Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Patrick Lucas Zagnoli de Assis

A Desigualdade de Grothendieck e os Teoremas de Grothendieck para operadores absolutamente somantes definidos em espaços $\mathcal{L}_p$

Juiz de Fora

2019

Patrick Lucas Zagnoli de Assis

A Desigualdade de Grothendieck e os Teoremas de Grothendieck para operadores absolutamente somantes definidos em espaços $\mathcal{L}_p$

Dissertação do mestrado acadêmico em matemática apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Willian Versolati Franca

Co-orientadora: Dra. Cristiane de Andrade Mendes

Juiz de Fora

2019

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Zagnoli, Patrick Lucas de Assis.
A Desigualdade de Grothendieck e os Teoremas de Grothendieck para operadores absolutamente somantes definidos em espaços $\mathcal{L}_p$ / Patrick Lucas Zagnoli de Assis. – 2019.
?? f.

Orientador: Dr. Willian Versolati Franca
Co-orientadora: Dra. Cristiane de Andrade Mendes
Tese (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática, 2019.

1. Análise Funcional. 2. Teorema de Grothendieck I. Franca, Willian Versolati, orientador. Mendes, Cristiane de Andrade, co-orientadora. II. Teorema de Grothendieck e algumas aplicações.

Patrick Lucas Zagnoli de Assis

A Desigualdade de Grothendieck e os Teoremas de Grothendieck para operadores absolutamente somantes definidos em espaços $\mathcal{L}_p$

Dissertação do mestrado acadêmico em matemática apresentado ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como parte integrante dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Professor Dr. Willian Versolati Franca - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dra. Cristiane de Andrade Mendes - Co-rientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professora Dra. Daniela Mariz Silva Vieira
Universidade de São Paulo

Professor Dr. Nelson Dantas Louza Júnior
Universidade Federal de Juiz de Fora

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por me dar forças para poder progredir e conseguir obter mais um êxito em minha caminhada.

Agradeço o grande carinho dos meus familiares que estiveram ao meu lado nesses momentos como minha querida avó, que contribuiu substancialmente em minhas conquistas, as quais sem seu apoio talvez não conseguiria obter. À meu pai e a Mirelly minha imensa gratidão por todo apoio recebido.

Agradeço aos meus orientadores Willian e Cristiane pela paciência, confiança e total apoio, contribuindo de maneira imensurável em meu processo de aprendizagem.

Agradeço aos meus amigos e colegas, especialmente à Alessandra, Ecila, Leidlaine e Sérgio que estiveram ao meu lado me dando suporte durante minha vida acadêmica e contribuindo com o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à Universidade Federal de Juiz de Fora pelas diversas oportunidades ofertadas.

Agradeço aos professores do departamento de matemática que me deram suporte em todas as fases da graduação.

Agradeço à Capes pelo apoio financeiro.

RESUMO

O principal resultado do trabalho é a desigualdade de Grothendieck, desenvolvida em 1958 pelo matemático naturalizado francês Grothendieck. Abordamos as definições de sequências absolutamente somáveis e incondicionalmente somáveis sobre espaços normados, os operadores absolutamente somantes, assim como diversos resultados que se desenvolvem a partir dessas definições. Como consequência da desigualdade de Grothendieck temos o teorema de Grothendieck, que nos diz que todo operador linear e contínuo de l_1 em l_2 é absolutamente somante. Por fim, estudamos os chamados operadores p-somantes e suas propriedades, os espaços $\mathcal{L}_p$ e as versões do teorema de Grothendieck para operadores absolutamente somantes definidos em espaços $\mathcal{L}_p$.

Palavras-chave: Análise Funcional . Operadores p-somantes . Desigualdade de Grothendieck.

ABSTRACT

The main result of the work is the Grothendieck inequality, developed in 1958 by the French naturalized mathematician Grothendieck. We address the definitions of sequences that are absolutely summable and unconditionally summable, the absolutely summing operators, as well as several results that develop from these definitions. As a consequence of Grothendieck's inequality, we have Grothendieck's theorem, which tells us that every linear and continuous operator of l_1 in l_2 is absolutely summing. Finally, we study the so-called p-summing operators and their properties, $\mathcal{L}_p$ spaces and Grothendieck's theorem versions for absolutely summing operators defined in $\mathcal{L}_p$ spaces.

Key-words: Functional Analysys. p-summing operators. Grothendieck's inequality.

SUMÁRIO

1) Introdução

Em 1953, Grothendieck publicou um artigo intitulado "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques”, que atualmente é chamado de "Grothendieck’s résumé". Sua tese foi dedicada a produtos tensoriais de espaços vetoriais topológicos. Apesar do artigo ser revisado por Dvoretzky, sua tese passou despercebida até 1968, quando foi utilizada no artigo de Lindenstrauss e Pelczynski. O trabalho foi escrito em francês e publicado em uma revista brasileira com circulação muito limitada. Como o trabalho de Grothendieck é de difícil leitura, analisamos o trabalho de Lindenstrauss e Pelczynski. Uma abordagem mais profunda da história da desigualdade e dos teoremas de Grothendieck, pode ser encontrada em [7].

O objetivo é estudarmos a desigualdade de Grothendieck e suas aplicações para operadores p-somantes. Para tal estudo, necessitamos de algumas definições e resultados. Estes resultados preliminares estão presentes ao longo dos capítulos 2 e 3.

No capítulo 2, abordamos as principais definições e resultados de Análise Funcional que foram utilizados ao longo deste texto. As demonstrações destes resultados foram omitidas por não serem o enfoque do trabalho. Além disso, apresentamos neste capítulo as notações mais recorrentes.

No capítulo 3, definimos o conceito de sequências absolutamente convergentes e incondicionalmente convergentes. Apresentamos também algumas caracterizações dessas sequências. Por fim, abordamos as chamadas sequências de Rademacher e a desigualdade de Khinchin, que será fundamental na demonstração da desigualdade de Grothendieck.

No capítulo 4, apresentamos a desigualdade de Grothendieck, a primeira versão do teorema de Grothendieck e uma consequência que será utilizada nos demais teoremas de Grothendieck do capítulo seguinte.

Por fim, no último capítulo deste trabalho apresentamos outras versões do teorema de Grothendieck. Abordamos versões do teorema para operadores p-somantes, que são operadores que estendem a definição de operadores absolutamente somantes. A primeira seção é dedicada para a análise dos operadores p-somantes, resultados fundamentais desta teoria e alguns exemplos. Na última , abordamos os teoremas que utilizam a desigualdade de Grothendieck em suas demonstrações.

2) Preliminares

O objetivo principal do trabalho é apresentar a desigualdade de Grothendieck, sua demonstração e algumas consequências. Entretanto, algumas definições e teoremas preliminares são necessários para a construção teórica de alguns resultados utilizados ao longo do texto.

Neste capítulo, abordamos definições e resultados que corroboram de maneira significativa para a compreensão de diversos lemas, proposições e teoremas analisados nos próximos capítulos. A maioria dos resultados ao longo das seções serão expostos sem as devidas demonstrações.

2.1 Algumas notações e desigualdades

A maior parte dos resultados citados nesse capítulo utilizam espaços de Banach, que são espaços vetoriais normados completos. Estes estão denotados pela letra X.

Outras notações que são utilizadas referem-se a importantes subconjuntos de um espaço de Banach X. As notações B_X e S_X representam a bola fechada unitária do espaço X e a esfera unitária do espaço X, respectivamente.

A letra $\mathbb{K}$ irá indicar o corpo dos números reais ou corpo dos números complexos.

Fixado $p \in [1, \infty)$, a notação l_p representa o espaço das sequências de escalares reais ou complexos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, cuja série $\left(\sum_{n=1}^{p} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ seja convergente.

Fixado $p \in [1, \infty)$, a notação $(L_p[0,1], \| \ \|_p)$ irá denotar o espaço de todas as funções $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que são integráveis. Onde, $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$ para todo $f \in L_p[0,1]$.

Sendo X, Y dois espaços de Banach, a notação $\mathscr{L}(X, Y)$ vai indicar o espaço de todas aplicações lineares de X em Y.

Sendo X, Y dois espaços de Banach, a notação $B(X,Y)$ vai indicar o espaço de todas aplicações lineares contínuas de X em Y. A norma sobre o espaço $B(X,Y)$ é definida como:

$$\| \ \|_{B(X,Y)} : B(X,Y) \to \mathbb{K}$$
$$T \mapsto \|T\|_{B(X,Y)} = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|$$

A notação X^* vai indicar o dual topológico de X, isto é, o conjunto de todas as aplicações lineares e contínuas de X em $\mathbb{K}$.

A letra H vai denotar um espaço de Hilbert.

Outras notações específicas surgem ao longo dos capítulos do trabalho.

Teorema 2.1.1. *Sejam p, q números reais tais que $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Então, $\|f\|_q \leq \|f\|_p$ para todo $f \in L_p[0,1]$.*

Demonstração. Seja $f \in L_p[0,1]$ com $f \neq 0$.

Vamos definir $g = \frac{f}{\|f\|_p}$. Notemos que $g \in S_{l_p}$.

Como $g \in S_{l_p}$, segue que $|g(t)| \leq 1$, para todo $t \in [0,1]$. Logo, $|g(t)|^q \leq |g(t)|^p \leq 1$, para todo $t \in [0,1]$. Assim:

$$\begin{aligned} \|g\|_q &= \left(\int_0^1 |g(t)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^1 |g(t)|^p \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|g\|_p^{\frac{p}{q}} = 1 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \|g\|_q \leq 1 &\implies \\ \left\| \frac{f}{\|f\|_p} \right\|_q \leq 1 &\implies \\ \|f\|_q \leq \|f\|_p & \end{aligned}$$

$\square$

Agora, apresentaremos sem demonstração, algumas desigualdades que serão muito utilizadas:

Proposição 2.1.2 (**Desigualdade de Hölder**). *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Fixemos $n \in \mathbb{N}^*$. Então para todos $a_k, b_k \in \mathbb{K}$ com $k = 1, \ldots, n$ temos:*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma demonstração pode ser encontrada em [6], capítulo 1, páginas 12,13.

Proposição 2.1.3 (**Desigualdade de Minkowski**). *Sejam $p \in [1, \infty)$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Então para todos $a_k, b_k \in \mathbb{K}$, $\quad k = 1, \ldots, n$ temos:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Uma demonstração pode ser encontrada em [6], capítulo 1, páginas 12,13,14.

Proposição 2.1.4 (**Desigualdade de Minkowski generalizada**). *Seja $h(x, y)$ uma função integrável definida para $a \leq x \leq b$ e $c \leq y \leq d$. Então, vale a desigualdade:*

$$\left[\int_a^b \left|\int_c^d h(x, y) dy\right|^r dx\right]^{\frac{1}{r}} \leq \int_c^d \left[\int_a^b |h(x, y)|^r dx\right]^{\frac{1}{r}} dy$$

para $r \geq 1$.

Uma demonstração pode ser encontrada em [9], capítulo 1, páginas 19.

Proposição 2.1.5 (**Desigualdade de Bessel**). *Seja (e_n) uma sequência ortonormal em um espaço de Hilbert H. Então, para todo $x \in H$ temos:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Uma demonstração pode ser encontrada em [6], capítulo 3, página 156.

2.2 Resultados básicos de Análise Funcional

Nesta seção, vamos apresentar alguns resultados básicos da teoria de análise funcional. Os primeiros resultados representam as versões do teorema de Hanh-Banach. Além desses resultados, apresentaremos o teorema de Baire, o teorema da aplicação aberta e teorema do gráfico fechado.

A seguir, seguem duas principais consequências do teorema de Hahn-Banach, que vamos utilizar durante o desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 2.2.1 (**Hahn-Banach**). *Sejam X um espaço de Banach e x_0 um vetor não-nulo de X. Então, existe um funcional linear $x^* \in X^*$ tal que:*

(i) $\|x^*\| = 1$;

(ii) $x^*(x_0) = \|x_0\|$.

Uma demonstração pode ser encontrada em [6], capítulo 4, página 223.

Teorema 2.2.2 (**Hahn-Banach**). *Para cada x em um espaço de Banach X, temos:*

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)|.$$

Uma demonstração pode ser encontrada em [6], capítulo 4, página 223.

Teorema 2.2.3 (**Teorema de Baire**). *Seja X um espaço métrico não-vazio. Se X pode ser ser escrito como uma união enumerável $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ de subconjuntos fechados de X, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que int $X_{n_0} \neq \emptyset$.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [3], capítulo 2, página 15.

Definição 2.2.4 (**Aplicação aberta**). *Sejam X, Y dois espaços métricos. Dizemos que uma aplicação $T : X \longrightarrow Y$ é aberta se T leva subconjuntos abertos de X em subconjuntos abertos de Y.*

Teorema 2.2.5 (**Teorema da Aplicação Aberta**). *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in B(X, Y)$. Se T é sobrejetora então T é uma aplicação aberta.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [3], capítulo 4, páginas 286-289.

Corolário 2.2.6. *Sejam X, Y espaços de Banach e $T \in B(X, Y)$ tal que T é bijetora. Então $T^{-1} \in B(Y, X)$.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [3], capítulo 4, páginas 289.

Definição 2.2.7 (**Topologia produto**). *A topologia produto é a topologia cuja base é formada pelas interseções finitas das imagens inversas, pelas projeções canônicas, dos abertos de cada espaço topológico que forma o produto.*

Teorema 2.2.8 (**Teorema do Gráfico Fechado**). *Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Então T é limitado se, e somente se, o seu gráfico $\Gamma = \{(x, T(x));\ x \in X\}$ é fechado na topologia produto.*

A demonstração pode ser encontrada em [3], capítulo 4, páginas 292.

Outros resultados e definições de análise funcional podem ser encontrados em [9].

2.3 Operadores compactos

Nesta seção apresentamos operadores compactos, definidos sobre espaços de Banach. Apresentaremos alguns resultados para operadores compactos, omitindo maior parte das demonstrações.

Definição 2.3.1 (**Conjunto Compacto**). *Seja X um espaço de Banach e $S \subset X$ um subconjunto de X. Dizemos que S é compacto se toda sequência $(x_n) \subset S$ possuir uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente em S.*

Definição 2.3.2 (**Operador Compacto**). *Sejam X, Y espaços de Banach. Dizemos que o operador $T : X \longrightarrow Y$ é compacto se para toda sequência limitada $(x_n) \subset X$, a sequência $(T(x_n)) \subset Y$ admite pelo menos uma subsequência convergente em Y.*

Lema 2.3.3. *Seja $K \subset l_1$. Se K é compacto então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\sum_{n<n_\varepsilon} |a_n| \geq \varepsilon$$

para todo elemento $x = (a_n) \in K$.

Demonstração. Seja dado $\varepsilon > 0$. Consideremos $\left((B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a^i)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ uma cobertura de bolas abertas em K. Como K é compacto segue que K admite uma subcobertura finita, digamos:

$$K \subset (B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a^1)) \cup (B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a^2)) \cup \ldots \cup (B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a^m)) \qquad (*)$$

Como $a^1 = (a^1_n) \in l_1$, existe $n^1_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n>n^1_\varepsilon} |a^1_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $a^2 = (a^2_n) \in l_1$, existe $n^2_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n>n^2_\varepsilon} |a^2_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $a^m = (a^m_n) \in l_1$, existe $n^m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n>n^m_\varepsilon} |a^m_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomemos $n'_\varepsilon = \max\{n^i_\varepsilon;\ i = 1, \ldots, m\}$.
Seja $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{K}$. Por $(*)$ existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $b \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_k)$.
Assim, existe $n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n>n''_\varepsilon} |b_n - a^k_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomemos $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$. Então:

$$\sum_{n>n_\varepsilon} |b_n| \leq \sum_{n>n_\varepsilon} |b_n - a_n^k| + \sum_{n>n_\varepsilon} |a_n^k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \sum_{n>n_\varepsilon} |b_n| \leq \varepsilon.$$ □

2.4 Elementos da teoria da medida

Nesta seção vamos apresentar algumas definições de elementos da teoria da medida que serão utilizadas no capítulo 5 desta dissertação. Os exemplos 5.1.29, 5.1.30, 5.1.31, 5.1.32 e 5.1.33 são construídos baseando-se nessas definições.

Vamos definir espaços mensuráveis, espaços de medida e o espaço $L_p(\mu)$, dentre outras definições recorrentes.

Iniciaremos a seção definindo $\sigma-$álgebra e espaço mensurável. Esta definição é importante para a compreensão do exemplo 5.1.31.

Definição 2.4.1 (**Sigma álgebra**). *Seja X um conjunto qualquer e Σ uma coleção de subconjuntos de X. Dizemos que Σ é uma $\sigma-$álgebra se:*

i) $\emptyset \in \Sigma$.

ii) Se $Y \in \Sigma$ então $X - Y \in \Sigma$.

iii) Se $X_1, \ldots, X_n \in \Sigma$ então $\bigcup_{i=1}^{n} X_i \in \Sigma$.

Definição 2.4.2 (**Espaço mensurável**). *Seja X um conjunto qualquer. Dizemos que (X, Σ) é um espaço mensurável se Σ é uma $\sigma-$álgebra sobre X.*

Definição 2.4.3 (**Medida positiva**). *Sejam X um conjunto qualquer e Σ uma $\sigma-$álgebra. Um medida positiva definida sobre Σ é uma função $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty)$ que goza das seguintes propriedades:*

i) $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, *para qualquer coleção enumerável $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Σ.*

As definições 2.4.4, 2.4.5, 2.4.6 e 2.4.7 são fundamentais para construção dos exemplos 5.1.29 e 5.1.30.

Definição 2.4.4 (**Espaço de medida**). *Sejam X um espaço qualquer e Σ uma $\sigma-$álgebra definida sobre X. Dizemos que (X, Σ, μ) é um espaço de medida se μ é uma medida definida sobre Σ.*

Definição 2.4.5 (**Álgebra de Borel**). *Seja (X,τ) um espaço topológico, onde τ é uma topologia sobre X. A menor $\sigma-$álgebra sobre X que contém os abertos da topologia τ é denominada de álgebra de Borel.*

Definição 2.4.6 (**Medida de Borel**). *Seja (X,τ) um espaço topológico, onde τ é uma topologia sobre X. Qualquer medida definida sobre a álgebra de Borel de (X,τ) é denominada de medida de Borel.*

Definição 2.4.7 (**Medida regular**). *Sejam (X,τ) um espaço topológico, Σ uma $\sigma-$álgebra sobre X e μ uma medida positiva definida sobre Σ. Um subconjunto mensurável A de X é dito* ***regular interno*** *se:*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F);\ F \subset A,\ F \text{ compacto e mensurável}\}.$$

Um subconjunto mensurável A de X é dito ***regular externo*** *se:*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G);\ G \subset A,\ G \text{ aberto e mensurável}\}.$$

Uma medida é chamada de ***regular interna*** *se todo conjunto mensurável for regular interno.*
Uma medida é chamada de ***regular externa*** *se todo conjunto mensurável for regular externo.*
Uma medida é chamada ***regular*** *se for externa regular e interna regular.*

A definição 2.4.8 é utilizada no enunciado do exemplo 5.1.32.

Definição 2.4.8 (**Medida finita**). *Seja (X,Σ,μ) um espaço de medida, onde Σ é uma $\sigma-$álgebra e μ é uma medida definida sobre Σ. A medida μ é dita finita se $\mu(X) < \infty$.*

As definições 2.4.9 e 2.4.10 são utilizadas no exemplo 5.1.29.

Definição 2.4.9 (**Função mensurável**). *Sejam (X,Σ_1), (Y,Σ_2) espaços mensuráveis e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Dizemos que f é uma função mensurável se $f^{-1}(E) \in \Sigma_1$ para todo $E \in \Sigma_2$.*

Definição 2.4.10 (**Espaço $L_p(\mu)$**). *Sejam $1 \geq 1 < \infty$ e (X,Σ,μ) um espaço de medida. Se f é uma função mensurável sobre X, definimos:*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço vetorial $L_p(\mu)$ é definido como o conjunto de todas as funções mensuráveis f tais que $\|f\|_p < \infty$.

2.5 Topologias fraca e fraca estrela

Nesta seção apresentamos as definições de topologia fraca e fraca estrela. Além disso, apresentamos alguns resultados baseados nestas definições, como o teorema de Alaoglu, que nos diz que a bola unitária do dual topológico de um espaço normado é fraca estrela compacta. Os resultados serão expostos, omitindo-se as demonstrações.

Definição 2.5.1 (Topologia fraca). *Seja $(X, \|\ \ \|)$ um espaço normado. A topologia fraca em X é a topologia obtida tomando como base de vizinhanças, todos os conjuntos da forma:*

$$\bigcup(x_0; f_1, \ldots, f_n; \varepsilon) = \{x \in X;\ |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\}$$

onde $n \in \mathbb{N}$; $f_1, \ldots, f_n \in X^*$; $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$.

Observação 2.5.2. *Seja $(X, \|\ \ \|)$ um espaço normado. Vamos denotar por $(X, \sigma(X, X^*))$ o espaço X munido com a topologia fraca.*

Proposição 2.5.3. *Sejam $(X, \|\ \ \|)$ um espaço normado e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ uma sequência. Então, $x_n \longrightarrow x_0$ na topologia fraca se, e somente se, $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ para todo $f \in X^*$.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [3], capítulo 4, páginas 261 e 262.

Teorema 2.5.4. *Sejam $(X, \|\ \ \|)$ um espaço normado e $A \subset X$ um subconjunto convexo. Então, $\overline{A} = \overline{A}^{\sigma(X, X^*)}$.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [2], capítulo 3, página 38.

Definição 2.5.5 (Topologia fraca estrela). *Seja $(X, \|\ \ \|)$ um espaço normado. A topologia fraca estrela em X^* é a topologia obtida tomando como base de vizinhanças, todos os conjuntos da forma:*

$$\bigcup(\varphi_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{\varphi \in X^*;\ |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon,\ 1 \leq i \leq n\}$$

onde $n \in \mathbb{N}$; $x_1, \ldots, x_n \in X$; $\varphi_0 \in X^*$ e $\varepsilon > 0$.

Proposição 2.5.6. *Sejam $(X, \|\ \ \|)$ um espaço normado e $(\varphi_n) \subset X^*$ uma sequência. Então, $\varphi_n \longrightarrow \varphi_0$ na topologia fraca estrela se, e somente se, $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi_0(x)$ para todo $x \in X$.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [2], capítulo 3, páginas 40 e 41.

Observação 2.5.7. *Seja $(X, \|\ \ \|)$ um espaço normado. Vamos denotar por $(X^*, \sigma(X^*, X))$ o espaço X^* munido com a topologia fraca estrela.*

Teorema 2.5.8 (Teorema de Alaoglu). *Seja* $(X, \| \ \|)$ *um espaço normado. Então* $B_{X^*} = \{\varphi \in X^*;\ \|\varphi\| \leq 1\}$ *é* $\sigma(X^*, X)$ *compacto.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [2], capítulo 3, páginas 42 e 43.

Teorema 2.5.9. *Se* X *é um espaço normado separável então toda sequência limitada em* X^* *possui uma subsequência convergente na topologia fraca estrela.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [2], capítulo 3, página 50.

Teorema 2.5.10. *Seja* X *um espaço de Banach. Então* X *é separável se, e somente se,* B_{X^*} *é metrizável na topologia fraca estrela.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [2], capítulo 3, página 48.

3) Séries incondicionalmente e absolutamente somáveis em espaços de Banach

3.1 Teorema de Dvoretzky-Rogers

Nesta seção definimos sequências absolutamente somáveis, que são sequências cujas normas convergem na norma de l_1, e sequências incondicionalmente somáveis, que são sequências convergentes na norma de l_1 independente da ordem dos índices. O teorema de Dvoretzky-Rogers pode ser encontrado em [4], capítulo 1, páginas 2,3,4.

O objetivo principal desta seção é garantirmos que tomando-se uma sequência arbitrária em l_2, podemos obter uma sequência incondicionalmente somável em um determinado espaço de Banach, onde a norma de cada elemento deste espaço é igual ao módulo de cada entrada da sequência tomada em l_2.

Para a demonstração do teorema principal necessitamos de um lema prévio.

Definição 3.1.1. *Seja X um espaço normado.*

Dizemos que uma sequência $(x_n) \subset X$ é **absolutamente** *somável se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ for convergente. Dizemos que uma sequência $(x_n) \subset X$ é* **incondicionalmente** *somável se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{\sigma(n)}\|$ for convergente para toda permutação $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.*

Proposição 3.1.2. *Seja X um espaço normado. X é um espaço de Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável.*

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em X. Vamos mostrar que (x_n) possui uma subsequência convergente. Afirmamos que (x_n) possui uma subsequência (x_{n_k}) satisfazendo:

$$\|x_{n_k} - x_{n_l}\| < \frac{1}{2^k}, \quad \forall l \geq k.$$

Vamos mostrar essa afirmação através de um processo indutivo em k.
Para $k = 1$ existe um $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_m - x_l\| < \frac{1}{2}, \quad \forall m, l \geq n_1.$$

Em particular:

$$\|x_{n_1} - x_l\| < \frac{1}{2}, \quad \forall l \geq n_1.$$

Para $k = 2$ existe um $n_2 > n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_m - x_l\| < \frac{1}{2^2}, \quad \forall m, l \geq n_2.$$

Em particular:

$$\|x_{n_2} - x_l\| < \frac{1}{2^2}, \quad \forall l \geq n_2.$$

Além disso, notemos que:

$$\|x_{n_1} - x_{n_2}\| < \frac{1}{2}.$$

Para $k = 3$ existe um $n_3 > n_2 > n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x_m - x_l\| < \frac{1}{2^3}, \quad \forall m, l \geq n_3.$$

Assim:

$$\|x_{n_3} - x_l\| < \frac{1}{2^3}, \quad \forall l \geq n_3.$$

Além disso, notemos que:

$$\|x_{n_2} - x_{n_3}\| < \frac{1}{2^2}.$$

Indutivamente temos que:

$$\|x_{n_k} - x_{n_l}\| < \frac{1}{2^k}, \quad \forall l \geq k.$$

Vamos definir:

$$\begin{cases} x_{n_0} &= 0 \\ y_k &= x_{n_k} - x_{n_{k-1}}, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Observemos que:

$$\sum_{i=1}^{k} y_i = \sum_{i=1}^{k} (x_{n_i} - x_{n_{i-1}}) = x_{n_1} - x_{n_0} + x_{n_2} - x_{n_1} + \ldots + x_{n_k} - x_{n_{k-1}} = x_{n_k}.$$

Além disso:

$$\|y_k\| = \|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\| < \frac{1}{2^{k-1}}, \ \forall k \geq 2.$$

Assim:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \|y_k\| < \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Como a série $\sum_{k=2}^{\infty}\|y_k\|$ converge segue que $\sum_{k=2}^{\infty} y_k$ converge, pois por hipótese toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável. Assim, a sequência das somas parciais $\sum_{i=1}^{k} y_i$ converge. Como $x_{n_k} = \sum_{i=1}^{k} y_i$ concluímos que (x_{n_k}) converge.

($\Longrightarrow$) Suponhamos que $(X, \| \ . \ \|)$ seja um espaço de Banach. Consideremos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série absolutamente convergente em X.
Ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \infty$. Notemos que $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ é uma série convergente sobre o corpo $\mathbb{K}$.
Assim $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_{\sigma(n)}\|$ é convergente para toda permutação $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Consideremos $m > n \in \mathbb{N}$ e fixemos $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação.
Pelo critério de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{i=n+1}^{m}\|x_{\sigma(i)}\| < \varepsilon, \quad \forall i \geq n_0$$

Notemos que:

$$\left\|\sum_{i=n+1}^{m} x_{\sigma(i)}\right\| \leq \sum_{i=n+1}^{m}\|x_{\sigma(i)}\|.$$

Assim, concluímos que a sequência das somas parciais $\sum_{i=1}^{k} x_{\sigma(i)}$ é uma sequência de Cauchy. Como X é completo, segue que a sequência das somas parciais é convergente. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente. $\square$

O lema 3.1.3 pode ser encontrado em [4], capítulo 1, páginas 2 e 3.

Lema 3.1.3. *Seja X um espaço de Banach $2n$ dimensional. Então existem n vetores $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B_X$ cada um com norma maior ou igual a $\frac{1}{2}$ tais que, para quaisquer escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$,temos:*

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração. Para simplificarmos a notação, tanto o operador linear quanto a matriz associada a este operador serão denotados pela mesma letra.
Vamos encontrar um isomorfismo $u : l_2^{2n} \to X$ satisfazendo:

$$(*) \qquad |tr(u^{-1}v)| \leq 2n\|v\| \quad \forall \ v \in \mathscr{L}(l_2^{2n}, X)$$

A aplicação:

$$\det : \mathscr{L}(l_2^{2n}, X) \to \mathbb{K}$$

$$v \mapsto \det(v)$$

é contínua na esfera unitária do espaço $\mathscr{L}(l_n^{2n}, X)$, que será denotada por S. Como o conjunto S é compacto e a aplicação det é contínua, pelo teorema de Weierstrass, segue que det admite máximo e mínimo no conjunto S.
Podemos então considerar $u \in S$ tal que $\det(u) = \max\{|\det(v)|;\ v \in S\}$
Vamos mostrar que u satisfaz $(*)$
Sejam $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \neq 0$ e $v \in \mathscr{L}(l_n^{2n}, X)$. Para u considerado anteriormente, temos que $(u + \varepsilon v) \in \mathscr{L}(l_n^{2n}, X)$, já que $\mathscr{L}(l_n^{2n}, X)$ é um espaço vetorial. Consideremos $w = \frac{u+\varepsilon v}{\|u+\varepsilon v\|}$.
Como $\|w\| = 1$, segue que $w \in S$. Observemos que:

$$\frac{1}{\|u + \varepsilon v\|^{2n}} |\det(u + \varepsilon v)| = \left|\det\left(\frac{u + \varepsilon v}{\|u + \varepsilon v\|}\right)\right| = |\det(w)| \leq \det(u).$$

Assim:

$$(**) \qquad \det(u + \varepsilon v) \leq \det(u)\|u + \varepsilon v\|^{2n} \leq \det(u)(\|u\| + |\varepsilon|\|v\|)^{2n} \leq \det(u)(1 + |\varepsilon|\|v\|)^{2n}.$$

Afirmamos que $u \in S$ é invertível.
Supondo que u não seja invertível, temos que $\det(u) = 0$; porém $|\det(v)| \leq \det(u), \forall v \in S$, assim $\det(v) = 0$, $\forall v \in S$. Mas isso é absurdo, pois o operador identidade do espaço $\mathscr{L}(l_2^{2n}, X)$ possui determinante igual a 1. Logo, u é invertível.
Como u é uma aplicação linear bijetora, temos que u é um isomorfismo. Observemos que:

$$\begin{aligned}
|\det(u + \varepsilon v)| &= |\det(u(I + \varepsilon u^{-1}v))| \\
&= |\det(u)\det(I + \varepsilon u^{-1}v)| \\
&= |\det(u)||\det(I + \varepsilon u^{-1}v)| \\
&= \det(u)|\det(I + \varepsilon u^{-1}v)| \\
&= \det(u)|1 + \varepsilon tr(u^{-1}v) + C(\varepsilon)|
\end{aligned}$$

onde:

$$|C(\varepsilon)| = O(|\varepsilon|^2)$$

$O(|\varepsilon|^2)$ denota os termos que apresentam $|\varepsilon|^2$.

Usando $(**)$, podemos observar também que:

$$\det(u)|1 + \varepsilon tr(u^{-1}v) + C(\varepsilon)| = |\det(u + \varepsilon v)| \leq \det(u)(1 + |\varepsilon|\|v\|)^{2n}$$

Daí:

$$|1 + \varepsilon tr(u^{-1}v) + C(\varepsilon)| \leq (1 + |\varepsilon|\|v\|)^{2n} = 1 + 2n|\varepsilon|\|v\| + O(|\varepsilon|^2)$$

Podemos escolher ε suficientemente pequeno tal que:

$$\varepsilon tr(u^{-1}v) = |\varepsilon tr(u^{-1}v)|$$

Temos que:

$$
\begin{aligned}
|1+\varepsilon tr(u^{-1}v)| - O(|\varepsilon|^2) &= |1+\varepsilon tr(u^{-1}v)| - |C(\varepsilon)| \\
&\leq |1+\varepsilon tr(u^{-1}v) + C(\varepsilon)| \\
&\leq 1 + 2n|\varepsilon|\|v\| + O(|\varepsilon|^2)
\end{aligned}
$$

Pela escolha de ε, podemos considerar que:

$$|1+\varepsilon tr(u^{-1}v)| = 1+\varepsilon tr(u^{-1}v)$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
|1+\varepsilon tr(u^{-1}v)| \leq 1 + 2n|\varepsilon|\|v\| + O(|\varepsilon|^2) &\Rightarrow \\
1 + |\varepsilon||tr(u^{-1}v)| \leq 1 + 2n|\varepsilon|\|v\| + O(|\varepsilon|^2) &\Rightarrow \\
|\varepsilon||tr(u^{-1}v)| \leq 2n|\varepsilon|\|v\| + O(|\varepsilon|^2) &\Rightarrow \\
|tr(u^{-1}v)| \leq 2n\|v\| + O(|\varepsilon|^2) & \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ obtemos $(*)$.
Seja $W \subset l_2^{2n}$ um subespaço de dimensão m.
Seja $\beta = \{w_1, \ldots, w_m\}$ uma base ortogonal do subespaço W. Podemos estendê-la a fim de obtermos uma base ortogonal β' para o espaço l_2^{2n}, digamos $\beta' = \{w_1, \ldots, w_m, x_{m+1} \ldots, x_{2n}\}$.
Seja $P : l_2^{2n} \to l_2^{2n}$ a aplicação projeção ortogonal definida como $P(y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(y, w_i)}{(w_i, w_i)} w_i$.
Observemos que:

$$
\begin{aligned}
P(w_1) &= \frac{(w_1, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 + \frac{(w_1, w_2)}{(w_2, w_2)} w_2 + \ldots + \frac{(w_1, w_m)}{(w_m, w_m)} w_m + 0x_{m+1} + \ldots 0x_{2n} \\
P(w_2) &= \frac{(w_2, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 + \frac{(w_2, w_2)}{(w_2, w_2)} w_2 + \ldots + \frac{(w_2, w_m)}{(w_m, w_m)} w_m + 0x_{m+1} + \ldots 0x_{2n} \\
&\vdots \\
P(w_{2n}) &= \frac{(w_{2n}, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 + \frac{(w_{2n}, w_2)}{(w_2, w_2)} w_2 + \ldots + \frac{(w_{2n}, w_m)}{(w_m, w_m)} w_m + 0x_{m+1} + \ldots 0x_{2n}
\end{aligned}
$$

A matriz que representa P da base β' em relação a base β':

$$
[P]_{\beta'}^{\beta'} = \begin{bmatrix}
\frac{(w_1,w_1)}{(w_1,w_1)} & \frac{(w_2,w_1)}{(w_1,w_1)} & \cdots & \frac{(w_{2n},w_1)}{(w_1,w_1)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{(w_1,w_m)}{(w_m,w_m)} & \frac{(w_2,w_m)}{(w_m,w_m)} & \cdots & \frac{(w_{2n},w_m)}{(w_m,w_m)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
$$

A matriz irá se reduzir à:

$$[P]_{\beta'}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Obtemos então que $tr(P) = m$.
Usando $(*)$, teremos que:

$$m = tr(P) = tr(u^{-1}uP) \leq 2n\|uP\| \Rightarrow \|uP\| \geq \frac{m}{2n}$$

Nosso objetivo é encontrarmos n vetores $x_1, \ldots, x_n$ em B_X, cada vetor com norma maior ou igual a $\frac{1}{2}$, satisfazendo o lema. Os n vetores estarão associados a escolha de n vetores ortonormais apropriados $y_1, \ldots, y_n \in l_2^{2n}$, onde $x_j = u(y_j)$, para $1 \leq j \leq n$.
Sendo $u \in S$, temos que $\|u\| = 1$. Assim, $\sup\limits_{y \in S_{l_2^{2n}}} \|u(y)\| = 1$. Como o supremo é atingido, existe um vetor $y_1 \in S_{l_2^{2n}}$ tal que $u(y_1) = 1$ (além disso, $\|u(y_1)\| = 1$).
Notemos que: Consideremos $P_1 : l_2^{2n} \to l_2^{2n}$ a projeção ortogonal do espaço l_2^{2n} sobre o espaço $[y_1]^{\perp}$.

Existe $y_2 \in [y_1]^{\perp}$ tal que $\|y_2\| = 1$ e $\|u(y_2)\| \geq \frac{2n-1}{2n}$. De fato:
Notemos que a composição uP_1 forma um operador limitado:

$$\|uP_1\| \leq \|u\|\|P_1\| = \|P_1\|$$

Sabemos que $\|uP_1\| = \sup\limits_{y \in S_{l_2^{2n}}} \|uP_1(y)\|$. Logo, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $\|uP_1\| = K$. Como $\| \ \|_X$, u, P_1 são aplicações contínuas, segue que a composição das três aplicações também é uma aplicação contínua. Sendo $S_{l_2^{2n}}$ um conjunto compacto, concluímos que o conjunto $\{\|uP_1(y)\|_X;\ y \in S_{l_2^{2n}}\}$ admite máximo. Portanto, existe um vetor $y_2 \in S_{l_2^{2n}}$ tal que $\|uP_1(y_2)\| = K = \|uP_1\|$.
Usando $(*)$ notemos que:

$$2n - 1 = trP_1 = tr(uu^{-1}P_1) \overset{(*)}{\leq} 2n\|uP_1\| \Rightarrow \|uP_1\| \geq \frac{2n-1}{2n}$$

Afirmamos que $y_2 \in [y_1]^{\perp}$.
Caso contrário, teríamos $P_1(y_2) = 0$. Assim, $0 = \|u(P_1 y_2)\| = \|uP_1\|$. Absurdo, pois $\|uP_1\| \geq \frac{2n-1}{2n}$.
Além disso, temos:

$$\|u(y_2)\| = \|u(P_1(y_2))\| = \|uP_1(y_2)\| = \|uP_1\| \geq \frac{2n-1}{2n}$$

Consideremos agora $P_2 : l_2^{2n} \to l_2^{2n}$ a projeção ortogonal do espaço l_2^{2n} sobre o espaço $[y_1, y_2]^{\perp}$.

Existe $y_3 \in [y_1, y_2]^{\perp}$ tal que $\|y_3\| = 1$ e $\|u(y_3)\| \geq \frac{2n-2}{2n}$. De fato:
Utilizando uma argumentação análoga à utilizada anteriormente, segue que o operador uP_2 é limitado. Como a composição entre as aplicações $\| \ \|_X$, u, P_2 é uma aplicação contínua e o conjunto $S_{l_2^{2n}}$ é compacto segue que o conjunto $\{\|uP_2(y)\|;\ y \in S_{l_2^{2n}}$ admite máximo.
Portanto, existe $y_3 \in S_{l_2^{2n}}$ tal que $\|uP_2(y_3)\| = \|uP_2\|$.
Usando $(*)$ temos que:

$$2n - 2 = trP_2 = tr(uu^{-1}P_2) \overset{(*)}{\leq} 2n\|uP_2\| \Rightarrow \|uP_2\| \geq \frac{2n-2}{2n}$$

Afirmamos que $y_3 \in [y_1, y_2]^{\perp}$.
Caso contrário, teríamos $P_2(y_3) = 0$. Assim, $0 = \|u(P_2 y_3)\| = \|uP_2\|$. Absurdo, pois $\|uP_2\| \geq \frac{2n-2}{2n}$.
Além disso, temos:

$$\|u(y_3)\| = \|u(P_2(y_3))\| = \|uP_2(y_3)\| = \|uP_2\| \geq \frac{2n-2}{2n}$$

Repetindo o processo até o passo n segue que existe $y_n \in [y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}]^{\perp}$ com $\|y_n\| = 1$ tal que:

$$\|u(y_n)\| = \|u(P_{n-1}(y_n))\| = \|uP_{n-1}(y_n)\| \geq \frac{2n-(n-1)}{2n} = \frac{n+1}{2n}.$$

Os vetores $y_1, \ldots, y_n \in l_2^{2n}$ obtidos são ortonormais.
Vamos considerar $x_j = u(y_j);\ \ 1 \leq j \leq n$. Notemos que $\|x_j\| = \|u(y_j)\| \leq 1;\ \ 1 \leq j \leq n$.
Assim, $x_j \in B_X$ para todo $1 \leq j \leq n$.
Além disso:

$$\|x_j\| \geq \frac{(2n-j+1)}{2n} = 1 - \frac{(j-1)}{2n} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Consideremos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ vetores arbitrários.
Segue que:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j \leq n} \lambda_j x_j \right\| &= \left\| \sum_{j \leq n} \lambda_j u(y_j) \right\| \\
&= \left\| u\left(\sum_{j \leq n} \lambda_j y_j \right) \right\| \\
&\leq \|u\| \left\| \sum_{j \leq n} \lambda_j y_j \right\|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| \sum_{j\leq n} \lambda_j y_j \right\| \\
&= \left\langle \sum_{j\leq n} \lambda_j y_j, \sum_{i\leq n} \lambda_i y_i \right\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{j\leq n} \sum_{i\leq n} \lambda_j \overline{\lambda_i} \langle y_j, y_i \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{j\leq n} |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

□

O seguinte lema será demonstrado posteriormente, entretanto será fundamental para a demonstração do teorema de Dvoretsky-Rogers

Lema 3.1.4. *Uma sequência* (x_n) *em um Espaço de Banach é incondicionalmente somável se, e somente se, é sinal somável, isto é,* $\sum_n \varepsilon_n x_n$ *converge para qualquer que seja a escolha* $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$.

Segue o teorema principal:

Teorema 3.1.5 (Teorema de Dvoretsky-Rogers)**.** *Se* X *é um espaço de Banach de dimensão infinita, para cada* $(\lambda_n) \in l_2$ *existe uma sequência incondicionalmente somável* $(x_n) \subset X$ *tal que* $\|x_n\| = |\lambda_n|, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $(\lambda_n) \in l_2$. Assim temos que a série $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^2$ é convergente. Logo:

Para $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n\geq n_1} |\lambda_n|^2 \leq \frac{1}{2^2}$$

Para $\varepsilon = \frac{1}{2^4}$ existe $n_2 > n_1$ em $\mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n\geq n_2} |\lambda_n|^2 \leq \frac{1}{2^4}$$

Prosseguindo com a mesma argumentação, para $\varepsilon = \frac{1}{2^{2k}}$ existe $n_k > n_{k-1}$ em $\mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n\geq n_k} |\lambda_n|^2 \leq \frac{1}{2^{2k}}$$

Vamos utilizar o *lema* 3.1.3, porém o devido lema foi utilizado para espaços de dimensão finita.

Consideremos $E_1 \subset X$ subespaço de X, onde $\dim E_1 = 2(n_1 - 1)$.
Para $1 \leq k \leq n_1 - 1$, usando o lema, existem $y_1, y_2, \ldots, y_{n_1-1} \in B_{E_1}$ com $\|y_i\| \geq \frac{1}{2}$, $\forall i = 1, \ldots, n_1 - 1$ tais que independente dos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1-1}$ temos:

$$\left\| \sum_{j<n_1} \alpha_j y_j \right\| \leq \left(\sum_{j<n_1} |\alpha_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Consideremos $E_2 \subset X$ um subespaço de X, onde $\dim E_2 = 2(n_2 - n_1)$.
Para $n_1 \leq k \leq n_2 - 1$, existem $y_{n_1}, y_{n_1+1}, \ldots, y_{n_2-1} \in B_{E_2}$ com $\|y_i\| \geq \frac{1}{2}$, $\forall i = n_1, \ldots, n_2 - 1$ tais que independentemente dos escalares $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_{n_2-1}$ temos:

$$\left\| \sum_{j=n_1}^{n_2-1} \alpha_j y_j \right\| \leq \left(\sum_{j=n_1}^{n_2-1} |\alpha_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Indutivamente, podemos considerar $E_l \subset X$ subespaço de X, onde $\dim E_l = 2(n_l - 1 - (n_{l-1} - 1))$.
Para $n_l \leq k \leq n_{l+1} - 1$, existem $y_{n_l}, y_{n_l+1}, \ldots, y_{n_{l+1}-1} \in B_{E_l}$ com $\|y_i\| \geq \frac{1}{2}$, $\forall i = n_l, \ldots, n_{l+1} - 1$ tais que independente dos escalares $\alpha_{n_l}, \alpha_{n_l+1}, \ldots, \alpha_{n_{l+1}-1}$ temos:

$$\left\| \sum_{j=n_l}^{n_{l+1}-1} \alpha_j y_j \right\| \leq \left(\sum_{j=n_l}^{n_{l+1}-1} |\alpha_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Obtemos uma sequência $(y_n) \subset B_X$ onde $\|y_n\| \geq \frac{1}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, tal que independentemente da escolha de (α_k) temos:

$$\left\| \sum_{j=n_k}^{N} \alpha_j y_j \right\| \leq \left(\sum_{j=n_k}^{N} |\alpha_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

onde $n_k \leq N < n_{k+1}$
A partir da sequência $(y_n) \subset B_X$ vamos considerar uma sequência (x_n) de tal forma que:

$$x_j = \lambda_j \frac{y_j}{\|y_j\|},\ \forall\, j \in \mathbb{N}$$

Considerando $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$ para $n_k \leq N < n_{k+1}$ obtemos que:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=n_k}^{N} \varepsilon_n x_n \right\| &= \left\| \sum_{n=n_k}^{N} \varepsilon_n \lambda_n \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\| \\
&\leq \left(\sum_{n=n_k}^{N} \left| \varepsilon_n \frac{\lambda_n}{\|y_n\|} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{n=n_k}^{N} |\varepsilon_n|^2 \frac{|\lambda_n|^2}{\|y_n\|^2} \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n=n_k}^{N} \frac{|\lambda_n|^2}{\|y_n\|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{n=n_k}^{N} 4|\lambda_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\left(\sum_{n=n_k}^{N} |\lambda_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2\left(\frac{1}{2^{2k}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{1}{2^k}\right) \\
&= 2.2^{-k} = 2^{1-k}
\end{aligned}
$$

Fixando $n_k \in \mathbb{N}$, tomemos $s \in \mathbb{N}$ arbitrário onde $s > n_k$. Sabemos que existe $v \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \leq n_v \leq s \leq n_{v+1}$. Observe que:

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=n_k}^{s} \varepsilon_n x_n\right\| &= \left\|\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \varepsilon_n x_n + \sum_{n=n_{k+1}}^{n_{k+2}-1} \varepsilon_n x_n + \ldots + \sum_{n=n_v}^{s} \varepsilon_n x_n\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \varepsilon_n x_n\right\| + \left\|\sum_{n=n_{k+1}}^{n_{k+2}-1} \varepsilon_n x_n\right\| + \ldots + \left\|\sum_{n=n_v}^{s} \varepsilon_n x_n\right\| \\
&\leq 2^{1-k} + 2^{-k} + \ldots + 2^{1-v} \\
&= \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^{v-1}}
\end{aligned}
$$

Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}}$ converge temos que ela atende o critério de Cauchy.
Assim dado $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que :

$$
\left|\sum_{n=k+1}^{s+1} \frac{1}{2^{n-2}}\right| < \varepsilon, \quad \forall s > k > n_0.
$$

Então, para $k \geq n_0$ segue:

$$
\left\|\sum_{n=n_k}^{s} \varepsilon_n x_n\right\| \leq \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^{v-1}} < \varepsilon.
$$

Concluímos assim que a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n x_n$ converge para $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$.
Pelo lema 3.1.4 como a série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n x_n$ converge para $\varepsilon_n \in \{1, -1\}$ segue que (x_n) é incondicionalmente somável.
Além disso:

$$
\|x_n\| = \left\|\lambda_n \frac{y_n}{\|y_n\|}\right\| = |\lambda_n| \frac{\|y_n\|}{\|y_n\|} = |\lambda_n|, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.
$$

$\square$

3.2 Teorema de Schur

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados que nos possibilitam algumas caracterizações de sequências incondicionalmente somáveis em espaços de Banach. O Lema 3.1.4 está incluído no Teorema 3.2.1.

Por fim, vamos apresentar o teorema de Schur que garante que toda sequência que converge fracamente em l_1 converge na norma de l_1. Para demonstração deste resultado, utilizaremos uma das equivalências da definição de sequências incondicionalmente somáveis.

O teorema 3.2.1 pode ser encontrado em [4], capítulo 1, páginas 4 e 5.

Teorema 3.2.1. *Seja (x_n) uma sequência em um espaço de Banach X. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *(x_n) é incondicionalmente somável;*
2. *(x_n) é desordenadamente somável, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo subconjunto finito $M \subset \mathbb{N}$ com $\min M > n_\varepsilon$ temos $\left\| \sum_{n\in M} x_n \right\| < \varepsilon$;*
3. *(x_n) é subsérie somável, isto é, para qualquer sequência estritamente crescente de inteiros positivos (k_n) temos que $\sum_n x_{k_n}$ é convergente;*
4. *(x_n) é sinal somável.*

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2)
Vamos negar que (x_n) seja desordenadamente somável. Então existe $\delta > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto $M \subset \mathbb{N}$ finito com $\min M > m$ e $\left\| \sum_{k\in M} x_k \right\| \geq \delta$.

Para $m_1 = 1$ existe $M_1 \subset \mathbb{N}$ finito com $\min M_1 > 1$ e $\left\| \sum_{k\in M_1} x_k \right\| \geq \delta$.

Para $m_2 = \max M_1$ existe $M_2 \subset \mathbb{N}$ finito com $\min M_2 > m_2 = \max M_1$ e $\left\| \sum_{k\in M_2} x_k \right\| \geq \delta$.
Indutivamente, para $m_l = \max M_{l-1}$ existe $M_l \subset \mathbb{N}$ finito com $\min M_l > m_l = \max M_{l-1}$ e $\left\| \sum_{k\in M_l} x_k \right\| \geq \delta$
Obtemos assim uma sequência de subconjuntos finitos de (M_n) com $\min M_{n+1} > \max M_n$ e $\left\| \sum_{k\in M_n} x_k \right\| \geq \delta$, para todo $n \in \mathbb{N}$
Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos o subconjunto de $\mathbb{N}$:

$$A_n = (\min M_n, \min M_n + |M_n|) \cap \mathbb{N}$$

Seja $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação de tal forma que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenhamos que $\sigma(A_n) = M_n$.
Fixemos $n \in \mathbb{N}$.
Vamos chamar $k = \min A_n$ e $m = \max A_n$.
Considerando (S_n) a sequência das somas parciais da série $\sum_n x_{\sigma(n)}$, observemos que:

$$\|S_m - S_{k-1}\| = \left\| \sum_{i \in A_n} x_{\sigma(i)} \right\| = \left\| \sum_{k \in M_n} x_k \right\| \geq \delta$$

Assim, (S_n) não é uma sequência de Cauchy. Daí $\sum_n x_{\sigma(n)}$ não é convergente, donde obtemos que (x_n) não é incondicionalmente somável.

(2) $\Rightarrow$ (1)
Seja $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma permutação do conjunto dos números naturais. Dado $\varepsilon > 0$, sendo (x_n) desordenadamente somável, temos que existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo subconjunto finito $M \subset \mathbb{N}$ com $\min M > n_\varepsilon$ temos $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$.
Como σ é uma bijeção, existem únicos $r_1, \ldots, r_{n_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tais que $\sigma(r_1) = 1, \sigma(r_2) = 2, \ldots, \sigma(r_{n_\varepsilon}) = n_\varepsilon$. Tomemos $m_\varepsilon = \max r_i$, onde $i = 1, \ldots, n_\varepsilon$. Observemos que $\{1, \ldots, n_\varepsilon\} \subset \sigma(\{1, \ldots, m_\varepsilon\})$.
Tomemos $p > q > m_\varepsilon$ onde $p, q \in \mathbb{N}$. Suponhamos sem perda de generalidade que $\sigma(p) > \sigma(q)$.
Afirmamos que $\sigma(q) > n_\varepsilon$. Caso $\sigma(q) \leq n_\varepsilon$ existiria um $1 \leq l \leq n_\varepsilon$ tal que $\sigma(q) = l$; por outro lado $l = \sigma(r_i)$ para algum $i = 1, \ldots, n_\varepsilon$. Então, $\sigma(q) = \sigma(r_i)$ implicaria que $q = r_i$ e assim $q \leq m_\varepsilon$. Contradição.
Sejam $s_1, \ldots, s_{p-q+1} \in \mathbb{N}$ tais que $\sigma(q) = s_1, \sigma(q+1) = s_2, \ldots, \sigma(p) = s_{p+q-1}$. Observemos que:

$$\left\| \sum_{n=q}^{p} x_{\sigma(n)} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p-q+1} x_{s_i} \right\| < \varepsilon.$$

Assim, pelo critério de Cauchy concluímos que (x_n) é incondicionalmente somável.

(2) $\Rightarrow$ (3)
Suponhamos que (x_n) seja uma sequência desordenadamente somável. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo subconjunto finito $M \subset \mathbb{N}$ com $\min M > m_\varepsilon$ temos:

$$\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Seja (k_n) uma sequência arbitrária estritamente crescente de elementos inteiros positivos. Temos que $k_1 \geq 1$; $k_2 > k_1$ obtemos que $k_2 \geq 2$. Generalizando, obtemos que $k_n \geq n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Consideremos p, q inteiros positivos tais que $p > q > m_\varepsilon$. Para $M' = \{k_q, \ldots, k_p\} \subset \mathbb{N}$

observamos que $\min M' = k_q \geq q > m_\varepsilon$. Assim, segue que:

$$\left\| \sum_{n \in M'} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Reescrevendo a desigualdade:

$$\left\| \sum_{n=q}^{p} x_{k_n} \right\| < \varepsilon.$$

Obtemos que a sequência das parciais da série $\sum_n x_{k_n}$ é de Cauchy. Como X é espaço de Banach, segue que a sequência das parciais da série $\sum_n x_{k_n}$ é convergente.

(3) $\Rightarrow$ (4)
Vamos assumir que (x_n) seja subsérie somável. Seja (ε_n) uma sequência tal que $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos os conjuntos:

$$S^+ = \{n \in \mathbb{N}; \varepsilon_n = 1\} \ e \ S^- = \{n \in \mathbb{N}; \varepsilon_n = -1\}$$

Pela definição de (x_n) ser subsérie somável segue que as séries $\sum_{n \in S^+} x_n$ e $\sum_{n \in S^-} x_n$ são convergentes.
Seja dado $\varepsilon > 0$.
Como a série $\sum_{n \in S^+} x_n$ é convergente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n_0$, temos

$$\left\| \sum_{\substack{n \in S^+ \\ n \geq m}} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como a série $\sum_{n \in S^-} x_n$ é convergente, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n_1$, temos

$$\left\| \sum_{\substack{n \in S^- \\ n \geq m}} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomemos $N = \max\{n_0, n_1\}$.
Como as séries $\sum_{n \in S^+} x_n$ e $\sum_{n \in S^-} x_n$ são convergentes, temos que elas atendem o critério de Cauchy. Logo, para $q > p > N$ com q, p inteiros positivos, segue que:

$$\left\| \sum_{\substack{n=p \\ n \in S^+}}^{q} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{\substack{n=p \\ n \in S^-}}^{q} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Consideremos os seguintes conjuntos:

$$M^+ = \{n \in S^+; p \leq n \leq q\} \ e \ M^- = \{n \in S^-; p \leq n \leq q\}$$

Observemos que:

$$\sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n x_n = \sum_{n \in M^+} \varepsilon_n x_n + \sum_{n \in M^-} \varepsilon_n x_n$$

Então:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=p}^{q} \varepsilon_n x_n \right\| &= \left\| \sum_{n \in M^+} \varepsilon_n x_n + \sum_{n \in M^-} \varepsilon_n x_n \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{n \in M^+} \varepsilon_n x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in M^-} \varepsilon_n x_n \right\| \\
&= \left\| \sum_{\substack{n=p \\ n \in S^+}}^{q} x_n \right\| + \left\| \sum_{\substack{n=p \\ n \in S^-}}^{q} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Portanto, a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n x_n$ atende o critério de Cauchy, donde concluímos que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n x_n$ é convergente.

(4) $\Rightarrow$ (2)

Negando o fato de (x_n) ser desordenadamente somável, temos que existe $\delta > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto finito $M \subset \mathbb{N}$ com $\min M > m$ e $\left\| \sum_{k \in M} x_k \right\| \geq \delta$.

Como já visto, na demonstração de (1) $\Rightarrow$ (2), podemos obter uma sequência de subconjuntos finitos $(M_n) \subset \mathbb{N}$ com $\min M_{n+1} > \max M_n$ e $\left\| \sum_{k \in M_n} x_k \right\| \geq \delta$.

Definamos:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in \bigcup_k M_k \\ -1, & \text{caso } n \in \mathbb{N} - \bigcup_k M_k \end{cases}$$

Vamos fixar $k \in \mathbb{N}$. Para todo $m \in M_k$ por construção temos que $\varepsilon_m = 1$. Então:

$$\left\| \sum_{m \in M_k} (1 + \varepsilon_m) x_m \right\| = \left\| \sum_{m \in M_k} 2x_m \right\| \geq \left\| \sum_{m \in M_k} x_m \right\| \geq \delta$$

Logo, $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + \varepsilon_n) x_n$ não converge. Então pelo menos uma das séries abaixo não converge:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon_n x_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$

Assim, (x_n) não é sinal somável. Absurdo. $\square$

O teorema 3.2.2 pode ser encontrado em [4], capítulo 1, páginas 5 e 6.

Teorema 3.2.2. *Seja X um espaço de Banach. Uma sequência em $(x_n) \in X$ é incondicionalmente somável se, e somente se, a sequência $(b_n x_n)$ for somável para todo $(b_n) \in l_\infty$*

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Suponhamos que $(b_n x_n)$ seja somável para todo elemento $b = (b_n) \in l_\infty$. Em particular, tomando $b = (b_n)$, onde $b_n \in \{-1, +1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, temos que $(b_n x_n)$ é somável. Neste caso, $(b_n x_n)$ torna-se uma sequência sinal somável. Assim, pela proposição 3.2.1, concluímos que $(b_n x_n)$ é incondicionalmente somável.

($\Longrightarrow$) Seja (x_n) uma sequência incondicionalmente somável em X. Queremos mostrar que a sequência $(b_n x_n)$ é somável para todo $b = (b_n) \in l_\infty$. Para tal, mostraremos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k$ atende o critério de Cauchy para todo $b \in l_\infty$.(Como X é completo, mostrar que a série atende o critério de Cauchy implica na convergência da série).
Fixemos $n > m$ onde $n, m \in \mathbb{N}$. Tomemos $y = \sum_{k=m}^{n} b_k x_k$. Assim, pelo teorema de Hanh-Banach, temos que:

$$\|y\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(y)|.$$

Ou seja:

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} b_k x_k \right\| = \sup_{f \in B_{X^*}} \left| f\left(\sum_{k=m}^{n} b_k x_k \right) \right|.$$

Seja $f \in B_{X^*}$. Observemos que:

$$f\left(\sum_{k=m}^{n} b_k x_k \right) = \sum_{k=m}^{n} b_k f(x_k).$$

Aplicando o módulo, obtemos:

$$\left| f\left(\sum_{k=m}^{n} b_k x_k \right) \right| = \left| \sum_{k=m}^{n} b_k f(x_k) \right| \leq \sum_{k=m}^{n} |b_k| \ \|f(x_k)| \leq \sum_{k=m}^{n} \|b\|_\infty \ |f(x_k)|.$$

Então:

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} b_k x_k \right\| = \sup_{f \in B_{X^*}} \left| f\left(\sum_{k=m}^{n} b_k x_k \right) \right| \leq \|b\|_\infty \sup_{f \in B_{X^*}} \sum_{k=m}^{n} |f(x_k)| \qquad (*)$$

Vamos mostrar agora que $\sum_{k=m}^{n} |f(x_k)|$ é suficientemente pequeno quando $m \to \infty$.
Por hipótese temos que (x_n) é incondicionalmente convergente. Assim, pela proposição 3.2.1 segue que (x_n) é desordenadamente somável. Por definição, dado $\varepsilon > 0$, existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo subconjunto finito $M \subset \mathbb{N}$ com $\min M > m_\varepsilon$, temos:

$$\left\| \sum_{k \in M} x_k \right\| < \frac{\varepsilon}{4\|b\|_\infty}$$

Seja $f \in B_{X^*}$ e $n > m > m_\varepsilon;\ m, n \in \mathbb{N}$. Consideremos os conjuntos:

$$M^+ = \{m \leq k \leq n;\ Ref(x_k) \geq 0\}$$

$$M^- = \{m \leq k \leq n;\ Ref(x_k) < 0\}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} |Ref(x_k)| &= |Ref(x_m)| + |Ref(x_{m+1})| + \ldots + |Ref(x_n)| \\
&= \left| Ref\left(\sum_{k\in M^+} x_k\right)\right| + \left| Ref\left(\sum_{k\in M^-} x_k\right)\right| \\
&\leq \left| f\left(\sum_{k\in M^+} x_k\right)\right| + \left| f\left(\sum_{k\in M^-} x_k\right)\right| \\
&\leq \|f\| \left\| \left(\sum_{k\in M^+} x_k\right)\right\| + \|f\| \left\| \left(\sum_{k\in M^-} x_k\right)\right\| \\
&\leq \left\| \left(\sum_{k\in M^+} x_k\right)\right\| + \left\| \left(\sum_{k\in M^-} x_k\right)\right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{4\|b\|_\infty} + \frac{\varepsilon}{4\|b\|_\infty} = \frac{\varepsilon}{2\|b\|_\infty}
\end{aligned}$$

Analogamente obtemos:

$$\sum_{k=m}^{n} |Imf(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2\|b\|_\infty}$$

Para $m \leq k \leq n$ sabemos que:

$$f(x_k) = Ref(x_k) + i\ Imf(x_k)$$

Daí:

$$|f(x_k)| = |Ref(x_k) + i\ Imf(x_k)|$$

Então:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} |f(x_k)| &= \sum_{k=m}^{n} |Ref(x_k) + i\ Imf(x_k)| \\
&\leq \sum_{k=m}^{n} |Ref(x_k)| + \sum_{k=m}^{n} |Imf(x_k)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2\|b\|_\infty} + \frac{\varepsilon}{2\|b\|_\infty} = \frac{\varepsilon}{\|b\|_\infty}
\end{aligned}$$

Aplicando o supremo de todos os elementos $f \in B_{X^*}$, usando $(*)$, obtemos:

$$\sup_{f\in B_{X^*}} \sum_{k=m}^{n} |f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{\|b\|_\infty} \quad \Rightarrow$$

$$\|b\|_\infty \sup_{f\in B_{X^*}} \sum_{k=m}^{n} |f(x_k)| \leq \varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} b_k x_k \right\| \leq \varepsilon.$$

Portanto, a série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k$ atende o critério de Cauchy, donde podemos concluir que $(b_n x_n)$ é somável. □

Teorema 3.2.3 (Teorema de Schur). *Em l_1 a convergência fraca e a convergência na norma são equivalentes.*

Demonstração. Consideremos $E = l_1$.
Em qualquer espaço normado temos que a convergência na norma implica na convergência fraca. Vamos mostrar que em E a convergência fraca implica na convergência na norma $\| \; \|_E$.
Sem perda de generalidade, vamos supor que $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em E que converge para $0 \in E$ na topologia fraca. Queremos mostrar que $x^n \xrightarrow{\| \; \|_E} 0$.
Notemos que:

$$x^n \xrightarrow{\| \; \|_E} 0 \Longleftrightarrow \|x^n\|_E \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n| \longrightarrow 0, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty$$

Vamos mostrar então que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n| \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$.
Como $x^n \overset{\sigma(E,E^*)}{\longrightarrow} 0$ seque que:

$$\varphi(x^n) \longrightarrow \varphi(0) = 0, \;\; \forall \varphi \in E^*$$

Como $l_1^* = l_\infty$ temos:

$$\varphi(x^n) \longrightarrow 0, \;\; \forall \varphi \in l_\infty$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} &\varphi(x^n) \longrightarrow 0, \;\; \forall \varphi \in l_\infty \;\; \Longrightarrow \\ (*) \quad &\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k^n \longrightarrow 0, \;\; \forall b = (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l_\infty \end{aligned}$$

Fixemos $N \in \mathbb{N}$.
Como $\varphi(x^n) \longrightarrow \varphi(0) = 0$, para todo $\varphi \in E^*$, podemos considerar em particular, $\varphi_k \equiv e_k = \underbrace{(0, \ldots, 1, 0, \ldots)}_{\text{1 na k-ésima posição}}$.
Como $\varphi_k(x^n) \xrightarrow{n\to 0} 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $x_k^n \xrightarrow{n\to 0} 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$.
Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$|\varphi_k(x^n)| = |x_k^n| < \frac{\varepsilon}{N}, \;\; \forall n \geq n_0, \; 1 \leq k \leq N$$

Assim, para todo $n \geq n_0$ temos:

$$\left| \sum_{k=1}^{N} |x_k^n| \right| = \sum_{k=1}^{N} |x_k^n| < N \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon$$

Logo:

$$(**) \quad \sum_{k=1}^{N} |x_k^n| \longrightarrow 0, \;\; \text{quando } n \longrightarrow \infty$$

Uma base de vizinhanças fraca $*$ de um elemento $\hat{f} = (\hat{f}_k) \in B_{l_\infty}$ é dada por:

$$\bigcup(\hat{f}, \delta, N) = \{f = (f_k) \in B_{l_\infty};\ |f_k - \hat{f}_k| < \delta;\ 1 \leq k \leq N\}$$

para todo $\delta > 0$ e para todo $N \in \mathbb{N}$.
Fixemos $\varepsilon > 0$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos o conjunto:

$$B_m = \bigcap_{n \geq m} \left\{ f \in B_{l_\infty};\ |f(x^n)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

B_m é um conjunto fraco* fechado, para todo $m \in \mathbb{N}$.
Fixado $n \geq m$, vamos mostrar primeiramente que:

$$B_m^n = \left\{ f \in B_{l_\infty};\ |f(x^n)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

é fraco* fechado.
Observemos que $(B_{l_\infty}, \sigma(E^*, E^{**}))$ é um conjunto metrizável.
Seja $\hat{\varphi} \in \overline{B_m^n}$; assim existe $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B_m^n$ tal que:

$$\begin{aligned} \varphi_k &\overset{\sigma(E^*,E)}{\longrightarrow} \hat{\varphi} \implies \\ \varphi_k(x) &\longrightarrow \hat{\varphi}(x), \quad \forall x \in E \implies \\ \varphi_k(x^n) &\longrightarrow \hat{\varphi}(x^n) \end{aligned}$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que $\varphi_k \in B_m^n$, assim:

$$\begin{aligned} |\varphi_k(x^n)| &\leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies \\ \lim_{k\to\infty} |\varphi_k(x^n)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \implies \\ |\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x^n)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \implies \\ |\hat{\varphi}(x^n)| &\leq \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Logo, $\hat{\varphi} \in B_m^n$.
Como B_m^n é fraco* fechado para todo $n \geq m$ segue que $\bigcap_{n\geq m} B_m^n = B_m$ é fraco* fechado.

$B_{l_\infty} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m$. De fato, se $f \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m$ então $f \in B_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Pela definição de B_m segue que $f \in B_{l_\infty}$.
Seja $\hat{f} \in B_{l_\infty}$. Como $x^n \overset{\sigma(E,E^*)}{\longrightarrow} 0$ segue que $\hat{f}(x^n) \longrightarrow 0$.
Por definição, para $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|\hat{f}(x^n)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq n_0$$

Tomando $B_{n_0} = \bigcap_{n\geq n_0} \left\{ f \in B_{l_\infty};\ |f(x^n)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$ obtemos que $\hat{f} \in B_{n_0} \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m$.

Como $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma família de conjuntos fraco* fechado e $B_{l_\infty} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m$, pelo teorema de Baire, temos que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $int\ B_{m_0} \neq \emptyset$.
Logo, existe $\hat{f} \in B_{m_0}, \delta > 0, N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\bigcup(\hat{f}, \delta, N) \subset B_{m_0} \subset B_m, \quad \forall m \geq m_0$$

Por (**) vimos que $\sum_{k=1}^{N} |x_k^n| \longrightarrow 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$.
Para $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{3}$ existe $n_0 \geq m_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(***) \quad \sum_{k=1}^{N} |x_k^m| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall m \geq n_0$$

Fixemos $m \geq n_0$. Sem perda de generalidade, podemos supor $n_0 = m_0$.

Vamos definir $f = (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B_{l_\infty}$ da seguinte maneira:

$$f_k = \begin{cases} \hat{f}_k, & \text{se } 1 \leq k \leq N \\ \text{sinal } (x_k^m), & \text{se } k > N \end{cases}$$

Para $1 \leq k \leq N$, temos:

$$|f_k - \hat{f}_k| = |f_k - f_k| = 0 < \delta$$

Daí, $f \in \bigcup(\hat{f}, \delta, N) \subset B_{m_0}$.
Então:

$$(****) \quad |f(x^m)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Usando (***) e (****), para todo $m \geq m_0$, obtemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^m| = \sum_{k=1}^{N} |x_k^m| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k^m| &= \\
\sum_{k=1}^{N} |x_k^m| + \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k x_k^m \right| &= \\
\sum_{k=1}^{N} |x_k^m| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k^m - \sum_{k=1}^{N} f_k x_k^m \right| &\leq \\
\sum_{k=1}^{N} |x_k^m| + \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k x_k^m \right| + \left| \sum_{k=1}^{N} f_k x_k^m \right| &= \\
\sum_{k=1}^{N} |x_k^m| + |f(x^m)| + \left| \sum_{k=1}^{N} f_k x_k^m \right| &\leq \\
\sum_{k=1}^{N} |x_k^m| + \sum_{k=1}^{N} |f_k||x_k^m| + |f(x^m)| &= \\
\sum_{k=1}^{N} (1 + |f_k|)|x_k^m| + |f(x^m)| &\leq \\
2\,\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon &
\end{aligned}$$

Assim, $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^m| \longrightarrow 0.$ $\square$

3.3 Teorema de Orlicz-Pettis

O teorema 3.3.2 pode ser encontrada em [4], capítulo 1, página 14.

Definição 3.3.1 (Sequência subsérie fracamente somável). *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que $(x^n) \subset X$ é subsérie fracamente somável se para qualquer sequência estritamente crescente de inteiros positivos (k_j) temos que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{n} x_{k_j}$ existe na topologia fraca.*

Teorema 3.3.2 (Teorema de Orlicz-Pettis). *Seja X um espaço de Banach separável. Em X toda sequência subsérie fracamente somável é subsérie somável.*

Demonstração. Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ uma sequência subsérie fracamente somável.

$Y = \overline{[x^n;\ n \in \mathbb{N}]}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{[x^n;\ n \in \mathbb{N}]}^{\|\ \|}$ é separável. De fato, sejam $A = \{x^n;\ n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{a + bi;\ a, b \in \mathbb{Q}\}$. O conjunto $S = \left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i;\ k \in \mathbb{N};\ \lambda_i \in B;\ a_i \in A\right\}$ é enumerável, já que os conjuntos A, B são enumeráveis. Vamos mostrar que S é denso em Y.
Sejam $x \in Y$ e $\varepsilon > 0$. Como $x \in Y$ existe uma sequência $(y_n) \subset [x_n;\ n \in \mathbb{N}]$ tal que $y_n \longrightarrow x$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|y_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0$$

Em particular, $\|y_{n_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Observemos que $y_{n_0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$ onde $\lambda_i \in \mathbb{K}; a_i \in A$.

Fixemos $1 \leq i \leq k$. Como B é denso em $\mathbb{K}$ existe $b_i \in \mathbb{Q}$ tal que:

$$|\lambda_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{2k}$$

Tomando $y = \sum_{i=1}^{k} b_i a_i$ temos que $y \in S$. Além disso:

$$\begin{array}{rcl} \|y - x\| & = & \|y - x + y_{n_0} - x_{n_0}\| \\ & \leq & \|y - y_{n_0}\| + \|y_{n_0} - x\| \\ & = & \left\| \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - b_i) a_i \right\| + \|y_{n_0} - x\| \\ & \leq & \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i - b_i| \|a_i\| + \|y_{n_0} - x\| \\ & = & \sum_{i=1}^{k} |\lambda_i - b_i| + \|y_{n_0} - x\| \\ & < & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{array}$$

Daí $y \in B(x, \varepsilon) \cap S$, donde concluímos que S é denso em Y.

Vamos considerar o seguinte operador:

$$\begin{array}{rccc} v: & X^* & \longrightarrow & l_1 \\ & x^* & \longmapsto & (x^*(x^n))_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

Queremos mostrar que o operador v é compacto. Vamos usar o teorema de Schur.

v está bem definido. De fato:

Como (x^n) é subsérie fracamente somável, então para qualquer sequência estritamente crescente de inteiros positivos (k_j) temos que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n} x_{k_j}$ existe na topologia fraca. Observemos que:

$$\begin{array}{r} \sum_{j=1}^{n} x_{k_j} \overset{\sigma(X,X^*)}{\longrightarrow} x \quad \Longrightarrow \\ x^* \left(\sum_{j=1}^{n} x_{k_j} \right) \longrightarrow x^*(x), \quad \forall x^* \in X^* \quad \Longrightarrow \\ \sum_{j=1}^{n} x^*(x_{k_j}) \longrightarrow x^*(x), \quad \forall x^* \in X^* \quad\quad\;\; \end{array}$$

Fixado $x^* \in X^*$, notemos que $(x^*(x^n)) \subset \mathbb{K}$ é subsérie somável. Como $\mathbb{K}$ é um espaço de Banach, segue que $(x^*(x^n))$ é incondicionalmente somável. Daí, $x^*(x^n)$ é absolutamente convergente. Portanto, $(x^*(x^n)) \in l_1, \quad \forall x^* \in X^*$.

v é linear. De fato, sejam $x^*, y^* \in X^*$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

$$\begin{array}{rcl} v(x^* + \lambda y^*) & = & (x^* + \lambda y^*)(x^n) \\ & = & x^*(x^n) + \lambda y^*(x^n) \\ & = & v(x^*) + \lambda v(y^*) \end{array}$$

v é um operador limitado. De fato, vamos mostrar que $\Gamma = \{(x^*, v(x^*);\ x^* \in X^*\}$ é fechado. Seja $(x^*, y^*) \in \overline{\Gamma}$. Logo existe $(x_k^*, v(x_k^*)) \subset \Gamma$ tal que $(x_k^*, v(x_k^*)) \longrightarrow (x^*, y^*)$.
Observemos que $x_k^* \longrightarrow x^*$ e $v(x_k^*) \longrightarrow y^*$, quando $k \longrightarrow \infty$.
Para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que $v(x_k^*) = (x_k^*(x^j))_{j\in\mathbb{N}}$. Logo:

$$\begin{aligned} y^* &= \lim_{k\to\infty} v(x_k^*) \\ &= \lim_{k\to\infty} (x_k^*(x^j))_{j\in\mathbb{N}} \\ &= \left(\lim_{k\to\infty} x_k^*(x^j)\right)_{j\in\mathbb{N}} \\ &= (x^*(x^j))_{j\in\mathbb{N}} \\ &= v(x^*) \end{aligned}$$

Assim, $(x^*, y^*) = (x^*, v(x^*)) \in \Gamma$. Pelo teorema do gráfico fechado 2.2.8, como $v : X^* \longrightarrow l_1$ é linear e Γ é fechado segue que v é um operador limitado.

v é um operador compacto. De fato, seja $(x_m^*) \in B_{X^*}$ uma sequência limitada. Como X é separável, pelo teorema 2.5.10 temos que B_{X^*} é metrizável na topologia fraca estrela. Pelo teorema 2.5.9, (x_m^*) admite uma subsequência fraca estrela convergente. Digamos que $x_{m_k}^* \overset{\sigma(X^*,X)}{\longrightarrow} x_0^*$ $(*)$.
Queremos mostrar que $v(x_0^*)$ é o limite na norma de alguma subsequência $v(x_{m_k}^*) \in l_1$.
Pelo teorema de Schur, basta garantirmos que $v(x_0^*)$ é o limite na topologia fraca de alguma subsequência $v(x_{m_k}^*) \in l_1$.
Lembremos que pela proposição 2.5.3, garantir que $v(x_{m_k}^*) \overset{\sigma(l_1,l_\infty)}{\longrightarrow} v(x_0^*)$ é equivalente a mostrarmos que $f(vx_{m_k}^*) \longrightarrow f(vx_0^*)$ para todo $f \in l_\infty$.

O conjunto das funções simples forma um subconjunto denso de l_∞ (Podemos encontrar esse resultado em [8], capítulo 7, página 81). Como as funções simples são escritas como combinações lineares finitas de funções características, por linearidade, podemos restringir o conjunto dos elementos de l_∞ ao conjunto das funções características $f = 1_M$, onde $M \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto dos números naturais.
Vamos considerar D como o conjunto das funções características de l_∞. Sejam $g =$

$(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D$ e $J = \{j \in \mathbb{N};\ g_j = 1\}$. Observemos que:

$$\begin{aligned}
g(vx_0^*) &= \sum_{n=1}^{\infty} g_n(vx_0^*)_n \\
&= \sum_{j\in J} g_j(vx_0^*)_j \\
&\overset{g_j=1}{=} \sum_{j\in J}(vx_0^*)_j \\
&\overset{def}{=} \sum_{j\in J} x_0^*(x^j) \\
&\overset{(**)}{=} x_0^*\left(\sum_{j\in J} x^j\right) \\
&\overset{(***)}{=} \lim_{k\to\infty} x_{m_k}^*\left(\sum_{j\in J} x^j\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{j\in J} x_{m_k}^*(x^j) \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{j\in J} (vx_{m_k}^*)_j \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g_i(vx_{m_k}^*)_i \\
&= \lim_{k\to\infty} g(vx_{m_k}^*)
\end{aligned}$$

$(***)\ \ x_{m_k}^* \overset{\sigma(X^*,X)}{\longrightarrow} x_0^* \Longrightarrow x_{m_k}^*(z) \longrightarrow x_0^*(z), \ \ \forall z \in X.$

$(**)$ Como (x^n) é subsérie fracamente somável, segue que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} x^{j^n} &\overset{\sigma(l_1 l_\infty)}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} x^{j^n} \quad \Longrightarrow \\
\varphi\left(\sum_{n=1}^{N} x^{j^n}\right) \longrightarrow \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{j^n}\right),& \quad \forall \varphi \in X^* \quad \Longrightarrow \\
\sum_{n=1}^{N} \varphi(x^{j^n}) \longrightarrow \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{j^n}\right),& \quad \forall \varphi \in X^*
\end{aligned}$$

Como as funções simples são compostas por combinações lineares finitas de funções características e formam um conjunto denso em l_∞, podemos concluir que $g(vx_{m_k}^*) \longrightarrow g(vx_0^*)$ para todo $g \in l_\infty$. Assim, $v(x_{m_k}^*) \overset{\sigma(l_1,l_\infty)}{\longrightarrow} v(x_0^*)$. Pelo teorema de Schur segue que $v(x_{m_k}^*) \overset{\|\ \|_{l_1}}{\longrightarrow} v(x_0^*)$. Logo, v é um operador compacto.

Como B_{X^*} é um conjunto fraco estrela compacto e v é um operador contínuo, segue que $v(B_{X^*}) \subset l_1$ é compacto, relativamente à norma de l_1. Pelo lema 2.3.3, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n>n_\varepsilon} |x^*(x^n)| \leq \varepsilon, \ \ \forall x^* \in B_{X^*}$$

Daí:

$$\sup_{x^* \in B_{X_*}} \sum_{n > n_\varepsilon} |x^*(x^n)| \leq \varepsilon \quad (1)$$

Para qualquer subconjunto finito $M \subset \mathbb{N}$ com $\min M > n_\varepsilon$ podemos reescrever (1) como:

$$\sup_{x^* \in B_{X_*}} \sum_{n \in M} |x^*(x^n)| \leq \varepsilon$$

Para cada $n \in M$, pelo corolário 2.2.2 temos:

$$\|x^n\| = \sup_{x^* \in B_{X_*}} |x^*(x^n)|$$

Daí:

$$\|x^n\| \leq \sup_{x^* \in B_{X_*}} \sum_{n \in M} |x^*(x^n)|$$

Assim:

$$\left\| \sum_{n \in M} x^n \right\| \leq \sum_{n \in M} \|x^n\| \leq \sup_{x^* \in B_{X_*}} \sum_{n \in M} |x^*(x^n)| \leq \varepsilon$$

Concluímos que (x^n) é desordenadamente somável em X. Como X é Banach segue que (x^n) é subsérie somável. $\square$

3.4 Funções de Rademacher, desigualdade de Khinchin e teorema de Orlicz

Apresentamos nesta seção a definição das chamadas funções de Rademacher, que compõem um conjunto de funções cujo conjunto imagem é composto apenas pelos valores -1 e 1. Estas funções apresentam algumas propriedades interessantes que auxiliam na demonstração da desigualdade de Khinchin e no teorema de Orlicz.

Um dos teoremas centrais do capítulo é a desigualdade de Khinchin. Basicamente este resultado afirma que as normas de L_p são equivalentes sobre o espaço gerado pelas funções de Rademacher. As constantes A_p, B_p obtidas no teorema dependem do corpo sobre o qual se encontra o espaço. A demonstração foi feita sobre o corpo dos números reais. Para o corpo dos números complexos, poderíamos considerar a parte real e a parte imaginária dos escalares. A desigualdade de Khinchin é fundamental para a prova do teorema central deste trabalho.

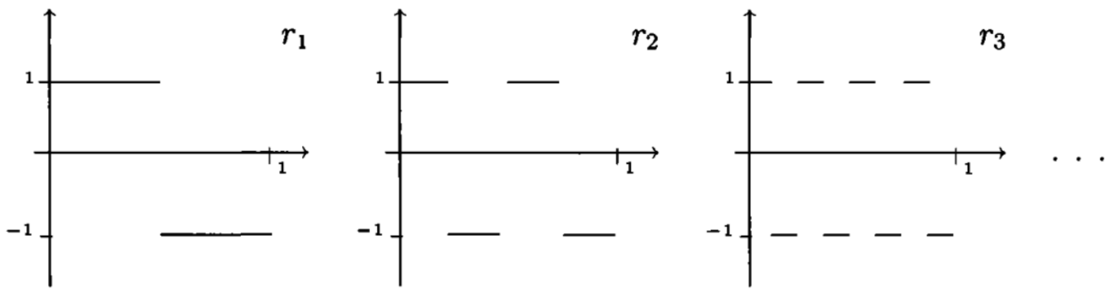
O último teorema desta seção, o Teorema de Orlicz, afirma que se uma sequência é incondicionalmente somável em $L_1[0,1]$ então esta sequência é absolutamente somável em $L_2[0,1]$.

Vamos definir inicialmente as funções de Rademacher:

Definição 3.4.1 (**Funções de Rademacher**). *Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos as funções de Rademacher como:*

$$\begin{array}{rccc} r_n : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & r_n(t) = sinal(\sin 2^n \pi t) \end{array}$$

Abaixo apresentamos os gráficos das funções de Rademacher r_1, r_2, r_3:



Vamos reescrever as funções de Rademacher de uma outra forma:

- Para $n = 1$:

$$\begin{array}{rccc} r_1 : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & r_n(t) = sinal(\sin 2\pi t) \end{array}$$

Sabemos que a função $y = \sin t$ é positiva para $0 < t < \pi$ e negativa para $\pi < t < 2\pi$. Analisando a função $r_1(t) = sinal(\sin 2\pi t)$ observamos que:

- A função r_1 é positiva para os seguintes valores de t:

$$\begin{aligned} 0 < 2\pi t < \pi \quad &\Longrightarrow \\ 0 < 2t < 1 \quad &\Longrightarrow \\ 0 < t < \frac{1}{2} \quad & \end{aligned}$$

- A função r_1 é negativa para os seguintes valores de t:

$$\begin{aligned} \pi < 2\pi t < 2\pi \quad &\Longrightarrow \\ 1 < 2t < 2 \quad &\Longrightarrow \\ \frac{1}{2} < t < 1 \quad & \end{aligned}$$

Desta maneira, podemos reescrever r_1 como:

$$r_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < t < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{2} < t < 1 \\ 0, & \text{se } t = 0, t = \frac{1}{2}, t = 1 \end{cases}$$

- Para $n = 2$:

$$\begin{array}{rccc} r_2: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & r_n(t) = sinal(\sin 4\pi t) \end{array}$$

Analisando a função $r_2(t) = sinal(\sin 4\pi t)$ observamos que:

- A função r_2 é positiva para os seguintes valores de t:

$$\begin{array}{rr} 0 < 4\pi t < \pi \quad , \quad 2\pi < 4\pi t < 3\pi & \Longrightarrow \\ 0 < t < \dfrac{1}{4} \quad , \quad \dfrac{1}{2} < t < \dfrac{3}{4} & \Longrightarrow \end{array}$$

- A função r_2 é negativa para os seguintes valores de t:

$$\begin{array}{rr} \pi < 4\pi t < 2\pi \quad , \quad 3\pi < 4\pi t < 4\pi & \Longrightarrow \\ \dfrac{1}{4} < t < \dfrac{1}{2} \quad , \quad \dfrac{3}{4} < t < 1 & \Longrightarrow \end{array}$$

Desta maneira, podemos reescrever r_2 como:

$$r_2(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < t < \frac{1}{4} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{se } \frac{1}{2} < t < \frac{3}{4} \\ -1, & \text{se } \frac{3}{4} < t < 1 \\ 0, & \text{se } t = 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1 \end{cases}$$

Generalizando obtemos:

$$r_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < t < \frac{1}{2^n} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{2^2} < t < \frac{2}{2^2} \\ 1, & \text{se } \frac{2}{2^2} < t < \frac{3}{2^n} \\ \quad\vdots & \qquad\quad \vdots \\ -1, & \text{se } \frac{2^{n-1}}{2^n} < t < \frac{2^n}{2^n} \\ 0, & \text{se } t = \frac{k}{2^2};\ 0 \leq k \leq 2^n \end{cases}$$

Abaixo apresentaremos duas propriedades das funções de Rademacher, que podem ser encontradas em [4], capítulo 1, página 10.

1) Sejam $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ números naturais e $p_1, \ldots, p_k \geq 0$ inteiros positivos. Então:

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t)\dots r_{n_k}^{p_k}(t)dt = \begin{cases} 1, & \text{se } \textit{cada } p_j \text{ é } \textit{par} \\ 0, & \text{caso } \textit{contrário} \end{cases}$$

2) Sejam $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de Rademacher em $L_2[0,1]$ e $a=(a_n)\in l_2$. Então:

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

Demonstração. Como $L_2[0,1]$ é um espaço de Hilbert temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{L} a_n r_n(t)\right|^2 dt &= \left\langle \sum_{n=1}^{L} a_n r_n(t), \sum_{m=1}^{L} a_m r_m(t) \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{L} a_n \sum_{m=1}^{L} \overline{a_m} \langle r_n(t), r_m(t)\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{L} a_n \sum_{n=1}^{L} \overline{a_m} \int_0^1 r_n(t) r_m(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{L} |a_n|^2 \end{aligned}$$

Por fim:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 &= \lim_{L\to\infty} \sum_{n=1}^{L} |a_n|^2 \\ &= \lim_{L\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^{L} a_n r_n(t)\right\|^2 \\ &\overset{(*)}{=} \left\|\lim_{L\to\infty} \sum_{n=1}^{L} a_n r_n(t)\right\|^2 \\ &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right\|^2 \end{aligned}$$

$(*)$ A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$ converge. De fato, mostraremos que a série atende ao critério de Cauchy. Como $L_2[0,1]$ é completo, isto nos diz que a série é convergente. Sejam $L>N$. Então:

$$\left\|\sum_{n=1}^{L} a_n r_n(t) - \sum_{n=1}^{N} a_n r_n(t)\right\|^2 = \left\|\sum_{n=N+1}^{L} a_n r_n(t)\right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{L} a_n^2$$

Daí:

$$\left\|\sum_{n=1}^{L} a_n r_n(t) - \sum_{n=1}^{N} a_n r_n(t)\right\| \le \left(\sum_{n=N+1}^{L} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Como $(a_n)\in l_2$, segue o resultado. $\square$

O teorema 3.4.2, pode ser encontrado em [4], capítulo 1, páginas 10,11 e 12.

Teorema 3.4.2 (**Desigualdade de Khinchin**). *Para cada $0 < p < \infty$, existem constantes A_p, B_p tais que independente da sequência de escalares $(a_n) \in l_2$ temos:*

$$A_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em dois casos:

Caso 1: $p = 4$

Consideremos $(a_1, \ldots, a_m)$ uma sequência finita de escalares reais. Observemos que:

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t) \right|^4 dt =$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{m} a_i r_i(t) \right) \left(\sum_{j=1}^{m} a_j r_j(t) \right) \left(\sum_{k=1}^{m} a_k r_k(t) \right) \left(\sum_{l=1}^{m} a_l r_l(t) \right) dt \stackrel{(*)}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} a_i a_j a_k a_l \int_0^1 r_i(t) r_j(t) r_k(t) r_l(t) dt$$

• Se $i = j$ e $k = l$ temos que $\int_0^1 r_i^2(t) r_j^2(t) dt = 1$. Então, por $(*)$ obtemos a expressão:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_i^2 a_k^2$$

• Se $i = k$ e $j = l$ temos que $\int_0^1 r_i^2(t) r_j^2(t) dt = 1$. Então, por $(*)$ obtemos a expressão:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i^2 a_j^2$$

• Se $i = l$ e $j = l$ temos que $\int_0^1 r_i^2(t) r_j^2(t) dt = 1$. Então, por $(*)$ obtemos a expressão:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i^2 a_j^2$$

Os casos $i = j$, $k = l$ com $i = k$ e $i = k$, $j = l$ com $i = j$ já foram contados anteriormente. Logo:

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^4 dt =$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i^2 a_j^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i^2 a_j^2 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i^2 a_j^2 - \sum_{i=1}^{m} a_i^4 - \sum_{j=1}^{m} a_j^4 =$$

$$3 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_i^2 a_j^2 - 2 \sum_{i=1}^{m} a_i^4$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^m a_n r_n(t)\right|^4 dt &\leq 3\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i^2 a_j^2 \\ &= 3\sum_{i=1}^m a_i^2 \sum_{j=1}^m a_j^2 \\ &= 3\left(\sum_{n=1}^m a_n^2\right)^2\end{aligned}$$

Além disso:

$$\left\|\sum_{n=1}^m a_n r_n(t)\right\|_2^2 = \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^m a_n r_n(t)\right|^2 dt = \sum_{n=1}^m |a_n|^2$$

Então:

$$\left(\sum_{n=1}^m |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\sum_{n=1}^m a_n r_n\right\|_2 \leq \left\|\sum_{n=1}^m a_n r_n\right\|_4 = \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^m a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \qquad (1)$$

Notemos que:

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^m a_n r_n(t)\right|^4 dt \leq 3\left(\sum_{n=1}^m a_n^2\right)^2$$

Daí:

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^m a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \leq 3^{\frac{1}{4}}\left(\sum_{n=1}^m a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

De (1) e (2) obtemos:

$$\left(\sum_{n=1}^m a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^m a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \leq 3^{\frac{1}{4}}\left(\sum_{n=1}^m a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$ converge em $L_4[0,1]$. De fato, vamos mostrar que essa série atende ao critério de Cauchy. Sejam $L > N$ inteiros positivos. Usando que $(a_n \in l_2$, temos:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^L a_n r_n - \sum_{n=1}^N a_n r_n\right\|_4 &= \left\|\sum_{n=N+1}^L a_n r_n\right\|_4 \\ &= \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=N+1}^L a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq 3^{\frac{1}{4}}\left(\sum_{n=N+1}^L a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

Por fim, usando a continuidade da norma e da aplicação $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ teremos que:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \qquad (3)
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} &= \left(\int_0^1 \left|\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \lim_{m\to\infty} \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq \lim_{m\to\infty} 3^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 3^{\frac{1}{4}} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 3^{\frac{1}{4}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Usando (3) e (4), concluímos a demonstração da desigualdade para $p = 4$.

Caso 2: Caso com p qualquer.

Iniciaremos atribuindo valores inteiros para p. Consideremos $a_1, \ldots, a_m$ uma quantidade finita de escalares reais.

Lembremos que $e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Para $p \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{R}$ observemos que:

$$|y|^p \leq p! + |y|^p = p!\left(1 + \frac{|y|^p}{p!}\right) \leq p! e^{|y|} \qquad (**)$$

Vamos considerar $f(t) = \sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)$. Vamos supor ainda que $f \in S_{L_2}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^p dt &= \int_0^1 |f(t)|^p dt \\
&\overset{(**)}{\leq} \int_0^1 p! e^{|f(t)|} dt \\
&= p! \int_0^1 e^{|f(t)|} dt \\
&\leq p! \int_0^1 (e^{f(t)} + e^{-f(t)}) dt
\end{aligned}$$

Como $f \in S_{L_2}$, segue que:

$$1 = \|f\|_2 = \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Daí:

$$\left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \qquad (***)$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{f(t)} dt &= \int_0^1 e^{\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)} dt \\
&= \int_0^1 e^{a_1 r_1(t) + \ldots + a_m r_m(t)} dt \\
&= \int_0^1 e^{a_1 r_1(t)} e^{a_2 r_2(t)} \ldots e^{a_m r_m(t)} dt \\
&= \int_0^1 \prod_{n=1}^{m} e^{a_n r_n(t)} dt \\
&= \prod_{n=1}^{m} \int_0^1 e^{a_n r_n(t)} dt \\
&= \prod_{n=1}^{m} \int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_n^i r_n^i(t)}{i!} dt \\
&= \prod_{n=1}^{m} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_n^i}{i!} \int_0^1 r_n^i(t) dt \\
&= \prod_{n=1}^{m} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_n^{2j}}{(2j)!} \\
&= \prod_{n=1}^{m} \cosh a_n
\end{aligned}$$

Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ então:

$$e^{\frac{a_n^2}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{a_n^2}{2})^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_n^{2j}}{2^j j!}$$

Para todo $j = 0, 1 \ldots$ temos que:

$$\begin{aligned} (2^j j!) \leq (2j)! &\implies \\ \frac{1}{(2j)!} \leq \frac{1}{(2^j j!)} &\implies \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_n^{2j}}{(2j)!} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_n^{2j}}{2^j j!} &\implies \\ \cosh(a_n) \leq e^{\frac{a_n^2}{2}} & \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{m} \cosh(a_n) &\leq \prod_{n=1}^{m} e^{\frac{a_n^2}{2}} \\ &= e^{\frac{a_1^2}{2}} \ldots e^{\frac{a_m^2}{2}} \\ &= e^{\frac{a_1^2}{2} + \ldots + \frac{a_m^2}{2}} \\ &= e^{\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n^2}{2}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} a_n^2} \\ &\overset{(***)}{=} e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Simetricamente obtemos:

$$\int_0^1 e^{-f(t)} dt \leq e^{\frac{1}{2}}$$

Usando $(**)$, para $p \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{R}$ vale a desigualdade:

$$|y|^p \leq p! e^{|y|}$$

Daí, para todo $t \in [0, 1]$ temos:

$$|f(t)|^p \leq p! e^{|f(t)|}$$

Então:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(t)|^p dt \leq p! \int_0^1 e^{|f(t)|} dt &\leq \\ p! \int_0^1 (e^{f(t)} + e^{-f(t)}) dt \leq 2p! e^{\frac{1}{2}} &\implies \\ \int_0^1 |f(t)|^p dt \leq 2p! e^{\frac{1}{2}} & \end{aligned}$$

Agora, dividiremos em dois subcasos:

a) Sejam $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ escalares reais arbitrários e $2 \leq p < \infty$. Então:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\|\sum_{n=1}^{m} |a_n r_n(t)\right\|_2 \\
&\leq \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right\|_p \qquad (5)
\end{aligned}$$

Tomemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $p \leq k$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right\|_p &\leq \left\|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right\|_k \\
&= \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^k dt\right)^{\frac{1}{k}} \\
&= \left(\int_0^1 |f(t)|^k dt\right)^{\frac{1}{k}} \\
&\leq (2k!e^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{k}} \\
&\overset{(***)}{=} (2k!e^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (2k!e^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (6)
\end{aligned}$$

Analogamente ao argumento utilizado no Caso 1, podemos mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$ converge em $L_p[0,1]$. Usando (5) e (6) e fazendo $m \longrightarrow \infty$ obtemos:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq (2k!e^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

b) Consideraremos o caso $0 < p < 2$. Para $0 < p < 2$ definimos $0 < \theta < 1$, onde $\theta = \frac{2}{4-p}$. Observemos que:

$4\theta - p\theta = 2 \Longleftrightarrow p\theta - 4\theta = -2 \Longleftrightarrow p\theta - 4\theta + 4 = 2 \Longleftrightarrow p\theta + 4(1-\theta) = 2$

Considerando $k, l \in \mathbb{R}^*$, onde $\frac{1}{k} = \theta$ e $\frac{1}{l} = (1-\theta)$ obtemos $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$. Utilizando a desigualdade de Holder (D.H) temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(t)|^2 dt &= \int_0^1 |f(t)|^{p\theta+4(1-\theta)} dt \\
&= \int_0^1 |f(t)|^{p\theta} |f(t)|^{4(1-\theta)} dt \\
&\overset{(D.H)}{\leq} \left(\int_0^1 (|f(t)|^{p\theta})^k dt\right)^{\frac{1}{k}} \left(\int_0^1 (|f(t)|^{4(1-\theta)})^l dt\right)^{\frac{1}{l}} \\
&= \left(\int_0^1 (|f(t)|^{p\theta})^{\frac{1}{\theta}} dt\right)^{\theta} \left(\int_0^1 (|f(t)|^{4(1-\theta)})^{\frac{1}{(1-\theta)}} dt\right)^{1-\theta} \\
&= \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\theta} \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt\right)^{1-\theta}
\end{aligned}$$

Pelo caso 1, sabemos que:

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \leq B_4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} = B_4 \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Temos que:

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\theta} \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt\right)^{1-\theta}$$

Elevando a expressão anterior pelo termo $\frac{1}{4(1-\theta)}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{4(1-\theta)}} &\leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{\theta}{4(1-\theta)}} \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq B_4 \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{\theta}{4(1-\theta)}} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Daí:

$$B_4^{-1} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1-2(1-\theta)}{4(1-\theta)}} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{\theta}{4(1-\theta)}} \tag{7}$$

Usando que $4(1-\theta) = 2 - p\theta$ e $\theta = \frac{2}{4-p}$ notamos que:

$$\begin{aligned} \frac{1-2(1-\theta)}{4(1-\theta)} = \frac{1-2+2\theta}{2-p\theta} &= \\ \frac{-1+2\left(\frac{2}{4-p}\right)}{2-p\left(\frac{2}{4-p}\right)} = \frac{-1+2\left(\frac{2}{4-p}\right)}{2-\left(\frac{2p}{4-p}\right)} &= \\ \frac{\frac{-4+p+4}{4-p}}{\frac{8-2p-2p}{4-p}} = \frac{\frac{p}{4-p}}{\frac{8-4p}{4-p}} = \frac{p}{4(2-p)} & \end{aligned} \tag{8}$$

Além disso:

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{4(1-\theta)} &= \frac{\frac{2}{(4-p)}}{4\left(1-\frac{2}{(4-p)}\right)} = \frac{\frac{2}{(4-p)}}{4\left(\frac{4-p-2}{4-p}\right)} \\ &= \frac{\frac{2}{(4-p)}}{4\left(\frac{2-p}{4-p}\right)} = \frac{\frac{2}{(4-p)}}{\frac{8-4p}{(4-p)}} \\ &= \frac{2}{(4-p)}\frac{(4-p)}{(8-4p)} = \frac{1}{2(2-p)} \end{aligned} \tag{9}$$

Usando a desigualdade (7) e as igualdades (8) e (9), obtemos:

$$\begin{aligned} B_4^{-1} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{p}{4(2-p)}} &\leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{2(2-p)}} \Longrightarrow \\ (B_4^{-1})^{\frac{2(2-p)}{p}} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \Longrightarrow \\ B_4^{\frac{2p-4}{p}} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \Longrightarrow \\ B_4^{\frac{2p-4}{p}} \|f\|_2 &\leq \|f\|_p \end{aligned}$$

Por outro lado sabemos que:

$$\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Assim:

$$B_4^{\frac{2p-4}{p}} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ou seja:

$$B_4^{\frac{2p-4}{p}} \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{m} a_n r_n(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{m} a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\square$

O teorema 3.4.3, pode ser encontrado em [4], capítulo 1, página 13.

Teorema 3.4.3 (Teorema de Orlicz). *Se (f_n) é uma sequência incondicionalmente somável em $L_1[0,1]$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1^2 < \infty$.*

Demonstração. Consideraremos o caso em que (f_n) é uma sequência de funções reais. Como (f_n) é uma sequência incondicionalmente somável em $L_1[0,1]$, segue da demonstração do teorema 3.3.2 que o operador:

$$\begin{array}{rrcc} (*) \quad v: & (L_1[0,1])^* & \longrightarrow & l_1 \\ & g & \longmapsto & (g(f_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

é compacto.

Sendo $(L_1[0,1])^* = L_\infty[0,1]$ podemos reescrever $(*)$ como:

$$\begin{array}{rccc} v: & L_\infty[0,1] & \longrightarrow & l_1 \\ & g & \longmapsto & (g(f_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

Pelo teorema 3.2.1 temos também que (f_n) é sinal somável. Consideremos $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\epsilon_n \in \{+1,-1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e fixemos $g \in B_{L_\infty}$. Observemos que:

$$\begin{array}{rcl} \left|g\left(\sum_{n=1}^{k} \epsilon_n f_n\right)\right| & = & \left|\sum_{n=1}^{k} \epsilon_n g(f_n)\right| \leq \\ \leq \sum_{n=1}^{k} |\epsilon_n||g(f_n)| & = & \sum_{n=1}^{k} |g(f_n)| \end{array}$$

Pelo teorema de Hahn-Banach temos que:

$$\left\|\sum_{n=1}^{k} \epsilon_n f_n\right\| = \sup_{g\in B_{L_\infty}} \left|g\left(\sum_{n=1}^{k} \epsilon_n f_n\right)\right|$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{k}\epsilon_n f_n\right\| &= \sup_{g\in B_{L_\infty}}\left|g\left(\sum_{n=1}^{k}\epsilon_n f_n\right)\right| \leq \\ \sup_{g\in B_{L_\infty}}\sum_{n=1}^{k}|g(f_n)| &\leq \sup_{g\in B_{L_\infty}}\sum_{n=1}^{\infty}|g(f_n)| = \|v\|\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n f_n\right\| &= \sup_{g\in B_{L_\infty}}\left|g\left(\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n f_n\right)\right| = \\ \sup_{g\in B_{L_\infty}}\left|g\left(\lim_{k\longrightarrow\infty}\sum_{n=1}^{k}\epsilon_n f_n\right)\right| &= \lim_{k\longrightarrow\infty}\sup_{g\in B_{L_\infty}}\left|g\left(\sum_{n=1}^{k}\epsilon_n f_n\right)\right| \\ &\leq \|v\| \qquad (1)\end{aligned}$$

$\left(\sum_{n=1}^{m}\|f_n\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{m}f_n^2(s)\right)^{\frac{1}{2}}ds$. De fato, utilizando as desigualdade 2.1.2 (desigualdade de Holder (D.H)) e a desigualdade 2.1.4 (desigualdade de Minkowiski generalizado (D.M.G)) obtemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m}\|f_n\|_1^2 &= \sum_{n=1}^{m}\left(\underbrace{\int_0^1|f_n(t)|dt}_{\alpha_n}\right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{m}\alpha_n^2 \\ &= \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{m}r_n(s)\alpha_n\right)\left(\sum_{k=1}^{m}r_k(s)\alpha_k\right)ds \\ &= \int_0^1\left(\sum_{n=1}^{m}r_n(s)\int_0^1|f_n(t)|dt\right)\left(\sum_{k=1}^{m}r_k(s)\int_0^1|f_k(t)|dt\right)ds \\ &= \int_0^1\left(\int_0^1\sum_{n=1}^{m}r_n(s)|f_n(t)|dt\right)\left(\int_0^1\sum_{k=1}^{m}r_k(s)|f_k(t)|dt\right)ds \\ &\overset{(D.H)}{\leq} \left[\int_0^1\left(\int_0^1\sum_{n=1}^{m}r_n(s)|f_n(t)|dt\right)^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^1\left(\int_0^1\sum_{k=1}^{m}r_k(s)|f_k(t)|dt\right)^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(D.M.G)}{\leq} \left[\int_0^1\left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{m}r_n(s)|f_n(t)|\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}dt\right]\left[\int_0^1\left(\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{m}r_k(s)|f_k(t)|\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}dt\right]\end{aligned}$$

Estudaremos a expressão:

$$\int_0^1\left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{m}r_n(s)|f_n(t)|\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}dt$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^1\left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^m r_n(s)|f_n(t)|\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} dt &= \int_0^1\left[\int_0^1\left(\sum_{n=1}^m r_n(s)|f_n(t)|\right)\left(\sum_{k=1}^m r_k(s)|f_k(t)|\right) ds\right]^{\frac{1}{2}} dt\\ &= \int_0^1\left(\sum_{n=1}^m |f_n(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^m \|f_n\|_1^2 &\leq \left[\int_0^1\left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^m r_n(s)|f_n(t)|\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} dt\right]\left[\int_0^1\left(\int_0^1\left|\sum_{k=1}^m r_k(s)|f_k(t)|\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} dt\right]\\ &= \left[\int_0^1\left(\sum_{n=1}^m |f_n(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt\right]\left[\int_0^1\left(\sum_{k=1}^m |f_k(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt\right]\\ &= \left[\int_0^1\left(\sum_{n=1}^m |f_n(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt\right]^2\end{aligned}$$

Portanto:

$$\left(\sum_{n=1}^m \|f_n\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1\left(\sum_{n=1}^m |f_n(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1\left(\sum_{n=1}^m f_n^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} dt \qquad (2)$$

Pela desigualdade de Khinchin temos que:

$$\sum_{n=1}^m |f_n|^2 \leq A^{-1}\int_0^1\left|\sum_{n=1}^m f_n(s)r_n(t)\right| dt$$

Daí:

$$\int_0^1\left(\sum_{n=1}^m |f_n(s)|^2\right)^{\frac{1}{2}} ds \leq A^{-1}\int_0^1\left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^m f_n(s)r_n(t)\right| dt\right) ds \qquad (3)$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\left|\sum_{n=1}^m f_n(s)r_n(t)\right| dtds &= \int_0^1\int_0^1\left|\sum_{n=1}^m f_n(s)r_n(t)\right| dsdt\\ &= \int_0^1\left\|\sum_{n=1}^m f_n r_n(t)\right\|_1 dt \qquad (4)\end{aligned}$$

Usando (1) temos que:

$$\left\|\sum_{n=1}^m \epsilon_n f_n\right\|_1 \leq \|v\|$$

Como $r_n(t) = \pm 1$ para todo $t \in [0,1]$ fora do conjunto $A = \left\{\frac{k}{2^n};\ 0 \leq k \leq 2^n;\ n \in \mathbb{N}\right\}$, segue que:

$$\left\|\sum_{n=1}^m r_n(t)f_n\right\|_1 \leq \|v\|, \quad \forall t \in [0,1] - A$$

Daí:

$$\int_0^1\left\|\sum_{n=1}^m r_n(t)f_n\right\| dt \leq \int_0^1 \|v\| dt = \|v\|$$

Portanto:

$$A^{-1}\int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^{m} r_n(t) f_n \right\| dt \leq A^{-1}\|v\|$$

Usando (2), (3) e (4) segue que:

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \|f_n\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq A^{-1}\int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^{m} f_n r_n(t) \right\| dt$$

Assim:

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \|f_n\|_1^2 \right) \leq A^{-1}\|v\| < \infty$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ obtemos que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1^2 \right) < \infty$$

$\square$

4) A desigualdade de Grothendieck

Neste capítulo apresentamos o principal resultado da dissertação, encontrado no artigo [5], hoje denominado de desigualdade de Grothendieck. Abordaremos a desigualdade de Grothendieck, o teorema de Grothendieck e uma consequência, que será utilizada no capítulo 5.

Várias novas provas foram feitas para a desigualdade de Grothendieck. Krivine conseguiu melhorar a prova original e o limite para a constante Grothendieck K_G (o que pode ser visto em [6]), que permaneceu a melhor até muito recentemente.

Nas últimas seções abordamos o teorema de Grothendieck, que nos diz que todo operador linear e contínuo de l_1 em l_2 é absolutamente somante. Por fim, estudamos uma consequência deste teorema que é utilizada nas outras versões do teorema de Grothendieck. Versões não-lineares do teorema de Grothendieck podem ser encontradas em]1].

4.1 A desigualdade de Grothendieck

A desigualdade de Grothendieck nos diz que existe uma constante universal que independe da escolha do espaço de Hilbert considerado, independe da escolha de vetores tomados na bola unitário do espaço de Hilbert considerado, a qual limita uma certa quantidade finita que depende da escolha dos vetores tomados.

Teorema 4.1.1 (Desigualdade de Grothendieck). *Sejam H um espaço de Hilbert, $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$ de escalares e $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ elementos de B_H. Então existe uma constante K_G tal que:*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leq K_G \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \right| ;\ |s_i| \leq 1;\ |t_j| \leq 1;\ 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

Demonstração. Vamos considerar inicialmente espaços de Hilbert sobre o corpo dos números reais e matrizes com entradas reais. Denotemos:

$$\|a\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \right| ;\ |s_i| \leq 1;\ |t_j| \leq 1;\ 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

$$|||a||| = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \right\}$$

onde o segundo supremo é tomado sobre todo espaço de Hilbert H e sobre todos os vetores $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in B_H$.

Fixemos um espaço de Hilbert H sobre o corpo dos números reais e $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in B_H$. Vamos supor sem perda de generalidade que H seja separável. Caso H não seja separável, podemos nos restringir ao espaço $\overline{\langle x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \rangle}$ que é separável.

Admitindo H separável, segue que existe uma base ortonormal enumerável (e_n) de H. Sendo assim, cada elemento $x \in H$ poderá ser escrito como:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, pondo $\xi_n = \langle x, e_n \rangle$, definimos:

$$\begin{array}{rccc} X: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & X(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n r_n \end{array}$$

onde r_n é a $n-$ésima função de Rademacher.

X está bem definida. De fato, consideremos $S_k(t) = \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle r_n(t)$, com $t \in [0,1]$, $k \in \mathbb{N}$. Usando a norma de $L_2[0,1]$, notemos que:

$$\begin{aligned} \|S_k - S_m\|_2^2 &= \int_0^1 \left| \sum_{n=m+1}^{k} \langle x, e_n \rangle r_n(t) \right|^2 dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n=m+1}^{k} \langle x, e_n \rangle r_n(t) \right)^2 dt \\ &= \int_0^1 \left[\left(\sum_{n=m+1}^{k} \langle x, e_n \rangle r_n(t) \right) \right] \left[\left(\sum_{j=m+1}^{k} \langle x, e_j \rangle r_j(t) \right) \right] dt \\ &= \sum_{n=m+1}^{k} \sum_{j=m+1}^{k} \langle x, e_n \rangle \langle x, e_j \rangle \int_0^1 r_n(t) r_j(t) dt \\ &= \sum_{n=m+1}^{k} |\langle x, e_n \rangle|^2 \end{aligned}$$

Concluímos que $(S_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset L_2[0,1]$ é uma sequência de Cauchy. Como $L_2[0,1]$ é um espaço de Banach, segue que $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente. Assim:

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle r_n$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle r_n(t)$ converge uniformemente para todo $t \in [0,1]$. De fato: Para cada $t \in [0,1]$, considerando $f_n(t) = \langle x, e_n\rangle r_n(t)$, observamos que:

$$|f_n(t)| = |\langle x, e_n\rangle r_n(t)| \leq |\langle x, e_n\rangle|, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,1].$$

Fixemos $t \in [0,1]$. Dado $\varepsilon > 0$, como a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|$ converge uniformemente segue que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{n=K}^{L} |\langle x, e_n\rangle| < \varepsilon, \quad \forall K, L \geq k_0.$$

Portanto, para todo $t \in [0,1]$ segue que:

$$\left|\sum_{n=K}^{L} f_n(t)\right| \leq \sum_{n=K}^{L} |f_n(t)| \leq \sum_{n=K}^{L} |\langle x, e_n\rangle| < \varepsilon, \quad \forall K, L \geq k_0.$$

Logo, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle r_n(t)$ converge uniformemente.

$X \in L_2[0,1]$. De fato, fixando $n \in \mathbb{N}$ e utilizando a desigualdade 2.1.5 (desigualdade de Bessel (D.B)) segue que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{N} \xi_n r_n(t)\right|^2 dt &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i r_i(t)\right)\left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j r_j(t)\right) dt \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \xi_i \xi_j \int_0^1 r_i(t) r_j(t) dt \\
&= \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i\rangle|^2 \\
&\overset{(D.B)}{\leq} \|x\|^2
\end{aligned}$$

Para cada $t \in [0,1]$ temos que:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n r_n(t)$$

Fazendo $N \longrightarrow \infty$, utilizando a continuidade da norma em $\mathbb{R}$ e a continuidade da função $f(x) = x^2$ obtemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \|X(t)\|^2 dt &= \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n r_n(t)\right|^2 dt \\
&= \int_0^1 \left|\lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=1}^{N} \xi_n r_n(t)\right|^2 dt \\
&= \lim_{N\longrightarrow\infty} \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{N} \xi_n r_n(t)\right|^2 dt \\
&\leq \|x\|^2
\end{aligned}$$

Então:

$$\|X\|_2^2 \leq \|x\|$$

Daí:

$$\|X\|_2 \leq \|x\|$$

$\therefore X \in L_2[0,1]$.

Para cada $x, y \in H$ temos:

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 X(t)Y(t)dt.$$

Onde:

$$\begin{array}{rccc} X: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & X(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle r_n(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} Y: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & Y(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\langle y, e_n\rangle r_n(t) \end{array}$$

De fato, sendo $(e_n) \subset H$ uma base ortonormal de H, podemos escrever x, y em séries de Fourier como:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n, \qquad y = \sum_{n=1}^{\infty}\langle y, e_n\rangle e_n$$

Fixados $M \geq N$ em $\mathbb{N}$, observemos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle r_n(t)\right)\left(\sum_{n=1}^{M}\langle y, e_m\rangle r_m(t)\right) dt &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\langle x, e_n\rangle\langle y, e_m\rangle \int_0^1 r_n(t)r_m(t)dt \\
&= \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle\langle y, e_n\rangle \\
&= \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle\langle y, e_m\rangle\langle e_n, e_m\rangle \\
&= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle\langle y, e_m\rangle\langle e_n, e_m\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n, \sum_{m=1}^{M}\langle y, e_m\rangle e_m \right\rangle
\end{aligned}$$

Usando a continuidade do produto interno e que as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\langle y, e_n\rangle e_n$ convergem uniformemente, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 X(t)Y(t)dt &= \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle r_n(t)\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\langle y, e_m\rangle r_m(t)\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\lim_{N\longrightarrow\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle r_n(t)\right)\left(\lim_{M\longrightarrow\infty}\sum_{m=1}^{M}\langle y, e_m\rangle r_m(t)\right) dt \\
&= \int_0^1 \lim_{N\longrightarrow\infty}\lim_{M\longrightarrow\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle r_n(t)\right)\left(\sum_{m=1}^{M}\langle y, e_m\rangle r_m(t)\right) dt \\
&= \lim_{N\longrightarrow\infty}\lim_{M\longrightarrow\infty}\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle r_n(t)\right)\left(\sum_{m=1}^{M}\langle y, e_m\rangle r_m(t)\right) dt \\
&= \lim_{N\longrightarrow\infty}\lim_{M\longrightarrow\infty}\left\langle \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n, \sum_{m=1}^{M}\langle y, e_m\rangle e_m\right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{N\longrightarrow\infty}\sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n, \lim_{M\longrightarrow\infty}\sum_{m=1}^{M}\langle y, e_m\rangle e_m\right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle e_n, \sum_{m=1}^{\infty}\langle y, e_m\rangle e_m\right\rangle \\
&= \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

Vamos considerar agora dois casos. No caso A) consideraremos aplicações $X \in L_2[0,1]$ (obtidas à partir de certo elemento $x \in B_H$) que são uniformemente limitadas por uma constante. O caso B) será o caso geral.

A) Fixemos $M > 0$. Consideremos o conjunto das aplicações $X \in L_2[0,1]$ obtidas a partir de um certo $x \in B_H$, como usado anteriormente. Vamos supor que:

$$|X(t)| \leq M, \quad \forall t \in [0,1]$$

Neste caso, a desigualdade de Grothendieck torna-se mais simples. De fato: Consideremos $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in B_H$ arbitrários. Assim:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\langle x_i, y_i\rangle\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\int_0^1 X_i(t)Y_j(t)dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_i(t)Y_j(t)dt\right| \\
&\leq \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_i(t)Y_j(t)\right| dt \\
&= \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}M^2\frac{X_i(t)}{M}\frac{Y_j(t)}{M}\right| dt \\
&= M^2\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{X_i(t)}{M}\frac{Y_j(t)}{M}\right| dt \qquad (1)
\end{aligned}$$

Como $|X_i(t)| \leq M$ e $|Y_j(t)| \leq M$, para todo $1 \leq i, j \leq n$ segue que $\left|\frac{X_i(t)}{M}\right| \leq 1$ e $\left|\frac{Y_j(t)}{M}\right| \leq 1$, para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Sendo

$$\|a\| = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_i t_j\right|;\ |s_i| \leq 1;\ |t_j| \leq 1;\ 1 \leq i,j \leq n\right\}$$

temos que:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{X_i(t)}{M}\frac{Y_j(t)}{M}\right| \leq \|a\|, \quad \forall t \in [0,1] \qquad (2)$$

Portanto, usando (1) e (2), obtemos:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\langle x_i, y_i\rangle\right| \leq M^2\int_0^1 \|a\|dt = M^2\|a\|$$

Tomando o supremo do lado esquerdo, sobre todo espaços de Hilbert H e sobre todos os vetores $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in B_H$ obtemos:

$$|||a||| \leq M^2\|a\|$$

B) Seja $M > 0$ uma constante tomada arbitrariamente como no caso A). Dado $x \in B_H$, definimos $X^L, X^U \in L_2[0,1]$ por:

$$X^L(t) := \begin{cases} X(t), & \text{se } |X(t)| \leq M \\ M sinal X(t), & \text{se } |X(t)| > M \end{cases}$$

$$X^U(t) := X(t) - X^L(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } |X(t)| \leq M \\ X(t) - M sinal X(t), & \text{se } |X(t)| > M \end{cases}$$

X^L é uniformemente limitada. De fato, por definição, temos que:

$$X^L(t) := \begin{cases} X(t), & \text{se } |X(t)| \leq M \\ M sinal X(t), & \text{se } |X(t)| > M \end{cases}$$

Se $t \in [0,1]$ é tal que $|X(t)| \leq M$ então:

$$|X^L(t)| = |X(t)| \leq M$$

Se $t \in [0,1]$ é tal que $|X(t)| > M$ então:

$$|X^L(t)| = |M sinal X(t)| = M$$

Logo, para todo $t \in [0,1]$ temos que:

$$\begin{aligned} |X^L(t)| \leq M &\implies \\ |X^L(t)|^2 \leq M^2 &\implies \\ \int_0^1 |X^L(t)|^2 dt \leq \int_0^1 M^2 dt = M^2 &\implies \\ \|X^L\|_2^2 \leq M^2 &\implies \\ \|X^L\|_2 \leq M \quad &(*) \end{aligned}$$

Portanto, X^L é uniformemente limitada.

X^U é uniformemente limitada. Vamos mostrar que:

$$\|X^U\|_2 \leq \frac{\sqrt{3}}{4M}$$

Se $t \in [0,1]$ é tal que $|X(t)| \leq M$ então:

$$|X^U(t)| = 0 \leq \frac{|X(t)|^2}{4M}$$

Vamos analisar agora o caso em que $t \in [0,1]$ são tais que $|X(t)| > M$. Observemos que:

• Se $X(t) > M > 0$ então:

$$X^U(t) = X(t) - M$$

• Se $X(t) < -M < 0$ então:

$$X^U(t) = X(t) + M < 0$$

Assim:

$$|X^U(t)| := \begin{cases} X(t) - M, & \text{se } X(t) > M \\ -X(t) - M, & \text{se } X(t) < -M \end{cases}$$

Isto é, $|X^U(t)| = |X(t)| - M$ no caso em que $|X(t)| > M$.

Vamos mostrar agora que, se $m, s \in \mathbb{R}_+$ então $s \leq m + \frac{s^2}{4m}$. Essa desigualdade será importante para nossa demonstração. Sabemos que $(2m - s)^2 \geq 0$. Logo:

$$\begin{aligned} (2m - s)^2 \geq 0 &\implies 4m^2 - 4ms + s^2 \geq 0 \\ 4m^2 + s^2 \geq 4ms &\implies m + \frac{s^2}{4m} \geq s \end{aligned}$$

Considerando $s = |X(t)|$ e $m = M$, obtemos pela desigualdade anterior:

$$\begin{aligned} \frac{|X(t)|^2}{4M} + M \geq |X(t)| &\implies \\ |X(t)| - M \leq \frac{|X(t)|^2}{4M} &\implies \\ |X^U(t)| \leq \frac{|X(t)|^2}{4M} & \end{aligned}$$

Portanto:

$$|X^U(t)| \leq \frac{|X(t)|^2}{4M}, \quad \forall t \in [0,1] \quad (**)$$

Utilizando $(**)$, a desigualdade de Khinchin (D.K) e sua demonstração para $p = 4$, segue que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |X^U(t)|^2 dt &\overset{(**)}{\leq} \int_0^1 \frac{|X(t)|^4}{16M^2} dt \\
&= \frac{1}{16M^2} \int_0^1 |X(t)|^4 dt \\
&= \frac{1}{16M^2} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\langle x, e_n \rangle}_{a_n} r_n(t) \right|^4 dt \\
&\overset{(D.K)}{\leq} \frac{1}{16M^2} 3 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^2 \\
&= \frac{3}{16M^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \right)^2 \\
&= \frac{3}{16M^2} \|x\|^4 \\
&\leq \frac{3}{16M^2}
\end{aligned}$$

Daí:

$$\|X^U\|_2 = \left(\int_0^1 |X^U(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{4M} \qquad (3)$$

Portanto, X^U é uniformemente limitada.

Agora, sejam $x_1, \ldots .x_n, y_1, \ldots, y_n \in B_H$. Podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| &= \\
\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^1 X_i(t) Y_j(t) dt \right| &= \\
\left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_i(t) Y_j(t) dt \right| &= \\
\left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} (X_i^U(t) + X_i^L(t))(Y_j^U(t) + Y_j^L(t)) dt \right| &= \\
\left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} [X_i^U(t) Y_j^U(t) + X_i^U(t) Y_j^L(t) + X_i^L(t) Y_j^U(t) + X_i^L(t) Y_j^L(t)] dt \right| &= \\
\left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} [X_i^U(t) + X_i^L(t)] Y_j^U(t) + a_{ij} X_i^U(t) Y_j^L(t) + a_{ij} X_i^L(t) Y_j^L(t) dt \right| &=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_i(t) Y_j^U(t) dt + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_i^U(t) Y_j^L(t) dt + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_i^L(t) Y_j^L(t) dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_i(t) Y_j^U(t) dt \right| + \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_i^U(t) Y_j^L(t) dt \right| + \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} X_i^L(t) Y_j^L(t) dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n M^2 \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{X_i^L(t)}{M} \frac{Y_j^L(t)}{M} dt \right| + \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{X_i^U(t) Y_j^L(t) \|X_i^U\|_2}{\|X_i^U\|_2} dt \right| \\
&+ \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{X_i(t) Y_j^U(t) \|Y_j^U\|_2}{\|Y_j^U\|_2} dt \right| \\
&\leq M^2 \|a\| + \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \|X_i^U\|_2 M \int_0^1 \frac{X_i^U(t)}{\|X_i^U\|_2} \frac{Y_j^L(t)}{M} dt \right| + \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \|Y_j^U\|_2 \int_0^1 X_i(t) \frac{Y_j^U(t)}{\|Y_j^U\|_2} dt \right| \\
&\overset{(3)}{\leq} M^2 \|a\| + \frac{\sqrt{3}}{4} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \left\langle \frac{X_i^U(t)}{\|X_i^U\|_2}, \frac{Y_j^L(t)}{M} \right\rangle \right| + \frac{\sqrt{3}}{4M} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \left\langle X_i(t), \frac{Y_j^U(t)}{\|Y_j^U\|_2} \right\rangle \right| \\
&\overset{(*)}{\leq} M^2 \|a\| + \frac{\sqrt{3}}{4} |||a||| + \frac{\sqrt{3}}{4M} |||a|||
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
|||a||| \leq M^2 \|a\| + \frac{\sqrt{3}}{4} |||a||| + \frac{\sqrt{3}}{4M} |||a||| &\implies \\
\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{4M}(M+1) \right] |||a||| \leq M^2 \|a\| &\implies \\
\left(\frac{4M - \sqrt{3}(M+1)}{4M} \right) |||a||| \leq M^2 \|a\| &\implies \\
|||a||| \leq \left(\frac{4M^3}{4M - \sqrt{3}(M+1)} \right) \|a\|
\end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leq |||a||| \leq \left(\frac{4M^3}{4M - \sqrt{3}(M+1)} \right) \|a\|$$

Sobre o espaço de Hilbert H fixado, definiu-se

$$\|a\| \;=\; \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} s_i t_j \right| ;\ |s_i| \leq 1;\ |t_j| \leq 1;\ 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

Consideremos a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned}
\Gamma : \quad S_{\mathbb{R}} \times S_{\mathbb{R}} \times \ldots \times S_{\mathbb{R}} \times S_{\mathbb{R}} \times \ldots \times S_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(s_1, s_2, \ldots, s_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) &\longmapsto \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} s_i t_j \right|
\end{aligned}$$

onde $S_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R}; |x| = 1\}$. Como Γ é uma aplicação contínua e o produto cartesiano finito de conjuntos compactos é um conjunto compacto, segue que a imagem de Γ admite máximo. Portanto, existem $s_1^{'}, s_2^{'}, \ldots, s_n^{'}, t_1^{'}, t_2^{'}, \ldots, t_n^{'} \in S_{\mathbb{R}}$ tais que:

$$\max\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_it_j\right|;\ |s_i|=1;\ |t_j|=1;\ 1\leq i,j\leq n\right\} = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_i^{'}t_j^{'}\right|$$

Portanto obtemos:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\right| \leq K_G \max\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_it_j\right|;\ |s_i|=1;\ |t_j|=1;\ 1\leq i,j\leq n\right\}$$

onde $K_G = \frac{4M^3}{4M-\sqrt{3}(M+1)}$, sempre que $4M-\sqrt{3}(M-1) > 0$, ou seja, $M > \frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$. Escolhendo M desta forma, obtemos a desigualdade. □

4.2 Teorema de Grothendieck

O Teorema de Grothendieck aparece como uma consequência da desigualdade de Grothendieck e trata de operadores absolutamente somantes. Nesta seção, apresentamos o resultado e sua demonstração.

Antes, veremos a definição de operadore absolutamente somante.

Definição 4.2.1 (**Operador Absolutamente somante**). *Sejam X, Y espaços de Banach e $u : X \longrightarrow Y$ um operador que leva sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ incondicionalmente somáveis em sequências $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ absolutamente somáveis. O operador u é denominado operador absolutamente somante.*

O teorema 4.2.2 pode ser encontrado em [4], capítulo 1, páginas 15,16,17 e 18.

Teorema 4.2.2 (**Teorema de Grothendieck**). *Todo operador linear e contínuo $u : l_1 \longrightarrow l_2$ é absolutamente somante.*

Demonstração. Seja $u : l_1 \longrightarrow l_2$ um operador linear e contínuo. Queremos mostrar que o operador u transforma sequências incondicionalmente somáveis de l_1 em sequências absolutamente somáveis em l_2. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\|u\| \leq 1$.

Seja $(x_n) \subset l_1$ uma sequência incondicionalmente somável. Pelo teorema 3.2.1, segue que (x_n) é sinal somável.

Seja $(\varepsilon_n) \in \mathbb{R}$, onde $\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fixado $N \in \mathbb{N}$ consideremos $y = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n$. Pelo teorema de Hahn-Banach(H.B) temos que:

$$\|y\|_1 = \sup_{x^*\in B_{l_\infty}} |x^*(y)| \qquad (*)$$

Notemos ainda que, para $x^* \in B_{l_\infty}$ temos que:

$$\begin{aligned}
|x^*(y)| &= \left| x^* \left(\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \right) \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x^*(x_n) \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} |\varepsilon_n| |x^*(x_n)| \\
&= \sum_{n=1}^{N} |x^*(x_n)|
\end{aligned}$$

Vamos definir o seguinte operador:

$$\begin{aligned}
v : \ l_\infty &\longrightarrow \quad l_1 \\
x^* &\longmapsto (x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

O operador v está bem definido. De fato, seja $x^* \in l_\infty$. Fixemos $N \in \mathbb{N}$. Primeiramente, observemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |x^*(x_n)| &\leq \sum_{n=1}^{N} \|x^*\| \|x_n\|_1 \\
&= \|x^*\| \sum_{n=1}^{N} \|x_n\|_1
\end{aligned}$$

Como $(x_n) \subset l_1$ converge incondicionalmente, segue que (x_n) converge absolutamente em l_1. Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_1$ é convergente.

Fazendo $N \longrightarrow \infty$ obtemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| \leq \|x^*\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_1 < \infty \quad (1)$$

Portanto, v está bem definido.

O operador v é linear. De fato, sejam $x^*, y^* \in l_\infty$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Assim:

$$\begin{aligned}
v(x^* + \lambda y^*) &= (x^* + \lambda y^*)(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \\
&= ((x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}} + \lambda((y^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \\
&= v(x^*) + \lambda v(y^*)
\end{aligned}$$

O operador v é contínuo. De fato, seja $x^* \in B_{l_\infty}$. Temos que:

$$\begin{aligned}
\|v(x^*)\|_1 &= \|(x^*(x_n))\|_1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| \\
&= \|x^*\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_1
\end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_1 < \infty$ segue que v é contínuo.

Podemos ainda afirmar que:

$$\|v\| = \sup_{x^* \in B_{l_\infty}} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| \quad (**)$$

Portanto, por $(*)$ e $(**)$ que:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \right\|_1 &\overset{(*)}{=} \sup_{x^* \in B_{l_\infty}} \left| x^* \left(\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \right) \right| \\
&\leq \sup_{x^* \in B_{l_\infty}} \sum_{n=1}^{N} |x^*(x_n)| \\
&\leq \sup_{x^* \in B_{l_\infty}} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| \\
&\overset{(**)}{=} \|v\|
\end{aligned}$$

Assim, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n x_n \right\|_1 \leq \|v\|, \quad \forall N \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

Queremos mostrar que $(u(x_n)) \subset l_2$ é absolutamente convergente, isto é, queremos mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \|u(x_n)\|^2 < \infty$.

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$.
Tomemos $n \geq m$, $y_1, \ldots, y_m \in l_1^n$ tais que:

$$\|x_i - y_i\| \leq \frac{\delta}{2^i}, \text{ se } 1 \leq i \leq m$$

Se $n > m$, para $m + 1 \leq i \leq n$ vamos considerar $y_i = 0$.
Consideremos $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ como a base canônica do espaço l_1^n. Para cada $1 \leq i \leq m$ cada vetor y_i pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base β, da seguinte maneira:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \quad 1 \leq i \leq m$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|u(y_i)\|_2 &= \sum_{i=1}^{n} \left\| u \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \right) \right\|_2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u(e_j) \right\|_2
\end{aligned}$$

Vamos fixar $1 \leq i \leq n$. Denotemos $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u(e_j) \in l_2$. Pelo teorema de Hahn-Banach, existe $x_i^* \in B_{l_2^n}$ de tal forma que $x_i^*(\alpha_i) = \|\alpha_i\|_2$. Assim:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u(e_j) \right\|_2 &= \|\alpha_i\|_2 \\
&= x_i^*(\alpha_i) \\
&= x_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u(e_j) \right)
\end{aligned}$$

Sabemos que l_2^n é um espaço de Hilbert. Pelo teorema da representação de Riesz, existe um vetor $z_i \in B_{l_2^n}$ associado a cada funcional x_i^*, de tal forma que:

$$\begin{aligned}
x_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u(e_j) \right) &= \left\langle z_i, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u(e_j) \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \langle z_i, u(e_j) \rangle
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\sum_{i=1}^{n} \|u(y_i)\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \langle z_i, u(e_j) \rangle$$

onde $z_1, \ldots, z_n \in B_{l_2^n}$.

Sejam $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ escalares tais que $\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i y_i \right\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \right) \right\|_1 \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i \right) e_j \right\|_1 \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \varepsilon_i \right| \qquad (3)
\end{aligned}$$

Para $1 \leq i \leq m$ temos que:

$$\begin{aligned}
\|u(x_i)\|_2 - \|u(y_i)\|_2 &\leq \|u(x_i) - u(y_i)\|_2 \\
&= \|u(x_i - y_i)\|_2 \\
&\leq \|u\| \|x_i - y_i\|_2 \\
&\leq \|x_i - y_i\|_2 \\
&\leq \frac{\delta}{2^i}
\end{aligned}$$

Daí, para todo $1 \leq i \leq m$ temos:

$$\|u(x_i)\| \leq \|u(y_i)\|_2 + \frac{\delta}{2^i}$$

Da desigualdade anterior segue que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\|u(x_i)\|_2 &\leq \sum_{i=1}^{m}\|u(y_i)\|_2+\sum_{i=1}^{m}\frac{\delta}{2^i}\\ &< \sum_{i=1}^{m}\|u(y_i)\|_2+\delta\end{aligned}$$

Vamos denotar

$$\|a\|=\max\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\right|;\ \xi_i=\pm1;\ \xi_j=\pm1\right\}$$

$$|\|a\||=\max\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\langle x_i,y_j\rangle\right|\right\}$$

onde o máximo é tomado sobre todo espaço de Hilbert H e sobre quaisquer vetores $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n\in B_H$. Utilizando a desigualdade de Grothendieck (teorema 4.1.1) teremos que:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\|u(x_i)\|_2 &\leq \sum_{i=1}^{m}\|u(y_i)\|_2+\delta\\ &= \sum_{i=1}^{n}\|u(y_i)\|_2+\delta\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\langle z_i,u(e_j)\rangle+\delta\\ &\leq \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\langle z_i,u(e_j)\rangle\right|+\delta\\ &\leq |\|a\||+\delta\\ &\overset{4.1.1}{\leq} K_G\|a\|+\delta\end{aligned}$$

Utilizando a definição de $\|a\|$ e a desigualdade (3) segue que:

$$\begin{aligned}K_G\|a\|+\delta &= K_G\max\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\right|;\ \xi_i=\pm1;\ \xi_j=\pm1\right\}+\delta\\ &\leq K_G\max\left\{\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\right|;\ \xi_i=\pm1;\ \xi_j=\pm1\right\}+\delta\\ &= K_G\max\left\{\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i\right|;\ \xi_i=\pm1;\ \xi_j=\pm1\right\}+\delta\\ &\overset{(3)}{\leq} K_G\max\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_iy_i\right\|_1;\ \xi_i=\pm1\right\}+\delta\end{aligned}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i y_i\right\|_1 - \left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i x_i\right\|_1 &\leq \left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i (y_i - x_i)\right\|_1 \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^{m} x_i - y_i\right\|_1 \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\frac{\delta}{2^i} \\
&\leq \delta
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i y_i\right\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i y_i\right\|_1 &\leq \left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i x_i\right\|_1 + \delta \Longrightarrow \\
\max\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i y_i\right\|_1 \;;\; \xi_i = \pm 1\right\} &\leq \max\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i x_i\right\|_1 \;;\; \xi_i = \pm 1\right\} + \delta
\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
K_G \max\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i y_i\right\|_1 \;;\; \xi_i = \pm 1\right\} + \delta &\leq K_G \max\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i x_i\right\|_1 \;;\; \xi_i = \pm 1\right\} + \delta + K_G\delta \qquad (***) \\
&\overset{(2)}{\leq} K_G\|v\| + K_G(\delta + 1)
\end{aligned}$$

Logo:

$$\sum_{i=1}^{m}\|u(x_i)\|_2 \leq K_G\|v\| + K_G(\delta + 1)$$

Portanto:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|u(x_i)\|_2 = \lim_{m\longrightarrow\infty}\sum_{i=1}^{m}\|u(x_i)\|_2 \leq K_G\|v\| + K_G(\delta + 1)$$

Concluímos que $u(x_n) \subset l_2$ é absolutamente convergente. □

O corolário do teorema de Grothendieck é uma consequência da demonstração do teorema. Podemos considerar este corolário como uma versão do teorema de Grothendieck para espaços de Banach de dimensão finita.

Corolário 4.2.3. *Sejam n, N inteiros positivos e seja $u : l_1^n \longrightarrow l_2^N$ um operador qualquer. Então, independente da escolha de $x_1, \ldots, x_m \in l_1^n$ teremos:*

$$\sum_{i=1}^{m}\|u(x_i)\|_{l_2^N} \leq K_G\|u\| \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right\|_{l_1^n} \;;\; \varepsilon_i = \pm 1\right\}$$

Demonstração. Na demonstração do teorema de Grothendieck obtemos a desigualdade $(***)$:

$$\sum_{i=1}^{m}\|u(x_i)\|_2 \;\leq\; K_G \max\left\{\left\|\sum_{i=1}^{m}\xi_i x_i\right\|_1 \;;\; \xi_i = \pm 1\right\} + \delta + K_G$$

Vamos considerar a inclusão dos espaços l_1^n e l_2^N em l_1 e l_2, respectivamente.

Lembremos que para a demonstração do teorema de Grothendieck a norma do operador u foi tomada com norma menor ou igual a 1.

Vamos considerar o operador u como a restrição a l_1^n do operador

$$\begin{array}{rccc} u: & l_1 & \longrightarrow & l_2 \\ & x & \longmapsto & u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i) \end{array}$$

onde $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_1$.

Por $(***)$ podemos escrever:

$$\sum_{i=1}^{m} \left\| \frac{u}{\|u\|}(x_i) \right\|_{l_2^N} \leq K_G \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{m} \xi_i x_i \right\|_1 ;\ \xi_i = \pm 1 \right\} + \delta + K_G \delta \implies$$

$$\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|_{l_2^N} \leq \|u\| \left(K_G \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{m} \xi_i x_i \right\|_1 ;\ \xi_i = \pm 1 \right\} + \delta + K_G \delta \right)$$

$\delta > 0$ é arbitrário. Fazendo $\delta \longrightarrow 0$ obtemos:

$$\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|_{l_2^N} \leq K_G \|u\| \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i \right\|_{l_1^n} ;\ \varepsilon_i = \pm 1 \right\}$$

$\square$

5) Os Teoremas de Grothendieck para operadores p-somantes

5.1 Operadores p-somantes: Resultados e exemplos

Neste capítulo apresentamos uma das classes de operadores que foram importantes no desenvolvimento deste trabalho, os chamados operadores p-somantes. Esses operadores estendem o conceito de operadores absolutamente somantes que foram estudados nos capítulos anteriores.

Apresentamos ao longo do capítulo a definição destes operadores, assim como algumas propriedades e certas caracterizações. Os exemplos serão expostos na última seção, pois primeiramente devemos apresentar suas principais características.

Em uma das seções abordamos uma generalização dos espaços de sequências l_p e l_∞, a partir de um espaço de Banach arbitrário.

Definição 5.1.1 (**Operador p-somante**). *Sejam X, Y espaços de Banach,$1 \leq p < \infty$ e $u : X \longrightarrow Y$ um operador linear. Dizemos que u é p-somante se existe uma constante $C \geq 0$ tal que independente da escolha de $m \in \mathbb{N}$ e independente da escolha de $x_1, \ldots, x_m \in X$ temos:*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

Observação 5.1.2. *Podemos substituir a constante C pela expressão $\pi_p(u)$, onde:*

$$\pi_p(u) = \inf \left\{C \geq 0; \left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad m \in \mathbb{R}\right\}.$$

Vamos denotar por $\Pi_p(X, Y)$ o conjunto de todos os operadores p-somantes de X em Y.

Lema 5.1.3. *Sejam X, Y espaços de Banach. Então:*

i) $\Pi_p(X, Y)$ é um subespaço vetorial do espaço $B(X, Y)$.

ii) π_p define uma norma para $\Pi_p(X,Y)$ com:

$$\|u\| \leq \pi_p(u), \quad \forall u \in \Pi_p(X,Y)$$

Demonstração. Observemos que $\Pi_p(X,Y) \neq \emptyset$, pois o operador nulo pertence a esse conjunto.

Se $u \in \Pi_p(X,Y)$ então u é contínua. De fato:
Fazendo $m = 1$ na definição de operadores p-somantes, para qualquer $x \in X$ temos:

$$\|u(x)\| \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| = C\|x\| \implies$$
$$\|u(x)\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in X$$

Sejam $u, v \in \Pi_p(X,Y)$. Assim, existem constantes $C_u, C_v \geq 0$ tais que independente da escolha de $m \in \mathbb{N}$, independente da escolha de $x_1, \dots, x_m \in X$ temos:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_u \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$
$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_v \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

Fixando $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m \in X$ e usando a desigualdade de Minkowiski (D.M):

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} \|(u+v)(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i) + v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(D.M)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} \|v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (C_u + C_v) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}$$

Logo, $u + v \in \Pi_p(X,Y)$.
Sejam $u \in \Pi_p(X,Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Fixando $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, \dots, x_m \in X$ temos:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} \|(\lambda u)(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{m} \|\lambda u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \lambda C_u \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}$$

Logo, $\lambda u \in \Pi_p(X,Y)$.
Portanto, $\Pi_p(X,Y)$ é subespaço de $B(X,Y)$.

ii) Queremos mostrar que:

$$\pi_p(u) = \inf\left\{C; \left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad m \in \mathbb{R}\right\}$$

define uma norma em $\Pi_p(X, Y)$.

a) Se $\pi_p(u) = 0$ então:

$$\inf\left\{C; \left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}; \quad m \in \mathbb{N}\right\} = 0$$

Assim, para todo $m \in \mathbb{N}$ e para quaisquer $x_1, \ldots, x_m \in X$ temos:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 0 \implies$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \implies$$

$$\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p = 0$$

Portanto, para todo $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq m$ e para quaisquer $x_1, \ldots, x_m \in X$ temos:

$$\|u(x_i)\|^p = 0 \implies$$

$$\|u(x_i)\| = 0 \implies$$

$$u(x_i) = 0 \implies$$

$$u \equiv 0$$

Se $u \equiv 0$ então:

$$0 \in \left\{C \geq 0; 0 \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}; \quad m \in \mathbb{N}\right\}$$

Portanto, $\pi_p(u) = 0$.

b) Sejam $u \in \Pi_p(X, Y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Por um lado temos:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} \|\lambda u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq |\lambda| \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}$$

Daí, $\pi_p(\lambda u) \leq |\lambda| \pi_p(u)$. Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{m} \left\|\frac{\lambda u}{\lambda}(x_i)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \left(\sum_{i=1}^{m} \|\lambda u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|} \pi_p(\lambda u) \left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}$$

Daí, $\pi_p(u) \leq \frac{1}{|\lambda|}\pi_p(\lambda u)$. Portanto, $\pi_p(\lambda u) = |\lambda|\pi_p(u)$.

c) Sejam $u, v \in \Pi_p(X,Y)$. Como u, v são p-somantes, existem $C_u, C_v \geq 0$ tais que independente da escolha de $m \in \mathbb{N}$, independente da escolha de $x_1, \ldots, x_m \in X$ temos:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_u \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \quad \text{e}$$
$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_v \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

Por definição de $\pi_p(u)$ e $\pi_p(v)$ temos:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \quad \text{e}$$
$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(v) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

Para quaisquer $x_1, \ldots, x_m \in X$, utilizando a desigualdade de Minkowiski (D.M) temos:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} \|(u+v)(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i) + v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(D.M)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{m} \|v(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\pi_p(u) + \pi_p(v)) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}$$

Portanto, $\pi_p(u+v) \leq \pi_p(u) + \pi_p(v)$.
Sejam $u \in \Pi_p(X,Y)$. Sabemos que:

$$\|u\| = \sup_{x \in B_X} \|u(x)\|$$

Para $m = 1$ na definição de operadores p-somantes, fixemos $x \in B_X$ arbitrário. Utilizando o teorema de Hahn-Banach (H.B) temos:

$$\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| \overset{(H.B)}{=} \pi_p(u)\|x\|$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|u(x)\| \leq \pi_p(u)\|x\| &\implies \\
\sup_{x \in B_X} \|u(x)\| \leq \sup_{x \in B_X} \pi_p(u)\|x\| &\implies \\
\sup_{x \in B_X} \|u(x)\| \leq \pi_p(u) &\implies \\
\|u\| \leq \pi_p(u)
\end{aligned}$$

$\square$

Vamos apresentar agora os conceitos de sequência fortemente p-somável e de sequência fracamente p-somável. Mais a frente veremos a relação que essas sequências possuem com os operadores p-somantes.

Vamos definir os espaços $l_p^s(X)$ e $l_p^w(X)$ e mostrar que estes formam um espaço de Banach.

Definição 5.1.4 (**Sequência fortemente p-somável**). *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* X *um espaço de Banach sobre o corpo* $\mathbb{K}$. *Uma sequência* $(x_n) \subset X$ *é fortemente p-somável se a sequência* $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$. *O espaço vetorial de todas as sequências em* X *que são fortemente p-somáveis é denotado por* $l_p^s(X)$.

Lema 5.1.5. $\|(x_n)\|_p^s := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *é uma norma em* $l_p^s(X)$.

Demonstração. i) Seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p^s(X)$.Temos que:

$$\begin{aligned}
\|x\|_p^s = 0 &\iff \\
\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 &\iff \\
\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p = 0 &\iff \\
\|x_n\|^p = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} &\iff \\
\|x_n\| = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} &\iff \\
x_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} &\iff \\
x = 0 &
\end{aligned}$$

ii) Sejam $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p^s(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

$$\begin{aligned}
\|(\lambda x_n)\|_p^s &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^p \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \|x\|_p^s
\end{aligned}$$

iii) Sejam $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p^s(X)$. Fixando $m \in \mathbb{R}$, pela desigualdade de

Minkowiski (D.M) temos que:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{m}\|x_n+y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{n=1}^{m}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{m}\|y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \|x\|_p^s+\|y\|_p^s\end{aligned}$$

Isto é:

$$\left(\sum_{n=1}^{m}\|x_n+y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p^s+\|y\|_p^s$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ obtemos que:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^s &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n+y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \|x\|_p^s+\|y\|_p^s\end{aligned}$$

Logo, $\| \ \|_p^s$ é uma norma em $l_p^s(X)$.

□

Lema 5.1.6. *O espaço $l_p^s(X)$ munido da norma $\| \ \|_p^s$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Vamos mostrar que $(l_p^s(X), \| \ \|_p^s)$ é completo. Seja $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset l_p^s(X)$ uma sequência de Cauchy. Por definição, dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x^k - x^l\|_p^s = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i^k - x_i^l\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall k, l \geq k_0 \qquad (*)$$

Assim:

$$\|x_i^k - x_i^l\| < \varepsilon, \quad \forall k, l \geq k_0, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Obtemos uma sequência $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ coluna que é Cauchy em $\mathbb{K}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{K}$ é completo, concluímos que $(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente para todo $i \in \mathbb{N}$. Digamos que $x_i^k \xrightarrow{k} x_i$. Definamos $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Temos que $x \in l_p^s(X)$. De fato, como $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, então $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Logo, existe um $M > 0$ tal que:

$$\|x^k\|_p^s = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{K}$$

Consequentemente temos:

$$\left(\sum_{n=1}^{m}\|x_n^k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^k\|_p^s \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{K}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Como $f(y) = y^{\frac{1}{p}}$ é contínua e o somatório é finito, fazendo $k \longrightarrow \infty$ temos que:

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ obtemos que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq M$$

Assim, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p^s(X)$.

De $(*)$ podemos observar que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i^k - x_i^l\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^k - x^l\|_p^s < \varepsilon, \quad \forall k, l \geq k_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Fixando $k \in \mathbb{N}, k \geq k_0$ e fazendo $l \longrightarrow \infty$ para todo $k, l \geq k_0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ obtemos:

$$\lim_{l\longrightarrow\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i^k - x_i^l\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \implies$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lim_{l\longrightarrow\infty} \|x_i^k - x_i^l\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \implies$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i^k - \lim_{l\longrightarrow\infty} x_i^l\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \implies$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i^k - x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ obtemos que:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^k - x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0$$

Logo, $x^k \overset{\| \|_p^s}{\longrightarrow} x \in l_p^s(X)$ e temos que $l_p^s(X)$ é completo. □

Definição 5.1.7 (Sequência fracamente p-somável). *Seja X um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma sequência $(x_n) \subset X$ é dita fracamente p-somável se a sequência de escalares $(x^*(x_n)) \in l_p$, para todo $x^* \in X^*$. O espaço vetorial de todas as sequências que são fracamente p-somáveis em X é denotado por $l_p^w(X)$.*

Lema 5.1.8. $\|(x_n)\|_p^w := \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *é uma norma para o espaço $l_p^w(X)$.*

Demonstração.

$$\begin{array}{rccc} \| \|_p^w : & l_p^w(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_n) & \longmapsto & \|(x_n)\|_p^w := \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$$

Seja $x = (x_n) \in l_p^w(X)$. Vamos definir a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} u: & X^* & \longrightarrow & l_p \\ & x^* & \longmapsto & (x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

O operador u está bem definido. De fato, como $x = (x_n) \in l_p^w(X)$ segue por definição que $(x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$, para todo $x^* \in B_{X^*}$.

O operador u é linear. De fato, sejam $x_1^*, x_2^* \in B_{X^*}$. Então:

$$\begin{aligned} u(x_1^* + x_2^*) &= ((x_1^* + x_2^*)(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (x_1^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}} + (x_2^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= u(x_1^*) + u(x_2^*) \end{aligned}$$

O operador u é um operador linear limitado. De fato, vamos utilizar o teorema do gráfico fechado.
Queremos mostrar que o conjunto $\Gamma = \{(x^*, u(x^*)) \in X^* \times l_p;\ x^* \in B_{X^*}\}$ é fechado.
Seja $(x^*, y) \in \overline{\Gamma}$. Logo, existe uma sequência $(x_k^*, u(x_k^*)) \subset \Gamma$ tal que $(x_k^*, u(x_k^*)) \longrightarrow (x^*, y)$. Observemos que $x_k^* \longrightarrow x^*$ e que $u(x_k^*) \longrightarrow y$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que $u(x_k^*) = (x_k^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Notemos que:

$$x_k^* \longrightarrow x^* \Longrightarrow \sup_{x\in B_X} |x_k^*(x) - x^*(x)| \longrightarrow 0$$

Assim:

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} |x_k^*(x) - x^*(x)| = 0, \quad \forall x \in B_X$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{k\longrightarrow\infty} \left| x_k^*\left(\frac{x_n}{|x_n|}\right) - x^*\left(\frac{x_n}{|x_n|}\right) \right| = 0 \quad &\Longrightarrow \\ \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{|x_n|} |x_k^*(x_n) - x^*(x_n)| = 0 \quad &\Longrightarrow \\ \lim_{k\longrightarrow\infty} |x_k^*(x_n) - x^*(x_n)| = 0 & \end{aligned}$$

Sabemos que $u(x_k^*) \overset{\|\ \|_p}{\longrightarrow} y$, logo:

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_k^*(x_n) - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} |x_k^*(x_n) - y_n| = 0$$

Pela unicidade do limite, segue que $x^*(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo teorema do gráfico fechado, como $u : X^* \longrightarrow l_p$ é linear, Γ é fechado e X^*, l_p são espaços de Banach, segue que u é contínuo. Daí:

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \|u(x^*)\| < \infty \\ &\Longrightarrow \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\| \|_p^w$ é uma norma para o espaço $l_p^w(X)$.

i) É claro que $\|x\|_p^w \geq 0$, para todo $x \in l_p^w(X)$.

ii) Seja $x = (x_n) \in l_p^w(X)$ tal que $\|x\|_p^w = 0$. Assim:

$$M = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} = 0$$

Fixado $x^* \in B_{X^*}$, arbitrário, temos que:

$$0 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq M = 0$$

Logo:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p = 0$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x^* \in B_{X^*}$, temos que:

$$\begin{aligned} |x^*(x_n)|^p = 0 &\implies \\ |x^*(x_n)| = 0 &\implies \\ x^*(x_n) = 0 &\implies \\ x_n = 0 &\implies \\ x \equiv 0 & \end{aligned}$$

Se $x = (x_n) = 0 \in l_p^w(X)$ então $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p \right) = 0$ para qualquer $x^* \in B_{X^*}$. Assim:

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} = 0 \Longrightarrow \|x\|_p^w = 0$$

iii) Sejam $x = (x_n) \in l_p^w(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos que:

$$
\begin{aligned}
\|\lambda x\|_p^w &= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(\lambda x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^p |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= |\lambda| \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= |\lambda| \|x\|_p^w
\end{aligned}
$$

iv) Sejam $x = (x_n), y = (y_n) \in l_p^w(X)$. Fixados $x^* \in B_{X^*}$, $m \in \mathbb{N}$ e utilizando a desigualdade de Minkowiski (D.M) segue que:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{m} |x^*(x_n + y_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{n=1}^{m} |x^*(x_n) + x^*(y_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(D.M)}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{m} |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{m} |x^*(y_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(y_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} + \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(y_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \\
&= \|x\|_p^w + \|y\|_p^w
\end{aligned}
$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, considerando a continuidade do módulo e das funções $y(x) = x^p$ e $h(x) = x^{\frac{1}{p}}$ temos para todo $x^* \in B_{X^*}$ que:

$$
\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n + y_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p^w + \|y\|_p^w
$$

Daí:

$$
\begin{aligned}
\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n + y_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \leq \|x\|_p^w + \|y\|_p^w \quad \Longrightarrow \\
\|x + y\|_p^w \leq \|x\|_p^w + \|y\|_p^w
\end{aligned}
$$

Logo, $\| \ \|_p^w$ é uma norma para o espaço $l_p^w(X)$.

$\square$

Lema 5.1.9. *O espaço $l_p^w(X)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x^k)_{n\in\mathbb{N}} \subset l_p^w(X)$ uma sequência de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|x^k - x^{k'}\|_p^w < \varepsilon, \quad \forall k, k' \geq k_0$$

Por definição de $\| \ \|_p^w$, temos que:

$$\sup_{x^*\in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n^k) - x^*(x_n^{k'})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \varepsilon, \quad \forall k, k' \geq k_0$$

Para todo $k, k' \geq k_0$ e para todo $x^* \in B_{X^*}$, segue que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n^k) - x^*(x_n^{k'})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \implies$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n^k) - x^*(x_n^{k'})|^p < \varepsilon^p$$

Além disso, para todo $k, k' \geq k_0$, para todo $x^* \in B_{X^*}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$|x^*(x_n^k) - x^*(x_n^{k'})| < \varepsilon$$

Utilizando o teorema de Hahn-Banach (H.B) para todo $k, k' \geq k_0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$\|x_n^k - x_n^{k'}\|_X \overset{(H.B)}{=} \sup_{x^*\in B_{X^*}} |x^*(x_n^k) - x^*(x_n^{k'})| \leq \varepsilon$$

Obtemos que $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ é uma sequência de Cauchy em X. Como X é completo, concluímos que $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente para todo $k \in \mathbb{N}$. Digamos que $x_n^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_n$.

Temos que $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p^w(X)$.

Sabemos que para todo $k, k' \geq k_0$ e para todo $x^* \in B_{X^*}$:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n^k) - x^*(x_n^{k'})|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Fixando $k \in \mathbb{K}$, $k \geq k_0$ e fazendo $k' \longrightarrow \infty$, pela continuidade da função modular, continuidade de x^*, para qualquer $x^* \in B_{X^*}$, obtemos:

$$\lim_{k^{'}\longrightarrow\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n^k)-x^*(x_n^{k^{'}})|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\varepsilon \implies$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n^k)-\lim_{k^{'}\longrightarrow\infty}x^*(x_n^{k^{'}})|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\varepsilon \implies$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n^k)-x^*(\lim_{k^{'}\longrightarrow\infty}x_n^{k^{'}})|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\varepsilon \implies$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n^k)-x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\varepsilon \implies$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n^k-x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\varepsilon \implies$$

Em particular, para todo $x^* \in B_{X^*}$ obtemos que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n^{k_0}-x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\varepsilon$$

Daí:

$$\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n^{k_0}-x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\leq\varepsilon \implies$$
$$\|x^{k_0}-x\|_p^w\leq\varepsilon \implies$$
$$x^{k_0}-x\in l_p^w(X)$$

Como $l_p^w(X)$ é um espaço vetorial, segue que $x = x^{k_0}-(x^{k_0}-x)\in l_p^w(X)$.

Temos que $x^k \stackrel{\|\ \|_p^w}{\longrightarrow} x$. De fato, para todo $k, k^{'} \geq k_0$ e para todo $x^* \in B_{X^*}$ temos que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n^k)-x^*(x_n^{k^{'}})|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$$

Fixando $k\in\mathbb{N}$, $k\geq k_0$, fazendo $k^{'}\longrightarrow\infty$, para todo $k\geq k_0$ e para todo $x^*\in B_{X^*}$, segue que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n^k)-x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\varepsilon$$

Daí, para todo $k\geq k_0$:

$$\sup_{x^*\in B_{X^*}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n^k)-x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\varepsilon \implies$$
$$\|x^k-x\|_p^w\leq\varepsilon$$

Logo, $x^k \stackrel{\|\ \|_p^w}{\longrightarrow} x$. $\square$

Definição 5.1.10. *O espaço* $l^s_\infty(X)$ *é o conjunto de todas as sequências* $(x_n) \in X$ *tais que* $(\|x_n\|) \in l_\infty$.

Definição 5.1.11. *O espaço* $l^w_\infty(X)$ *é o conjunto de todas as sequências* $(x_n) \in X$ *tais que* $(x^*(x_n)) \in l_\infty$, *para todo* $x^* \in X^*$.

Observação 5.1.12. *Os espaços* $l^w_\infty(X)$ *e* $l^s_\infty(X)$ *coincidem.*

A maneira natural de definir uma norma em $l^s_\infty(X)$ e $l^w_\infty(X)$ é a seguinte:

$$\begin{array}{rccc} \|\ \|^s_\infty : & l^s_\infty(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_n) & \longmapsto & \|(x_n)\|^s_\infty := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \|\ \|^w_\infty : & l^w_\infty(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = (x_n) & \longmapsto & \|(x_n)\|^w_\infty := \sup\limits_{x^*\in B_{X^*}} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x^*(x_n)| \end{array}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos pelo teorema de Hahn-Banach que:

$$\|x_n\| = \sup_{x^*\in B_{X^*}} |x^*(x_n)|$$

Assim:

$$\begin{aligned} \|x\|^s_\infty &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x^*\in B_{X^*}} |x^*(x_n)| \\ &= \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sup_{n\in\mathbb{N}} |x^*(x_n)| \\ &= \|x\|^w_\infty \end{aligned}$$

Como os espaços coincidem, utilizaremos apenas a notação $l_\infty(X)$ com norma $\|\ \|_\infty$.

Lema 5.1.13. *Seja* X *um espaço de Banach. O conjunto* $l^s_p(X)$ *é um subespaço vetorial de* $l^w_p(X)$.

Demonstração. Seja $x = (x_n) \in l^s_p(X)$. Assim a sequência $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p$.

Fixado $x^* \in B_{X^*}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que:

$$|x^*(x_k)| \leq \|x^*\|\|x_k\| \leq \|x_k\| \implies |x^*(x_k)|^p \leq \|x_k\|^p$$

Assim, para $1 \leq k \leq n$. temos que:

$$\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p$$

Portanto, para todo $x^* \in B_{X^*}$ segue que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, para todo $x^* \in B_{X^*}$ temos que:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \implies$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p^s$$

Portanto:

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p^s$$

Assim, $\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, donde concluímos que $x = (x_n) \in l_p^w(X)$. $\square$

Lema 5.1.14. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e X um espaço de Banach. Sejam também Y um espaço de Banach e $u : X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado. Então, o operador:*

$$\begin{array}{rccc} \hat{u}: & l_p^w(X) & \longrightarrow & l_p^w(Y) \\ & x = (x_n) & \longmapsto & \hat{u}(x) = (u(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

é linear e limitado. Além disso, $\|u\| = \|\hat{u}\|$.

Demonstração. O operador $\hat{u}$ está bem definido. De fato, seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p^w(X)$. Queremos mostrar que $\hat{u}(x_n) \in l_p^w(Y)$. Observemos que:

$$\begin{aligned} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y^*(u(x_n))|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \|u\| \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{y^* u}{\|u\|}(x_n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|u\| \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\| \|(x_n)\|_p^w < \infty \qquad (*) \end{aligned}$$

O operador $\hat{u}$ é linear. De fato, sejam $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p^w(X)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x + \lambda y) &= (u(x_n + \lambda y_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (u(x_n) + \lambda u(y_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (u(x_n))_{n\in\mathbb{N}} + (\lambda u(y_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (u(x_n))_{n\in\mathbb{N}} + \lambda(u(y_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \hat{u}(x) + \lambda \hat{u}(y) \end{aligned}$$

O operador $\hat{u}$ é limitado.

Observemos que se $y^* \in Y^*$ então $y^* u \in X^*$. Para todo $(x_n) \in l_p^w(X)$, sabemos por $(*)$ que:

$$\sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y^*(u(x_n))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\| \|(x_n)\|_p^w$$

Portanto, para todo $(x_n) \in l_p^w(X)$ temos que:

$$\|\hat{u}(x_n)\|_p^w \leq \|u\|\|(x_n)\|_p^w \qquad (**)$$

Assim, $\hat{u}$ é contínuo e $\|\hat{u}\| \leq \|u\|$. Por outro lado, utilizando o teorema de Hahn-Banach (H.B), temos que:

$$\|u\| = \sup_{x\in B_X} \|ux\| \overset{(H.B)}{=} \sup_{x\in B_X} \sup_{y^*\in B_{Y^*}} |y^*(ux)|$$

Considerando (x_n) tal que $x_1 = \alpha_1 \in \mathbb{K}$ e $x_n = 0$ para todo $n \geq 2$, segue que:

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in B_X} \sup_{y^*\in B_{Y^*}} |y^*u(\alpha_1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)| &= \sup_{x\in B_X} \sup_{y^*\in B_{Y^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y^*(ux_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{x\in B_X} \|(ux_n)\|_p^w \\
&\leq \sup_{(z_n)\in B_{l_p^w(X)}} \|(uz_n)\|_p^w \\
&= \sup_{(z_n)\in B_{l_p^w(X)}} \|\hat{u}(z_n)\|_p^w \\
&= \|\hat{u}\|
\end{aligned}$$

Assim, $\|u\| \leq \|\hat{u}\|$. Por $(**)$ concluímos que $\|u\| = \|\hat{u}\|$. □

Observação 5.1.15. *Pode-se mostrar que o operador induzido $\hat{u} : l_p^s(X) \longrightarrow l_p^s(Y)$ definido de maneira análogo ao lema anterior é linear, limitado e que $\|\hat{u}\| = \|u\|$.*

Observação 5.1.16. *Sejam X, Y_0 e Y espaços de Banach e $u : X \longrightarrow Y_0$, $v : Y_0 \longrightarrow Y$ operadores lineares e limitados. Então, $\widehat{v \circ u} = \hat{v} \circ \hat{u}$.*

Demonstração. Como u e v são operadores lineares e limitados, segue pelo lema 5.1.14, que os operadores:

$$\begin{array}{rrcl}
\hat{u} : & l_p^w(X) & \longrightarrow & l_p^w(Y_0) \\
& x = (x_n) & \longmapsto & \hat{u}(x) = (u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl}
\hat{v} : & l_p^w(Y_0) & \longrightarrow & l_p^w(Y) \\
& y = (y_n) & \longmapsto & \hat{v}(y) = (u(y_n))_{n\in\mathbb{N}}
\end{array}$$

são lineares e limitados.

O operador $v \circ u : X \longrightarrow Y$ é linear e limitado.

Sejam $x_1, x_2 \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:

$$\begin{aligned}
v \circ u(\lambda x_1 + x_2) &= v(u(\lambda x_1 + x_2)) \\
&= v(\lambda u(x_1) + u(x_2)) \\
&= \lambda v(u(x_1)) + v(u(x_2)) \\
&= \lambda v \circ u(x_1) + vu(x_2)
\end{aligned}$$

Fixando $x \in B_X$ segue que:

$$\|v \circ u(x)\| = \|v(ux)\| \leq \|v\|\|u(x)\| \leq \|v\|\|u\|\|x\|$$

Tomando o supremo sobre todos os vetores $x \in B_X$ segue que:

$$\|v \circ u\| = \sup_{x \in B_X} \|vu(x)\| \leq \|v\|\|u\|$$

Pelo lema 5.1.14, podemos associar o operador

$$\begin{array}{cccc} \widehat{v \circ u}: & l_p^w(X) & \longrightarrow & l_p^w(Y) \\ & x = (x_n) & \longmapsto & \widehat{vu}(x) = (vu(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

que é linear e limitado.

Seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p^w(X)$. Então:

$$\widehat{v \circ u}(x) = (vu(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (v(ux_n))_{n\in\mathbb{N}} = \widehat{v}((u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}) = \widehat{v} \circ \widehat{u}(x)$$

□

Observação 5.1.17. *Sejam X, Y espaços de Banach e $u : X \longrightarrow Y$, $v : X \longrightarrow Y$ operadores lineares e limitados. Então, $\widehat{v+u} = \widehat{v} + \widehat{u}$.*

Demonstração. Como u e v são operadores lineares e limitados e $\mathscr{L}(X,Y)$ é um espaço vetorial, segue que $v + u \in \mathscr{L}(X,Y)$. Pelo lema 5.1.14, podemos associar o operador $v + u$ ao operador:

$$\begin{array}{cccc} \widehat{v+u}: & l_p^w(X) & \longrightarrow & l_p^w(Y) \\ & x = (x_n) & \longmapsto & \widehat{v+u}(x) = ((v+u)(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

que é linear e limitado.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_p^w(X)$. Assim:

$$\begin{aligned} \widehat{v+u}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= ((v+u)(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (v(x_n) + u(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (v(x_n))_{n\in\mathbb{N}} + (u(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \hat{v}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) + \hat{u}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

□

Agora vamos relacionar os operadores p-somantes com as sequências fracas p-somáveis e fortes p-somáveis.

Proposição 5.1.18. *Sejam $1 \leq p < \infty$, X, Y espaços de Banach, $u : X \longrightarrow Y$ e $\hat{u}$ como definido no lema 5.1.14. O operador u é p-somante se, e somente se, $\hat{u}(l_p^w(X)) \subset l_p^s(Y)$. Neste caso, $\|\hat{u} : l_p^w(X) \longrightarrow l_p^s(Y)\| = \pi_p(u)$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que u seja p-somante. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_m \in X$ vetores arbitrários. Por definição, temos que:

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \|u(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{n=1}^{m} |x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

Seja $(x_n) \in l_p^w(X)$. Então:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|u(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n=1}^{m} \|u(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{n=1}^{m} |x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \pi_p(u) \sup_{m \in \mathbb{N}} \left\{\left(\sum_{n=1}^{m} |x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \\
&= \sup_{x^* \in B_{X^*}} \pi_p(u) \|(x_n)\|_p^s \\
&= \pi_p(u) \|(x_n)\|_p^w
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\|\hat{u}((x_n))\|_p^s \leq \pi_p(u) \|(x_n)\|_p^w$$

e temos que $(u(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \in l_p^s(Y)$. Notemos ainda que $(*)$ $\quad \|\hat{u}\| \leq \pi_p(u)$, já que $\|\hat{u}\| = \inf\{C;\ \|\hat{u}(x_n)\|_p^s \leq C\|(x_n)\|_p^w,\ \ \forall (x_n) \in l_p^w(X)\}$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $\hat{u}(l_p^w(X)) \subset l_p^s(Y)$.

Queremos mostrar que a aplicação $\hat{u} : (l_p^w(X), \|\ \|_p^w) \longrightarrow (l_p^s(Y), \|\ \|_p^s)$ é contínua. Para tal, utilizaremos o teorema do gráfico fechado. Seja $\Gamma = \{((x_n), \hat{u}(x_n));\ (x_n) \in l_p^w(X)\}$ o gráfico da aplicação $\hat{u}$.

Seja $((x_n), (y_n)) \in \overline{\Gamma}$. Então existe uma sequência $((x_n^k), \hat{u}(x_n^k)) \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} ((x_n), (y_n))$. Daí temos que $(x_n^k) \overset{\|\ \|_p^w}{\longrightarrow} (x_n)$ e que $(\hat{u}x_n^k) \overset{\|\ \|_p^s}{\longrightarrow} (y_n)$, quando $k \longrightarrow \infty$.

Seja dado $\varepsilon > 0$. Como $(x_n^k) \overset{\|\ \|_p^w}{\longrightarrow} (x_n)$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|(x_n^k) - (x_n)\|_p^w < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0$$

Assim, para todo $k \geq k_0$, segue que:

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n^k) - x^*(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} < \varepsilon$$

Para todo $k \geq k_0$, para todo $x^* \in B_{X^*}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$|x^*(x_n^k) - x^*(x_n)| < \varepsilon \implies$$
$$|x^*(x_n^k - x_n)| < \varepsilon$$

Tomando o supremo sobre todos funcionais $x^* \in B_{X^*}$, para todo $k \geq k_0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que:

$$\sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x_n^k - x_n)| < \varepsilon$$

Utilizando o teorema de Hahn-Banach, para todo $k \geq k_0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\|x_n^k - x_n\|_X < \varepsilon$$

Logo, $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} x_n^k = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $u : X \longrightarrow Y$ é um operador contínuo segue que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} ux_n^k = ux_n$.

Por outro lado, como $\hat{u}(x_n^k) \overset{\| \|_p^s}{\longrightarrow} (y_n)$ em $l_p^s(Y)$, existe $k_0^{'} \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \|ux_n^k - y_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0^{'}$$

Assim, para todo $k \geq k_0^{'}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$\|ux_n^k - y_n\| < \varepsilon$$

Daí segue que $\lim\limits_{k \longrightarrow \infty} ux_n^k = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pela unicidade do limite temos que $u(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $((x_n), (y_n)) \in \Gamma$. Como $\hat{u} : (l_p^w(X), \| \|_p^w) \longrightarrow (l_p^s(Y), \| \|_p^s)$ é linear, Γ é um conjunto fechado e $l_p^w(X), l_p^s(Y)$ são espaços de Banach, segue pelo teorema do gráfico fechado concluímos que $\hat{u}$ é contínuo.

Como $\hat{u} : (l_p^w(X), \| \|_p^w) \longrightarrow (l_p^s(Y), \| \|_p^s)$ é contínuo, segue que:

$$\|\hat{u}(x_n)\|_p^s \leq \|\hat{u}\| \|(x_n)\|_p^w, \quad \forall (x_n) \in l_p^w(X)$$

Como $\hat{u}(x_n) = (ux_n)_{n \in \mathbb{N}}$, concluímos que:

$$\|(ux_n)\|_p^s \leq \|\hat{u}\| \|(x_n)\|_p^w, \quad \forall (x_n) \in l_p^w(X)$$

Fixemos $m \in \mathbb{N}$. Tomemos $x_1, \ldots, x_m \in X$.
Consideremos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots) \in l_p^w(X)$. Assim:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\hat{u}\| \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{m} |x^*(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

Logo, u é p-somante e $\pi_p(u) \leq \|\hat{u}\|$, donde concluímos por $(*)$ que $\|\hat{u}\| = \pi_p(u)$. $\square$

Vamos apresentar alguns operadores p-somantes especiais e algumas propriedades dessa classe.

Definição 5.1.19. *Sejam X, Y espaços de Banach. Um operador $u \in \mathscr{L}(X,Y)$ é dito de posto finito se* $\dim u(X) < \infty$.

Lema 5.1.20. *Um operador $u \in \mathscr{L}(X,Y)$ tem posto um se, e somente se, existem $x^* \in X^*$, $y \in Y$ tais que*

$$\begin{array}{rccc} u: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & x^*(x)y \end{array}$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Seja $u \in \mathscr{L}(X,Y)$ um operador de posto um. Assim, $\dim u(X) = 1$. Digamos que $u(X) = [y]$, para certo $y \in Y$. Seja $z \in u(X)$. Como $u(X) = [y]$, existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $z = \alpha y$. Além disso, existe $x \in X$ tal que $u(x) = z = \alpha y$. Assim, para cada $x \in X$ existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $u(x) = \alpha y$.

Vamos definir a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & X & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \alpha_x \end{array}$$

onde $u(x) = \alpha_x y$.

A função φ é linear. De fato, sejam $x, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Observemos que $u(z) = \alpha_x y$ e $u(x) = \alpha_z y$,Assim:

$$u(x) + \lambda u(z) = (\alpha_x + \lambda\alpha_z)y$$

Como X é espaço vetorial segue que $x + \lambda z \in X$. Temos que $u(x + \lambda z) = \beta y$, para certo $\beta \in \mathbb{K}$. Logo:

$$(\alpha_x + \lambda\alpha_z)y = u(x) + \lambda u(z) = u(x + \lambda z) = \beta y$$

Daí, $\alpha_x + \lambda\alpha_z = \beta$. Portanto:

$$\varphi(x + \lambda z) = \beta = \alpha_x + \lambda\alpha_z = \varphi(x) + \lambda\varphi(z)$$

A função φ é limitada. De fato, seja $x \in X$. Existe $\alpha_x \in \mathbb{K}$ tal que $u(x) = \alpha_x y$. Notemos que $\varphi(x) = \alpha_x$. Assim:

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= |\alpha_x| = |\alpha_x|\frac{\|y\|}{\|y\|} \\ &= \frac{|\alpha_x|\|y\|}{\|y\|} = \frac{|u(x)|}{\|y\|} \\ &\leq \frac{\|u\|}{\|y\|}\|x\| \end{aligned}$$

Portanto:

$$|\varphi(x)| \leq \frac{\|u\|}{\|y\|}\|x\|, \quad \forall x \in X$$

Concluímos que $\varphi \in X^*$. Vamos denotar $\varphi = x^*$. Para cada $x \in X$, observemos que:

$$u(x) = \alpha_x y = x^*(x)y$$

Portanto, u pode ser reescrito como:

$$\begin{array}{rccc} u: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & x^*(x)y \end{array}$$

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $u \in \mathscr{L}(X,Y)$ possa ser escrito como

$$\begin{array}{rccc} u: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & x^*(x)y \end{array}$$

para algum $x^* \in X^*$ e algum $y \in Y$.

Assim, $u(X) = [y]$, para certo $y \in Y$, donde concluímos que $\dim u(X) = 1$. $\square$

Lema 5.1.21. *Sejam X, Y espaços de Banach e $u \in \mathscr{L}(X,Y)$. Se u pode ser escrito como:*

$$\begin{array}{rccc} u: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & x^*(x)y \end{array}$$

para algum funcional não-nulo $x^* \in X^*$ e algum $y \in Y$ então $u \in \Pi_p(X,Y)$ com $\pi_p(u) = \|x^*\|\|y\|$.

Demonstração. Vamos mostrar que u é um operador p-somante.
Sejam $x_1, \ldots, x_m$ vetores do espaço X. Observemos que:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{m} \|ux_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^{m} \|x^*(x)y\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} |x^*(x)|^p \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} \|x^*\|^p \left|\frac{x^*(x)}{\|x^*\|}\right|^p \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x^*\|\|y\| \left(\sum_{k=1}^{m} \left|\frac{x^*(x)}{\|x^*\|}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|x^*\|\|y\|\|(x_k)^m\|_p^w \end{aligned}$$

Assim:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|ux_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x^*\|\|y\|\|(x_k)^m\|_p^w \qquad (*)$$

Logo, $u \in \Pi_p(X,Y)$.

Como $\pi_p(u) = \inf \left\{ C; \left(\sum_{i=1}^{m} \|u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad m \in \mathbb{N} \right\}$ segue por $(*)$ que

$$\pi_p(u) \leq \|x^*\|\|y\|$$

Por outro lado:

$$\|x^*\|\|y\| = \sup_{x \in B_X} |x^*(x)|\|y\| = \sup_{x \in B_X} \|x^*(x)y\| = \sup_{x \in B_X} \|u(x)\| = \|u\| \leq \pi_p(u)$$

Portanto, $\pi_p(u) = \|x^*\|\|y\|$. □

Vamos mostrar agora que operadores de posto finito são operadores p-somantes.

Proposição 5.1.22. *Seja $u \in \mathscr{L}(X, Y)$ um operador com posto finito. Então, u é p-somante para todo $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Por hipótese temos que $\dim u(X) < \infty$. Digamos que $\dim u(X) = n$. Tomemos $\{y_1, \ldots, y_n\}$ uma base para o subespaço $u(X)$. Fixado $z \in u(X)$, existem únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = z$.

Assim, para cada $1 \leq i \leq n$ podemos definir:

$$\begin{array}{rccc} x_i^* : & X & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \alpha_i \end{array}$$

onde $u(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j$

Pelos mesmos argumentos similares ao lema 5.1.20 temos que x_i^* é linear e contínua, para cada $1 \leq i \leq n$.

Podemos reescrever o operador u como:

$$\begin{array}{rccc} u : & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i^* y_i \end{array}$$

Como u é a soma de operadores de posto 1 (os quais são operadores p-somantes) e $\Pi_p(X, Y)$ é um espaço vetorial, concluímos que u é um operador p-somante. □

Vamos examinar agora como operadores p-somantes se comportam com relação a composições.

Proposição 5.1.23. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $v \in \Pi_p(X, Y)$. A composição de v com qualquer operador linear limitado é um operador p-somante. Mais especificamente, se X_0, Y_0 são espaços de Banach então para quaisquer $u \in \mathscr{L}(Y, Y_0)$ e $w \in \mathscr{L}(X_0, X)$, sempre teremos $uvw \in \Pi_p(X_0, Y_0)$ com $\pi_p(u \circ v \circ w) \leq \|u\|\pi_p(v)\|w\|$.*

Demonstração. Sejam $x_1, \ldots, x_m \in X_0$. Então:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} \|u \circ v \circ w(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|u\| \left(\sum_{i=1}^{m} \|vw(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\| \left(\sum_{i=1}^{m} \|v(wx_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|u\|\pi_p(v) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(wx_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|\pi_p(v)\|w\| \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} \left|x^*\left(\frac{wx_i}{\|w\|}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|\pi_p(v)\|w\| \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} \left|\frac{x^*w(x_i)}{\|w\|}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|u\|\pi_p(v)\|w\| \sup_{x_0^* \in B_{X_0^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |x_0^*(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Logo, $u \circ v \circ w$ é p-somante e $\pi_p(uvw) \leq \|u\|\pi_p(v)\|w\|$. □

Corolário 5.1.24 (Restrição). *Se X_0 é subespaço vetorial de X e $v : X \longrightarrow Y$ é um operador p-somante, então a restrição $v_{|X_0} : X_0 \longrightarrow Y$ é também p-somante, com $\pi_p(v_{|X_0}) \leq \pi_p(v)$.*

Demonstração. Vamos considerar os seguintes operadores:

$$\begin{array}{rccc}
u: & X_0 & \hookrightarrow & X \\
 & x & \longmapsto & x
\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc}
w: & Y & \longrightarrow & Y \\
 & y & \longmapsto & y
\end{array}$$

Pela proposição 5.1.23 segue que $v_{|X_0} = wvu$ é p-somante. Além disso, sabendo que $\|w\| = \|u\| = 1$ segue que:

$$\begin{aligned}
\pi_p(v_{|X_0}) &= \\
\pi_p(wuv) &\leq \\
\|w\|\pi_p(v)\|u\| &= \\
\pi_p(v)
\end{aligned}$$

□

Corolário 5.1.25 (Extensão). *Se Y é subespaço de Y_0 e $v : X \longrightarrow Y$ é um operador p-somante então $v : X \longrightarrow Y_0$ é também p-somante.*

Demonstração. Vamos considerar os operadores:

$$\begin{array}{rccc} u: & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} w: & Y & \longrightarrow & Y_0 \\ & y & \longmapsto & y \end{array}$$

Segue pela proposição 5.1.23 que $v = wvu$ é p-somante. □

Proposição 5.1.26. *Se $i : Y \longrightarrow Y_0$ é uma isometria, então $v \in \Pi_p(X, Y)$ se, e somente se, $iv \in \Pi_p(X, Y_0)$. Neste caso, temos que $\pi_p(iv) = \pi_p(v)$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $v \in \Pi_p(X, Y)$. Sejam $x_1, \ldots, x_m \in X$ vetores arbitrários de X. Então:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|v(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(v) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{k=1}^{m} |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

Como i é isometria, segue que $\|i(vx_k)\|_{Y_0} = \|vx_k\|_Y$ para todo $1 \leq k \leq m$. Assim:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{m} \|i(vx_k)\|_{Y_0}^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^{m} \|v(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p(v) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{k=1}^{m} |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \end{aligned}$$

Portanto $iv \in \Pi_p(X, Y_0)$. De (1) concluímos que $\pi_p(iv) \leq \pi_p(v)$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $iv \in \Pi_p(X, Y_0)$. Sejam $x_1, \ldots, x_m \in X$. Então:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|i(vx_k)\|_{Y_0}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(iv) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{k=1}^{m} |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

Como $\|i(vx_k)\|_{Y_0} = \|vx_k\|_Y$, para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$ temos:

$$(2) \qquad \left(\sum_{k=1}^{m} \|(vx_k)\|_{Y}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(iv) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left\{\left(\sum_{k=1}^{m} |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

Daí $v \in \Pi_p(X, Y)$.

De (2) concluímos que $\pi_p(v) \leq \pi_p(iv)$.
Portanto, $\pi_p(v) = \pi_p(iv)$. □

Vamos mostrar agora que o espaço dos operadores p-somantes é completo.

Proposição 5.1.27. *Sejam X, Y espaços de Banach. Então, $(\Pi_p(X, Y), \pi_p)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset \Pi_p(X,Y)$ uma π_p sequência de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\pi_p(u_n - u_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Como $\|v\| \leq \pi_p(v)$ para todo $v \in \Pi_p(X,Y)$, segue que:

$$\|u_n - u_m\| \leq \pi_p(u_n - u_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Logo, (u_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathscr{L}(X,Y)$. Como $\mathscr{L}(X,Y)$ é um espaço de Banach segue que (u_n) converge em $\mathscr{L}(X,Y)$, digamos que $u_n \overset{\| \|_{\mathscr{L}(X,Y)}}{\longrightarrow} u$.

Podemos associar u ao operador $\hat{u} : l_p^w(X) \longrightarrow l_p^w(Y)$ que é um operador linear e contínuo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que u_n é p-somante. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, u_n pode ser associado ao operador:

$$\begin{array}{rccc} \widehat{u_n} : & l_p^w(X) & \longrightarrow & l_p^s(Y) \\ & (x_k) & \longmapsto & (u_n x_k)_{k\in\mathbb{N}} \end{array}$$

que é linear e limitado. Observemos que:

$$\|\widehat{u_n} - \widehat{u_m}\| = \|\widehat{u_n - u_m}\| = \pi_p(u_n - u_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Então, $(\widehat{u_n})$ é uma sequência de Cauchy em $\mathscr{L}(l_p^w(X), l_p^s(Y))$. Como $l_p^s(Y)$ é um espaço de Banach segue que $\mathscr{L}(l_p^w(X), l_p^s(Y))$ é um espaço de Banach. Portanto, $(\widehat{u_n})$ converge para algum elemento de $\mathscr{L}(l_p^w(X), l_p^s(Y))$.

Digamos que $\widehat{u_n} \overset{\| \|_{\mathscr{L}(l_p^w(X), l_p^s(Y))}}{\longrightarrow} v$. Como $l_p^s(Y) \subset l_p^w(Y)$ observemos que $\widehat{u_n}$ pode ser definido como $\widehat{u_n} : l_p^w(X) \longrightarrow l_p^w(Y)$.

Queremos mostrar que $\widehat{u_n} \overset{\| \|_{\mathscr{L}(l_p^w(X), l_p^w(Y))}}{\longrightarrow} v$.

Para cada $x = (x_k) \in l_p^w(X)$ consideremos $v((x_k)) = (v_k^x) \in l_p^s(Y)$.

Como $\widehat{u_n} \overset{\| \|_{\mathscr{L}(l_p^w(X), l_p^s(Y))}}{\longrightarrow} v$, segue que $\widehat{u_n}((x_k)) \longrightarrow v((x_k)_k) = (v_k^x)_k$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\|(u_n x_k)_k - (v_k^x)_k\|_{l_p^s(Y)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u_n x_n - v_k^x\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Em particular:

$$\|u_n x_n - v_k^x\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Assim, $u_n x_k \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} v_k^x$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Fixado $k \in \mathbb{N}$, temos que $u_n x_k \longrightarrow u x_k$. Logo, existe $n_0^{'}$ tal que:

$$\|u_n x_k - u x_k\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0^{'}.$$

Tomando $N = \max\{n_0, n_0^{'}\}$ temos que:

$$\begin{aligned} \|v_k^x - u x_k\|_Y &\leq \|v_k^x - u_N x_k + u_N x_k - u x_k\|_Y \\ &\leq \|v_k^x - u_N x_k\|_Y + \|u_N x_k - u x_k\|_Y \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Logo, $u x_k = v_k^x$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\widehat{u}((x_k)) = (u x_k)_k = (v_k^x) = v((x_k))$. Assim, $\widehat{u} = v$.

Como $v : l_p^w(X) \longrightarrow l_p^s(Y)$ e $v = \widehat{u}$, temos que $v(l_p^w(X)) \subset l_p^s(Y)$. Pela proposição 5.1.18, temos que $u = \lim_n u_n$ é p-somante. $\square$

Teorema 5.1.28. *Se* $1 \leq p < q < \infty$ *então* $\Pi_p(X,Y) \subset \Pi_q(X,Y)$. *Além disso, para* $u \in \Pi_p(X,Y)$ *então* $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$

Demonstração. Sejam $x_1, \ldots, x_m \in X$ vetores arbitrários.

Consideremos $\lambda_k = \|u(x_k)\|^{\frac{q}{p}-1}$, para todo $1 \leq k \leq m$.

Temos que $\|u(x_k)\|^q = \|u(\lambda_k x_k)\|^p$. De fato, fixado $1 \leq k \leq m$, temos que:

$$\begin{aligned} \|u(\lambda_k x_k)\|^p &= \|u(\|u(x_k)\|^{\frac{q}{p}-1} x_k)\|^p \\ &= \|\|u(x_k)\|^{\frac{q-p}{p}} u(x_k)\|^p \\ &= \|u(x_k)\|^{q-p}\|u(x_k)\|^p \\ &= \|u(x_k)\|^q \end{aligned}$$

Seja $u \in \Pi_p(X,Y)$. Logo, u é um operador p-somante. Assim:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^m \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=1}^m \|u(\lambda_k x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^p |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Como $q > p$ observamos que $\frac{q}{p}$ e $\frac{q}{(q-p)}$ são conjugados. De fato:

$$\frac{1}{\frac{q}{p}} + \frac{1}{\frac{q}{(q-p)}} = \frac{p}{q} + \frac{q-p}{q} = \frac{q}{q} = 1$$

Fixemos $x^* \in B_{X^*}$. Usando a desigualdade de Holder, observamos que:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^p |x^*(x_k)|^p\right) &\leq \left(\sum_{k=1}^m (\lambda_k^p)^{\frac{q}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\sum_{k=1}^m (|x^*(x_k)|^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\sum_{k=1}^m (|x^*(x_k)|^q\right)^{\frac{p}{q}}\end{aligned}$$

Assim, para todo $x^* \in B_{X^*}$ temos:

$$\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^p |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}} \left(\sum_{k=1}^m (|x^*(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Aplicando o supremo sobre todo $x^* \in B_{X^*}$ obtemos:

$$\begin{aligned}\sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^p |x^*(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}} \left(\sum_{k=1}^m (|x^*(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^m (|x^*(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\left(\sum_{k=1}^m \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^m (|x^*(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \Longrightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^m \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u) \left(\sum_{k=1}^m \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{q-p}{pq}} \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^m (|x^*(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \Longrightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^m \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{p}-\frac{q-p}{pq}} \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^m (|x^*(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \Longrightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^m \|u(x_k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p(u) \sup_{x^* \in B_{X^*}} \left(\sum_{k=1}^m (|x^*(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Logo, $u \in \Pi_q(X, Y)$ e $\pi_q(u) \leq \pi_p(u)$. □

Abaixo apresentaremos alguns exemplos clássicos de operadores p-somantes.

Exemplo 5.1.29. *Seja K um espaço Hausdorff compacto, μ uma medida regular de Borel sobre K e seja $1 \leq p < \infty$. Cada operador $\varphi \in L_p(\mu)$ induz um operador multiplicação:*

$$\begin{array}{rccc} M_\varphi : & C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ & f & \longmapsto & f.\varphi \end{array}$$

Este operador é p-somante com $\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p$.

Demonstração. Sejam $f_1, \ldots, f_m \in C(K)$ elementos arbitrários.

Consideremos o seguinte conjunto:

$$A = \left\{ \begin{array}{rccc} \delta_w : & C(K) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & f & \longmapsto & f(w) \end{array} \quad ; \ w \in K \right\}$$

Seja $f \in C(K)$. Notemos que:

$$\|f\|_{C(K)} = \sup_{w\in K} |f(w)| = \sup_{w\in K} |\delta_w(f)| = \sup_{\delta_w\in A} |\delta_w(f)| = \sup_{x^*\in A} |x^*(f)|$$

Temos que $\displaystyle\sup_{x^*\in B_{C(K)^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x^*\in A} \left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

De fato, utilizando o teorema de Hahn-Banach (H.B) temos que:

$$\begin{aligned}
\sup_{x^*\in B_{C(K)^*}} \left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{x^*\in B_{C(K)^*}} \|(x^*(f_i))_{i=1}^m\|_p \\
&\overset{(H.B)}{=} \sup_{x^*\in B_{C(K)^*}} \sup_{a\in B_{l_{p^*}^m}} |a((x^*(f_i))_{i=1}^m)| \\
&= \sup_{x^*\in B_{C(K)^*}} \sup_{a\in B_{l_{p^*}^m}} \left|\sum_{i=1}^{m} a_i x^*(f_i)\right| \\
&= \sup_{a\in B_{l_{p^*}^m}} \sup_{x^*\in B_{C(K)^*}} \left|\sum_{i=1}^{m} a_i x^*(f_i)\right| \\
&= \sup_{a\in B_{l_{p^*}^m}} \sup_{x^*\in B_{C(K)^*}} \left|x^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right)\right| \\
&\overset{(H.B)}{=} \sup_{a\in B_{l_{p^*}^m}} \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right\|_{C(K)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{a\in B_{l_{p^*}^m}} \sup_{x^*\in A} \left|x^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right)\right| \\
&= \sup_{x^*\in A} \sup_{a\in B_{l_{p^*}^m}} \left|x^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right)\right| \\
&= \sup_{x^*\in A} \sup_{a\in B_{l_{p^*}^m}} \left|\sum_{i=1}^{m} a_i x^*(f_i)\right| \\
&= \sup_{x^*\in A} \|(x^*(f_i))_{i=1}^m\| \\
&= \sup_{x^*\in A} \left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
\|(f_i)_1^m\|_p^w &= \sup_{x^*\in B_{C(K)^*}} \left(\sum_{i=1}^m |x^*(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{x^*\in A} \left(\sum_{i=1}^m |x^*(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{w\in K} \left(\sum_{i=1}^m |f_i(w)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\| \left(\sum_{i=1}^m |f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\|_\infty
\end{aligned}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^m \|M_\varphi(f_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^m \|f_i\cdot\varphi\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^m \int_\mu |f_i(w)\varphi(w)|^p d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^m \int_\mu |f_i(w)|^p|\varphi(w)|^p d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\mu \sum_{i=1}^m |f_i(w)|^p|\varphi(w)|^p d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\mu |\varphi(w)|^p \left(\sum_{i=1}^m |f_i(w)|^p\right) d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_\mu |\varphi(w)|^p \sup_{w\in K}\left(\sum_{i=1}^m |f_i(w)|^p\right) d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_\mu |\varphi(w)|^p d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{w\in K}\left(\sum_{i=1}^m |f_i(w)|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|\varphi\|_p \left(\sup_{w\in K}\left(\sum_{i=1}^m |f_i(w)|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Logo, M_φ é p-somante com $\pi_p(M_\varphi) \leq \|\varphi\|_p$.

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_p &= \|M_\varphi(I_d)\| \\
&\leq \|M_\varphi\| \\
&\leq \pi_p(M_\varphi)
\end{aligned}$$

Portanto, $\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p$. □

Exemplo 5.1.30. *Seja K um espaço Hausdorff compacto, μ uma medida de Borel positiva sobre K e seja $1 \leq p < \infty$. A aplicação canônica:*

$$\begin{array}{rccc} j_p : & C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ & f & \longmapsto & f \end{array}$$

é p-somante com $\pi_p(j_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.

Demonstração. Observemos que:

$$\begin{array}{rccc} j_p = M_{I_d} : & C(K) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ & f & \longmapsto & f.I \end{array}$$

Portanto, pelo exemplo 5.1.29 segue que j_p é p-somante.

Sejam $f_1, \ldots, f_m \in C(K)$. Para cada $w \in K$ existe $\delta_w \in C(K)^*$ tal que $\delta_w(f) = f(w)$. Assim:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{m} \|j_p(f_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{m} \|f_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\int_\mu |f_i|^p d\mu\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} \int_\mu |f_i(w)|^p d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_\mu \sup_{w \in K} \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(w)|^p\right) d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sup_{w \in K} \sum_{i=1}^{m} |f_i(w)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\mu d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{w \in K} \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(w)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\mu d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\| \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(w)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \right\|_\infty (\mu(K))^{\frac{1}{p}} \\ &= \|(f_i)_1^m\|_p^w \, (\mu(K))^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Logo, $\pi_p(j_p) \leq (\mu(K))^{\frac{1}{p}}$.

Por outro lado:

$$(\mu(K))^{\frac{1}{p}} = \|1\|_p = \|j_p(1)\| \leq \|j_p\| \leq \pi_p(j_p)$$

Assim, $\pi_p(j_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$. $\square$

Exemplo 5.1.31. *Sejam* (Ω, Σ, μ) *um espaço mensurável e* $1 \leq p < \infty$. *Cada operador* $\varphi \in L_p(\mu)$ *induz um operador multiplicação:*

$$\begin{array}{rccc} M_\varphi : & L_\infty(\mu) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\ & f & \longmapsto & f.\varphi \end{array}$$

Esse operador é p-somante com $\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p$.

Demonstração. Sejam $f_1, \ldots, f_m \in L_\infty(\mu)$. A identidade:

$$\|(f_i)_1^m\|_p^w = \left\| \left(\sum_{i=1}^m |f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_\infty .$$

não é obtida tão "facilmente"como nos passos tomados no exemplo 5.1.29. Por isso, devemos escolher outro caminho para garantir que M_φ seja p-somante.

Vamos considerar a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} u : & l_{p^*}^m & \longrightarrow & L_\infty(\mu) \\ & a = (a_1, \ldots, a_m) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^m a_i f_i \end{array}$$

Para cada conjunto $\mu-$nulo e $N \in \Sigma$ observemos que:

$$\begin{aligned} \|(f_i)_1^m\|_p^w &= \sup_{x^* \in B_{(L_\infty(\Omega))^*}} \left(\sum_{i=1}^m |x^*(f_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{x^* \in B_{(L_\infty(\Omega))^*}} \|(x^*(f_i))_1^m\|_p \\ &\overset{(H.B)}{=} \sup_{x^* \in B_{(L_\infty(\Omega))^*}} \sup_{a \in B_{l_{p^*}^m}} |a(x^*(f_i))_1^m)| \\ &= \sup_{x^* \in B_{(L_\infty(\Omega))^*}} \sup_{a \in B_{l_{p^*}^m}} \left\| \sum_{i=1}^m a_i x^*(f_i) \right\| \\ &= \sup_{x^* \in B_{(L_\infty(\Omega))^*}} \sup_{a \in B_{l_{p^*}^m}} \left\| x^* \left(\sum_{i=1}^m a_i f_i \right) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sup_{a \in B_{l_{p^*}^m}} \sup_{x^* \in B_{(L_\infty(\Omega))^*}} \left\| x^* \left(\sum_{i=1}^m a_i f_i \right) \right\| \\ &= \sup_{a \in B_{l_{p^*}^m}} \left\| \sum_{i=1}^m a_i f_i \right\|_\infty \\ &= \sup_{a \in B_{l_{p^*}^m}} \|u(a)\|_\infty \\ &= \|u\| \end{aligned}$$

Para cada $x = (x_1, \ldots, x_m) \in B_{l_{p^*}^m}$ temos que:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i(w)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i\right\|$$

para todo $w \in \Omega/N$, onde $N \in \Sigma$ e $\mu(N) = 0$.

Vamos tomar uma sequência $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tais que $c_n \longrightarrow \|f\|_\infty$ e $\left|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i(w)\right| \leq c_n$ para $w \in \Omega/N_n$ com $\mu(N) = 0$ onde $f = \sum_{i=1}^{m} x_i f_i$.

A sequência $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe. De fato, como $\|f\|_\infty = \inf\{C;\ |f(x)| \leq C$ quase sempre em $\Omega\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $c_n \in \|f\|_\infty$ tal que $\|f\|_\infty \leq c_n \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{n}$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$ obtemos que $c_n \longrightarrow \|f\|_\infty$ e pela definição do conjunto segue que $|f(w)| = \left|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i(w)\right| \leq c_n$, para todo $w \in \Omega/N_n$ onde $\mu(N_n) = 0$.

Consideremos $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$. Assim, temos que $\left|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i(w)\right| \leq c_n$, para todo $w \in \Omega/N_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\mu(N) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = 0$.

Como $\lim_{n\to\infty} = \|f\|_\infty = \left\|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i\right\|_\infty$ segue que $\left|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i(w)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i\right\|_\infty$ para todo $w \in \Omega/N$.

Sendo $l_{p^*}^m$ um espaço separável, consideremos $D \subset B_{l_{p^*}^m}$ um conjunto denso e separável. Podemos obter um conjunto $N^1 \in \Sigma$ de medida nula tal que:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i(w)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i\right\|_\infty \qquad (*)$$

para todo $w \in \Omega/N^1$, para todo $x = (x_i)_1^m \in D$. De fato, para cada $x \in D$ existe $N^x \in \Sigma$ com $\mu(N^x) = 0$ tal que:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i(w)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i\right\|_\infty \qquad (**)$$

para todo $w \in \Omega/N^x$. Escrevamos $N' = \bigcup_{x\in D} N^x$. Como D é enumerável temos que:

$$\mu(N') = \mu\left(\bigcup_{x\in D} N^x\right) = \sum_{x\in D} \mu(N^x) = 0$$

Se $w \in \Omega/N^1$ então $w \in \Omega/N'$, para todo $x \in D$ e então:

$$\left|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i(w)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} x_i f_i\right\|_\infty \qquad (***)$$

para todo $x \in D$. Assim:

$$\begin{aligned}
\sup_{w\in\Omega/N'}\left(\sum_{i=1}^{m}|f_i(w)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{w\in\Omega/N'}\sup_{x\in B_{l^m_{p^*}}}\left|\sum_{i=1}^{m}x_if_i(w_i)\right| \\
&\overset{\overline{D}=B_{l^m_{p^*}}}{=} \sup_{w\in\Omega/N'}\sup_{x\in D}\left|\sum_{i=1}^{m}x_if_i(w_i)\right| \\
&= \sup_{x\in D}\sup_{w\in\Omega/N'}\left|\sum_{i=1}^{m}x_if_i(w_i)\right| \\
&\overset{(***)}{\leq} \sup_{x\in D}\left\|\sum_{i=1}^{m}x_if_i\right\|_{\infty} \\
&\overset{\overline{D}=B_{l^m_{p^*}}}{=} \sup_{x\in B_{l^m_{p^*}}}\left\|\sum_{i=1}^{m}x_if_i\right\|_{\infty} \\
&= \|u\| \\
&= \|(f_i)_1^m\|_p^w
\end{aligned}$$

Assim:

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^{m}|f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\|_{\infty} = \sup_{w\in\Omega/N'}\left(\sum_{i=1}^{m}|f_i(w)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(f_i)_1^m\|_p^w \quad (1)$$

Sabemos também que:

$$\|(f_i)_1^m\|_p^w = \|u\| = \sup_{a\in B_{l^m_{p^*}}}\left\|\sum_{i=1}^{m}a_if_i\right\|_{\infty}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m}\|M_\varphi(f_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{m}\|f_i.\varphi\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{\Omega}|f_i.\varphi|^pd\mu\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega/N'}|f_i(w)\varphi(w)|^pd\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m}\int_{\Omega/N'}|f_i(w)|^p|\varphi(w)|^pd\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\Omega/N'}\sum_{i=1}^{m}|f_i(w)|^p|\varphi(w)|^pd\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_{\Omega/N'} |\varphi(w)|^p \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(w)|^p\right) d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega/N'} |\varphi(w)|^p \sup_{w\in\Omega/N'} \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(w)|^p\right) d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\Omega/N'} |\varphi(w)|^p \sup_{w\in\Omega/N'} \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(w)|^p\right) d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\Omega/N'} |\varphi(w)|^p d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{w\in\Omega/N'} \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(w)|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(1)}{\leq} \left(\int_{\Omega/N'} |\varphi(w)|^p d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \|(f_i)_1^m\|_p^w \\
&= \|\varphi\|_p \|(f_i)_1^m\|_p^w
\end{aligned}
$$

Logo:

$$\pi_p(M_\varphi) \leq \|\varphi\|_p$$

Por outro lado:

$$\|\varphi\|_p = \|1.\varphi\|_p = \|M_\varphi(1)\|_p \leq \|M_\varphi\|_p \leq \pi_p(M_\varphi)$$

$\therefore \pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p$. □

Exemplo 5.1.32. *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita e $1 \leq p < \infty$. A operação inclusão:*

$$
\begin{array}{rccc}
i_p: & L_\infty(\mu) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\
& f & \longmapsto & f
\end{array}
$$

é p-somante com $\pi_p(i_p) = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}$.

Demonstração. Podemos observar que:

$$
\begin{array}{rccc}
i_p = M_1: & L_\infty(\mu) & \longrightarrow & L_p(\mu) \\
& f & \longmapsto & f.1
\end{array}
$$

Portanto, pelo exemplo 5.1.31 segue que i_p é p-somante.

Também pelo exemplo 5.1.31 sabemos que $\pi_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p$. Logo:

$$
\begin{aligned}
\pi_p(i_p) &= \pi_p(M_1) \\
&= \|1\|_p \\
&= \left(\int 1^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int 1 d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 5.1.33 (**Operador diagonal**). *Seja* $1 \leq p < \infty$. *Qualquer elemento* $(\lambda_n) \in l_p$ *induz um operador diagonal:*

$$\begin{array}{rccc} D_\lambda : & l_\infty & \longrightarrow & l_p \\ & (a_n) & \longmapsto & (\lambda_n a_n) \end{array}$$

que é p-somante com $\pi_p(D_\lambda) = \|\lambda\|_p$.

Demonstração. Considerando (Ω, Σ, μ) como $(\mathbb{N}, \Sigma, \mu)$, onde μ é uma medida de contagem sobre $\mathbb{N}$ temos que $L_\infty(\Omega)$ torna-se l_∞ e que $L_p(\Omega)$ torna-se l_p. Portanto, considerando $\lambda = (\lambda_n) = \varphi$ temos que:

$$\begin{array}{rccc} D_\lambda = M_\varphi : & l_\infty & \longrightarrow & l_p \\ & (a_n) & \longmapsto & (\lambda_n a_n) \end{array}$$

Assim, pelo exemplo 5.1.31 concluímos que D_λ é p-somante. Além disso:

$$\pi_p(D_\lambda) = \pi_p(M_\varphi) = \|\lambda\|_p$$

□

5.2 O teorema de Grothendieck para espaços $\mathcal{L}_p$

Apresentamos outras versões do teorema de Grothendieck. Para tal, definimos os espaços $\mathcal{L}_p$ que de maneira geral, possuem subespaços de dimensão finita que comportam-se como espaços l_p^n, para certo $n \in \mathbb{N}$.

Os resultados e definições desta seção podem ser encontrados em [4], capítulo 3, da página 60 até 68.

Definição 5.2.1 (**Espaço** $\mathcal{L}_{p,\lambda}$). *Sejam* $1 \leq p < \infty$, $\lambda > 1$ *e* X *um espaço de Banach. Dizemos que* X *é um espaço* $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *se todo subespaço de dimensão finita* $E \subset X$ *está contido em um subespaço* $F \subset X$ *tal que existe um isomorfismo* $v : F \longrightarrow l_p^{dim F}$ *com* $\|v\|\|v^{-1}\| < \lambda$.

Definição 5.2.2 (**Espaço** $\mathcal{L}_p$). *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* X *um espaço de Banach. Dizemos que* X *é um* $\mathcal{L}_p$ *espaço se ele for um espaço* $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *para algum* $\lambda > 1$.

Teorema 5.2.3. *Sejam* X *um espaço* $\mathcal{L}_{1,\lambda}$ *e* Y *um espaço* $\mathcal{L}_{2,\lambda'}$. *Então, todo operador contínuo* $u : X \longrightarrow Y$ *é 1-somante com* $\pi_1(u) \leq K_G \lambda \lambda' \|u\|$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ elementos arbitrários.

Consideremos o espaço $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle \subset X$, gerado pelos elementos $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Como X é um espaço $\mathcal{L}_{1,\lambda}$ e $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$ é um subespaço de X de dimensão finita, existe um subespaço de dimensão finita $E \subset X$, digamos $\dim E = n$, tal que $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle \subset E$ e existe um isomorfismo $v : E \longrightarrow l_1^n$ onde $\|v\|\|v^{-1}\| < \lambda$.

Por outro lado, observemos que $u(E) \subset Y$ forma um subespaço de F de dimensão finita. Como Y é um espaço $\mathcal{L}_{2,\lambda'}$, existe um subespaço de dimensão finita, com $u(E) \subset F \subset Y$, digamos $\dim F = N$, e existe um isomorfismo $w : F \longrightarrow l_2^N$ onde $\|w\|\|w^{-1}\| < \lambda'$.

O operador u nos induz o seguinte operador:

$$\begin{array}{rrcl} u_0: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & u_0(x) = u(x) \end{array}$$

Observemos o seguinte esquema:

$$l_1^n \xrightarrow{v^{-1}} E \xrightarrow{u_0} F \xrightarrow{w} l_2^N$$

Com os operadores v^{-1}, u_0 e w podemos obter o operador:

$$wu_0v^{-1} : l_1^n \longrightarrow l_2^N$$

A ideia é utilizarmos o corolário 4.2.3 sobre o operador wu_0v^{-1}. Podemos escrever:

$$E \xrightarrow{v} l_1^n \xrightarrow{v^{-1}} E \xrightarrow{u_0} F \xrightarrow{w} l_2^N \xrightarrow{w^{-1}} F$$

Notemos então, que u_0 pode ser decomposto do seguinte modo:

$$u_0 = w^{-1}wu_0v^{-1}v : E \longrightarrow F.$$

Sejam $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ uma sequência finita de escalares tais que $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Temos que $\sup\limits_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum\limits_{i=1}^m \varepsilon_i v(x_i) \right\|_{l_1^n} \leq \|(v(x_i))_1^m\|_1^w \quad (*)$. De fato, consideremos $y = \sum\limits_{i=1}^m \varepsilon_i v(x_i) \in l_1^n$. Pelo teorema de Hahn-Banach temos:

$$\begin{aligned} \|y\|_{l_1^n} &= \sup_{x^* \in B_{(l_1^n)^*}} |x^*(y)| \\ &= \sup_{x^* \in B_{(l_1^n)^*}} \left| x^* \left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i v(x_i) \right) \right| \\ &= \sup_{x^* \in B_{(l_1^n)^*}} \left| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x^*(vx_i) \right| \\ &\leq \sup_{x^* \in B_{(l_1^n)^*}} \sum_{i=1}^m |\varepsilon_i||x^*(vx_i)| \\ &= \sup_{x^* \in B_{(l_1^n)^*}} \sum_{i=1}^m |x^*(vx_i)| \\ &= \|(v(x_i))_1^m\|_1^w \end{aligned}$$

Assim:
$$\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i v(x_i)\right\|_{l_1^n} \leq \|(v(x_i))_1^m\|_1^w$$

Tomando o supremo do termo a esquerda sobre todos os escalares $\xi \in \{\pm 1\}$ obtemos:

$$\sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i v(x_i)\right\|_{l_1^n} \leq \|(v(x_i))_1^m\|_1^w$$

Utilizando o corolário 4.2.3 obtemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\|u(x_i)\| &= \sum_{i=1}^{m}\|u_0(x_i)\| \\
&= \sum_{i=1}^{m}\|w^{-1}wu_0v^{-1}v(x_i)\| \\
&= \sum_{i=1}^{m}\|w^{-1}(wu_0v^{-1}v(x_i))\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\|w^{-1}\|\|(wu_0v^{-1}v(x_i))\| \\
&= \|w^{-1}\|\sum_{i=1}^{m}\|(wu_0v^{-1}v(x_i))\| \\
&\overset{(T.G)}{\leq} K_G\|w^{-1}\|\|wu_0v^{-1}\|\sup_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i v(x_i)\right\|_{l_1^n} \\
&\overset{(*)}{\leq} K_G\|w^{-1}\|\|wu_0v^{-1}\|\|(v(x_i))_1^m\|_1^w \\
&\leq K_G\|w^{-1}\|\|w\|\|u_0\|\|v^{-1}\|\|v\|\|(x_i)_1^m\|_1^w \\
&\leq K_G\lambda\lambda'\|u\|\|(x_i)_1^m\|_1^w
\end{aligned}$$

Portanto o operador u é 1-somante. Além disso, $\pi_1(u) \leq K_G\lambda\lambda'\|u\|$. □

O lema abaixo é uma preparação para teorema 5.2.5, que iremos apresentar nesta seção.

Lema 5.2.4. *Sejam $1 \leq p \leq 2$ e n, N inteiros positivos. Todo operador $u : l_\infty^n \longrightarrow l_p^N$ é 2-somante e satisfaz $\pi_2(u) \leq K_G\|u\|$.*

Demonstração. Queremos mostrar que independente da escolha de vetores arbitrários $x_1, \ldots, x_m \in l_\infty^n$ teremos:

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\|u(x_k)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq K_G\|u\|\sup_{x^*\in B_{l_\infty^n}}\left\{\left(\sum_{k=1}^{m}|x^*(x_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

Podemos considerar $m = n$.

• Se $m < n$ podemos tomar o conjunto de vetores $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$, onde $x_{m+1} =$

$\ldots = x_n = 0.$

• Se $m > n$ podemos considerar o operador $u_0 : l_\infty^m \longrightarrow l_p^N$ definido como:

$$u_0(e_j) = \begin{cases} u(e_j), & \text{se } 1 \leq j \leq n \\ 0, & \text{se } j > n \end{cases}$$

onde $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_m\}$ é base canônica de l_∞^m.

Utilizando-se de argumentos análogos, podemos garantir que $m = N$. Desta forma, podemos assumir que $m = n = N$.

Além disso, consideremos $\|(x_k)_1^n\|_2^w = 1$.

Vamos utilizar a desigualdade de Grothendieck 4.1.1 nesta demonstração.

Sabemos que para $1 \leq i \leq n$, $ue_i \in l_p^n$.

Podemos reescrever ue_i em termos da base canônica $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de l_p^n. Desta maneira, escrevamos:

$$ue_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} e_j \quad \text{com} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Observemos que (u_{ij}) é uma matriz $n \times n$.

Sejam $s = (s_1, \ldots, s_n), t = (t_1, \ldots, t_n) \in B_{l_\infty^n}$ elementos arbitrários.

Seja $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B_{l_{p^*}^n}$.

Temos que $y_t = (t_1 y_1, \ldots, t_n y_n) \in B_{l_{p^*}^n}$. De fato, como $t = (t_1, \ldots, t_n) \in B_{l_\infty^n}$ segue que $\|t\|_\infty = \sup\limits_{1 \leq j \leq n} |t_j| \leq 1$. Assim:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{m} |t_j y_j|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} &= \left(\sum_{i=1}^{m} |t_j|^{p^*} |y_j|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{m} \|t\|_\infty^{p^*} |y_j|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &= \|t\|_\infty \left(\sum_{i=1}^{m} |y_j|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

$\therefore y_t \in B_{l_{p^*}^n}$.

Notemos que:

$$\begin{aligned} u(s) &= u((s_i)_{i=1}^n) \\ &= u\left(\sum_{i=1}^n e_i s_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n s_i u(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n s_i \sum_{j=1}^n u_{ij} e_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} s_i e_j \end{aligned}$$

Aplicando y_t sobre $u(s)$ obtemos:

$$\begin{aligned} y_t(u(s)) &= y_t\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} s_i e_j\right) \\ &= y_t\left(\sum_{i=1}^n u_{i1} s_i, \sum_{i=1}^n u_{i2} s_i, \ldots, \sum_{i=1}^n u_{in} s_i\right) \\ &= y_1 t_1 \sum_{i=1}^n u_{i1} s_i + y_2 t_2 \sum_{i=1}^n u_{i2} s_i + \ldots + y_n t_n \sum_{i=1}^n u_{in} s_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} s_i y_j t_j \end{aligned}$$

Portanto, podemos obter a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} y_j s_i t_j\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} s_i y_j t_j\right| \\ &= |y_t(u(s))| \\ &\leq \|y_t\| \|u(s)\|_p \\ &\leq \|u(s)\|_p \\ &\leq \|u\| \end{aligned}$$

Assim:

$$\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} y_j s_i t_j\right| \leq \|u\| \qquad (*)$$

Aplicando a desigualdade de Grothendieck 4.1.1 para o espaço de Hilbert $H = l_2^n$, a matriz $(u_{ij} y_j)$ e para os vetores $w_1, \ldots, w_n, z_1, \ldots, z_n \in B_{l_2^n}$ obtemos que:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} y_j \langle w_i, z_j \rangle\right| &\leq K_G \max\left\{\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_{ij} y_j s_i^{'} t_j^{'}\right|;\ |s_i^{'}| \leq 1,\ |t_j^{'}| \leq 1,\ 1 \leq i, j \leq n\right\} \\ &\overset{(*)}{\leq} K_G \|u\| \end{aligned}$$

Portanto:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}y_j\langle w_i z_j\rangle\right| \leq K_G\|u\| \quad (1)$$

Para cada $1 \leq k \leq n$ podemos escrever $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn}) \in B_{l_2^n}$ em termos da base canônica $\{e_1, \ldots .e_n\}$ do espaço l_2^n, do seguinte modo:

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}e_i$$

Para cada $1 \leq i \leq n$ podemos denotar $e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^{n}$.

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n}|x_{ki}|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_{kj}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}|e_i(x_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{x^*\in B_{l_2^n}}\left(\sum_{k=1}^{n}|x^*(x_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|(x_k)_1^n\|_2^w = 1
\end{aligned}$$

Ou seja, $w_i \in B_{l_2^w}$.

Fixando $1 \leq j \leq n$ denotemos $v_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jw_i \in B_{l_2^n}$.

Utilizando os teoremas de Hahn-Banach (H.B) e teorema de Riesz (T.R) observemos que:

$$\|v_j\|_2 \overset{(H.B)}{=} \sup_{x^*\in B_{l_2^n}}|x^*(v_j)| \overset{(T.R)}{=} \sup_{z\in B_{l_2^n}}|\langle v_j, z\rangle|$$

Assim:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i\right\|_2 = \sup_{z\in B_{l_2^n}}\left|\left\langle\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i, z\right\rangle\right|$$

Fixando $1 \leq j \leq n$, podemos considerar a aplicação:

$$\begin{aligned}
\Gamma_j : \quad B_{l_2^n} &\longrightarrow \qquad \mathbb{R} \\
z &\longmapsto \left|\left\langle\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i, z\right\rangle\right|
\end{aligned}$$

Como Γ_j é contínua e $B_{l_2^n}$ é um conjunto compacto, segue pelo teorema de Weierstrass que Γ_j admite máximo. Sem perda de generalidade, podemos considerar z_j o vetor de $B_{l_2^n}$, de tal forma que:

$$\max_{z\in B_{l_2^n}}\left|\left\langle\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i, z\right\rangle\right| = \left\langle\sum_{i=1}^{n}u_{ij}y_jw_i, z_j\right\rangle.$$

Portanto:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jw_i\right\|_2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jw_i, z_j \right\rangle \qquad (2)$$

Utilizando (1) e (2) obtemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jw_i\right\|_2 &\overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{n}\left\langle \sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jw_i, z_j \right\rangle \\
&\leq \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{ij}y_j\langle w_i, z_j\rangle\right| \\
&\overset{(1)}{\leq} K_G\|u\|
\end{aligned}$$

Temos que:

$$\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jw_i\right\|_2 \leq K_G\|u\| \qquad (**)$$

Vamos analisar, por uma outra perspectiva, a expressão $\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jw_i\right\|_2$.
Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, sabemos que $(\alpha)^2 = |\alpha|^2$. Assim:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jw_i\right\|_2 &= \sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{n}(u_{ij}y_jx_{1i}, u_{ij}y_jx_{2i}, \ldots, u_{ij}y_jx_{ni})\right\|_2 \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left\|\left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jx_{1i}, \sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jx_{2i}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jx_{ni}\right)\right\|_2 \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jx_{ki}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij}y_jx_{ki}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} y_j^2\left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij}x_{ki}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{j=1}^{n}|y_j|\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij}x_{ki}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{j=1}^{n}|y_j|\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n} u_{ij}x_{ki}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Logo, reescrevemos $(**)$ como:

$$\sum_{j=1}^{n}|y_j|\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n} u_{ij}x_{ki}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq K_G\|u\| \qquad (***)$$

Observemos que a desigualdade $(***)$ pode ser tomada para qualquer vetor $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B_{l_{p^*}^n}$.

Para cada $1 \leq j \leq n$, consideremos:

$$h_j = \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} u_{ij} x_{ki} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Notemos que $h = (h_j)_{j=1}^n \in l_p^n$.

Fixando $y = (y_j)_{j=1}^n \in B_{l_{p^*}^n}$ temos que:

$$\begin{aligned} |y(h)| &= \left| \sum_{j=1}^{n} y_j h_j \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} u_{ij} x_{ki} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |y_j| \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} u_{ij} x_{ki} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(***)}{\leq} K_G \|u\| \end{aligned}$$

Portanto, para todo $y \in B_{l_{p^*}^n}$ segue que:

$$|y(h)| \leq K_G \|u\|$$

Aplicando o supremo sobre todos os vetores de $B_{l_{p^*}^n}$ obtemos que:

$$\sup_{x^* \in B_{l_{p^*}^n}} |x^*(h)| \leq K_G \|u\|$$

Pelo teorema de Hahn-Banach temos:

$$\|h\|_{l_p^n} \leq K_G \|u\|$$

Assim:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |h_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_G \|u\| \implies$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} u_{ij} x_{ki} \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_G \|u\|$$

Desta maneira, temos:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} u_{ij} x_{ki} \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_G \|u\| \qquad (3)$$

Temos que:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada $1 \leq k \leq n$ observemos que:

$$\begin{aligned}
ux_k &= u\left(\sum_{i=1}^{n}x_{ki}e_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}x_{ki}u(e_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}x_{ki}\sum_{j=1}^{n}u_{ij}e_j\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{ki}u_{ij}\right)e_j
\end{aligned}$$

Vamos denotar $ux_k = \alpha_k = (\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kn})$, onde $\alpha_{kj} = \sum_{i=1}^{n}x_{ki}u_{ij}$ para cada $1 \leq j \leq n$. Assim, podemos notar que:

$$\begin{aligned}
\|ux_k\|_p^2 &= \|\alpha_k\|_p^2\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{kj}|^p\right)^{\frac{2}{p}}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}x_{ki}u_{ij}\right|^p\right)^{\frac{2}{p}} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Logo:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Para cada $1 \leq j \leq n$, consideremos:

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^p e_k = \left(\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{1i}\right|^p, \left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{2i}\right|^p, \ldots, \left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ni}\right|^p\right)$$

Por um lado, observemos que:

$$\|\beta_j\|_{\frac{2}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} \implies$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|\beta_j\|_{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Por outro lado:

$$
\begin{aligned}
\left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\beta_j\right\|_{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} &= \|\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n\|_{\frac{2}{p}}^{\frac{1}{p}}\\
&= \left\|\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{1i}\right|^p, \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{2i}\right|^p, \ldots, \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ni}\right|^p\right)\right\|_{\frac{2}{p}}^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{p}{2}\cdot\frac{1}{p}}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Utilizando a desigualdade triangular (D.T) no espaço $l_{\frac{2}{p}}$ e as desigualdades (3) e (4) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n}\|u(x_k)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\left\|\sum_{j=1}^{n}\beta_j\right\|_{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\overset{(D.T)}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{n}\|\beta_j\|_{\frac{2}{p}}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}u_{ij}x_{ki}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\overset{(3)}{\leq} K_G\|u\|\\
&= K_G\|u\|\|(x_k)_{k=1}^{n}\|_2^w
\end{aligned}
$$

Logo, $\pi_2(u) \leq K_G\|u\|$. $\square$

Temos agora outra versão do teorema de Grothendieck desta dissertação.

Teorema 5.2.5. *Sejam $1 \leq p \leq 2$, X um espaço $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ e Y um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda'}$. Então, todo operador $u : X \longrightarrow Y$ é 2-somante com $\pi_2(u) \leq K\lambda\lambda'\|u\|$.*

Demonstração. Sejam $x_1, \ldots, x_m \in X$ elementos arbitrários.

Consideremos $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \subset X$ o subespaço de X gerado por $x_1, \ldots, x_m$. Como X é um espaço $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$, existe um subespaço $E \subset X$ de dimensão finita, digamos $\dim E = n$, tal que $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle \subset E$, e existe um isomorfismo $v : E \longrightarrow l_\infty^n$ com $\|v\|\|v^{-1}\| < \lambda$.

Notemos que $u(E) \subset Y$ é um subespaço de Y de dimensão finita. Como Y é um espaço $\mathcal{L}_{p,\lambda'}$, existe um subespaço $F \subset Y$ contendo $u(E)$ de dimensão finita, digamos $\dim F = N$. Além disso, existe um isomorfismo $w : F \longrightarrow l_p^N$ onde $\|w\|\|w^{-1}\| < \lambda'$.

O operador u nos induz o operador:

$$\begin{array}{rccc} u_0: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & u_0(x) = u(x) \end{array}$$

Com os operadores v^{-1}, u_0 e w, podemos obter o operador:

$$wu_0v^{-1} : l_\infty^n \longrightarrow l_p^N$$

Notemos ainda que:

$$u_0 = w^{-1}wu_0v^{-1}v$$

Pelo lema 5.2.4, sabemos que $\pi_2(wu_0v^{-1}) \leq K_G\|wu_0v^{-1}\|$. Assim:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^m \|u(x_i)\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\sum_{i=1}^m \|u_0(x_i)\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^m \|w^{-1}(wu_0v^{-1})v(x_i)\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^m \|w^{-1}\|\|(wu_0v^{-1}v(x_i))\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{5.2.4}{\leq} \|w^{-1}\|\pi_2(wu_0v^{-1}) \sup_{x^* \in B_{(l_\infty^n)^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(vx_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|w^{-1}\|K_G\|wu_0v^{-1}\| \sup_{x^* \in B_{(l_\infty^n)^*}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(vx_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|w^{-1}\|K_G\|w\|\|u_0\|\|v^{-1}\|\|(v(x_i))_1^m\|_2^w \\
&= \|w^{-1}\|K_G\|w\|\|u_0\|\|v^{-1}\|\|\hat{v}(x_i)_1^m\|_2^w \\
&\overset{(*)}{\leq} \|w^{-1}\|K_G\|w\|\|u_0\|\|v^{-1}\|\|\hat{v}\|\|(x_i)_1^m\|_2^w \\
&= \|w^{-1}\|K_G\|w\|\|u_0\|\|v^{-1}\|\|v\|\|(x_i)_1^m\|_2^w \\
&\leq \|w^{-1}\|K_G\|w\|\|u\|\|v^{-1}\|\|v\|\|(x_i)_1^m\|_2^w \\
&\leq K_G\lambda\lambda'\|u\|\|(x_i)_1^m\|_2^w
\end{aligned}$$

Em $(*)$ usamos a continuidade da aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \hat{v}: & l_2^w(E) & \longrightarrow & l_2^w(l_\infty^n) \\ & (y_k) & \longmapsto & (vy_k) \end{array}$$

Portanto, u é 2-somante. Além disso, $\pi_2(u) \leq K_G\lambda\lambda'\|u\|$. $\square$

Vamos utilizar os teoremas de Grothendieck em algumas aplicações. Os teoremas 5.2.6 e 5.2.7 serão enunciados sem demonstração.

Teorema 5.2.6. *Seja K um espaço de Hausdorff compacto e seja μ uma medida qualquer. Se $1 \leq p \leq 2$ então qualquer operador $u : C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$ é 2-somante com $\pi_2(u) \leq K_G\|u\|$.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [4], capítulo 3, página 64.

Teorema 5.2.7. *Seja K um espaço Hausdorff compacto. Um operador $u : C(K) \longrightarrow Y$ é p-somante se, e somente se, existe um medida de probabilidade regular de Borel μ sobre K e uma aplicação $\tilde{u} \in \mathscr{L}(L_p(\mu), Y)$ tal que $\tilde{u}j_p = u$.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [4], capítulo 2, página 48.

Observação 5.2.8. *A aplicação j_p mencionada no teorema anterior refere-se a aplicação canônica $j_p : C(K) \longrightarrow L_p(\mu)$.*

Vamos utilizar os teoremas teoremas 5.2.6, 5.2.7 e proposição 5.1.26 para demonstração do teorema 5.2.9.

Teorema 5.2.9. *Se X é um espaço de Banach, simultaneamente isomorfo a algum quociente do espaço $C(K)$ e a algum subespaço de $L_1(\mu)$, então X é isomorfo a algum espaço de Hilbert.*

Demonstração. Seja $q : C(K) \longrightarrow X$ um operador sobrejetivo.

O operador q é 2-somante. De fato, como X é um espaço de Banach isomorfo a algum subespaço M de $L_1(\mu)$, existe um isomorfismo $v : X \longrightarrow M$. Observemos o esquema:

$$C(K) \xrightarrow{q} X \xrightarrow{v} M \xrightarrow{i} L_1(\mu)$$

onde, i é a aplicação canônica de M em $L_1(\mu)$. Notemos que i é um isometria.

Pelo teorema 5.2.6 segue que ivq é 2-somante. Pelo teorema 5.1.26 segue que vq é 2-somante. Assim, $v^{-1}vq$ é 2-somante, donde concluímos que q é 2-somante.

Como $q : C(K) \longrightarrow X$ é um operador 2-somante, pelo teorema 5.2.7, existe uma medida de probabilidade regular de Borel μ_1 sobre K e uma aplicação $u \in \mathscr{L}(L_2(\mu_1), X)$ tal que $uj_2 = q$, onde $j_2 : C(K) \longrightarrow L_2(\mu_1)$ é a aplicação canônica de $C(K)$ sobre $L_2(\mu_1)$.

Como q é sobrejetora segue que u é sobrejetora. Caso u seja injetiva então pelo teorema da aplicação aberta, u obteremos que u é um isomorfismo.

Sendo u uma aplicação contínua segue que $\ker u$ é fechado. Como $H = L_2(\mu_1)$ é um espaço de Hilbert, podemos escrever:

$$H = \ker u \oplus (\ker u)^{\perp}$$

O operador $u_{|_{(\ker u)^{\perp}}} : (\ker u)^{\perp} \longrightarrow X$ é injetivo. De fato, seja $y \in \ker u$. Assim, $y \in (\ker u)^{\perp}$ e $u(y) = 0$. Como $y \in (\ker u)^{\perp}$ segue que $y \perp \ker u$. Em particular, segue que $y \perp y$. Logo, $y = 0$.

Concluímos que $u_{|_{(\ker u)^{\perp}}}$ é bijetora. Pelo teorema da aplicação aberta, concluímos que $u_{|_{(\ker u)^{\perp}}} : (\ker u)^{\perp} \longrightarrow X$ é um isomorfismo. $\square$

Vamos enunciar o teorema 5.2.10 sem demonstração como ferramenta para a demonstração do teorema 5.2.11.

Teorema 5.2.10 (Teorema da composição). *Sejam $u \in \Pi_p(Y, Z)$ e $v \in \Pi_p(X, Y)$ com $1 \leq p, q < \infty$. Definindo $1 \leq r < \infty$ onde $\frac{1}{r} := \min\left\{1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right\}$, então uv é r-somante e $\pi_r(uv) \leq \pi_p(u).\pi_q(v)$.*

Uma demonstração pode ser encontrada em [4], capítulo 2, páginas 52 e 53.

Teorema 5.2.11. *Seja $1 \leq p \leq 2$. Se X é um subespaço de $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ e Y é um espaço de Banach, então todo operador 2-somante $u : X \longrightarrow Y$ é 1-somante com $\pi_1(u) \leq K_G \lambda \pi_2(u)$.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ vetores arbitrários.

Definamos o seguinte operador:

$$\begin{array}{cccc} v: & l_\infty^m & \longrightarrow & X \\ & a = (a_i)_1^m & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \end{array}$$

Consideremos $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle \subset X$ o subespaço de X gerado por $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Como X é um subespaço de $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, existe um subespaço $F \subset X$ de dimensão finita (digamos que $\dim F = N$) tal que $\langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle \subset F$, e existe um isomorfismo $w : F \longrightarrow l_p^N$ com $\|w\| \|w^{-1}\| < \lambda$. Pela definição do operador v, observemos que $\mathrm{Im}(v) \subset \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle \subset F$. Portanto, podemos usar F como contradomínio de v.

$$\begin{array}{cccc} v: & l_\infty^m & \longrightarrow & F \\ & a = (a_i)_1^m & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \end{array}$$

Observemos o esquema:

$$l_\infty^m \xrightarrow{v} F \xrightarrow{w} l_p^N$$

Através do esquema, podemos notar que compondo os operadores w e v obtemos o operador $wv : l_\infty^m \longrightarrow l_p^N$.

Pelo lema 5.2.4, o operador wv é 2-somante com $\pi_2(wv) \leq K_G\|w\|\|v\| \quad (*)$.

Por outro lado, como v tem posto finito, segue pela proposição 5.1.22 que v é 2-somante. Além disso, o operador v pode ser decomposto como:

$$v = w^{-1}wv$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\pi_2(v) &= \pi_2(w^{-1}wv) \\
&\leq \|w^{-1}\|\pi_2(wv) \\
&\overset{(*)}{\leq} K_G\|w\|\|w^{-1}\|\|v\| \\
&< K_G\lambda\|v\|
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos a desigualdade:

$$\pi_2(v) < K_G\lambda\|v\| \quad (1)$$

Podemos considerar l_∞^m como subespaço de c_0. Basta notarmos que l_∞^m pode ser reescrito como:

$$l_\infty^m = \{(a_1, \ldots, a_m, 0, 0, 0, \ldots);\ a_i \in \mathbb{K};\ 1 \leq i \leq m\}$$

Tomemos então, a aplicação:

$$\begin{array}{rccc}
v_0 : & c_0 & \longrightarrow & X \\
& a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k
\end{array}$$

Notemos que $v_{0|_{l_\infty^m}} = v$.

O operador v_0 está bem definido. De fato, sejam $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$ e $n \in \mathbb{N}$. Utilizando o teorema de Hahn-Banach (H.B) observamos que:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right\| &\overset{(H.B)}{=} \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left|x^*\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)\right| \\
&= \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k x^*(x_k)\right| \\
&\leq \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{k=1}^{n} |a_k||x^*(x_k)| \\
&\leq \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{k=1}^{n} \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k||x^*(x_k)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{k=1}^{n} \|a\|_\infty |x^*(x_k)| \\
&= \|a\|_\infty \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{k=1}^{n} |x^*(x_k)| \\
&= \|a\|_\infty \|(x_k)_{k=1}^n\|_1^w \\
&= \|a\|_\infty \sup_{x^*\in B_{X^*}} \|(x^*(x_k))_1^m\|_1 \\
&\overset{(H.B)}{=} \|a\|_\infty \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sup_{b\in B_{l_\infty^m}} |b((x^*(x_k))_1^m)| \\
&= \|a\|_\infty \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sup_{b\in B_{l_\infty^m}} \left|\sum_{k=1}^{m} b_k x^*(x_k)\right| \\
&= \|a\|_\infty \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sup_{b\in B_{l_\infty^m}} \left|x^*\left(\sum_{k=1}^{m} b_k x_k\right)\right| \\
&= \|a\|_\infty \sup_{b\in B_{l_\infty^m}} \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left|x^*\left(\sum_{k=1}^{m} b_k x_k\right)\right| \\
&\overset{(H.B)}{=} \|a\|_\infty \sup_{b\in B_{l_\infty^m}} \left\|\sum_{k=1}^{m} b_k x_k\right\| \\
&= \|a\|_\infty \sup_{b\in B_{l_\infty^m}} \|v(b_k)_{k=1}^m\| \\
&= \|a\|_\infty \|v\|
\end{aligned}
$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ e usando a continuidade da norma segue que:

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right\| \leq \|a\|_\infty \|v\| \quad (2)$$

Segue que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \in X$.

Além disso, observando as operações anteriores, obtemos:

$$\|(x_k)_{k=1}^n\|_1^w = \|v\| \quad (3)$$

O operador v_0 é linear. De fato, sejam $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, b = (b_k)_{k\in\mathbb{K}} \in c_0$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Assim:

$$
\begin{aligned}
v_0(a+\lambda b) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + \lambda b_k) x_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k \\
&= v_0(a) + \lambda v_0(b)
\end{aligned}
$$

O operador v_0 é limitado. De fato, seja $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0$. Pela desigualdade (2) segue que:

$$\|v_0(a)\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\right\| \leq \|a\|_\infty \|v\|$$

Por hipótese, $u \in \Pi_2(X, Y)$. Sabemos que $v \in \Pi_2(l_\infty^m, F)$. Pelo teorema 5.2.10, segue que uv é 1-somante e $\pi_1(uv) \leq \pi_2(u)\pi_2(v)$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \|ux_k\| &= \sum_{k=1}^{m} \|uve_k\| \\
&\leq \pi_1(uv)\|(e_k)_1^n\|_1^w \\
&= \pi_1(uv) \\
&\leq \pi_2(u)\pi_2(v) \\
&\overset{(1)}{\leq} \pi_2(u)K_G\lambda\|v\| \\
&\overset{(3)}{=} K_G\lambda\pi_2(u)\|(x_k)_{k=1}^n\|_1^w
\end{aligned}$$

Logo, u é 1-somante com $\pi_1(u) \leq K_G\lambda\pi_2(u)$. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] BOMBAL,F.,PÉREZ-GARCIA,D. Multilinear extensions of Grothendieck's theorem. Q.J.Math, 2004.

[2] BRÉZIS, H. - Analyse Functionnelle, Théorie et applications - Masson, Paris, 1983.

[3] CONWAY, J - A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlim , 1985.

[4] DIESTEL, J., JARCHOW, H, TONGE, A. Absolutely summing operators, Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, 1995.

[5] GROTHENDIECK,A., A Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologique, São Paulo,1956.

[6] KREYSZIG,E. Introductory Functional Analysis with Applications,1978.

[7] PISIER, G., Grothendieck's Theorem, past and present, 2011.

[8] HUNTER JK, University of California, Davis, 2011.

[9] POMBO JR., D. P. - Introdução à Análise Funcional.

[10] ZYGMUND A., Trigonometric Series., volume 1, 2004.