1 \leq i \leq d} \{|\lambda_i|^2\} \left\| \sum_{i=1}^d \alpha_i v_i \right\|_3^2 \\ &= \max_{1 \leq i \leq d} \{|\lambda_i|^2\} \|v\|_3^2. \end{aligned}$$

Como  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|_3$  são equivalentes, existem  $c_1, c_2 > 0$  tais que  $c_1 \|v\| \leq \|v\|_3 \leq c_2 \|v\|$ , para todo  $v \in V$ . Consequentemente segue que, para  $v \in V$  tal que  $\|v\| = 1$ , temos

$$\|h^t v\| \leq \frac{1}{c_1} \|h^t v\|_3 \leq \frac{1}{c_1} \|h^t\|_3 \|v\|_3 \leq \frac{c_2}{c_1} \|h^t\|_3 \|v\| = \frac{c_2}{c_1} \|h^t\|_3.$$

Logo,  $\|h^t\| \leq \frac{c_2}{c_1} \|h^t\|_3$ . Daí,

$$\begin{aligned} \|h^t\| &\leq \frac{c_2}{c_1} \|h^t\|_3 = \frac{c_2}{c_1} \sup\{\|h^t v\|_3; v \in V, \|v\|_3 = 1\} \\ &\leq \frac{c_2}{c_1} \sup\left\{\max_{1 \leq i \leq d} \{|\lambda_i|\} \|v\|_3; v \in V, \|v\|_3 = 1\right\} \\ &= \frac{c_2}{c_1} \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|\} = \frac{c_2}{c_1} r(g^t). \end{aligned}$$

Assim, o resultado segue tomando  $c = \frac{c_2}{c_1}$ .

**Afirmção 2:**  $e^t$  é limitada.

De fato, sejam  $v \in V$  e  $\|\cdot\|_2$  a norma na qual  $e^t$  é uma isometria. Como  $\|\cdot\|$  e  $\|\cdot\|_2$  são equivalentes, existem  $k_1, k_2 > 0$  tais que  $k_1 \|v\| \leq \|v\|_2 \leq k_2 \|v\|$ , para todo  $v \in V$ . Assim,

$$\|e^t v\| \leq \frac{1}{k_1} \|e^t v\|_2 = \frac{1}{k_1} \|v\|_2 \leq \frac{k_2}{k_1} \|v\| \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Tomando  $M > \frac{k_2}{k_1}$ , o resultado segue, isto é,  $\|e^t\| < M$ .

**Afirmção 3:**  $\|u^t\| \leq p(t)$ , onde  $p(t)$  é um polinômio em  $t$ .

De fato, uma vez que  $u$  é unipotente, existe  $N$  nilpotente tal que  $u = e^N$ . Daí,

$$u^t = e^{tN} = I + tN + \cdots + \frac{(tN)^k}{k!},$$

para algum  $k \in \mathbb{N}$  fixo. Usando que  $\|N^l\| \leq \|N\|^l$ , segue que, para  $v \in V$ ,

$$\|u^t v\| \leq \|v\| \left( 1 + \|N\| |t| + \cdots + \frac{\|N\|^k |t|^k}{k!} \right) = \|v\| p(t),$$

onde  $p(t)$  é um polinômio em  $t$ . Dessa forma  $\|u^t\| \leq p(t)$ .

**Afirmção 4:**  $r(g^t) = r(g)^t$ .

De fato, pela observação feita na página 80 e do fato de que os autovalores de  $h^t$  são todos reais positivos, segue que

$$\begin{aligned} r(g^t) &= r(h^t) \\ &= r(h)^t \\ &= r(g)^t. \end{aligned}$$

Portanto, pelos resultados acima, temos que

$$\|g^t\| \leq \|e^t\| \|h^t\| \|u^t\| < M.c.r(g^t)p(t) = M.c.r(g)^t p(t) \rightarrow 0,$$

quando  $t \rightarrow +\infty$ , uma vez que  $r(g) < 1$ . □

Uma vez que a componente hiperbólica  $h$  de  $g$  é diagonalizável com autovalores reais positivos  $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$ , podemos decompor  $V$  como a soma  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$  dos seus autoespaços, que chamamos de *decomposição de  $V$  em autoespaços associados a  $h$* .

**Lema 4.3.7** *Seja  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$  a decomposição de  $V$  em autoespaços associados a  $h$ , onde  $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$ . Seja  $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ ,  $v \neq 0$ , com  $v_i \in V_i$ . Se  $i$  é o primeiro índice tal que  $v_i \neq 0$  e  $j$  é o último índice tal que  $v_j \neq 0$ , então*

$$\omega([v]) \subset \mathbb{P}(V_i) \text{ e } \alpha([v]) \subset \mathbb{P}(V_j).$$

Demonstração: Denotemos por  $g_k$  a restrição  $g/\lambda_i$  à  $V_k$ . Temos que o raio espectral de  $g_k$  é  $\frac{\lambda_k}{\lambda_i}$  e  $g_i$  tem parte hiperbólica igual à identidade. Note que os autovalores de  $g_k$  têm norma

menor que 1 para  $k > i$ . Pelo Lema 4.3.6, para  $k > i$ , temos que

$$\|g_k^t v_k\| \leq \|g_k^t\| \|v_k\| \rightarrow 0,$$

quando  $t \rightarrow +\infty$ . Pelo Lema 4.3.4, temos que  $\|g_i v_i\| \geq \varepsilon$ , para algum  $\varepsilon > 0$ . Agora, seja  $[x] \in \omega([v])$ . Existe  $t_j \rightarrow +\infty$  tal que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} g^{t_j} [v] = [x]$ . Assim,

$$g^{t_j} [v] = \left[ \frac{g^{t_j}}{\lambda_i} (v_i + \dots + v_j) \right] = \left[ \underbrace{g_i^{t_j} v_i}_{\in V_i} + \underbrace{\sum_{k>i} g_k^{t_j} v_k}_{\in V \setminus V_i} \right] \rightarrow [x].$$

Pelos argumentos anteriores e pelo Lema 4.3.2, segue que  $[x] = \lim_{j \rightarrow +\infty} [g^{t_j} v] \in \mathbb{P}(V_i)$ .

A demonstração para  $\alpha([v])$  é análoga. □

#### 4.4 Recorrência e Recorrência por Cadeias

Nesta seção obteremos as componentes de Morse da decomposição de Morse mais fina para o fluxo  $g^t$  no espaço projetivo. Com mais algumas ferramentas apresentaremos a desejada caracterização do conjunto recorrente e do conjunto recorrente por cadeias.

**Proposição 4.4.1** *O conjunto  $\{\mathbb{P}(V_1), \dots, \mathbb{P}(V_n)\}$  é uma decomposição de Morse para o fluxo  $g^t$ .*

Demonstração: Os conjuntos  $\mathbb{P}(V_i)$  são não-vazios, dois a dois disjuntos e, pelo corolário 4.1.4, eles são compactos. Para ver que são invariantes, observemos que, como  $g^t$  e  $h^t$  comutam, para todo  $v_k \in V_k$ ,

$$h^t g^t v_k = g^t h^t v_k = \lambda_k g^t v_k.$$

Portanto,  $g^t v_k$  está em  $V_k$ , o autoespaço de  $h$  associado ao autovalor  $\lambda_k$ , ou seja,  $\mathbb{P}(V_k)$  é invariante por  $g^t$ . Pelo Lema 4.3.7, para todo  $v \in V$ ,  $\omega([v]), \alpha([v]) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathbb{P}(V_i)$ . Novamente pelo Lema 4.3.7, se  $\omega([v]), \alpha([v]) \subset \mathbb{P}(V_i)$ , para algum  $i$ , então  $v = v_i \in V_i$ . Ou seja,  $[v] \in \mathbb{P}(V_i)$ . Agora, suponhamos que existam índices  $j_0, \dots, j_k$  e pontos  $[x_1], \dots, [x_k] \in \mathbb{P}(V) \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{P}(V_i)$ , com

$$\alpha([x_i]) \subset \mathbb{P}(V_{j_{i-1}}) \text{ e } \omega([x_i]) \subset \mathbb{P}(V_{j_i}),$$

para  $i = 1, \dots, k$ . Vamos mostrar que  $\mathbb{P}(V_{j_0}) \neq \mathbb{P}(V_{j_k})$ . Observe que, para  $i = 1$

$$\begin{cases} \alpha([x_1]) \subset \mathbb{P}(V_{j_0}); \\ \omega([x_1]) \subset \mathbb{P}(V_{j_1}). \end{cases}$$

Pelo Lema 4.3.7,  $x_1 = v_{j_1}^1 + \dots + v_{j_0}^1$ , onde segue que  $j_1 < j_0$ . De fato, se  $j_1 = j_0$ , então  $[x_1] \in \mathbb{P}(V_{j_1})$ , o que contradiz a hipótese de que  $[x_1] \in \mathbb{P}(V) \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathbb{P}(V_i)$ .

Analogamente, para  $i = 2$  temos

$$\begin{cases} \alpha([x_2]) \subset \mathbb{P}(V_{j_1}); \\ \omega([x_2]) \subset \mathbb{P}(V_{j_2}). \end{cases}$$

Pelo Lema 4.3.7,  $x_2 = v_{j_2}^2 + \dots + v_{j_1}^2$ , onde segue que  $j_2 < j_1$ .

Procedendo dessa maneira sucessivamente até  $i = k$  teremos que  $j_i < j_{i-1}$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ .

Logo,  $j_0 \neq j_k$ , isto é,  $\mathbb{P}(V_{j_0}) \neq \mathbb{P}(V_{j_k})$ .

Portanto,  $\{\mathbb{P}(V_1), \dots, \mathbb{P}(V_n)\}$  é uma decomposição de Morse. □

**Corolário 4.4.2** *Sejam  $S_i = V_i \oplus \dots \oplus V_n$ , e  $T_j = V_1 \oplus \dots \oplus V_j$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Os conjuntos estável e instável de  $\mathbb{P}(V_i)$  são dados por*

$$\text{est}(\mathbb{P}(V_i)) = \mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1}) \quad e \quad \text{inst}(\mathbb{P}(V_i)) = \mathbb{P}(T_i \setminus T_{i-1}).$$

Além disso,  $\mathbb{P}(V_1)$  é um atrator e  $\mathbb{P}(V_n)$  é um repulsor.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \text{est}(\mathbb{P}(V_i)) &= \{[v] \in \mathbb{P}(V); \omega([v]) \subset \mathbb{P}(V_i)\} \\ &= \{[v] \in \mathbb{P}(V); v = v_i + v_{i+1} + \dots + v_n, v_i \neq 0\} \\ &= \{[v_i + v_{i+1} + \dots + v_n]; v_i \neq 0\} \\ &= \mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{inst}(\mathbb{P}(V_i)) &= \{[v] \in \mathbb{P}(V); \alpha([v]) \subset \mathbb{P}(V_i)\} \\ &= \{[v] \in \mathbb{P}(V); v = v_1 + \dots + v_{i-1} + v_i, v_i \neq 0\} \\ &= \{[v_1 + \dots + v_{i-1} + v_i]; v_i \neq 0\}. \\ &= \mathbb{P}(T_i \setminus T_{i-1}) \end{aligned}$$

Além disso, para  $i = 1$ , temos que  $V \setminus \bigoplus_{i=2}^n V_i$  é aberto em  $V$ , uma vez que  $\bigoplus_{i=2}^n V_i$  é fechado em  $V$ , e

$$\text{est}(\mathbb{P}(V_1)) = \{[v_1 + \cdots + v_n]; v_1 \neq 0\} = \mathbb{P}\left(V \setminus \bigoplus_{i=2}^n V_i\right).$$

Logo,  $\omega\left(V \setminus \bigoplus_{i=2}^n V_i\right) \subset \mathbb{P}(V_1)$ . Portanto, segue da observação 5 da definição 3.1.1, que  $\mathbb{P}(V_1)$  é um atrator.

De maneira análoga mostra-se que  $\alpha\left(V \setminus \bigoplus_{i=1}^{n-1} V_i\right) = \mathbb{P}(V_n)$ , isto é,  $\mathbb{P}(V_n)$  é um repulsor.  $\square$

A fim de mostrar que a decomposição de Morse da proposição 4.4.1 é a mais fina, precisamos considerar o comportamento da componente unipotente de  $g^t$ .

**Lema 4.4.3** *Seja  $x \neq 0$  um vetor e seja  $N$  uma transformação nilpotente. Se  $k$  é tal que  $N^{k+1}x = 0$  e  $v = N^k x \neq 0$ , então  $e^{tN}[x] \rightarrow [v]$ , quando  $t \rightarrow \pm\infty$ , onde  $t \in \mathbb{R}$ . Além disso,  $e^{tN}v = v$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Demonstração: Primeiramente, notemos que para todo  $t \in \mathbb{R}$

$$e^{tN}v = \left(\sum_{j \geq 0} \frac{t^j}{j!} N^j\right) N^k x = v + \underbrace{\sum_{j \geq 1} \frac{t^j}{j!} N^{k+j} x}_{= 0} = v.$$

Agora, temos que

$$e^{tN}[x] = \left[x + tNx + \cdots + \frac{t^k}{k!}v\right]$$

e, multiplicando por  $\frac{k!}{t^k}$ , temos

$$e^{tN}[x] = \left[v + \frac{k!}{t} \left(\frac{x}{t^{k-1}} + \frac{Nx}{t^{k-2}} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} N^{k-1}x\right)\right] \rightarrow [v],$$

quando  $t \rightarrow \pm\infty$ , onde  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Lema 4.4.4** *Se  $\varphi^t$  é um fluxo sobre um espaço métrico compacto  $X$  tal que  $\varphi^t$  é uma isometria para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então, para cada  $T \in \mathbb{R}$  e cada  $x \in X$ , existe uma sequência  $n_k \rightarrow \infty$  tal que  $\varphi^{n_k T} x \rightarrow x$ .*

Demonstração: Pela compacidade de  $X$ , temos que a sequência  $\varphi^{nT}x$  tem uma subsequência convergente. Assim, dados  $\varepsilon > 0$  e  $L > 0$ , existem  $m, k \in \mathbb{N}$  tais que  $m - k > L$  e

$$d\left(\varphi^{(m-k)T}x, x\right) = d\left(\varphi^{mT}x, \varphi^{kT}x\right) < \varepsilon.$$

Então, existe uma subsequência  $n_k \rightarrow \infty$  tal que  $\varphi^{n_k T}x \rightarrow x$ . Em particular, todo ponto recorrente de  $X$  é recorrente por  $\varphi^t$ , pois  $\varphi^{n_k T}x \rightarrow x$  implica  $x \in \omega(x)$  em relação à  $\varphi^t$ .  $\square$

**Lema 4.4.5** *Sejam  $X$  espaço métrico compacto,  $\varphi^t$  e  $\psi^t$  fluxos que comutam para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se  $\varphi^t$  é uma isometria para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para cada  $x \in X$  existe  $y \in X$  tal que  $\omega(x) = \{y\} = \alpha(x)$  em relação à  $\psi^t$ , então a composição  $\varphi^t\psi^t$  é um fluxo recorrente por cadeias.*

Demonstração: Fixe  $x \in X$ . Dados  $\varepsilon > 0$  e  $t_0 > 0$  construiremos uma  $(\varepsilon, t_0)$ -cadeia de  $x$  para  $x$ . Pela afirmação sobre  $\psi$ , existem  $y \in X$  e  $t_1 > t_0$  tais que

$$\psi^t(x), \psi^{-t}(x) \in B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \forall t > t_1.$$

Tomando  $t > t_1$ , segue que as sequências

$$x, \psi^{-t}(x), x \in X; \quad t, t \geq t_0$$

definem uma  $(\varepsilon, t_0)$ -cadeia de  $\psi$ , pois

$$d\left(\psi^t(x), \psi^{-t}(x)\right) < \varepsilon \quad e \quad d\left(\psi^t\psi^{-t}(x), x\right) = 0 < \varepsilon.$$

Agora, uma vez que a isometria  $\varphi^t$  é recorrente, de acordo com o Lema 4.4.4, existe  $t > t_1$  tal que  $d(\varphi^{2t}(x), x) < \varepsilon$  (basta tomar  $T = 2$  no Lema 4.4.4). Portanto, as sequências

$$x, \varphi^t\psi^{-t}(x), x \in X; \quad t, t \geq t_0$$

definem uma  $(\varepsilon, t_0)$ -cadeia de  $\varphi^t\psi^t$ . De fato, usando que  $\varphi^t$  é uma isometria, temos que

$$d\left(\varphi^t\psi^t(x), \varphi^t\psi^{-t}(x)\right) = d\left(\psi^t(x), \psi^{-t}(x)\right) < \varepsilon,$$

pela construção acima. Finalmente, usando a comutatividade de  $\varphi^t$  e  $\psi^t$ , temos que

$$d\left(\varphi^t\psi^t\varphi^t\psi^{-t}(x), x\right) = d\left(\varphi^{2t}(x), x\right) < \varepsilon,$$

pela escolha de  $t$ . Portanto, todo ponto de  $X$  é recorrente por cadeias em relação ao fluxo  $\varphi^t\psi^t$ .  $\square$

**Teorema 4.4.6** *Seja  $g : V \rightarrow V$  um isomorfismo linear, onde  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita. Se  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n$  é a decomposição de  $V$  em autoespaços associados a  $h$ , então cada  $\mathbb{P}(V_i)$  é transitivo por cadeias e  $\{\mathbb{P}(V_1), \mathbb{P}(V_2), \dots, \mathbb{P}(V_n)\}$  é a decomposição de Morse mais fina para  $g^t$ .*

*Em particular, o conjunto recorrente por cadeias de  $g$  em  $\mathbb{P}(V)$  é dado por*

$$\mathcal{R}^C(g^t) = \text{Fix}(h^t) = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{P}(V_i).$$

Demonstração: Notemos que

$$\begin{aligned} [v] \in \text{Fix}(h^t) &\Leftrightarrow h^t[v] = [v] \\ &\Leftrightarrow [h^t v] = [v] \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}; h^t v = \lambda v \\ &\Leftrightarrow v \in V_i \text{ para algum } i \\ &\Leftrightarrow [v] \in \mathbb{P}(V_i) \text{ para algum } i. \end{aligned}$$

Portanto,  $\text{Fix}(h^t) = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{P}(V_i)$ . Pelo corolário 3.2.8 e pela proposição 4.4.1, temos que  $\mathcal{R}^C \subset \bigcup_{i=1}^n \mathbb{P}(V_i) = \text{Fix}(h^t)$ . Pela conexidade de  $\mathbb{P}(V_i)$ , segundo o corolário 4.1.4, basta mostrarmos que  $\mathbb{P}(V_i)$  é recorrente por cadeias. Agora, provaremos que  $\text{Fix}(h^t)$  é recorrente por cadeias. Primeiramente, note que a restrição de  $g^t$  à  $\text{Fix}(h^t)$  é dada por  $e^t u^t$ . Uma vez que  $e^t$  é elíptica, isso nos permite escolher uma norma em  $V$  tal que  $e^t$  é uma isometria para todo  $t \in \mathbb{R}$ , conforme Lema 4.3.1. Essa norma induz uma métrica em  $\mathbb{P}(V)$  tal que  $e^t$  é uma isometria em  $\mathbb{P}(V)$ . De fato, dados  $[v], [w] \in \mathbb{P}(V)$  (podemos tomá-los de tal forma que  $\|v\| = \|w\| = 1$ ) segue que:

$$\begin{aligned} d(e^t[v], e^t[w]) &= \min\{\|e^t v - e^t w\|, \|e^t v + e^t w\|\} \\ &= \min\{\|e^t(v - w)\|, \|e^t(v + w)\|\} \\ &= \min\{\|v - w\|, \|v + w\|\} \\ &= d([v], [w]). \end{aligned}$$

Como  $u^t$  é unipotente, existe  $N$  nilpotente tal que  $u^t = e^{tN}$ . Logo, pelo Lema 4.4.3, para cada  $[x] \in \mathbb{P}(V)$  existe  $[y] \in \mathbb{P}(V)$ , tal que os conjuntos  $\omega-$  e  $\alpha-$  limites são precisamente  $\{[y]\}$ , a saber,  $y = N^k x$  onde  $k \in \mathbb{N}$  é tal que  $N^{k+1} x = 0$  e  $N^k x \neq 0$ . Além disso,  $e^t$  e  $u^t$

comutam para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Aplicando o Lema 4.4.5 à  $e^t$  e  $u^t$  segue que  $g^t$  é recorrente por cadeias sobre  $\text{Fix}(h^t)$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

Por fim, concluímos os resultados com a desejada caracterização do conjunto recorrente.

**Teorema 4.4.7** *Se  $g : V \rightarrow V$  é um isomorfismo linear, onde  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita, então o conjunto recorrente de  $g$  em  $\mathbb{P}(V)$  é dado por*

$$\mathcal{R}(g^t) = \text{Fix}(h^t) \cap \text{Fix}(u^t).$$

Demonstração: Seja  $[x] \in \mathbb{P}(V)$  tal que  $[x] \in w([x])$ . Pelo Teorema 4.4.6,  $[x] \in \text{Fix}(h^t)$ . Seja  $t_j \rightarrow +\infty$  tal que  $g^{t_j}[x] \rightarrow [x]$ . Na norma em que  $e^t$  é isometria,  $\|e^t\| = 1$ . Logo,  $e^t$  pertence à esfera de  $\text{Gl}(V)$  que é compacta e, portanto, admite subsequência convergente  $e^{t_{j_k}} \rightarrow e_0$ . Afirmamos que  $e_0$  comuta com as componentes de Jordan de  $g^t$ . De fato, consideremos a função  $\varphi : \text{Gl}(V) \times \text{Gl}(V) \rightarrow \text{Gl}(V)$  definida por  $\varphi(X, Y) = XY$ . Essa função é contínua e, uma vez que a função exponencial,  $e$ , é contínua, segue que  $\varphi \circ e$  é contínua. Ainda,  $e = e^E$  para  $E \in \mathfrak{gl}(V)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{j_k \rightarrow +\infty} (e^{t_{j_k} E} e^{t E}) &= \lim_{j_k \rightarrow +\infty} \varphi(e^{t_{j_k} E}, e^{t E}) \\ &= \varphi\left(\lim_{j_k \rightarrow +\infty} e^{t_{j_k} E}, \lim_{j_k \rightarrow +\infty} e^{t E}\right) \\ &= \varphi(e_0, e^t) \\ &= e_0 e^t. \end{aligned}$$

Uma vez que  $e^{t_{j_k} E}$  e  $e^{t E}$  comutam, temos que  $e_0 e^t = \lim_{j_k \rightarrow +\infty} (e^{t_{j_k} E} e^{t E}) = \lim_{j_k \rightarrow +\infty} (e^{t E} e^{t_{j_k} E}) = e^t e_0$ , ou seja,  $e_0$  e  $e^t$  comutam, para todo  $t$ . Analogamente o mesmo ocorre para as componentes  $h^t$  e  $u^t$ . Pelo Lema 4.4.3, existe ponto fixo  $[v]$  de  $u^t$  tal que  $u^{t_{j_k}}[x] \rightarrow [v]$ . Como  $g^{t_{j_k}} = e^{t_{j_k} E} u^{t_{j_k}} h^{t_{j_k}}$ , segue que

$$[x] = \lim_{k \rightarrow \infty} g^{t_{j_k}}[x] = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{t_{j_k} E} u^{t_{j_k}} h^{t_{j_k}}[x] = e_0[v].$$

Desse modo,

$$u^t[x] = u^t e_0[v] = e_0 u^t[v] = e_0[v] = [x].$$

Ou seja,  $[x] \in \text{Fix}(u^t)$ .

Reciprocamente, seja  $[x] \in \text{Fix}(h^t) \cap \text{Fix}(u^t)$ . Logo,  $g^t[x] = e^t[x]$ . Sendo  $\text{Fix}(h^t) \cap$

$\text{Fix}(u^t)$  fechado em  $\mathbb{P}(V)$ , temos que  $\text{Fix}(h^t) \cap \text{Fix}(u^t)$  é compacto e, pelo Lema 4.4.4,  $[x]$  é recorrente.  $\square$

Ilustraremos os resultados dessa seção com alguns exemplos em dimensão 3.

Exemplos: Seja  $X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ . Existe  $g \in \text{Sl}(3, \mathbb{R})$  tal que  $gXg^{-1}$  tem uma das seguintes formas canônicas de Jordan, onde  $a, b \in \mathbb{R}$  (Veja Exemplo 2.1.12, p.56 de [24]):

$$X_1 = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} -a & -b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad X_5 = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}.$$

Para  $X_1$  existe apenas a parte hiperbólica,  $H_1 = X_1$ , portanto  $\mathcal{R}(g^t) = \mathcal{R}^C(g^t)$ .

$$e^{X_1} = \begin{bmatrix} e^{-a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-b} & 0 \\ 0 & 0 & e^{a+b} \end{bmatrix}.$$

Se  $a, b > 0$ ,  $a \neq b$  então  $V_1 = \langle e_1 \rangle$ ,  $V_2 = \langle e_2 \rangle$  e  $V_3 = \langle e_3 \rangle$ . Se  $a, b < 0$  o caso é análogo. Se  $a$  e  $b$  tem sinais contrários e  $b = -2a$ , então  $V_1 = \langle e_1, e_3 \rangle$  e  $V_2 = \langle e_2 \rangle$ . Se  $a = b$  então  $V_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$  e  $V_2 = \langle e_3 \rangle$ .

Portanto, se todos os autovalores forem distintos a decomposição de Morse mais fina possui três componentes, a saber,  $[e_1]$ ,  $[e_2]$  e  $[e_3]$ . Se dois autovalores forem iguais, admitindo sem perda de generalidade que  $a = b$ , existem duas componentes de Morse da decomposição mais fina:  $[\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2]$  e  $[e_3]$ .

Para os demais casos vamos analisar apenas  $a, b > 0$ .

Para o caso  $X_2$ ,  $e^{tX_2} = I + tX_2 + \frac{t^2 X_2^2}{2!}$ . Existe apenas a parte nilpotente,  $N_2 = X_2$ . Logo, todos os pontos são recorrentes por cadeias e, por consequência, a única decomposição de Morse é a trivial. Os pontos recorrentes são  $\mathcal{R}(g^t) = \text{Fix}(u^t) = \{[e_3]\}$ .

Para  $X_3$  o raciocínio é inteiramente análogo ao  $X_2$ .

Para  $X_4$ , temos que sua componente nilpotente é zero e, conseqüentemente, os conjuntos recorrente e recorrente por cadeias coincidem e, nesse caso, teremos duas componentes de Morse. Suas componentes elíptica e hiperbólica são dadas por:

$$E_4 = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_4 = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}.$$

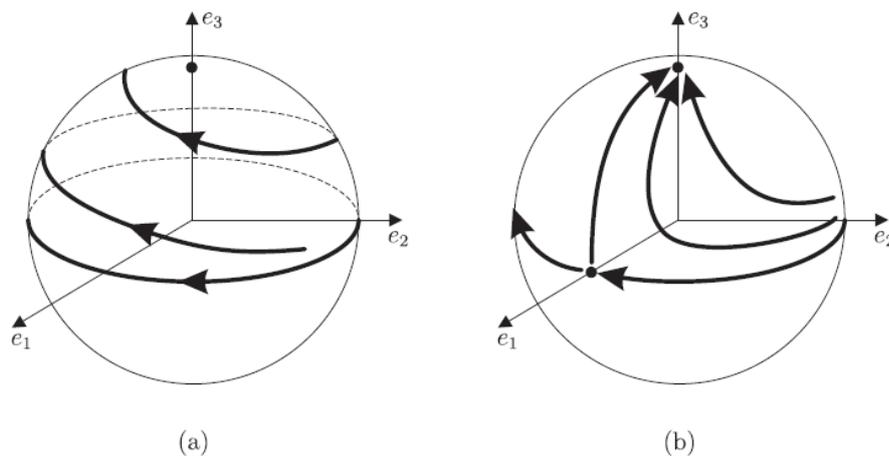
Logo,

$$\begin{aligned} [v] \in \text{Fix}(h^t) &\Rightarrow [e^{tH_4}v] = [v] \\ &\Rightarrow [(e^{-at}v_1, e^{-at}v_2, e^{2a}v_3)] = [(v_1, v_2, v_3)] \\ &\Rightarrow v_1, v_2 = 0 \quad \text{ou} \quad v_3 = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{M} = \{[\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2], [e_3]\}. \end{aligned}$$

Agora, para  $X_5$  a componente elíptica é zero. Nesse caso os conjuntos recorrente e recorrente por cadeias são diferentes, porém as componentes de Morse permanecem as mesmas de  $X_4$ , pois apresentam a mesma componente hiperbólica. O conjunto recorrente é dado por  $\{[e_1], [e_3]\} = \text{Fix}(u^t) \subset \text{Fix}(h^t)$ .

As representações das dinâmicas sobre o espaço projetivo de  $X_4$  e  $X_5$  sobre a 2-esfera podem ser vistas na figura abaixo conforme os comentários feitos acima.

Figura 7 – (a) Fluxo induzido por  $X_4$  e (b) Fluxo induzido por  $X_5$



Fonte: [5]

□

## 5 COMPONENTES DE MORSE VIA ÓRBITAS DE GRUPOS

Neste capítulo iremos caracterizar as componentes de Morse da decomposição de Morse mais fina e seus espaços estáveis e instáveis como órbitas de uma ação em  $\mathbb{P}(V)$ . Nosso objetivo com essa caracterização é de identificar fibrados vetoriais segundo essas órbitas. Este capítulo baseia-se nas referências [19] e [20], complementado por [10] e [23].

A fim de compreender as notações, a partir desse capítulo adotaremos  $F$  como espaço topológico e  $X$  como campo de vetores.

### 5.1 Espaços Homogêneos de Grupos de Lie

A fim de identificar  $\mathbb{P}(V)$  como variedade diferenciável, iniciamos nosso estudo por meio de ações de grupo.

**Definição 5.1.1** *Se  $G$  é um grupo e  $F$  é um conjunto, uma **ação à esquerda** de  $G$  em  $F$  é uma aplicação  $a : G \times F \rightarrow F$ , frequentemente escrita como  $(g, x) \mapsto gx$ , que satisfaz:*

- (i)  $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$  para todos  $g_1, g_2 \in G$  e  $x \in F$ ;
- (ii)  $1x = x$ , para todo  $x \in F$ .

*Agora, seja  $G$  um grupo de Lie e  $F$  uma variedade. A ação de  $G$  em  $F$  é dita ser **contínua** se a aplicação  $a : G \times F \rightarrow F$  é contínua. Analogamente para **diferenciável**.*

*Uma variedade  $F$  dotada de uma  $G$ -ação contínua é chamada um  $G$ -**espaço**.*

Vamos introduzir algumas terminologias básicas.

Seja  $a : G \times F \rightarrow F$  uma ação à esquerda de um grupo  $G$  sobre um conjunto  $F$ .

- Para todo  $x \in F$ , a **órbita** de  $x$  sob a ação é o conjunto

$$G \cdot x = \{gx ; g \in G\},$$

ou seja, o conjunto de todas as imagens de  $x$  sob a ação por elementos de  $G$ .

- A ação é **transitiva** se para quaisquer dois pontos  $x, y \in F$ , existe um elemento  $g$  do grupo tal que  $gx = y$  ou, equivalentemente, se a órbita de qualquer ponto é todo  $F$ .

- Dado  $x \in F$ , o **grupo de isotropia** de  $x$ , denotado por  $G_x$ , é o conjunto de elementos  $g \in G$  que fixam  $x$ :

$$G_x = \{g \in G ; gx = x\}.$$

**Definição 5.1.2** *Sejam  $F$  e  $E$  dois  $G$ -espaços. Uma aplicação  $f : F \rightarrow E$  é dita ser **equivariante** em relação às  $G$ -ações dadas, se para  $g \in G$ ,*

$$f(gx) = gf(x).$$

Uma variedade diferenciável  $F$  dotada com uma ação diferenciável transitiva por um grupo de Lie  $G$  é chamada um **espaço homogêneo** de  $G$ , ou  $G$ -**espaço homogêneo**.

**Definição 5.1.3** *Seja  $G$  um grupo de Lie agindo à esquerda em uma variedade diferenciável  $F$  pela aplicação diferenciável  $a : G \times F \rightarrow F$ . Definimos as **aplicações parciais**:*

- Fixado um ponto  $x \in F$ , definimos a **aplicação órbita**

$$\begin{aligned} a^{(x)} : G &\longrightarrow F \\ g &\longmapsto gx \end{aligned}$$

- Fixado um elemento  $g \in G$ , definimos

$$\begin{aligned} a_{(g)} : F &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

Uma vez que  $a$  é diferenciável as aplicações parciais  $a^{(x)}$ ,  $x \in F$  e  $a_{(g)}$ ,  $g \in G$ , são diferenciáveis. Da igualdade  $a_{(g)}^{-1} = a_{(g^{-1})}$ , segue que as aplicações  $a_{(g)}$  são difeomorfismos.

**Proposição 5.1.4** *Seja  $a : G \times F \rightarrow F$  uma ação de  $G$  num espaço topológico Hausdorff  $F$ . Se a ação é contínua, então qualquer subgrupo de isotropia  $G_x$ ,  $x \in F$ , é fechado.*

Demonstração: Em termos da aplicação  $a$ , o subgrupo de isotropia é dado por

$$G_x = \{g \in G : a(g, x) = x\} = \left(a^{(x)}\right)^{-1}(\{x\}).$$

Como  $F$  é Hausdorff e  $a$  é contínua, segue que  $G_x$  é fechado. □

**Teorema 5.1.5** *Se  $G$  é um grupo de Lie agindo transitivamente, à esquerda, em uma variedade diferenciável  $F$  pela aplicação diferenciável*

$$\begin{aligned} a : G \times F &\longrightarrow F \\ (g, x) &\longmapsto a(g, x) = gx \end{aligned} ,$$

então fixado um ponto  $x \in F$ , a aplicação órbita  $a^{(x)}$  é uma submersão em  $F$ .

Além disso, quocientando por  $G_x$ , temos o difeomorfismo equivariante:

$$\begin{aligned} \frac{G}{G_x} &\xrightarrow{\sim} F \\ gG_x &\longmapsto gx \end{aligned} .$$

Demonstração: A diferenciabilidade de  $a^{(x)}$  segue da diferenciabilidade de  $a$ .

Se  $y \in F$ , então existe  $g \in G$  tal que  $a(g, x) = y$  uma vez que  $a$  é transitiva. Logo,  $a^{(x)}(g) = y$  e, portanto,  $a^{(x)}$  é sobrejetora. Agora, observe que

$$a^{(x)}(gp) = (gp)x = g(px) = ga^{(x)}(p).$$

Assim,  $a^{(x)}$  é equivariante em relação às translações à esquerda em  $G$  e à ação dada em  $F$ . Já que  $G$  age transitivamente em si mesmo pelas translações à esquerda, o Teorema do Posto Equivariante B.1.3 implica que  $a^{(x)}$  tem posto constante. Como  $a^{(x)}$  é, também, sobrejetora, pelo teorema B.1.4 ela é uma submersão. Finalmente, como  $F$  é variedade diferenciável munida com uma ação transitiva diferenciável de um grupo de Lie  $G$ , temos que  $F$  é um espaço homogêneo de  $G$  e, assim, segue do teorema B.1.8 que a aplicação

$$\begin{aligned} \frac{G}{G_x} &\xrightarrow{\sim} F \\ gG_x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

é um difeomorfismo equivariante. □

Se  $L$  é um subgrupo de Lie de  $G$ , a órbita  $L \cdot x$ , de um ponto  $x \in F$ , é o conjunto de todos  $hx$ , onde  $h \in L$ . A restrição de  $a^{(x)}$  à  $L$  dá a submersão sob a órbita  $L \cdot x$ :

$$\begin{aligned} a^{(x)} \Big|_L : L &\longrightarrow L \cdot x \\ l &\longmapsto lx \end{aligned} .$$

Para  $X \in \mathfrak{g}$ , consideramos  $X \cdot g = \frac{d}{dt} (e^{tX}g) \Big|_{t=0}$  o campo de vetores em  $G$  e  $X \cdot x = \frac{d}{dt} (e^{tX}x) \Big|_{t=0}$  o campo de vetores em  $F$ .

**Definição 5.1.6** *Sejam  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie dos campos de vetores invariantes à direita em  $G$  e  $F$  uma variedade  $C^\infty$ . Denote por  $\Gamma(TF)$  a álgebra de Lie dos campos de vetores em  $F$  munido do colchete de Lie. Uma **ação infinitesimal** de  $\mathfrak{g}$  em  $F$  é um homomorfismo  $\mathfrak{g} \rightarrow \Gamma(TF)$ .*

**Lema 5.1.7** *Uma ação diferenciável de  $G$  em  $F$  induz uma ação infinitesimal de  $\mathfrak{g}$ .*

Demonstração: Dados  $X \in \mathfrak{g}$  e  $x \in F$ , a curva definida por  $t \mapsto \exp(tX)x$  é diferenciável. Sua derivada na origem é:

$$\tilde{X} \cdot x = \left. \frac{d}{dt} (e^{tX}x) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} a^{(x)}(e^{tX}) \right|_{t=0} = (Da^{(x)})_1(X).$$

É um vetor tangente à  $F$  em  $x$ . Portanto,  $x \in F \mapsto \tilde{X} \cdot x \in T_x F$  define um campo de vetores em  $F$ . O fluxo  $\tilde{X}_t$  de  $\tilde{X}$  é exatamente  $e^{tX}$ . De fato, para todo  $x \in F$  a curva  $t \mapsto e^{tX}x$  é uma trajetória de  $\tilde{X}$ , pois:

$$\left. \frac{d}{dt} (e^{tX}x) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{ds} (e^{(t+s)X}x) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} (e^{sX} \exp(tX)) \right|_{s=0} = \tilde{X} \cdot \exp(tX).$$

Por consequência, os campos de vetores  $\tilde{X}$  são completos já que seus fluxos  $e^{tX}$  são definidos para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Agora, observe que para todo  $x \in F$ ,  $a^{(x)} \circ E_{e^{tX}} = a_{(e^{tX})} \circ a^x$ , onde  $E_g : G \rightarrow G$  definida por  $h \mapsto gh$  é a aplicação de translação à esquerda em  $G$ . De fato, para  $h \in G$  temos:

$$\begin{aligned} a^{(x)} \circ E_{e^{tX}}(h) &= a^{(x)}(e^{tX}h) \\ &= (e^{tX}h)x \\ &= e^{tX}(hx) \\ &= a_{(e^{tX})}(hx) \\ &= a_{(e^{tX})} \circ a^{(x)}(h). \end{aligned}$$

Com isso temos que o campo invariante à direita  $X \in \mathfrak{g}$  e o campo associado  $\tilde{X}$  são  $a^{(x)}$ -relacionados (veja Anexo B.1), para todo  $x \in F$ , isto é,  $a^{(x)}$  faz o intercâmbio entre os

fluxos de  $X$  e  $\tilde{X}$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 D(a^{(x)})_g(X \cdot g) &= \left. \frac{d}{dt} (a^{(x)} e^{tX} g) \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} (a^{(x)} \circ E_{e^{tX}}(g)) \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} (a_{(e^{tX})} \circ a^x(g)) \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} (e^{tX}(a^{(x)}(g))) \right|_{t=0} \\
 &= \tilde{X} \cdot a^x(g).
 \end{aligned}$$

Uma vez que  $X$  e  $\tilde{X}$  são  $a^{(x)}$ -relacionados segue que a aplicação

$$\begin{aligned}
 \Phi : \mathfrak{g} &\longmapsto \Gamma(TF) \\
 X &\longmapsto \tilde{X}
 \end{aligned}$$

é uma ação infinitesimal. De fato, pela proposição B.2.3, segue que:

$$[\Phi(X), \Phi(Y)] \cdot x = [\tilde{X}, \tilde{Y}] \cdot x = [\tilde{X}, \tilde{Y}] \cdot a^{(x)}(1) = (Da^{(x)})_1[X, Y] = \Phi([X, Y]) \cdot x.$$

□

**Definição 5.1.8** A álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_x$  do grupo de isotropia  $G_x$  é denominada de **álgebra de isotropia** em  $x$ . Ela é formada pelos elementos  $X \in \mathfrak{g}$  tais que  $e^{tX} \in G_x$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , isto é,

$$\mathfrak{g}_x = \{X \in \mathfrak{g} ; e^{tX}x = x, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

**Proposição 5.1.9** Se  $a : G \times F \longrightarrow F$  define uma ação transitiva de  $G$  em  $F$  então, para  $x \in F$  fixado, a aplicação órbita  $a^{(x)} : G \longrightarrow F$  induz uma ação infinitesimal de  $\mathfrak{g}$  em  $T_xF$ . Mais precisamente, uma aplicação linear sobrejetora

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{g} &\longrightarrow T_xF \\
 Y &\longmapsto Y \cdot x
 \end{aligned}$$

cujos núcleo é a álgebra de isotropia em  $x$ ,  $\mathfrak{g}_x$ .

Demonstração: Pelo lema 5.1.7 temos que a ação  $a$  induz uma ação infinitesimal de  $\mathfrak{g}$  por meio da derivada da aplicação órbita. Como  $a^{(x)}$  é uma submersão, tem posto constante e

sua derivada é sobrejetora segue que  $\mathfrak{g} \rightarrow T_x F$  é aplicação linear sobrejetora. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} D(a^{(x)})_1(X) = 0 &\Leftrightarrow \left. \frac{d}{dt}(e^{tX}x) \right|_{t=0} = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{tX}x = cte. \\ &\Leftrightarrow e^{tX}x = e^{0X}x = x \\ &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{g}_x. \end{aligned}$$

□

**Proposição 5.1.10** *A derivada da aplicação parcial  $a_{(g)} : F \rightarrow F$  definida por  $x \mapsto gx$ , induz uma ação de  $G$  nos vetores tangentes na qual é relacionada à ação infinitesimal por*

$$D(a_{(g)})(Y \cdot x) = \text{Ad}(g)Y \cdot a^{(x)}(g).$$

Demonstração: A ação induzida pela derivada da aplicação parcial  $a_{(g)}$  é dada por:

$$\begin{aligned} G \times TF &\longrightarrow TF \\ (g, v) &\longmapsto D(a_{(g)})(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g)Y \cdot a^{(x)}(g) &= D(C_g)_1(Y) \cdot a^{(x)}(g) \\ &= D(a^{a^{(x)}g})_1(D(C_g)_1(Y)) \\ &= D(a^{a^{(x)}g} \circ C_g)_1(Y) \\ &\stackrel{*}{=} D(a_{(g)} \circ a^{(x)})_1(Y) \\ &= D(a_{(g)})(D(a^{(x)})_1(Y)) \\ &= D(a_{(g)})(Y \cdot x). \end{aligned}$$

Onde ( $\stackrel{*}{=}$ ) segue de:

$$\begin{aligned}
a^{a^{(x)}g} \circ C_g(h) &= a^{a^{(x)}g}(ghg^{-1}) \\
&= (ghg^{-1})gx \\
&= (ghg^{-1}g)x \\
&= (gh)x \\
&= g(a^{(x)}(h)) \\
&= a_{(g)} \circ a^{(x)}(h).
\end{aligned}$$

□

Observação: Por conveniência, adotaremos a notação  $D(a_{(g)})Y = gY = \text{Ad}(g)Y$ . □

Para um subconjunto  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ , denota-se  $\mathfrak{q} \cdot x$  o conjunto de todos os vetores tangentes  $Y \cdot x$ ,  $Y \in \mathfrak{q}$ . Disso segue que  $T_{gx}F = D(a_{(g)})(\mathfrak{q} \cdot x)$ . Em particular, para  $l \in L$ , o espaço tangente da órbita  $L \cdot x$  em  $lx$  é dado por  $D(a_{(l)})(\mathfrak{l} \cdot x) \subset T_{lx}F$ , onde  $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$  é a álgebra de Lie de  $L$ . Assim, o fibrado tangente da órbita é dado por

$$T(L \cdot x) = D(a_{(L)})(\mathfrak{l} \cdot x) = L(\mathfrak{l} \cdot x),$$

onde a última igualdade é a escrita conforme a notação adotada na observação acima.

## 5.2 Espaço Projetivo como Espaço Homogêneo

Com as noções apresentadas na seção anterior faremos considerações à cerca do Espaço Projetivo visto como espaço homogêneo do grupo de Lie  $\text{Sl}(V)$  e, conseqüentemente, como variedade diferenciável.

**Proposição 5.2.1** *A aplicação*

$$\begin{aligned}
a : \text{SO}(V) \times \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\
(g, [v]) &\longmapsto a(g, [v]) = g[v] := [gv]
\end{aligned}$$

define uma ação transitiva de  $\text{SO}(V)$  em  $\mathbb{P}(V)$ .

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que  $a$  é uma ação.

- (i)  $I[v] = [Iv] = [v]$ , para todo  $[v] \in \mathbb{P}(V)$ ;

(ii)  $g(h[v]) = g([hv]) = [g(hv)] = [(gh)v] = (gh)[v]$ , para todos  $g, h \in SO(V)$  e todo  $[v] \in \mathbb{P}(V)$ .

Agora, nos resta mostrar que esta ação é transitiva. Sejam  $[v], [w] \in \mathbb{P}(V)$ , onde  $v, w \in V$ . Tomemos  $\{v_1 = \frac{v}{\|v\|}, v_2, \dots, v_d\}$  e  $\{w_1 = \frac{w}{\|w\|}, w_2, \dots, w_d\}$  bases ortonormais de  $V$  e  $g \in GL(V)$  o único operador linear ortogonal tal que

$$gv_i = w_i, \quad i = 1, \dots, d.$$

Se o determinante dessa transformação não for positivo podemos, por exemplo, trocar o sinal de  $w_1$ , fazendo com que essa transformação pertença à  $SO(V)$ . Portanto, existe  $g \in SO(V)$  tal que  $g[v] = [gv] = [w]$  e, como  $[v]$  e  $[w]$  foram tomados arbitrários, temos que a ação é transitiva.  $\square$

Consideremos agora a aplicação

$$\begin{aligned} a : G \times \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ (g, [v]) &\longmapsto a(g, [v]) = g[v] := [gv] \end{aligned}$$

onde  $G \in \{GL(V), Sl(V)\}$ .

**Corolário 5.2.2** *A aplicação a definida acima é uma ação transitiva de  $G$  em  $\mathbb{P}(V)$ .*

*Demonstração:* Análogo à demonstração da proposição anterior, a aplicação define uma ação. A transitividade segue de que, dados  $[v], [w] \in \mathbb{P}(V)$ , pela proposição anterior, existe  $g \in SO(V) \subset G$  tal que  $g[v] = [w]$ .  $\square$

**Lema 5.2.3** *Seja a ação definida no corolário 5.2.2 para  $G \in \{Sl(V), SO(V)\}$ . Para cada  $[v] \in \mathbb{P}(V)$  o grupo de isotropia  $G_{[v]}$  é subgrupo de Lie de  $G$ .*

*Demonstração:* Seja  $[v] \in \mathbb{P}(V)$ , onde  $v \in V$ . Estendendo  $\{v\}$  a uma base  $\{v_1 = v, v_2, \dots, v_d\}$  de  $V$ , o grupo de isotropia de  $[v]$  é o conjunto  $G_{[v]} = \{g \in G ; g[v] = [v]\}$ . Assim, para  $g \in G_{[v]}$ , em termos da base  $\{v_1 = v, v_2, \dots, v_d\}$  podemos escrever

$$G_{[v]} = \left\{ g \in G ; g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & C \end{bmatrix} \right\},$$

onde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b$  é uma matriz linha  $1 \times (d-1)$ , se  $G = \text{Sl}(V)$ , então  $C \in \text{Gl}(d-1)$  é tal que  $a \cdot \det(C) = 1$  e se  $G = \text{SO}(V)$ , então  $C \in \text{O}(d-1)$  é tal que  $a \cdot \det(C) = 1$ . Agora, seja  $g \in \overline{G_{[v]}}$ . Existe sequência  $(g_m)$  em  $G_{[v]}$  tal que  $g_m \rightarrow g$ . Para cada  $m \in \mathbb{N}$  temos que

$$g_m = \begin{bmatrix} a_m & b_m \\ 0 & C_m \end{bmatrix}.$$

Uma vez que o limite desses elementos, escritos na forma de matrizes, se dá coordenada à coordenada das matrizes, segue que  $a_m \rightarrow a$ ,  $b_m \rightarrow b$  e  $C_m \rightarrow C$  e, portanto,

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

onde  $a \in \mathbb{R}$  e  $b$  é uma matriz linha  $1 \times (d-1)$ . Ainda, como  $\text{Sl}(V)$  e  $\text{SO}(V)$  são fechados, segue que para  $G = \text{Sl}(V)$ ,  $C \in \text{Gl}(d-1)$  e  $a \cdot \det(C) = 1$  e para  $G = \text{SO}(V)$ ,  $C \in \text{O}(d-1)$  e  $a \cdot \det(C) = 1$ , ou seja,  $g \in G_{[v]}$ . Logo,  $G_{[v]}$  é subgrupo fechado de  $G$ . Assim, segue pelo Teorema de Cartan B.1.6 que  $G_{[v]}$  é subgrupo de Lie de  $G$ .  $\square$

**Teorema 5.2.4**  $\mathbb{P}(V)$  é uma variedade diferenciável tal que  $\mathbb{P}(V) \approx \frac{G}{G_{[v]}}$ , onde  $G_{[v]}$  é o grupo de isotropia por algum ponto  $[v] \in \mathbb{P}(V)$  e a ação definida no corolário 5.2.2 para  $G \in \{\text{Sl}(V), \text{SO}(V)\}$  é diferenciável.

Demonstração: Consideremos a ação definida no corolário 5.2.2 para  $G \in \{\text{Sl}(V), \text{SO}(V)\}$ . Pelo corolário 5.2.3 temos que, para  $[v] \in \mathbb{P}(V)$ , o grupo de isotropia  $G_{[v]}$  é subgrupo de Lie de  $G$ . Pela proposição 5.2.1 e pelo corolário 5.2.2 temos que a ação é transitiva. Portanto, segue da proposição B.1.9 que  $\mathbb{P}(V)$  é uma variedade diferenciável e a ação  $a$  é diferenciável. Além disso, pelo teorema B.1.8 segue que  $\mathbb{P}(V) \approx \frac{G}{G_{[v]}}$ .  $\square$

**Corolário 5.2.5**  $\mathbb{P}(V)$  é conexo e compacto.

Demonstração: Fixado  $[v] \in \mathbb{P}(V)$ , consideremos a função

$$\begin{aligned} a^{([v])} : \text{SO}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ g &\longmapsto [gv] \end{aligned}$$

Note que  $a^{([v])}$  é uma aplicação parcial da ação definida em 5.2.2 que, pelo teorema 5.2.4 é diferenciável e, em particular, contínua. Logo  $a^{([v])}$  é contínua e, pela transitividade da ação,  $a^{([v])}$  é sobrejetora. Além disso temos que  $\text{SO}(V)$  é compacto e conexo. Portanto, pela continuidade e sobrejetividade de  $a^{([v])}$ , concluímos que  $a^{([v])}(\text{SO}(V)) = \mathbb{P}(V)$  é conexo e compacto.  $\square$

Observação: É importante destacar que a ação transitiva do teorema 5.2.4 determina uma topologia em  $\mathbb{P}(V)$  que o identifica como variedade diferenciável. No capítulo 4, ao estudar o fluxo sobre o espaço projetivo determinamos uma métrica em  $\mathbb{P}(V)$ . Logo é natural que surja a questão se a topologia definida por essa métrica é a mesma topologia em  $\mathbb{P}(V)$  visto como variedade diferenciável. A resposta à essa questão é sim, o que nos permite realizar os cálculos desde o capítulo 4. A unicidade da topologia em  $\mathbb{P}(V)$  é bem apresentada em [19] na Proposição 1.2 (página 6) e Proposição C.5 (página 187).  $\square$

Consideremos o fluxo  $g^t$  sobre  $\mathbb{P}(V)$  induzido pela ação  $a$  definida em 5.2.2. Para esse fluxo seja  $g^t = e^t h^t u^t$  sua decomposição de Jordan multiplicativa. Decompondo o espaço vetorial  $V$  como a soma  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$  dos autoespaços de  $h$  associados aos autovalores reais positivos  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$  demonstramos, na proposição 4.4.1, que o conjunto  $\{\mathbb{P}(V_1), \dots, \mathbb{P}(V_n)\}$  é uma decomposição de Morse para  $g^t$  e, no teorema 4.4.6 que essa é a decomposição de Morse mais fina para o fluxo.

**Proposição 5.2.6** *Para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathbb{P}(V_j)$  é subvariedade mergulhada de  $\mathbb{P}(V)$ .*

Demonstração: Seja  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Consideremos a aplicação inclusão  $i : \mathbb{P}(V_j) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ . Uma vez que aplicação inclusão é contínua e injetiva,  $\mathbb{P}(V_j)$  é compacto pelo corolário 5.2.5 e  $\mathbb{P}(V)$  é espaço de Hausdorff pelo corolário 4.1.4 temos que  $i$  é homeomorfismo sobre  $i(\mathbb{P}(V_j)) = \mathbb{P}(V_j)$ . Logo, um mergulho. Pelo teorema 5.2.4,  $\mathbb{P}(V)$  e, conseqüentemente,  $\mathbb{P}(V_j)$  são variedades diferenciáveis. Portanto, segue da proposição B.1.5 que  $i(\mathbb{P}(V_j)) = \mathbb{P}(V_j)$  é variedade mergulhada de  $\mathbb{P}(V)$ .  $\square$

Agora, seja  $G_h \subset \text{Sl}(V)$  o conjunto definido por

$$G_h = \{g \in \text{Sl}(V) ; g\mathbb{P}(V_i) = \mathbb{P}(V_i), \forall i = 1, \dots, n\}.$$

$G_h$  é o subconjunto de  $\text{Sl}(V)$  que fixa as componentes de Morse de  $\mathbb{P}(V)$ .

**Lema 5.2.7**  $G_h$  é subgrupo de  $\text{Sl}(V)$ .

Demonstração:

I.  $I \in \text{Sl}(V)$  pertence à  $G_h$ . De fato,  $I(\mathbb{P}(V_i)) = \mathbb{P}(V_i)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

II. Se  $g \in G_h$ , então  $g^{-1} \in G_h$ . De fato,

$$\begin{aligned} g \in G_h &\Rightarrow g\mathbb{P}(V_i) = \mathbb{P}(V_i) \quad \forall i = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow g^{-1}g\mathbb{P}(V_i) = g^{-1}\mathbb{P}(V_i) \quad \forall i = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(V_i) = g^{-1}\mathbb{P}(V_i) \quad \forall i = 1, \dots, n \\ &\Rightarrow g^{-1} \in G_h. \end{aligned}$$

III. Se  $g, q \in G_h$ , então  $gq^{-1} \in G_h$ . De fato, se  $g, q \in G_h$  então  $g, q^{-1} \in G_h$ . Assim,

$$(gq^{-1})\mathbb{P}(V_i) = g(q^{-1}\mathbb{P}(V_i)) = g\mathbb{P}(V_i) = \mathbb{P}(V_i) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Portanto,  $gq^{-1} \in G_h$ .

Segue de I, II e III que  $G_h$  é subgrupo de  $\text{Sl}(V)$ . □

**Lema 5.2.8** Dado  $g \in \text{Sl}(V)$  segue que:

1)  $g\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(gU)$ , para todo  $U \subset V$ .

2) Para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathbb{P}(gV_i) = \mathbb{P}(V_i)$ ,  $\Leftrightarrow gV_i = V_i$ .

Demonstração:

1) Segue da proposição 4.1.2 que:

$$\begin{aligned} g\mathbb{P}(U) &= \{g[u] ; u \in U\} \\ &= \{[gu] ; u \in U\} \\ &= \{[gu] ; gu \in gU\} \\ &= \mathbb{P}(gU). \end{aligned}$$

2) Seja  $g \in \text{Sl}(V)$  tal que  $\mathbb{P}(V_i) = \mathbb{P}(gV_i) \stackrel{(1)}{=} g\mathbb{P}(V_i)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Tome  $v \in V_i$ . Logo,  $[v] \in \mathbb{P}(V_i)$  e, assim,  $g[v] = [gv] \in \mathbb{P}(V_i)$  por hipótese. Desse modo,  $gv \in V_i$ , ou seja,  $gV_i \subset V_i$ . Como  $g \in \text{Sl}(V)$  temos que  $g : V \rightarrow V$  é isomorfismo e, daí,  $gV_i = V_i$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Reciprocamente, se  $g \in \text{Sl}(V)$  tal que  $gV_i = V_i$ , então

$$g\mathbb{P}(V_i) \stackrel{(1)}{=} \mathbb{P}(gV_i) = \mathbb{P}(V_i),$$

para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

□

Considere os subconjuntos de  $\text{Sl}(V)$  dados por:

$$G_1 = \{g \in \text{Sl}(V) ; gV_i = V_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}\} \text{ e,}$$

$$G_2 = \{g \in \text{Sl}(V) ; gh = hg\}.$$

Note que  $G_1$  é o subconjunto de  $\text{Sl}(V)$  que fixa as componentes da decomposição de  $V$  em autoespaços associados à  $h$  enquanto que  $G_2$  é o subconjunto dos elementos que comutam com  $h$ . Lembrando que  $h^t$  é a componente hiperbólica da decomposição de Jordan multiplicativa do fluxo  $g^t$ .

**Proposição 5.2.9**  $G_1 = G_h = G_2$ .

Demonstração:  $G_1 = G_h$  segue diretamente do lema 5.2.8(2), uma vez que, pelo lema,

$$g \in G_h \Leftrightarrow g \in G_1.$$

Vamos mostrar que  $G_1 = G_2$  e o resultado seguirá. Seja  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  a decomposição de  $V$  em autoespaços de  $h$ . Seja  $g \in G_2$  e tome  $v \in V_i$ . Uma vez que  $V_i$  é autoespaço de  $h$  associado à  $\lambda_i$  segue que

$$h(gv) = hg(v) = gh(v) = g(hv) = g(\lambda_i v) = \lambda_i(gv).$$

Assim,  $gv \in V_i$ , isto é,  $gV_i \subset V_i$  e, daí,  $gV_i = V_i$ , pois  $g : V \rightarrow V$  é isomorfismo. Portanto,  $G_2 \subset G_1$ .

Reciprocamente, seja  $g \in G_1$  e tome  $v = v_1 + \cdots + v_n \in V$ , com  $v_i \in V_i$ . Segue que

$$\begin{aligned}
 (gh)v = g(hv) &= g(h(v_1 + \cdots + v_n)) \\
 &= g(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\
 &= \lambda_1 \underbrace{g v_1}_{\in V_1} + \cdots + \lambda_n \underbrace{g v_n}_{\in V_n} \\
 &= h(gv_1 + \cdots + gv_n) \\
 &= h(g(v_1 + \cdots + v_n)) \\
 &= h(gv) = (hg)v.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $G_1 \subset G_2$ . □

Podemos, com esses resultados, caracterizar as componentes de Morse como órbitas de  $G_h$ .

**Proposição 5.2.10** *Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mathbb{P}(V_i) = G_h \cdot [v]$ , para todo  $v \in V_i$ .*

Demonstração: Primeiramente, note que para  $v \in V_i$ ,

$$G_h \cdot [v] = \{g[v] ; g \in G_h\} \subset \mathbb{P}(V_i),$$

onde a inclusão se dá pela definição de  $G_h$ .

Reciprocamente, sejam  $[w] \in \mathbb{P}(V_i)$  e  $v \in V_i$ . Consideremos  $\{w_1 = \frac{w}{\|w\|}, w_2, \dots, w_{d_i}\}$  e  $\{v_1 = \frac{v}{\|v\|}, v_2, \dots, v_{d_i}\}$  bases ortonormais de  $V_i$ . Tome  $g_i \in \text{Sl}(V_i)$  tal que  $g_i v_j = w_j$ , para todo  $j = 1, \dots, d_i$ . Definimos  $g \in \text{Sl}(V)$  tal que  $g|_{V_i} = g_i$  e  $g|_{V_k} = I|_{V_k}$  para  $k \neq i$ . Observemos que  $g \in G_h$  e  $g[v] = [w]$ . De fato,  $g[v] = g\left[\frac{v}{\|v\|}\right] = \left[\frac{w}{\|w\|}\right] = [w]$  segue imediatamente da definição de  $g$ , já  $g \in G_h$  segue do fato que  $g(V_i) = g|_{V_i}(V_i) = g_i(V_i) = V_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Isto é,  $g \in G_1 = G_h$  pela proposição 5.2.9. Daí,  $\mathbb{P}(V_i) \subset G_h \cdot [v]$ . Portanto, como  $v \in V_i$  foi tomado arbitrário, concluímos que  $\mathbb{P}(V_i) = G_h \cdot [v]$  para todo  $v \in V_i$ . □

Para caracterizarmos cada componente de Morse como órbitas de um único elemento  $[v] \in \mathbb{P}(V)$ , é preciso definirmos mais um conjunto. Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  sejam  $\gamma_i$  uma base de  $V_i$  e  $\gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$ . Temos que  $\gamma$  é uma base de  $V$ . Agora, seja  $W$  o grupo das permutações dos elementos dessa base de  $V$ . Isso nos leva ao próximo resultado.

Observação: Todo o desenvolvimento de matrizes a partir desse ponto dar-se-á em relação à base  $\gamma$  descrita acima.  $\square$

**Teorema 5.2.11** *Existe  $[v] \in \mathbb{P}(V)$  tal que, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , existe  $w \in W$  em que  $\mathbb{P}(V_i) = G_h \cdot w[v]$ .*

Demonstração: Seja  $v = v_1$  o primeiro elemento da base  $\gamma$ . Agora, sejam  $v_j$  o primeiro elemento da base  $\gamma_j$  de  $V_j$  e  $w_j \in W$  uma permutação que leva  $v_1$  em  $v_j$ . Assim, pela proposição 5.2.10, temos

$$\mathbb{P}(V_j) = G_h \cdot [v_j] = G_h \cdot w_j[v_1].$$

$\square$

Observação: Vale-nos observar que para  $K_h = \{g \in SO(V) ; gh = hg\}$  temos, também, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  a caracterização  $\mathbb{P}(V_i) = K_h \cdot w[v]$ , cuja demonstração segue, de maneira inteiramente análoga, aos passos feitos para a demonstração sobre o grupo  $G_h$ . Além disso, dentre as caracterizações de  $K_h$ , vendo-o como o centralizador de  $h$  em  $SO(V)$  tem-se que  $K_h = G_h \cap SO(V)$ .  $\square$

Vamos agora caracterizar os espaços estável e instável de cada componente de Morse por meio do grupo  $G_h$ . Para isso, seja  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  a decomposição de  $V$  em autoespaços de  $h$ . Relembre os subespaços de  $V$  definidos por:

- $S_i = V_i \oplus \dots \oplus V_n, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , e
- $T_j = V_1 \oplus \dots \oplus V_j, \forall j \in \{1, \dots, n\}$ .

Consideremos os subconjuntos de  $Sl(V)$  definidos por:

$$P_h^- = \{g \in Sl(V) ; g(\text{est}(\mathbb{P}(V_i))) = \text{est}(\mathbb{P}(V_i)), \forall i \in \{1, \dots, n\}\}, \text{ e}$$

$$P_h^+ = \{g \in Sl(V) ; g(\text{inst}(\mathbb{P}(V_i))) = \text{inst}(\mathbb{P}(V_i)), \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Note que  $P_h^-$  é o subconjunto que fixa o espaço estável de  $\mathbb{P}(V_i)$  enquanto  $P_h^+$  fixa o espaço instável de  $\mathbb{P}(V_i)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

**Lema 5.2.12** *Para todo  $g \in Sl(V)$  e para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  segue que:*

- 1)  $g(\text{est}(\mathbb{P}(V_i))) = \mathbb{P}(g(S_i \setminus S_{i+1}));$
- 2)  $g(\text{est}(\mathbb{P}(V_i))) = \text{est}(\mathbb{P}(V_i)) \Leftrightarrow g(S_i \setminus S_{i+1}) = S_i \setminus S_{i+1};$
- 3)  $g(\text{inst}(\mathbb{P}(V_i))) = \mathbb{P}(g(T_i \setminus T_{i-1}));$
- 4)  $g(\text{inst}(\mathbb{P}(V_i))) = \text{inst}(\mathbb{P}(V_i)) \Leftrightarrow g(T_i \setminus T_{i-1}) = T_i \setminus T_{i-1};$

Demonstração:

- 1) Segue do corolário 4.4.2 que  $\text{est}(\mathbb{P}(V_i)) = \mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1})$ . Logo, pelo lema 5.2.8(1), temos que  $g(\text{est}(\mathbb{P}(V_i))) = g(\mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1})) = \mathbb{P}(g(S_i \setminus S_{i+1}))$ .
- 2) Seja  $g \in \text{Sl}(V)$  tal que  $g(\text{est}(\mathbb{P}(V_i))) = \text{est}(\mathbb{P}(V_i))$ . Tome  $v \in S_i \setminus S_{i+1}$ . Logo,  $[v] \in \mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1})$ . Segue da hipótese e do item (1) que  $g[v] = [gv] \in \mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1})$  e, pela proposição 4.1.2,  $gv \in S_i \setminus S_{i+1}$ . Portanto,  $g(S_i \setminus S_{i+1}) \subset S_i \setminus S_{i+1}$ . Agora, como  $\mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1}) = g(\mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1}))$  segue que  $g^{-1}(\mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1})) = \mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1})$ . Pelo raciocínio análogo ao do parágrafo anterior, conclui-se que  $g^{-1}(S_i \setminus S_{i+1}) \subset S_i \setminus S_{i+1}$ . Desse modo,

$$\begin{aligned}
 w \in S_i \setminus S_{i+1} &\Rightarrow g^{-1}w = u \in S_i \setminus S_{i+1} \\
 &\Rightarrow w = gu \in g(S_i \setminus S_{i+1}) \\
 &\Rightarrow S_i \setminus S_{i+1} \subset g(S_i \setminus S_{i+1}).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $g(S_i \setminus S_{i+1}) = S_i \setminus S_{i+1}$ .

Reciprocamente, seja  $g \in \text{Sl}(V)$ , tal que  $g(S_i \setminus S_{i+1}) = S_i \setminus S_{i+1}$ . Tome  $[v] \in \text{est}(\mathbb{P}(V_i)) = \mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1})$ . Assim, pela hipótese,  $g[v] = [gv] \in \mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1})$ . Desse modo,

$$\mathbb{P}(g(S_i \setminus S_{i+1})) \stackrel{(1)}{=} g(\text{est}(\mathbb{P}(V_i))) \subset \text{est}(\mathbb{P}(V_i)).$$

Agora, seja  $[w] \in \text{est}(\mathbb{P}(V_i))$ , onde  $w \in S_i \setminus S_{i+1}$ . Tome  $v = g^{-1}w \in S_i \setminus S_{i+1}$  (tal  $v$  existe, pois supomos  $g(S_i \setminus S_{i+1}) = S_i \setminus S_{i+1}$ ). Logo,  $[w] = [gv] = g[v] \in g(\mathbb{P}(S_i \setminus S_{i+1}))$  e, portanto,  $\text{est}(\mathbb{P}(V_i)) \subset \mathbb{P}(g(S_i \setminus S_{i+1})) = g(\text{est}(\mathbb{P}(V_i)))$ .

Os itens 3) e 4) são análogos à 1) e 2), respectivamente. □

**Lema 5.2.13** *Para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  segue que:*

- 1)  $P_h^- = \{g \in \text{Sl}(V) ; g(S_i \setminus S_{i+1}) = S_i \setminus S_{i+1}\};$

$$2) P_h^+ = \{g \in \text{Sl}(V) ; g(T_i \setminus T_{i-1}) = T_i \setminus T_{i-1}\}.$$

Demonstração:

- 1) Segue imediatamente do lema 5.2.12 itens (1) e (2), uma vez que, por esses itens, temos que

$$g \in P_h^- \Leftrightarrow g \in \{g \in \text{Sl}(V) ; g(S_i \setminus S_{i+1}) = S_i \setminus S_{i+1}\}.$$

- 2) Segue imediatamente do lema 5.2.12 itens (3) e (4), uma vez que, por esses itens, temos que

$$g \in P_h^+ \Leftrightarrow \{g \in \text{Sl}(V) ; g(T_i \setminus T_{i-1}) = T_i \setminus T_{i-1}\}.$$

□

Podemos, assim, caracterizar os espaços estáveis e instáveis de  $\mathbb{P}(V)$  como órbitas de  $P_h^-$  e  $P_h^+$ , respectivamente.

**Proposição 5.2.14** *Para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  segue que:*

- 1)  $\text{est}(\mathbb{P}(V_i)) = P_h^- \cdot [v]$ , para todo  $v \in S_i \setminus S_{i+1}$ ;  
 2)  $\text{inst}(\mathbb{P}(V_i)) = P_h^+ \cdot [v]$ , para todo  $v \in T_i \setminus T_{i-1}$

Demonstração:

- 1) Primeiramente, note que para  $v \in S_i \setminus S_{i+1}$ , tem-se  $P_h^- \cdot [v] = \{g[v] ; g \in P_h^-\} \subset \text{est}(\mathbb{P}(V_i))$ , onde a inclusão se dá pelo corolário 4.4.2 e pela definição de  $P_h^-$ .

Agora, sejam  $[w] \in \text{est}(\mathbb{P}(V_i))$  e  $v \in S_i \setminus S_{i+1}$ . Note que  $w \in S_i \setminus S_{i+1}$ . Logo, podemos escrever  $v = v_i + v_{i+1} + \dots + v_n$  e  $w = w_i + w_{i+1} + \dots + w_n$  com  $v_j, w_j \in V_j$ ,  $v_i \neq 0$  e  $w_i \neq 0$ . Estendemos  $\{v_i\}$  à uma base  $\{v_i, v'_1, \dots, v'_{d_i}\}$  de  $V_i$ . Seja  $B_j$  base de  $V_j$  para todo  $j > i$ . Segue que  $\{v_i, v'_1, \dots, v'_{d_i}\} \cup B_{i+1} \cup \dots \cup B_n$  é base de  $S_i$ . Assim, note que  $\{v'_1, \dots, v'_{d_i}\} \cup B_{i+1} \cup \dots \cup B_n$  está contido em  $S_i$  e gera um subespaço próprio de  $S_i$ , digamos  $S$ . Além disso,  $v \in S_i \setminus S_{i+1}$  é tal que  $v \notin S$  uma vez que  $v$  não é gerado pela base de  $S$ . Consequentemente,  $\{v\} \cup \{v'_1, \dots, v'_{d_i}\} \cup B_{i+1} \cup \dots \cup B_n$  é um conjunto linearmente independente em  $S_i$  e tem a mesma dimensão de  $S_i$ , ou seja, é base de

$S_i$ . Analogamente, podemos obter uma base  $\{w, w'_1, \dots, w'_{d_i}\} \cup B_{i+1} \cup \dots \cup B_n$  de  $S_i$ . Agora, tome  $g_i \in \text{Sl}(S_i)$  tal que

$$g_i(v'_k) = w'_k, \quad \forall k \in \{2, \dots, d_i\} \text{ e } g_i(v) = w.$$

Definimos  $g \in \text{Sl}(V)$  tal que  $g|_{S_i} = g_i$  e  $g|_{\substack{V_j \\ j < i}} = I|_{\substack{V_j \\ j < i}}$ . Observemos que  $g \in P_h^-$  e  $g[v] = [w]$ . De fato,  $g[v] = [w]$  segue imediatamente da definição de  $g$ . Já  $g \in P_h^-$  segue de que se  $z \in S_i \setminus S_{i+1}$  então  $z = \underbrace{av + a_1v'_1 + \dots + a_{d_i}v'_{d_i}}_{\neq 0} + v'_{i+1} + \dots + v'_n$ , onde  $v'_j \in B_j$  para todo  $j > i$ . Assim,  $g(z) = \underbrace{aw + a_1w'_1 + \dots + a_{d_i}w'_{d_i}}_{\neq 0} + v'_{i+1} + \dots + v'_n \in S_i \setminus S_{i+1}$ , ou seja,  $g(S_i \setminus S_{i+1}) = g_i(S_i \setminus S_{i+1}) = S_i \setminus S_{i+1}$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Daí,  $\text{est}(\mathbb{P}(V_i)) \subset P_h^- \cdot [v]$ . Portanto, como  $v \in S_i \setminus S_{i+1}$  foi tomado arbitrário, concluímos que  $\text{est}(\mathbb{P}(V_i)) = P_h^- \cdot [v]$  para todo  $v \in S_i \setminus S_{i+1}$  e para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

2) A demonstração é análoga ao item anterior.

□

**Proposição 5.2.15** *Existe  $[v] \in \mathbb{P}(V)$  tal que, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , existe  $w \in W$  em que:*

$$1) \text{ est}(\mathbb{P}(V_i)) = P_h^- \cdot w[v];$$

$$2) \text{ inst}(\mathbb{P}(V_i)) = P_h^+ \cdot w[v]$$

Demonstração: Seja  $v = v_1$  o primeiro elemento da base  $\gamma$  de  $V$ . Sejam  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $v_i$  o primeiro elemento da base  $\gamma_i$  de  $V_i$  e  $w_i \in W$  uma permutação que leva  $v_1$  em  $v_i$ .

1) Como  $v_i \in V_i \setminus \{0\} \subset S_i \setminus S_{i+1}$ , segue da proposição 5.2.14(1) que

$$\text{est}(\mathbb{P}(V_i)) = P_h^- \cdot [v_i] = P_h^- \cdot w_i[v_1].$$

2) Como  $v_i \in V_i \setminus \{0\} \subset T_i \setminus T_{i-1}$ , segue da proposição 5.2.14(2) que

$$\text{inst}(\mathbb{P}(V_i)) = P_h^+ \cdot [v_i] = P_h^+ \cdot w_i[v_1].$$

□

Agora, para caraterizar os espaços instáveis e estáveis por meio do grupo  $G_h$ , consideremos os grupos de matrizes triangulares inferiores e superiores à seguir:

$$N_h^- = \left\{ \begin{bmatrix} I_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ * & I_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & I_{d_n} \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad N_h^+ = \left\{ \begin{bmatrix} I_{d_1} & * & \cdots & * \\ 0 & I_{d_2} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{d_n} \end{bmatrix} \right\},$$

onde  $I_{d_j}$  representa uma matriz identidade  $d_j \times d_j$ , para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$  em que, para cada  $j$ ,  $d_j$  é a dimensão da componente  $V_j$  da decomposição de  $V$  em autoespaços de  $h$ .

**Teorema 5.2.16** *Existe  $[v] \in \mathbb{P}(V)$  tal que, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  existe  $w \in W$  em que:*

$$(i) \text{ est}(\mathbb{P}(V_i)) = N_h^- G_h \cdot w[v];$$

$$(ii) \text{ inst}(\mathbb{P}(V_i)) = N_h^+ G_h \cdot w[v].$$

Demonstração: Primeiramente, lembremos que  $G_h = \{g \in \text{Sl}(V) ; gV_i = V_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$  pela proposição 5.2.9. Assim, consideremos a base  $\gamma$  de  $V$ . Em termos de matrizes na base  $\gamma$ , podemos reescrever  $G_h$  por

$$G_h = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \right\},$$

onde os blocos  $A_j$  são matrizes invertíveis  $d_j \times d_j$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$  e  $d_j = \dim(V_j)$ . Analogamente, pelo lema 5.2.13 temos que

$$1) P_h^- = \{g \in \text{Sl}(V) ; g(S_i \setminus S_{i+1}) = S_i \setminus S_{i+1}\};$$

$$2) P_h^+ = \{g \in \text{Sl}(V) ; g(T_i \setminus T_{i-1}) = T_i \setminus T_{i-1}\}.$$

Em termos de matrizes na base  $\gamma$ , podemos reescrever:

$$P_h^- = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & A_n \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad P_h^+ = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \right\},$$

onde os blocos  $A_j$  são matrizes invertíveis  $d_j \times d_j$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$  e  $d_j = \dim(V_j)$ . Dessa forma, observando a diagonal das representações matriciais de  $P_h^-$  e  $P_h^+$  note que os blocos  $A_j$  ali dispostos podem ser escritos por  $I_{d_j} A_j$  e para a parte triangular abaixo (acima) da diagonal podemos determinar um elemento de  $N_h^-(N_h^+)$  correspondente. Assim, ficam nítidas as relações:

$$(i) P_h^- = N_h^- G_h;$$

$$(ii) P_h^+ = N_h^+ G_h.$$

O resultado segue dessas relações unidas à proposição 5.2.15. □

**Proposição 5.2.17**  $G_h$  e  $N_h^\pm$  são subgrupos de Lie de  $\text{Sl}(V)$ .

Demonstração: Vamos mostrar que  $G_h$  e  $N_h^\pm$  são subgrupos fechados de  $\text{Sl}(V)$  e o resultado seguirá do Teorema de Cartan B.1.6.

Conforme vimos na proposição 5.2.16, podemos reescrever  $G_h$  por

$$G_h = \left\{ \left[ \begin{array}{cccc} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{array} \right] \right\},$$

onde os blocos  $A_j$  são matrizes invertíveis  $d_j \times d_j$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$  e  $d_j = \dim(V_j)$ . Assim, seja  $g \in \overline{G_h}$ . Existe uma sequência  $(g_m)$  em  $G_h$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m = g$ . Para cada  $m \in \mathbb{N}$  temos que

$$g_m = \left[ \begin{array}{cccc} A_1^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n^m \end{array} \right].$$

Uma vez que o limite desses elementos, escritos na forma de matrizes, se dá coordenada à

coordenada das matrizes, segue que  $A_i^m \rightarrow A_i$  e, dessa forma,

$$g = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}.$$

Ainda, já que  $\text{Sl}(V)$  é fechado e  $(g_m)$  em particular é sequência em  $\text{Sl}(V)$ , concluímos que  $g \in \text{Sl}(V)$ . Logo  $g \in G_h$  e, portanto,  $G_h$  é fechado. Por argumento análogo, mostramos que  $N_h^\pm$  são fechados.  $\square$

**Lema 5.2.18** *As álgebras de Lie dos grupos de Lie  $G_h, G_{[v_1]}, N^+$  e  $N^-$  são, respectivamente,  $\mathfrak{g}_h, \mathfrak{g}_{[v_1]}, \mathfrak{n}_h^+$  e  $\mathfrak{n}_h^-$  dadas por:*

$$\mathfrak{g}_h = \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \right\},$$

onde os blocos  $A_j$  são matrizes  $d_j \times d_j$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $d_j = \dim(V_j)$  e  $\sum_{i=1}^n \text{tra}(A_i) = 0$ .

$$\mathfrak{g}_{[v_1]} = \left\{ X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V) ; X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & C \end{bmatrix} \right\},$$

onde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b$  é uma matriz linha  $1 \times (d-1)$  e  $C \in \mathfrak{gl}(d-1)$  é tal que  $a + \text{tra}(C) = 0$ ;

$$\mathfrak{n}_h^- = \left\{ \begin{bmatrix} 0_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0_{d_n} \end{bmatrix} \right\} \quad e \quad \mathfrak{n}_h^+ = \left\{ \begin{bmatrix} 0_{d_1} & * & \cdots & * \\ 0 & 0_{d_2} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0_{d_n} \end{bmatrix} \right\}.$$

Onde  $0_{d_j}$  representa uma matriz nula  $d_j \times d_j$ , para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$  em que, para cada  $j$ ,  $d_j = \dim(V_j)$ .

Demonstração: A demonstração segue do cálculo direto do logaritmo de matrizes (vide definição B.3.6) para os elementos desses conjuntos e que  $G_h, G_{[v_1]} \subset \text{Sl}(V)$ .  $\square$

**Corolário 5.2.19** *Se  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ , então*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_h \oplus \mathfrak{n}_h^+ \oplus \mathfrak{n}_h^-.$$

Demonstração: Pelas representações matriciais de  $\mathfrak{g}_h$  e  $\mathfrak{n}^\pm$  segue que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_h + \mathfrak{n}_h^+ + \mathfrak{n}_h^-$ . Agora sejam  $X \in \mathfrak{g}_h$ ,  $Y \in \mathfrak{n}_h^+$  e  $Z \in \mathfrak{n}_h^-$  tais que  $X + Y + Z = 0$ . Novamente, pelas representações matriciais de  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  concluímos que se  $X + Y + Z = 0$ , então  $X = Y = Z = 0$ , ou seja,  $\mathfrak{g}_h$ ,  $\mathfrak{n}_h^+$  e  $\mathfrak{n}_h^-$  são espaços independentes.  $\square$

**Proposição 5.2.20** *As álgebras de Lie  $\mathfrak{n}_h^\pm$  são  $G_h$ -invariantes.*

*Em particular, são  $K_h$ -invariantes, onde  $K_h = \{g \in \text{SO}(V); gh = hg\}$  conforme observação da página 106.*

Demonstração: Seja  $g \in G_h$ . Tome  $X \in \mathfrak{n}_h^-$ . Queremos mostrar que  $\text{Ad}(g)X \in \mathfrak{n}_h^-$ . De fato, observemos que pela forma matricial desses conjuntos em relação à base  $\gamma$  temos que:

$$\text{Ad}(g)X = gXg^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & 0_{d_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n^{-1} \end{bmatrix},$$

que pelo cálculo de produto de matrizes obtemos:

$$\text{Ad}(g)X = \begin{bmatrix} 0_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ *' & 0_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ *' & *' & \cdots & 0_{d_n} \end{bmatrix} \in \mathfrak{n}_h^-.$$

Portanto,  $\mathfrak{n}_h^-$  é  $G_h$ -invariante. A demonstração é análoga para  $\mathfrak{n}_h^+$ .

Por fim, uma vez que  $K_h \subset G_h$  segue que  $\mathfrak{n}_h^\pm$  são  $K_h$ -invariantes.  $\square$

## 6 HIPERBOLICIDADE NORMAL

Este capítulo apresenta o resultado principal desse trabalho. Mostraremos que as componentes de Morse da decomposição de Morse mais fina para o fluxo induzido sobre  $\mathbb{P}(V)$  são normalmente hiperbólicas. Para esse propósito alguns resultados ainda são necessários, conforme faremos à seguir, mas, inicialmente, vamos estabelecer os critérios para que as componentes de Morse da proposição 4.4.1 sejam normalmente hiperbólicas e, em seguida, os passos finais para nosso teorema principal, o Teorema 6.0.16. Este capítulo se baseia nas referências [7], [19], [20] e [21].

**Definição 6.0.1** *Uma **métrica Riemanniana** (ou **estrutura Riemanniana**) em uma variedade diferenciável  $F$  é uma lei que faz corresponder a cada ponto  $x$  de  $F$  uma forma bilinear simétrica, positiva definida (isto é, um produto interno)  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  no espaço tangente  $T_x F$ , que varia diferenciavelmente no sentido: para todo par  $(X, Y)$  de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança  $U$  de  $F$ , a função  $\langle X, Y \rangle$  é diferenciável em  $U$ .*

**Definição 6.0.2** *Seja  $\phi$  um difeomorfismo sobre uma variedade Riemanniana  $F$  e  $D\phi$  sua derivada. Uma subvariedade invariante  $\mathcal{E} \subset F$  é **normalmente hiperbólica** se o fibrado tangente de  $F$  sobre  $\mathcal{E}$  tem subfibrados vetoriais invariantes  $V^+$  e  $V^-$  e constantes positivas  $c$  e  $\lambda < \mu$  tais que:*

1.  $TF|_{\mathcal{E}} = T\mathcal{E} \oplus V^+ \oplus V^-$ ;
2.  $|D\phi^n(v)| \leq c \cdot e^{-\lambda n}|v|$ ,  $\forall v \in V^-$  e  $n \geq 0$ ;
3.  $|D\phi^n(v)| \leq c \cdot e^{\lambda n}|v|$ ,  $\forall v \in V^+$  e  $n \leq 0$ ;
4.  $|D\phi^n(v)| \leq c \cdot e^{\mu|n|}|v|$ ,  $\forall v \in T\mathcal{E}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ .

Neste caso,  $V^-$  é dito ser o **fibrado estável** e  $V^+$  o **fibrado instável** de  $\mathcal{E}$ . Se  $\phi^t$  é um fluxo diferenciável sobre  $F$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , uma subvariedade  $\mathcal{E}$  é normalmente hiperbólica se ela é normalmente hiperbólica para o difeomorfismo no tempo um  $\phi^1$ .

Primeiro construiremos uma métrica Riemanniana apropriada em  $\mathbb{P}(V)$ . Para tal, seja  $G = \text{Sl}(V)$  grupo de Lie conexo com álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$  e  $F = \mathbb{P}(V)$  variedade

diferenciável. Seja  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o produto interno de Cartan em  $\mathfrak{g}$ , fixado (esse produto interno é o estabelecido pela proposição B.3.11(1)).

**Lema 6.0.3**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é  $\text{SO}(V)$ -invariante, isto é, dados  $X, Y \in \mathfrak{g}$  e  $k \in \text{SO}(V)$  tem-se que

$$\langle \text{Ad}(k)X, \text{Ad}(k)Y \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Demonstração: Sejam  $X, Y \in \mathfrak{g}$  e  $k \in \text{SO}(V)$ . Pelo lema B.3.4 temos que,  $\text{Ad}(k)$  é automorfismo de  $\mathfrak{g}$  e pela proposição B.3.9 segue diretamente que

$$\langle \text{Ad}(k)X, \text{Ad}(k)Y \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

□

Seja  $\mathfrak{g}_x$  a subálgebra de isotropia em  $x \in \mathbb{P}(V)$ . Assim,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x^\perp \oplus \mathfrak{g}_x$$

onde  $\perp$  denota o complemento ortogonal com respeito ao produto interno de Cartan:

$$\mathfrak{g}_x^\perp = \{X \in \mathfrak{g} ; \forall Y \in \mathfrak{g}_x, \langle X, Y \rangle = 0\}.$$

**Lema 6.0.4** Se  $k \in \text{SO}(V)$  então  $\mathfrak{g}_{kx} = \text{Ad}(k)\mathfrak{g}_x$ .

Demonstração:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{kx} &= \{X \in \mathfrak{g} ; e^{tX}kx = kx, \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} ; k^{-1}e^{tX}kx = x, \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} ; e^{t(k^{-1}Xk)}x = x, \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} ; e^{t\text{Ad}(k)^{-1}X}x = x, \forall t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{X \in \mathfrak{g} ; \text{Ad}(k)^{-1}X \in \mathfrak{g}_x\} \\ &= \text{Ad}(k)\mathfrak{g}_x. \end{aligned}$$

□

Pela  $\text{SO}(V)$ -invariância do produto interno de Cartan, segue o resultado abaixo.

**Lema 6.0.5** Se  $k \in \text{SO}(V)$ , então  $\mathfrak{g}_{kx}^\perp = (\text{Ad}(k)\mathfrak{g}_x)^\perp = \text{Ad}(k)(\mathfrak{g}_x^\perp)$ .

Demonstração: Primeiramente note que, pelo Lema 6.0.4,  $\mathfrak{g}_{kx}^\perp = (\text{Ad}(k)\mathfrak{g}_x)^\perp$ .

Agora, é suficiente mostrarmos que  $\mathfrak{g}_{kx}^\perp = \text{Ad}(k)(\mathfrak{g}_x^\perp)$ .

Por um lado,

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{g}_{kx}^\perp &\Rightarrow \forall Y \in \text{Ad}(k)\mathfrak{g}_x, \langle X, Y \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \forall Z \in \mathfrak{g}_x, \langle X, \text{Ad}(k)Z \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \forall Z \in \mathfrak{g}_x, \langle \text{Ad}(k)\text{Ad}(k)^{-1}X, \text{Ad}(k)Z \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \forall Z \in \mathfrak{g}_x, \langle \text{Ad}(k)^{-1}X, Z \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \text{Ad}(k)^{-1}X \in \mathfrak{g}_x^\perp \\ &\Rightarrow X \in \text{Ad}(k)\mathfrak{g}_x^\perp. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se  $X \in \text{Ad}(k)\mathfrak{g}_x^\perp$ , então existe  $Y \in \mathfrak{g}_x^\perp$  tal que  $X = \text{Ad}(k)Y$ . De modo similar, pelo lema anterior, se  $Z \in \mathfrak{g}_{kx}$ , então existe  $W \in \mathfrak{g}_x$  tal que  $Z = \text{Ad}(k)W$ . Daí, segue que

$$\langle X, Z \rangle = \langle \text{Ad}(k)Y, \text{Ad}(k)W \rangle = \langle Y, W \rangle = 0,$$

ou seja,  $X \in \mathfrak{g}_{kx}^\perp$ . □

**Lema 6.0.6** A aplicação

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_x^\perp &\longrightarrow T_x\mathbb{P}(V) \\ X &\longmapsto X \cdot x \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear.

Demonstração: Pela proposição 5.1.9, a aplicação órbita  $a^{(x)} : \text{Sl}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$  induz uma aplicação linear sobrejetora

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}(V) &\longrightarrow T_x\mathbb{P}(V) \\ Y &\longmapsto Y \cdot x \end{aligned}$$

cujos núcleo é  $\mathfrak{g}_x$ . Portanto, uma vez que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x^\perp \oplus \mathfrak{g}_x$ , essa aplicação restrita à  $\mathfrak{g}_x^\perp$ , dá-nos o isomorfismo linear desejado. □

Definimos o produto interno em  $T_x\mathbb{P}(V)$  por

$$\langle X \cdot x, Y \cdot x \rangle_x = \langle X, Y \rangle$$

onde  $X, Y \in \mathfrak{g}_x^\perp$ .

**Proposição 6.0.7** *O produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  define uma métrica Riemanniana,  $\text{SO}(V)$ –invariante, em  $\mathbb{P}(V)$  tal que a aplicação*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_x^\perp &\longrightarrow T_x\mathbb{P}(V) \\ X &\longmapsto X \cdot x \end{aligned}$$

*é uma isometria. Além disso, para  $Y \in \mathfrak{g}$ , temos*

$$|Y \cdot x|_x \leq |Y|$$

*com igualdade se, e somente se,  $Y \in \mathfrak{g}_x^\perp$ .*

Demonstração: Seja  $X \in \mathfrak{g}_x^\perp$ . Logo, pela proposição 5.1.10,

$$D(a(k))(X \cdot x) = \text{Ad}(k)X \cdot a^{(x)}(k),$$

onde  $\text{Ad}(k)X \in \text{Ad}(k)\mathfrak{g}_x^\perp = \mathfrak{g}_{kx}^\perp$ . Assim, pela  $\text{SO}(V)$ –invariância do produto interno de Cartan temos

$$\begin{aligned} \langle D(a(k))(X \cdot x), D(a(k))(Y \cdot x) \rangle_{a^{(x)}(k)} &= \langle \text{Ad}(k)X \cdot a^{(x)}(k), \text{Ad}(k)Y \cdot a^{(x)}(k) \rangle_{a^{(x)}(k)} \\ &= \langle \text{Ad}(k)X, \text{Ad}(k)Y \rangle \\ &= \langle X, Y \rangle \\ &= \langle X \cdot x, Y \cdot x \rangle_x. \end{aligned}$$

Para provar a diferenciabilidade dessa métrica, consideremos as cartas locais  $\psi_s$  de  $T\mathbb{P}(V)$  construídas de uma seção local  $s : U \subset \mathbb{P}(V) \longrightarrow \text{SO}(V)$  da projeção

$$\begin{aligned} \pi : \text{SO}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ k &\longmapsto k[v_1] \end{aligned}$$

como segue

$$\begin{aligned} \psi_s : U \times \mathfrak{g}_{[v_1]}^\perp &\longrightarrow T\mathbb{P}(V) \\ (x, Y) &\longmapsto D(a_{(s(x))})(Y \cdot [v_1]) \end{aligned}$$

Note que  $s(x) \in \text{SO}(V)$ . Além disso,  $s(x)[v_1] = x$ . De fato,  $\pi(s(x)) = x$ , logo  $s(x) \in \pi^{-1}(x)$  onde

$$\pi^{-1}(x) = \{k \in \text{SO}(V) ; \pi(k) = x\} = \{x \in \text{SO}(V) ; k[v_1] = x\}.$$

Isso implica que  $\text{Ad}(s(x))$  aplica  $\mathfrak{g}_{[v_1]}^\perp$  em  $\mathfrak{g}_x^\perp$ , pois

$$\text{Ad}(s(x)) \left( \mathfrak{g}_{[v_1]}^\perp \right) = \mathfrak{g}_{s(x)[v_1]}^\perp = \mathfrak{g}_x^\perp.$$

Pela  $SO(V)$ –invariância, segue que

$$\langle \psi_s(x, X), \psi_s(x, Y) \rangle_x = \langle D(a_{(s(x))})(X \cdot x), D(a_{(s(x))})(Y \cdot x) \rangle_{a^{(x)}(s(x))} = \langle X, Y \rangle,$$

ou seja, a aplicação  $(x, X, Y) \mapsto \langle \psi_s(x, X), \psi_s(x, Y) \rangle_x$  não depende de  $x$  e, na verdade, é dada pelo produto interno de Cartan que é diferenciável por ser uma aplicação bilinear definida num espaço vetorial de dimensão finita.

Para a última propriedade, escrevemos  $Y = Y_1 + Y_2$  de acordo com  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_x^\perp \oplus \mathfrak{g}_x$ . Assim,  $Y \cdot x = Y_1 \cdot x$  e, daí,

$$|Y \cdot x|_x = |Y_1 \cdot x|_x = |Y_1| \leq |Y|$$

com igualdade se, e somente se,  $Y = Y_1 \in \mathfrak{g}_x^\perp$ . □

Consideremos a decomposição  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$ ,  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(V)$  a subálgebra dos operadores antissimétricos em relação à base  $\gamma$  e  $\mathfrak{s}$  a subálgebra dos operadores simétricos em relação à base  $\gamma$ . Seja  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$  a subálgebra de Lie dos operadores cujas matrizes que os representam, em relação à base  $\gamma$ , são diagonais.

**Definição 6.0.8** *O conjunto,  $\mathfrak{g}_\alpha$ , dado por*

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}; \text{ad}(H)X = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\},$$

onde  $\alpha \in \mathfrak{a}^*$  (o dual de  $\mathfrak{a}$ ) é chamado **espaço de raízes** quando  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ .

Um funcional  $\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , tal que seu espaço de raízes  $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$  é chamado **raiz**. Denotamos o conjunto das raízes por  $\Pi$ .

Observação: Por conveniência denotaremos as raízes por  $\alpha_{ij}$  e o espaço de raízes por  $\mathfrak{g}_{ij}$ . Tal escolha de notação dá-se pelo resultado à seguir. □

**Lema 6.0.9** *Se  $H \in \mathfrak{a}$ , então  $\alpha_{ij}(H) = a_i - a_j$ , onde  $H = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_d)$ .*

Demonstração: Em  $\mathfrak{gl}(V)$  seja  $E_{ij}$  o operador tal que  $E_{ij}(v_k) = \delta_{jk}v_i$  em relação à base  $\gamma$ . Vamos aplicar  $\text{ad}(H)$  nesses elementos.

$$\begin{aligned}\text{ad}(H)E_{ij} &= HE_{ij} - E_{ij}H \\ &= a_iE_{ij} - a_jE_{ij} \\ &= (a_i - a_j)E_{ij}.\end{aligned}$$

Como  $\{E_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$  forma uma base de  $\mathfrak{gl}(V)$ , segue que  $\text{ad}(H)$  é diagonalizável e os seus autovalores são  $a_i - a_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , associados aos autovetores  $E_{ij}$ , respectivamente. Portanto,  $\alpha_{ij}(H) = a_i - a_j$ .  $\square$

Observação: Segue do lema anterior que  $\mathfrak{g}_{ij} = \text{ger}\{E_{ij}\}$ .  $\square$

Agora, relembando a decomposição  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$  de  $V$  em autoespaços associados a  $h$ , onde  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$  e que existe  $H$  tal que  $h = e^{tH}$ , temos o seguinte resultado.

**Lema 6.0.10**  $\mathfrak{n}_h^\pm = \sum_{\pm\alpha_{ij}(H)>0} \mathfrak{g}_{ij}$ .

Demonstração: Seja  $H \in \mathfrak{a}$  tal que  $h = e^{tH}$ . Uma vez que  $H = \text{diag}(\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_n)$  segue do lema anterior que  $\alpha_{ij}(H) = \ln \lambda_i - \ln \lambda_j$  onde:

- Se  $i < j$ , então  $\alpha_{ij}(H) = \ln \lambda_i - \ln \lambda_j > 0$  e, além disso,  $\text{ger}\{E_{ij}\} \subset \mathfrak{n}_h^+$ .
- Se  $i > j$ , então  $\alpha_{ij}(H) = \ln \lambda_i - \ln \lambda_j < 0$  e, além disso,  $\text{ger}\{E_{ij}\} \subset \mathfrak{n}_h^-$ .

Da representação matricial de  $\mathfrak{n}_h^\pm$  temos que  $\mathfrak{n}_h^+ = \sum_{\alpha_{ij}(H)>0} \text{ger}\{E_{ij}\}$  e  $\mathfrak{n}_h^- = \sum_{\alpha_{ij}(H)<0} \text{ger}\{E_{ij}\}$  onde  $i, j = 1, \dots, n$  estão de acordo com os autovalores  $\lambda_i$  de  $h$ . Estabelecida a relação entre  $i, j$  e  $\alpha_{ij}$  o resultado segue.  $\square$

Exemplo: Vale ressaltar que estamos considerando os índices  $i$  e  $j$  para a relação entre os autovalores  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$  associados a  $H$  e, dessa maneira, alguns  $E_{ij}$  da base de  $\mathfrak{gl}(V)$  não são considerados. A fim de elucidar o lema 6.0.10, analisemos uma matriz  $6 \times 6$  de  $\mathfrak{n}_h^-$  cujas dimensões dos autoespaços associados aos autovalores sejam iguais à 2, isto é,



Demonstração: A simetria de  $\text{ad}(H)$  segue de que  $\text{ad}(H)$  é diagonalizável e a base que a diagonaliza é ortonormal, em relação ao produto de Cartan. Pelos lemas 6.0.9 e 6.0.10, restringindo  $\text{ad}(H)$  à  $\mathfrak{n}_h^\pm$ , teremos

$$\text{ad}(H)E_{ij} = \alpha_{ij}(H)E_{ij},$$

donde segue o resultado.  $\square$

**Proposição 6.0.12** *Se  $\mathfrak{g}_{[v_1]}$  é a álgebra de Lie de  $G_{[v_1]}$ , então*

$$\mathfrak{n}_h^\pm = \left( \mathfrak{n}_h^\pm \cap \mathfrak{g}_{[v_1]}^\perp \right) \oplus \left( \mathfrak{n}_h^\pm \cap \mathfrak{g}_{[v_1]} \right).$$

Demonstração: Vamos provar para  $\mathfrak{n}_h^-$ ; o caso para  $\mathfrak{n}_h^+$  é análogo.

Considerando que

$$\mathfrak{g}_{[v_1]} = \left\{ X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V) ; X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & C \end{bmatrix} \right\},$$

onde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b$  é uma matriz linha  $1 \times (d-1)$  e  $C \in \mathfrak{gl}(d-1)$  é tal que  $a + \text{tra}(C) = 0$ , segue que

$$\mathfrak{g}_{[v_1]}^\perp = \left\{ X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V) ; X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b' & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

onde  $b'$  é uma matriz coluna  $(d-1) \times 1$ . Desse modo, segue imediatamente que:

$$\mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_{[v_1]}^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} 0_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ * & 0_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 0_{d_n} \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_{[v_1]} = \left\{ \begin{bmatrix} 0_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & 0_{d_n} \end{bmatrix} \right\}$$

e, além disso,  $(\mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_{[v_1]}^\perp) \cap (\mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_{[v_1]}) = \{0\}$ , onde 0 representa uma matriz nula.  $\square$

**Lema 6.0.13** *Seja  $T$  uma transformação linear injetora e sejam  $U, V$  e  $Z$  espaços vetoriais. Se  $V = U \oplus Z$  então  $T(V) = T(U) \oplus T(Z)$ .*

Demonstração: Seja  $v \in V = U \oplus Z$ , logo existem  $u \in U$  e  $z \in Z$  tais que  $v = u + z$ . Segue da linearidade de  $T$  que

$$T(v) = T(u + z) = T(u) + T(z) \in T(U) + T(Z).$$

Analogamente, dados  $u \in U$  e  $z \in Z$ , segue que  $T(u) + T(z) = T(u + z) \in T(V)$ . Além disso, seja  $v \in T(U) \cap T(Z)$ . Logo, existem  $u \in U$  e  $z \in Z$  tais que

$$T(u) = v = T(z),$$

ou seja,  $T(u) = T(z)$ . Daí, pela injetividade de  $T$ ,  $u = z \in U \cap Z = \{0\}$ , isto é,  $v = 0$ . Portanto,  $T(U) \cap T(Z) = \{0\}$  e o resultado segue.  $\square$

Nessa etapa, lembrando a proposição 4.4.1 e o teorema 5.2.11 em que as componentes de Morse podem ser representadas por  $\mathcal{M} = G_h \cdot w[v_1]$ , o fibrado tangente à essas componentes, contido em  $T(\mathbb{P}(V))$ , conforme discutido ao final da seção 4.1, página 99, é dado por

$$T\mathcal{M} = G_h(\mathfrak{g}_h \cdot w[v_1]) \subset T(\mathbb{P}(V)).$$

Além disso, surge naturalmente a questão: quais os candidatos à fibrado estável e instável? Lembrando o Teorema 5.2.16, temos que os espaços estável e instável à cada componente de Morse  $\mathcal{M}$  são dados por

- $\text{est}(\mathcal{M}) = N_h^- G_h \cdot w[v_1]$ , e
- $\text{inst}(\mathcal{M}) = N_h^+ G_h \cdot w[v_1]$ .

Assim, se  $x = k \cdot w[v_1] \in \mathcal{M}$ , onde  $k \in G_h$ , o espaço tangente à  $x$  em  $\text{est}(\mathcal{M})$ , segundo a Proposição 5.1.9 e a discussão da página 99, é dado por

$$T_x \text{est}(\mathcal{M}) = \mathfrak{n}_h^- \cdot x = k(\mathfrak{n}_h^- \cdot w[v_1]).$$

A última igualdade segue de que, se  $Y \in \mathfrak{n}_h^-$  e  $k \in G_h$ , então

$$\begin{aligned} Y \cdot (k \cdot w[v_1]) &= \left. \frac{d}{dt} \left( e^{tY} k \cdot w[v_1] \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left( k(k^{-1} e^{tY} k) \cdot w[v_1] \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left( k e^{tk^{-1}Yk} \cdot w[v_1] \right) \right|_{t=0} \\ &= k \left( \underbrace{k^{-1}Yk}_{\in \mathfrak{n}_h^-} \cdot w[v_1] \right). \end{aligned}$$

Portanto, variando  $k$  em  $G_h$  temos que

$$T_x \text{est}(\mathcal{M}) = G_h(\mathfrak{n}_h^- \cdot w[v_1]),$$

sendo este nosso candidato à fibrado estável. Analogamente, teremos como candidato a espaço instável,  $V^+$ , o espaço  $G_h(\mathfrak{n}_h^+ \cdot w[v_1])$ .

Com isso, temos o seguinte resultado.

**Proposição 6.0.14** *Se  $V^\pm = G_h(\mathfrak{n}_h^\pm \cdot w[v_1]) \subset T(\mathbb{P}(V))$ , então  $V^\pm$  e  $T\mathcal{M}$  são subfibrados vetoriais de  $T(\mathbb{P}(V))$  sobre  $\mathcal{M}$ ,  $G_h$ -invariantes e vale a soma*

$$T(\mathbb{P}(V)) \Big|_{\mathcal{M}} = T\mathcal{M} \oplus V^- \oplus V^+.$$

*Em particular,  $V^- \oplus V^+$  é o subfibrado normal à  $T\mathcal{M}$ . Além disso,  $v \in T_x\mathcal{M}$  ou  $v \in V_x^\pm$  podem ser escritos unicamente como  $Y \cdot x$  para*

$$Y \in \mathfrak{g}_h \cap \mathfrak{g}_x^\perp \text{ ou } Y \in \mathfrak{n}_h^\pm \cap \mathfrak{g}_x^\perp$$

*respectivamente.*

Demonstração: A  $G_h$ -invariância é imediata das definições de  $V^\pm$  e  $T\mathcal{M}$ .

Para provarmos que  $V^-$  é subfibrado vetorial, primeiro, notemos que  $\mathcal{M} = K_h \cdot w[v_1]$  (conforme observação da seção 5.2, página 106) e  $\mathfrak{n}_h^-$  é  $K_h$ -invariante pela proposição 5.2.20. Isso implica que  $V^- = K_h(\mathfrak{n}_h^- \cdot w[v_1])$ . Pela proposição 6.0.12 temos

$$\mathfrak{n}_h^- = \left( \mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_{[v_1]}^\perp \right) \oplus \left( \mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_{[v_1]} \right).$$

Uma vez que o grupo  $W$  das permutações da base  $\gamma$  é isomorfo ao grupo das matrizes de permutação  $d \times d$ , segue que  $W \subset \text{SO}(V)$  e, daí, com  $w \in W$ , a  $K_h$ -invariância de  $\mathfrak{n}_h^-$  e os lemas 6.0.13, 6.0.4 e 6.0.5 implicam que

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_h^- = w\mathfrak{n}_h^- &= \left( \mathfrak{n}_h^- \cap w\mathfrak{g}_{[v_1]}^\perp \right) \oplus \left( \mathfrak{n}_h^- \cap w\mathfrak{g}_{[v_1]} \right) \\ &= \left( \mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_{w[v_1]}^\perp \right) \oplus \left( \mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_{w[v_1]} \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Seja  $x \in \mathcal{M}$ . Temos que  $x = kw[v_1]$ ,  $k \in K_h$  tal que  $k\mathfrak{n}_h^- = \mathfrak{n}_h^-$ ,

$$k\mathfrak{g}_{w[v_1]}^\perp = \mathfrak{g}_{kw[v_1]}^\perp = \mathfrak{g}_x^\perp \quad \text{e} \quad k\mathfrak{g}_{w[v_1]} = \mathfrak{g}_{kw[v_1]} = \mathfrak{g}_x.$$

Disso segue que

$$\mathfrak{n}_h^- = k\mathfrak{n}_h^- = \left( \mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_x^\perp \right) \oplus \left( \mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_x \right) \quad (6.2)$$

e, assim, pelo isomorfismo linear  $\mathfrak{g}_x^\perp \longrightarrow T_x(\mathbb{P}(V))$  do lema 6.0.6 e de  $V_x^- = \{k(X \cdot w[v_1]) = (kX) \cdot (kw[v_1]) ; X \in \mathfrak{n}_h^-\}$ , conclui-se que a aplicação

$$\begin{aligned} (\mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_x^\perp) &\longrightarrow V_x^- \\ Y &\longmapsto Y \cdot x \end{aligned}$$

é um isomorfismo linear. Agora, vamos provar a trivialidade local. Como, pela proposição 5.2.6,  $\mathcal{M} = K_h \cdot w[v_1]$  é uma subvariedade mergulhada de  $\mathbb{P}(V)$ , existe uma seção local diferenciável  $\tilde{s} : \tilde{U} \longrightarrow K_h$  da projeção  $K_h \longrightarrow \mathcal{M}$ ,  $l \longmapsto l \cdot w[v_1]$ , sobre uma vizinhança  $\tilde{U}$  em  $\mathcal{M}$ , tal que  $\tilde{s}$  é a restrição de uma seção local  $s : U \longrightarrow \text{SO}(V)$  da projeção  $\text{SO}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ ,  $k \longmapsto k \cdot w[v_1]$  sobre uma vizinhança  $U$  em  $\mathbb{P}(V)$ . Consideremos a carta local  $\psi_s(x, Y) = s(x)(Y \cdot w[v_1])$  de  $T(\mathbb{P}(V))$  como na proposição 6.0.7. Isso implica que  $\psi_s$  restrita à  $\tilde{U} \times (\mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_{w[v_1]}^\perp)$  é uma carta local de  $V^-$  dada por

$$\psi_{\tilde{s}} : (x, Y) \longmapsto \tilde{s}(x)(Y \cdot w[v_1]).$$

Uma vez que  $\tilde{s}(x) \in K_h$  e  $\tilde{s}(x)w[v_1] = x$ , segue que  $\tilde{s}(x)$  aplica  $\mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_{w[v_1]}^\perp$  em  $\mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_x^\perp$ . Isso mostra que  $V^-$  é subfibrado vetorial.

Sabendo que (6.1) e (6.2) também valem para  $\mathfrak{n}_h^+$ , os mesmos argumentos asseguram que  $V^+$  é também um subfibrado vetorial. Naturalmente, (6.1) e (6.2) também valem para  $\mathfrak{g}_h$  e, portanto, segue da decomposição  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_h \oplus \mathfrak{n}_h^- \oplus \mathfrak{n}_h^+$  que

$$\mathfrak{g}_x^\perp = (\mathfrak{g}_h \cap \mathfrak{g}_x^\perp) \oplus (\mathfrak{n}_h^- \cap \mathfrak{g}_x^\perp) \oplus (\mathfrak{n}_h^+ \cap \mathfrak{g}_x^\perp)$$

é uma soma ortogonal e tal que as aplicações

$$(\mathfrak{g}_h \cap \mathfrak{g}_x^\perp) \longrightarrow T_x \mathcal{M}, \quad (\mathfrak{n}_h^\pm \cap \mathfrak{g}_x^\perp) \longrightarrow V_x^\pm$$

dadas por  $Y \longmapsto Y \cdot x$  são isomorfismos lineares.

Em particular, como a aplicação

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_x^\perp &\longrightarrow T(\mathbb{P}(V)) \\ X &\longmapsto X \cdot x \end{aligned}$$

é uma isometria, segue que  $T(\mathbb{P}(V)) \Big|_{\mathcal{M}} = T\mathcal{M} \oplus V^- \oplus V^+$ . □

**Lema 6.0.15** *Se  $H \neq 0$ , então*

$$|h^t Y| \leq e^{-\mu t} |Y|, \quad \text{para } Y \in \mathfrak{n}_h^-, \quad t \geq 0$$

e

$$|h^t Y| \leq e^{\mu t} |Y|, \quad \text{para } Y \in \mathfrak{n}_h^+, \quad t \leq 0$$

onde

$$\mu = \min \{ \alpha_{ij}(H); \alpha_{ij}(H) > 0, \alpha_{ij} \in \Pi \}.$$

Demonstração: Para  $Y \in \mathfrak{n}_h^\pm$ , pelo lema B.3.7(1), temos que  $\text{Ad}(h^t)Y = \text{Ad}(e^{tH})Y = e^{t \text{ad}(H)}Y$ , onde pelo corolário 6.0.11 segue que  $e^{t \text{ad}(H)}$  é  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -simétrica com autovalores em  $\mathfrak{n}_h^\pm$  dados por

$$\{ e^{\pm \alpha_{ij}(H)t}; \alpha_{ij}(H) > 0, \alpha_{ij} \in \Pi \}.$$

Escrevendo  $Y$  como a soma ortogonal de autovetores  $\sum_{\beta} Y_{\beta}$ , segue que

$$|h^t Y| = \left| \sum_{\beta} e^{\pm \alpha_{ij}(H)t} Y_{\beta} \right| \leq \sum_{\beta} e^{\pm \alpha_{ij}(H)t} |Y_{\beta}|.$$

Para  $t > 0$  e  $Y \in \mathfrak{n}_h^-$ , temos que

$$|h^t Y| \leq e^{-\mu t} \sum_{\beta} |Y_{\beta}| = e^{-\mu t} |Y|,$$

uma vez que  $e^{-\alpha_{ij}(H)t} < e^{-\mu t}$ , para todo  $\alpha_{ij} \in \Pi$  com  $\alpha_{ij}(H) > 0$  e  $t > 0$ . Para  $t < 0$  e  $Y \in \mathfrak{n}_h^+$  temos

$$|h^t Y| \leq e^{\mu t} \sum_{\beta} |Y_{\beta}| = e^{\mu t} |Y|$$

uma vez que  $e^{\alpha_{ij}(H)t} < e^{\mu t}$  para todo  $\alpha_{ij} \in \Pi$  com  $\alpha_{ij}(H) > 0$  e  $t < 0$ . □

Agora, finalmente, chegamos ao resultado principal deste trabalho: provar a hiperbolicidade normal das componentes de Morse da decomposição de Morse mais fina do fluxo induzido sobre o espaço projetivo  $\mathbb{P}(V)$ .

**Teorema 6.0.16** *Cada componente de Morse  $G_h \cdot w[v_1]$  é normalmente hiperbólica.*

Demonstração: Pela decomposição de Jordan multiplicativa de  $g^t$  temos que

$$g^t = e^t h^t u^t$$

onde  $h^t = e^{tH}$ , com  $H \in \mathfrak{g}$  hiperbólica,  $u^t = e^{tN}$ , com  $N \in \mathfrak{g}$  nilpotente e  $e^t, u^t \in G_h$  que pela proposição 5.2.9 é o centralizador de  $h$  em  $G = \text{Sl}(V)$ . Além disso, podemos considerar que  $H = \text{diag}(a_1, \dots, a_d)$ ,  $a_1 \geq \dots \geq a_d$  e que  $e^t \in K_h$  que é o centralizador de  $h$  em  $K = \text{SO}(V)$ , uma vez que, na norma em que  $e^t$  é isometria,  $\|e^t\| = 1$ . Pela proposição 6.0.14, um vetor tangente  $v \in V_x^\pm \mathcal{M}$  pode ser escrito como  $v = Y \cdot x$ , para  $Y \in \mathfrak{n}_h^\pm \cap \mathfrak{g}_x^\pm$ . Pela proposição 6.0.7 temos que  $|v| = |Y|$  e também que

$$|g^t v| = |g^t Y \cdot g^t x| \leq |g^t Y|.$$

Uma vez que  $g^t \in G_h$  segue do lema 5.2.20 que  $g^t Y \in \mathfrak{n}_h^\pm$  e isso é suficiente para mostrar que as desigualdades da definição 6.0.2 valem para  $g^t$  restritas à  $\mathfrak{n}_h^\pm$ .

Pelo lema 6.0.15, existe  $\mu > 0$  tal que  $|h^t X| \leq e^{-\mu t} |X|$ , para todo  $t \geq 0$  e  $X \in \mathfrak{n}_h^-$ . Como podemos assumir  $e^t \in K_h$ , isso implica que

$$|g^t Y| = |h^t u^t Y| \leq e^{-\mu t} |u^t Y|.$$

Sendo  $u^t = e^{tN}$  para algum  $N \in \mathfrak{g}$  nilpotente, temos que  $u^t Y = e^{t \text{ad}(N)} Y$ . Pela desigualdade triangular temos que

$$|u^t Y| = |e^{t \text{ad}(N)} Y| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \|\text{ad}(N)^k\| |Y| = p(t) |Y|, \quad (6.3)$$

onde  $\|\cdot\|$  é o operador norma, induzido pela norma  $|\cdot|$  em  $\mathfrak{g}$  e  $p(t)$  é um polinômio já que  $\text{ad}(N)$  é nilpotente. Assim, para  $v \in V_x^- \mathcal{M}$ , segue que

$$|g^t v| \leq e^{-\mu t} p(t) |v|, \quad t > 0.$$

O caso para  $V^+$  é completamente análogo e teremos, para  $v \in V_x^+ \mathcal{M}$ , que

$$|g^t v| \leq e^{\mu t} p(t) |v|, \quad t < 0.$$

Em relação à  $T\mathcal{M}$  note que para  $x \in \mathcal{M} = G_h \cdot w[v_1]$  temos  $g^t x = e^t u^t x$ , de fato

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{M} &\Rightarrow x = q w_j[v_1], q \in G_h \\ &\Rightarrow g^t x = e^t h^t u^t q w_j[v_1] \\ &= e^t u^t q h^t[v_j] \\ &= e^t u^t q[\lambda_j v_j] = e^t u^t q w_j[v_1] = e^t u^t x. \end{aligned}$$

Assim,  $g^t$  atua como  $e^t u^t$  em  $T\mathcal{M}$ . Pela proposição 6.0.14 um vetor tangente  $v \in T_x\mathcal{M}$  pode ser escrito como  $v = Y \cdot x$ , para  $Y \in \mathfrak{g}_h \cap \mathfrak{g}_x^\perp$ . Pela proposição 6.0.7 temos que  $|v| = |Y|$  e também que

$$|g^t v| = |e^t u^t Y \cdot e^t u^t x| \leq |e^t u^t Y| = |u^t Y| \stackrel{(6.3)}{\leq} p(t)|Y| = p(t)|v|$$

onde usamos que  $e^t \in K_h$  e a desigualdade para  $|u^t Y|$  em (6.3). Como  $e^{-\frac{\mu}{2}t} p(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ ,  $e^{-\frac{\mu}{2}t} p(t)$  é limitado por  $c_1$  para  $t \geq 0$  tal que

$$e^{-\mu t} p(t) = e^{-\frac{\mu}{2}t} \left( e^{-\frac{\mu}{2}t} p(t) \right) \leq c_1 e^{-\frac{\mu}{2}t}, \quad t \geq 0.$$

Pelo mesmo argumento

$$e^{\mu t} p(t) = e^{\frac{\mu}{2}t} \left( e^{\frac{\mu}{2}t} p(t) \right) \leq c_2 e^{\frac{\mu}{2}t}, \quad t \leq 0.$$

Finalmente, como  $e^{-\mu|t|} p(t) \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \pm\infty$ ,  $e^{-\mu|t|} p(t)$  é limitado por  $c_3$  para  $\mathbb{T} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$  e, assim,

$$p(t) = e^{\mu|t|} \left( e^{-\mu|t|} p(t) \right) \leq c_3 e^{\mu|t|}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Dessa maneira, as condições (ii), (iii) e (iv) de hiperbolicidade normal da definição 6.0.2 seguem por escolhermos  $\lambda = \frac{\mu}{2}$  e  $c = \max\{c_1, c_2, c_3\}$  enquanto a condição (i) foi provada na proposição 6.0.14 e, portanto, o resultado está provado.  $\square$

Observação: Segue do Teorema 6.0.16 que  $V^\pm$  são os fibrados instável/estável de  $g^t$ .  $\square$

## 7 CONCLUSÃO

A caracterização das componentes de Morse via órbitas assim como seus espaços estável e instável, a decomposição de Jordan multiplicativa para o fluxo e a teoria de Lie são ferramentas de grande peso para a realização desse estudo, uma vez que por meio das órbitas a compreensão do comportamento do fluxo e os espaços tangentes se dá de maneira mais “natural”.

A hiperbolicidade normal de uma variedade invariante é a generalização natural de hiperbolicidade de um ponto fixo, uma vez que assegura a existência de uma linearização numa vizinhança da variedade invariante conforme o estudo apresentado em [21]. Dessa maneira, uma vez que o Teorema 6.0.16 assegura a hiperbolicidade normal de cada componente de Morse, concluímos que, para cada componente de morse  $\mathcal{M}$  da decomposição de Morse mais fina, existe uma vizinhança  $U$  tal que o fluxo nessa vizinhança é conjugado à um fluxo linear.

Desse modo, surgem motivações para estudos futuros, dentre elas, realizar esse estudo sobre as variedades Grassmannianas que é uma generalização de espaços projetivos e, também, um caso particular de variedades Flag ou, por outro lado, seguindo o estudo da dinâmica de translações em espaços projetivos, pode-se estudar condições para as quais dois fluxos sobre  $\mathbb{P}(V)$  são conjugados.

Por fim, este trabalho serve como base para aqueles que se interessarem por estudar os temas abordados em [5], [20] e [19] sobre dinâmica de translações em variedades flag identificando os cálculos realizados, neste trabalho, sem a Teoria de Lie semissimples e como esta é requisitada para o caso generalizado.

## REFERÊNCIAS

- [1] ALONGI J.; NELSON, G. *Recurrence and Topology*; AMS Graduate Studies in Mathematics, v.85. Providence, 2007.
- [2] ALVES M. T.; *O conjunto de Cantor*. 2008. 46f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Centro Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2008.
- [3] COLONIUS F.; KLIMANN W. *Dynamical Systems and Linear Algebra*. AMS Graduate Studies in Mathematics, vol.158. Providence, 2010.
- [4] CONLEY C.; *Isolated invariant sets and the Morse index*. CBMS Reg. Conf. Ser. Math. **38**, American Mathematical Society, Providence, 1978.
- [5] FERRAIOL T.; PATRÃO M.; SECO L. *Jordan Decomposition and Dynamics on Flag Manifolds*, Em: Discrete Contin. Dynam. Systems A, **26**(3), pp. 923 – 947, 2010.
- [6] HELGASON, S. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press, New York, 1978.
- [7] HIRSCH M.W.; PUGH C.C.; SHUB M.; *Invariant Manifolds*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg: New York, 1933.
- [8] HUMPHREYS, J. E. *Introduction to Lie Algebras and Representations Theory*. Springer, 1972.
- [9] KLIMYK A. U.; VILENKIN N. Ja. *Representation of Lie Groups and Special Functions* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, vol 1, 1991.
- [10] LEE J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*; Graduate Texts in Mathematics, vol.218. Springer, 2002.
- [11] LEE J. M. *Introduction to Topological Manifolds*. 2ed.. Springer, 2011.
- [12] LIMA, E. L.; *Curso de Análise*, vol. 2. 11ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2015.
- [13] LIMA, E. L.; *Elementos de Topologia Geral*. 3ed.. Textos Universitários. SBM, Rio de Janeiro, 2014.
- [14] LIMA, E. L.; *Espaços Métricos*. 5ed.. IMPA, Rio de Janeiro, 2013.
- [15] LIMA, E. L.; *Variiedades Diferenciáveis*. Publicações Matemáticas. IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [16] MUNKRES, J. R.; *Topology*. 2ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2000.
- [17] OLIVEIRA, O. R. B.; *Introdução à Teoria Qualitativa (Sistemas Autônomos)*. Notas de Aula, São Paulo, 2017.
- [18] PATRÃO, M; SANTOS, L.; SECO, L. *A Note on the Jordan Decomposition*, Em: Proyecciones Journal of Math., vol. 30, n. 1, pp. 123 – 136, 2011.

- [19] PATRÃO, M.; SECO, L.; *Dinâmica de Translações em Variedades Flag Reais*. Brasília-DF, 2017.
- [20] PATRÃO M.; SECO L. *The Minimal Morse Components of Translations on Flag Manifolds are Normally Hyperbolic*, Em: Journal of Dyn. and Diff. Equations, pp. 1 – 15, 2017.
- [21] PUGH C.C.; SHUB M.; *Linearization of Normally Hyperbolic Diffeomorphisms and Flows*. Springer-Verlag, Inventiones math **10**, 187 – 198, 1970.
- [22] SAN MARTIN L. A. B. *Álgebras de Lie*. 2ed. Editora da Unicamp, Campinas - SP, 2010.
- [23] SAN MARTIN L. A. B. *Grupos de Lie*; Editora da Unicamp, Campinas - SP, 2016.
- [24] SOUZA A. C. *Dinâmica em Órbitas Projetivas Compactas e a Decomposição de Jordan*. 2009. 117f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2009.
- [25] SOUZA J. A. *Sistemas Dinâmicos, Sistemas de Controle e Ações de Semigrupos*. 2005. 126f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR, 2005.
- [26] WARNER F. W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94. Springer-Verlag, New York, Inc., 1983.

## APÊNDICE A – Topologia Geral

Neste apêndice recordaremos algumas noções e resultados de Topologia Geral. O propósito é proporcionar uma fonte rápida de referências acerca dos resultados utilizados ao longo do trabalho visando uma leitura autocontida do mesmo, mas ressaltando que muitos dos assuntos não presentes nos apêndices, podem ser consultados nas referências apresentadas aqui. Apresentamos os resultados de topologia geral utilizados ao longo dos três primeiros capítulos, onde dispomos os conceitos principais utilizados diretamente nas demonstrações. Ao leitor interessado em aprofundar os temas neste apêndice, recorrer ao conteúdo completo de Topologia (como por exemplo a topologia quociente presente em  $\mathbb{P}(V)$ ) recomendamos os livros: Lima [13], [14], Lee [11] e Munkres [16].

**Definição A.0.1** *Seja  $X$  um espaço métrico e  $A \subset X$  um subconjunto de  $X$ . O conjunto dado por*

$$V(A, \varepsilon) = \{x \in X; d(x, A) < \varepsilon\}$$

*é chamado  $\varepsilon$ -vizinhança aberta de  $A$  em  $X$ .*

**Proposição A.0.2** *Seja  $X$  um espaço métrico e  $A$  um subconjunto de  $X$ . Se  $U(A, \varepsilon)$  é uma  $\varepsilon$ -vizinhança aberta de  $A$  em  $X$ , então  $U(A, \varepsilon)$  é igual à união de bolas abertas  $B_d(a, \varepsilon)$  para  $a \in A$ .*

Demonstração:  $\bigcup_{a \in A} B_d(a, \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} \{x \in X; d(x, a) < \varepsilon\} = \{x \in X; d(x, a) < \varepsilon \text{ e } a \in A\} \subset U(A, \varepsilon)$ .

Reciprocamente, seja  $x \in U(A, \varepsilon)$ . Logo,  $d(x, A) = \delta < \varepsilon$ . Seja  $a \in A$  qualquer. Se  $d(x, a) < \varepsilon$  então  $x \in B_d(a, \varepsilon)$  e o resultado segue. Agora, se  $d(x, a) \geq \varepsilon$ , como  $\varepsilon > \inf_{a \in A} \{d(x, a)\} = \delta$ , existe  $b \in A$  tal que  $d(x, b) < \varepsilon$  e, daí,  $x \in B_d(b, \varepsilon)$ . □

**Definição A.0.3** *Um espaço topológico  $X$  é dito ter **base enumerável** em  $x \in X$  se existe uma coleção enumerável  $\beta$  de vizinhanças de  $x$  tal que cada vizinhança de  $x$  contém pelo menos um elemento de  $\beta$ .*

*Um espaço que possui uma base enumerável em cada um de seus pontos é dito que **satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade**.*

**Lema A.0.4** *Todo espaço metrizável satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.*

Demonstração: Seja  $(X, d)$  um espaço topológico metrizável com métrica  $d$ . Para cada  $x \in X$  o conjunto  $\{B_d(x, \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}\}$  é uma base enumerável em  $x$ .  $\square$

**Proposição A.0.5 (Propriedade de Cantor).** *Dada uma sequência*

$$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_m \supset \cdots$$

*de subconjuntos  $K_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\forall i$ , compactos e não-vazios, a interseção  $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k$  é não-vazia.*

Demonstração: Item 12.4, página 45 de [12].  $\square$

**Lema A.0.6** *Se  $Y$  é um subespaço compacto de um espaço Hausdorff  $X$  e  $x_0 \in X \setminus Y$ , então existem abertos disjuntos  $U, V \subset X$  tais que  $Y \subset V$  e  $x_0 \in U$ .*

Demonstração: Para cada  $y \in Y$ , como  $y \neq x_0$  e  $X$  é Hausdorff, existem abertos disjuntos  $U_y$  e  $V_y$  tais que  $y \in V_y$  e  $x_0 \in U_y$ . Tem-se que  $Y \subset \bigcup_{y \in Y} V_y$ . Como  $Y$  é compacto, possui subcobertura finita, ou seja, existem  $y_1, \dots, y_n \in Y$  tais que  $Y \subset V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ . Seja  $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ . Assim,  $U$  é aberto e contém  $x_0$ . Note que  $U \cap V_{y_i} = \emptyset$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  uma vez que  $U \subset U_{y_i}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Desse modo,  $U \cap V = U \cap \left( \bigcup_{i=1}^n V_{y_i} \right) = \emptyset$  e o resultado segue.  $\square$

**Teorema A.0.7** *Seja  $X$  um espaço topológico de Hausdorff. Se  $A$  e  $B$  são subespaços compactos e disjuntos, então existem conjuntos abertos disjuntos  $U$  e  $V$  contendo  $A$  e  $B$ , respectivamente.*

Demonstração: Seja  $x \in A$ . Como  $A$  e  $B$  são disjuntos, temos que  $x \notin B$ . Uma vez que  $B$  é compacto e  $X$  é de Hausdorff, segue do lema A.0.6 que existem abertos disjuntos  $U_x$  e  $V_x$  tais que  $x \in U_x$  e  $B \subset V_x$ . Logo,  $A \subset \bigcup_{x \in A} U_x$  é uma cobertura aberta de  $A$  que é compacto

e, daí, existem  $x_1, \dots, x_n \in A$  tais que  $A \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ . Consideremos os abertos  $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$  e  $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ . Note que  $A \subset U$  e  $B \subset V$ , pois  $B \subset V_{x_i}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ainda,  $U \cap V = \left( \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \right) \cap \left( \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \right) = \bigcup_{i=1}^n (U_{x_i} \cap V_{x_i}) = \emptyset$ .  $\square$

**Corolário A.0.8** *Seja  $X$  um espaço topológico Hausdorff. Se  $A_1, \dots, A_n$  são subespaços de  $X$  compactos e disjuntos dois a dois, então existe aberto  $U_i$  tal que  $A_i \subset U_i$  e  $U_i \cap \left( \bigcup_{j=1}^n A_j \right) = \emptyset$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $j \neq i$ .*

Demonstração: Tome  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Seja  $B = \bigcup_{j=1}^n A_j$ ,  $j \neq i$ .  $B$  é compacto uma vez que essa propriedade é preservada pela união finita. Assim, pelo teorema A.0.7 segue que existem  $U_i$  e  $V_i$  abertos disjuntos de  $X$  tais que  $A_i \subset U_i$  e  $B \subset V_i$ , ou seja,  $U_i$  é vizinhança de  $A_i$  e  $U_i \cap \left( \bigcup_{j=1}^n A_j \right) = \emptyset$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $j \neq i$ .  $\square$

**Lema A.0.9** *Seja  $X$  um espaço métrico. Se  $Y \subset A \subset X$ , onde  $Y$  é fechado e  $A$  é aberto então existe aberto  $U$  tal que  $Y \subset U \subset \bar{U} \subset A$ .*

Demonstração: Considere a função contínua  $f : X \rightarrow [0, 1]$ , definida por  $f(x) = \frac{d(x, Y)}{d(x, Y) + d(x, X - A)}$  (função de Urysohn do par de fechados disjuntos  $Y$  e  $X - A$ ). Temos que  $f(Y) = 0$  e  $f(X - A) = 1$ . Basta então tomar  $U = \left\{ x \in X; f(x) < \frac{1}{2} \right\}$ .  $\square$

**Teorema A.0.10 (Teorema de Blaschke).** *O conjunto de subconjuntos fechados não vazios de um espaço métrico compacto torna-se um espaço métrico compacto sob a distância de Hausdorff*

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \max_{a \in A} \left\{ \min_{b \in B} d(a, b) \right\}, \max_{b \in B} \left\{ \min_{a \in A} d(a, b) \right\} \right\}.$$

Demonstração: Para uma demonstração veja o Apêndice C, páginas 209 à 212 de [1] ou a proposição A.2.1, página 97 de [24].  $\square$

## APÊNDICE B – Variedades Diferenciáveis

Este apêndice aborda conceitos acerca de Variedades Diferenciáveis mais especificamente no trato de aplicações diferenciáveis, ações de grupo, campos de vetores, grupos e álgebras de Lie. Para informações mais detalhadas sobre o material do Apêndice B o leitor pode consultar os livros Lima [15], Lee [10], San Martin [22] e [23] e Warner [26].

### B.1 Ações de Grupos

**Definição B.1.1** *Sejam  $F$  e  $E$  variedades diferenciáveis e  $f : F \rightarrow E$  uma aplicação diferenciável. Define-se o **posto** de  $f$  em  $x \in F$  como sendo o posto da aplicação linear  $Df_x : T_x F \rightarrow T_{f(x)} E$ , isto é, posto de  $f$  em  $x$  é igual a  $\dim(\text{im } Df_x)$ .*

*Dizemos que  $f$  tem **posto constante**  $k$  quando o posto de  $f$  é  $k$ , para todo  $x \in F$ .*

**Definição B.1.2** *Uma aplicação  $f : F \rightarrow E$  de posto constante é chamada:*

- **Imersão**, quando  $\text{posto}(f) = \dim F$ , isto é,  $Df_x : T_x F \rightarrow T_{f(x)} E$  é injetora para todo  $x \in F$ .
- **Submersão** quando  $\text{posto}(f) = \dim E$ , isto é,  $Df_x : T_x F \rightarrow T_{f(x)} E$  é sobrejetora para todo  $x \in F$ .
- **Mergulho** quando  $f$  é uma imersão e, também, um mergulho no sentido topológico, isto é, um homeomorfismo sobre sua imagem  $f(F) \subset E$  com a topologia induzida de  $E$ .

**Teorema B.1.3 (Teorema do Posto Equivariante).** *Sejam  $F$  e  $E$  variedades diferenciáveis e seja  $G$  um grupo de Lie. Se  $f : F \rightarrow E$  é uma aplicação diferenciável que é equivariante em relação a uma  $G$ -ação diferenciável transitiva em  $F$  e alguma  $G$ -ação diferenciável em  $E$ , então  $f$  tem posto constante.*

Demonstração: Sejam  $a$  e  $b$  as  $G$ -ações sobre  $F$  e  $E$ , respectivamente, e seja  $x_0$  um ponto qualquer em  $F$ . Para um ponto arbitrário  $x \in F$ , escolha  $g \in G$  tal que  $a_{(g)}(x_0) = x$ . (Tal  $g$  existe pois  $G$  age transitivamente sobre  $F$ ). Como  $b_{(g)} \circ f = f \circ a_{(g)}$ , o seguinte diagrama

comuta:

$$\begin{array}{ccc} T_{x_0}F & \xrightarrow{Df_{x_0}} & T_{f(x_0)}E \\ Da_{(g)} \downarrow & & \downarrow Db_{(g)} \\ T_xF & \xrightarrow{Df_x} & T_{f(x)}E \end{array} .$$

Uma vez que as aplicações lineares verticais no diagrama são isomorfismos, as horizontais têm mesmo posto. Noutras palavras, o posto de  $Df$  em um ponto arbitrário  $x$  é o mesmo que o posto de  $Df$  em  $x_0$ . Portanto,  $f$  tem posto constante.  $\square$

**Teorema B.1.4** *Seja  $f : F \rightarrow E$  uma aplicação diferenciável de posto constante.*

- a) *Se  $f$  é sobrejetora, então ela é uma submersão.*
- b) *Se  $f$  é injetora, então ela é uma imersão.*
- c) *Se  $f$  é bijetora, então ela é um difeomorfismo.*

Demonstração: Teorema 7.15, páginas 168 e 245 de [10].  $\square$

**Proposição B.1.5** *Sejam  $E$  e  $F$  variedades diferenciáveis e  $f : E \rightarrow F$  é uma imersão de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . A imagem  $f(E)$  é uma subvariedade imersa de  $F$  se, e somente se,  $f : E \rightarrow f(E)$  é uma aplicação aberta. Em particular, se  $f$  é um mergulho, então  $f(E)$  é uma subvariedade mergulhada de  $F$ .*

Demonstração: Proposição VI.5, página 160 de [15].  $\square$

**Teorema B.1.6 (Teorema de Cartan).** *Todo subgrupo fechado  $H$  de um grupo de Lie  $G$  é um subgrupo de Lie. Mais precisamente, um subgrupo fechado  $H$  admite uma estrutura de variedade mergulhada que o torna um subgrupo de Lie.*

Demonstração: Teorema 6.15, página 136 de [23].  $\square$

**Lema B.1.7** *Se  $F$  é um  $G$ -espaço diferenciável, então para cada  $x \in F$ , o grupo de isotropia  $G_x$  é um subgrupo de Lie fechado e mergulhado de  $G$ .*

Demonstração: Lema 9.23, página 230 de [10].  $\square$

**Teorema B.1.8 (Teorema de Caracterização para Espaços Homogêneos).** *Seja  $F$  um  $G$ -espaço homogêneo e seja  $x$  um ponto qualquer de  $F$ . A aplicação  $f : \frac{G}{G_x} \rightarrow F$  definida por  $f(gG_x) = g \cdot x$  é um difeomorfismo equivariante.*

Demonstração: Teorema 9.24, página 230 de [10].  $\square$

**Proposição B.1.9** *Se  $F$  é um conjunto e  $G$  é um grupo de Lie que age transitivamente em  $F$  tal que o grupo de isotropia de um ponto  $x \in F$  é um subgrupo de Lie fechado de  $G$ , então  $F$  tem uma única estrutura de variedade diferenciável tal que a dada ação é diferenciável.*

Demonstração: Proposição 9.31, página 234 de [10].  $\square$

## B.2 Campos de Vetores

Um campo de vetores numa variedade diferenciável  $F$  é uma aplicação  $X : F \rightarrow TF$  que satisfaz  $X \cdot x \in T_x F$  para  $x \in F$ .

**Definição B.2.1** *Seja  $\phi : F \rightarrow E$  uma aplicação diferenciável. Os campos de vetores  $X$  em  $F$  e  $Y$  em  $E$  são ditos  $\phi$ -relacionados se  $D\phi$  aplica  $X$  em  $Y$ , isto é, se  $D\phi_x(X \cdot x) = Y \cdot \phi(x)$  para qualquer  $x \in F$ . Nesse caso, a imagem por  $\phi$  de uma trajetória de  $X$  é uma trajetória de  $Y$ . Em termos de fluxos isso significa que*

$$\phi \circ X_t = Y_t \circ \phi.$$

**Definição B.2.2** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois campos de vetores. O colchete de Lie entre eles é definido por*

$$[X, Y] \cdot x = \frac{d}{dt} \left( D(X_{-t})_{X_t(x)}(Y(X_t(x))) \right) \Big|_{t=0}.$$

O colchete de Lie preserva campos  $\phi$ -relacionados.

**Proposição B.2.3** *Sejam  $\phi : F \rightarrow E$  uma aplicação diferenciável e  $X_1, X_2$  campos em  $F$ . Se os campos  $Y_1, Y_2$  são  $\phi$ -relacionados com  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente; Então os campos  $[X_1, X_2]$  e  $[Y_1, Y_2]$  são  $\phi$ -relacionados.*

Demonstração: O resultado segue da definição de colchete de Lie juntamente com a regra da cadeia e a igualdade  $\phi \circ X_t = Y_t \circ \phi$  se  $X$  e  $Y$  são  $\phi$ -relacionados. De fato,

$$\begin{aligned}
[Y_1, Y_2] \cdot \phi(x) &= \left. \frac{d}{dt} \left( D(Y_{1-t})_{Y_{1-t}(\phi(x))} Y_2(Y_{1-t}(\phi(x))) \right) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \left( D(Y_{1-t})_{\phi(X_{1-t}(x))} Y_2(\phi(X_{1-t}(x))) \right) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \left( D(Y_{1-t})_{\phi(X_{1-t}(x))} D\phi_{X_{1-t}(x)}(X_2(X_{1-t}(x))) \right) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \left( D(Y_{1-t} \circ \phi)_{X_{1-t}(x)}(X_2(X_{1-t}(x))) \right) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \left( D(\phi \circ X_{1-t})_{X_{1-t}(x)}(X_2(X_{1-t}(x))) \right) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt} \left( D(\phi)_x(D(X_{1-t})_{X_{1-t}(x)}(X_2(X_{1-t}(x)))) \right) \right|_{t=0} \\
&= D\phi_x \left( \left. \frac{d}{dt} \left( D(X_{1-t})_{X_{1-t}(x)}(X_2(X_{1-t}(x))) \right) \right) \right|_{t=0} \\
&= D\phi_x([X_1, X_2] \cdot x).
\end{aligned}$$

□

### B.3 Grupos de Lie e Álgebras de Lie

**Definição B.3.1** *Seja  $G$  um grupo de Lie. Dado um espaço vetorial  $V$ , uma **representação** de  $G$  em  $V$  é um homomorfismo de  $G$  em  $\text{Gl}(V)$ .*

*Analogamente, seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Dado um espaço vetorial  $V$ , uma **representação** de  $\mathfrak{g}$  em  $V$  é um homomorfismo de  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{gl}(V)$ .*

Existe uma representação natural de um grupo de Lie  $G$  em sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Essa representação é construída da seguinte forma: um elemento  $g \in G$  define o automorfismo interno  $C_g(x) = gxg^{-1}$ . É claro que  $C_g(1) = 1$ , portanto,  $D(C_g)_1$  é uma aplicação linear

$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ . Dados  $g, h \in G$ ,

$$C_g \circ C_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = C_{gh}(x),$$

o que implica que  $D(C_g)_1 \circ D(C_h)_1 = D(C_{gh})_1$ . Daí que a aplicação  $g \longmapsto D(C_g)_1$  é uma representação de  $G$  em  $\mathfrak{g}$ , isto é, um homomorfismo de  $G$  em  $\text{Gl}(\mathfrak{g})$ .

**Definição B.3.2** *Seja  $G \subset \text{Gl}(V)$  um grupo de Lie e  $\mathfrak{g}$  sua álgebra de Lie. A representação adjunta  $\text{Ad} : G \longrightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$  é dada por:*

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g) : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ X &\longmapsto gXg^{-1} \end{aligned} .$$

Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Denotamos por  $\text{ad}$  a representação  $\text{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  dada por:

$$\begin{aligned} \text{ad}(X) : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\longmapsto [X, Y] \end{aligned} .$$

Observação: A representação adjunta  $\text{Ad}$  é dada por  $\text{Ad}(g) = D(C_g)_1$ . □

**Proposição B.3.3** *Sejam  $G$  e  $H$  grupos de Lie com álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$ , respectivamente. Se  $\phi : G \longrightarrow H$  é um homomorfismo diferenciável, então  $D\phi_1 : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$  é homomorfismo, isto é,*

$$D\phi_1[X, Y] = [D\phi_1X, D\phi_1Y]$$

com o colchete invariante à direita ou à esquerda.

Demonstração: Proposição 5.16, página 110 de [23]. □

**Lema B.3.4** *Para todo  $g \in G$ , a representação adjunta  $\text{Ad}(g)$  é um automorfismo.*

Demonstração: De acordo com a observação acima, para cada  $g \in G$ , temos que  $\text{Ad}(g) = D(C_g)_1$  e, de acordo com a proposição B.3.3,  $\text{Ad}(g)$  é, então, um homomorfismo de  $\mathfrak{g}$ . O fato de ser automorfismo segue de que  $\text{Ad}(g)^{-1} = \text{Ad}(g^{-1})$ . □

**Definição B.3.5** Dado  $X \in \mathfrak{gl}(V)$ , a **exponencial**  $e^X$  é dada por:

$$e^X = I + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^k}{k!} + \cdots .$$

**Definição B.3.6** Dado  $X \in \mathfrak{gl}(V)$ , o **logaritmo**  $\log X$  é dado por:

$$\log X = (X - I) - \frac{(X - I)^2}{2} + \frac{(X - I)^3}{3} - \frac{(X - I)^4}{4} + \cdots .$$

O logaritmo de matrizes está bem definido para matrizes próximas da identidade.

**Lema B.3.7** Seja  $X \in \mathfrak{gl}(V)$ . Então valem as relações:

1.  $e^{\text{ad}(X)} = \text{Ad}(e^X)$ ;
2.  $\text{ad}(X) = \left. \frac{d}{dt} \text{Ad}(e^{tX}) \right|_{t=0}$ .

Demonstração: Seções 3.32 e 3.46 de [26]. □

**Definição B.3.8** Dada uma representação  $\rho$  de dimensão finita da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , define-se em  $\mathfrak{g}$  a **forma traço**  $\beta_\rho$  que é a forma bilinear simétrica dada por:

$$\beta_\rho(X, Y) = \text{tra}(\rho(X)\rho(Y)) .$$

Para as representações adjuntas, a forma traço é denominada de forma de Cartan-Killing da álgebra e será denotada de maneira mais simples por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ou por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$  quando se quiser ressaltar a álgebra  $\mathfrak{g}$ .

Como o traço de duas transformações lineares conjugadas é o mesmo, a forma traço é invariante por conjugações. Em termos da álgebra de Lie, essa invariância se traduz nas seguintes afirmações:

**Proposição B.3.9** As adjuntas dos elementos da álgebra são antissimétricas em relação a  $\beta_\rho$ , isto é,

$$\beta_\rho([X, Y], Z) + \beta_\rho(Y, [X, Z]) = 0$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

Já no caso específico da forma de Cartan-Killing, tem-se  $\langle \phi X, \phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle$  se  $\phi$  é um automorfismo de  $\mathfrak{g}$ .

Demonstração: Para a primeira afirmação, note que

$$\begin{aligned}
\beta_\rho([X, Y], Z) &= \text{tra}(\rho([X, Y])\rho(Z)) \\
&= \text{tra}([\rho(X), \rho(Y)]\rho(Z)) \\
&= \text{tra}(\rho(X)\rho(Y)\rho(Z) - \rho(Y)\rho(X)\rho(Z)) \\
&= \text{tra}(\rho(Y)\rho(Z)\rho(X) - \rho(Y)\rho(X)\rho(Z)) \\
&= \text{tra}(\rho(Y)[\rho(Z), \rho(X)]) \\
&= \text{tra}(\rho(Y)\rho([Z, X])) \\
&= -\text{tra}(\rho(Y)\rho([X, Z])) \\
&= -\beta_\rho(Y, [X, Z]).
\end{aligned}$$

e o resultado segue. Já no caso da forma de Cartan-Killing, notemos primeiro que se  $\phi$  é um automorfismo de  $\mathfrak{g}$  então

$$\begin{aligned}
\text{ad}(\phi X)(Y) &= [\phi X, Y] \\
&= [\phi X, \phi(\phi^{-1}(Y))] \\
&= \phi[X, \phi^{-1}(Y)] \\
&= \phi \text{ad}(X)\phi^{-1}(Y).
\end{aligned}$$

Ou seja,  $\text{ad}(\phi X) = \phi \text{ad}(X)\phi^{-1}$ . Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \phi X, \phi Y \rangle &= \text{tra}(\text{ad}(\phi X) \text{ad}(\phi Y)) \\
&= \text{tra}((\phi \text{ad}(X)\phi^{-1})(\phi \text{ad}(Y)\phi^{-1})) \\
&= \text{tra}(\phi \text{ad}(X) \text{ad}(Y)\phi^{-1}) \\
&= \text{tra}(\phi\phi^{-1} \text{ad}(X) \text{ad}(Y)) \\
&= \text{tra}(\text{ad}(X) \text{ad}(Y)) \\
&= \langle X, Y \rangle.
\end{aligned}$$

□

Sejam  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita,  $\dim V = d < \infty$  munido de um produto interno e a álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(V)$  dos operadores lineares de  $V$ . Consideremos a subálgebra  $\mathfrak{sl}(V) = \{X \in \mathfrak{gl}(V); \text{tra}(X) = 0\}$ , onde  $X$  é a matriz do operador em  $\mathfrak{gl}(V)$

numa base  $B$  de  $V$ . A forma de Cartan-Killing de  $\mathfrak{sl}(V)$  (veja seção 1.1.6, página 46 de [9]) é dada por

$$\langle X, Y \rangle = 2d \operatorname{tra}(XY).$$

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{sl}(V) &\longrightarrow \mathfrak{sl}(V) \\ X &\longmapsto -X^t \end{aligned}$$

onde  $X^t$  representa a matriz adjunta de  $X$  em relação ao produto interno de  $V$ .

**Proposição B.3.10** *A aplicação  $\theta$  é automorfismo de  $\mathfrak{sl}(V)$ .*

Demonstração: Sejam  $X, Y \in \mathfrak{sl}(V)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Temos que

$$\theta(X + \lambda Y) = -(X + \lambda Y)^t = -X^t - (\lambda Y)^t = -X^t - \lambda Y^t = \theta(X) + \lambda \theta(Y).$$

Logo  $\theta$  é linear. Além disso, pelas propriedades da transposição de matrizes, segue que

$$\begin{aligned} \theta([X, Y]) &= \theta(XY - YX) = -(XY - YX)^t = -(XY)^t + (YX)^t \\ &= -Y^t X^t + X^t Y^t = \theta(X)\theta(Y) - \theta(Y)\theta(X) = [\theta(X), \theta(Y)]. \end{aligned}$$

□

Agora, consideremos a aplicação  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta : \mathfrak{sl}(V) \times \mathfrak{sl}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $(X, Y) \longmapsto \langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta(Y) \rangle$ .

**Proposição B.3.11** *Seja  $\theta$  o automorfismo da proposição B.3.10.*

1.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$  é produto interno.
2.  $\theta$  é simétrica em relação à  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ .
3.  $\theta^2 = I|_{\mathfrak{sl}(V)}$ .
4. 1 e  $-1$  são os únicos autovalores de  $\theta$ .
5.  $\theta$  é diagonalizável.

Demonstração:

1. Uma vez que, para todos  $X, Y \in \mathfrak{sl}(V)$  temos

$$\langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta(Y) \rangle = \langle X, Y^t \rangle = 2d \operatorname{tra}(XY^t) = 2d[X]_B[Y^t]_B = 2d[X]_B[Y]_B^t,$$

o resultado segue, pois  $[X]_B[Y]_B^t$  é um produto interno no espaço de matrizes.

2. Para  $X, Y \in \mathfrak{sl}(V)$  segue que

$$\begin{aligned} \langle \theta(X), Y \rangle_\theta &= 2d \operatorname{tra}(\theta(X)Y^t) = -2d \operatorname{tra}(X^tY^t) = -2d \operatorname{tra}((YX)^t) \\ &= -2d \operatorname{tra}(YX) = -2d \operatorname{tra}(XY) = 2d \operatorname{tra}(X(-Y^t)^t) \\ &= 2d \operatorname{tra}(X\theta(Y)^t) = \langle X, \theta(Y) \rangle_\theta. \end{aligned}$$

3. Para  $X \in \mathfrak{sl}(V)$  temos que

$$\theta^2(X) = \theta(\theta(X)) = \theta(-X^t) = -\theta(X^t) = (X^t)^t = X = I|_{\mathfrak{sl}(V)}(X).$$

4. Pelo item 3 temos que  $\theta^2 = I$ , logo  $(\theta - I)(\theta + I) = 0$ . Assim, o polinômio minimal de  $\theta$  tem três possibilidades, a saber,

- a)  $m_\theta(x) = x - I$ ,
- b)  $m_\theta(x) = x + I$  ou
- c)  $m_\theta(x) = (x - I)(x + I)$ .

Note que se  $X \in \mathfrak{sl}(V)$  é simétrica, então  $\theta(X) = -X$  e, portanto,  $\theta \neq I$ , ou seja,  $m_\theta(x) \neq x - I$ . Analogamente, se  $X \in \mathfrak{sl}(V)$  é antissimétrica,  $\theta(X) = X$ , ou seja,  $\theta \neq -I$  e, daí,  $m_\theta(x) \neq x + I$ . Portanto,  $m_\theta(x) = (x - I)(x + I)$ , donde concluimos que os únicos autovalores de  $\theta$  são 1 e  $-1$ .

5. Pelo item 2 temos que  $\theta$  é simétrica logo é diagonalizável pelo Teorema Espectral.

□

Dessa maneira, obtemos a decomposição de  $\mathfrak{sl}(V)$  em autoespaços associados aos autovalores de  $\theta$ . Ou seja, a decomposição

$$\mathfrak{sl}(V) = \operatorname{aut}(\theta, 1) \oplus \operatorname{aut}(\theta, -1) = \mathfrak{so}(V) \oplus \mathfrak{s},$$

no espaço dos operadores antissimétricos e simétricos. O produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$  é chamado **produto de Cartan**.

**Proposição B.3.12** *Se  $\mathfrak{sl}(V) = \mathfrak{so}(V) \oplus \mathfrak{s}$  é uma decomposição de  $\mathfrak{sl}(V)$  com automorfismo  $\theta$ , então  $\text{ad}(X), X \in \mathfrak{so}(V)$  é antissimétrica em relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$  enquanto que  $\text{ad}(Y), Y \in \mathfrak{s}$  é simétrica. Além disso,  $\mathfrak{so}(V)$  e  $\mathfrak{s}$  são ortogonais tanto em relação à forma de Cartan - Killing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  quanto a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ .*

Demonstração: Proposição 12.22, pág. 345 de [23]. □

Observação: O produto de Cartan utilizado no capítulo 5 é a forma bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$  que, por questão de notação, utilizamos apenas  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  omitindo o automorfismo  $\theta$ . □