Busca de Simetrias Locais em Teorias Lagrangeanas Singulares

Bruno Ferreira Rizzuti

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Mestrado em Física

Orientador: Prof. Alexei Deriglazov

Juiz de Fora
Fevereiro de 2008

Busca de Simetrias Locais em Teorias Lagrangeanas Singulares

Bruno Ferreira Rizzuti

Dissertação submetida ao corpo docente do Instituto de Ciências Exatas (ICE) da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), como parte integrante dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Física pela UFJF.

Aprovada por:

Prof.: ______________________________
Alexei Deriglazov

Prof.: ______________________________
Wilson Oliveira

Prof.: ______________________________
Francesco Toppan

Juiz de Fora
Fevereiro de 2008

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a algumas pessoas que foram essenciais para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho. Entre elas primeiramente aos meus pais, pelo esforço sobre-humano para que eu me dedicasse inteiramente ao mestrado, além do apoio em todas as horas. Ao Prof. Alexei, pela orientação, paciência e conselhos. Sem ele eu não entenderia o que significa fazer ciência. Ao Prof. André, pelos cursos de Análise e Topologia, com 7 provas escritas por semestre mais provas orais com 3 dias de duração. Nada contribuiu tão bem quanto isso para minha formação matemática. Aos amigos do Albergue Espanhol-A República, ao amigo Gilberto e ao amigo Kogima; todos sabemos que é impossível estudar ciências exatas sem um pouco de cerveja. Aos colegas da pós, pelas discussões. À minha tia Dinha, que esteve presente em todos os momentos importantes da minha vida. Aos demais familiares, meu irmão Gustavo, professores e amigos que de uma maneira ou de outra contribuíram para esta dissertação. Ao Prof. Paulo Santos, pelas conversas e aulas; comecei a treinar Hap Ki Do na hora certa.

E claro, a Deus.

Índice

Resumo

Em teorias de física fundamental como Teoria de Cordas, Eletrodinâmica, Modelo Padrão, Teoria da Relatividade Geral, Teorias de Calibre, o número de variáveis utilizadas para a descrição é maior que o número de variáveis com dinâmica independente das demais. Portanto, nem todas variáveis possuem interpretação física. Assim, é interessante desenvolver métodos que permitam caracterizar o setor físico de uma teoria. Em particular, isto é feito a partir das simetrias locais dos modelos. Em geral, estas teorias são descritas por uma Lagrangeana $L = L(q^A, \dot{q}^A)$ singular, isto é, $det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = 0$, cuja análise é feita de acordo com o método de Dirac para sistemas vinculados. O objetivo deste trabalho é então apresentar um método de obtenção das simetrias locais de teorias singulares. Para isso, partindo de uma Lagrangeana singular L, construímos uma Lagrangeana equivalente $\tilde{L}$ através de métodos algébricos e em termos das quantidades da formulação inicial. As simetrias de $\tilde{L}$ são obtidas e todos os vínculos de primeira classe de L, revelados pelo método de Dirac, são os geradores das simetrias de $\tilde{L}$.

1 Introdução

A palavra *simetria* é utilizada em vários contextos em Física, por exemplo, na Mecânica Clássica, conhecemos o teorema de Nöther [1], que relaciona transformações que deixam uma dada ação invariante (simetria) com grandezas conservadas. Na Física do Estado Sólido caracterizamos cristais a partir de estruturas periódicas, ou seja, estruturas que se repetem sobre rotações e translações na rede cristalina [2]. Na Mecânica Quântica podemos definir uma simetria como um mapeamento que leva observáveis de um sistema em observáveis do mesmo sistema e estados em estados de forma que se conservem todos os valores esperados. Conseguimos com isso uma formulação da Mecânica Quântica, somente com esta definição, veja [3] (nestes exemplos acima, as simetrias são chamadas tecnicamente de simetrias globais. Para uma definição rigorosa, veja [13]). Contudo, a importância das simetrias não pára por aí. Em teorias de Física fundamental como Teoria de Cordas, Eletrodinâmica, Modelo Padrão, Teoria da Relatividade Geral,[1] Teorias de Calibre, o número de variáveis utilizadas para a descrição, em geral, é maior que o número de variáveis que possui dinâmica independente das demais. Podemos então nos perguntar se podemos encontrar um número mínimo de variáveis para cada modelo estudado que o descreva completamente. Ou seja, somos induzidos a caracterizar de uma forma ou de outra o setor físico de uma teoria. É natural pensar que as variáveis físicas são aquelas que permanecem invariantes sob determinadas transformações, que chamaremos transformações de simetria local (Mais à frente daremos um definição formal para o que é uma simetria local já que tema central deste trabalho é a busca deste tipo de simetrias). Daí uma das importâncias para as simetrias em teorias de física fundamental.

Em geral, estas teorias são descritas por uma Lagrangeana $L = L(q^A, \dot{q}^A)$ singular, isto é $det\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = 0$, cuja análise é feita de acordo com o método de Dirac [5]. O método revela de forma relativamente clara a estrutura das equações de movimento, que contêm, além de equações diferenciais, equações algébricas, que recebem o nome de vínculos. Os vínculos retratam o fato de o número de variáveis utilizadas ser maior que o número de graus de liberdade físicos.[2] Vejamos o exemplo do Eletromagnetismo, descrito pela

[1]Neste contexto vale a pena mencionar uma frase de Dirac, que retrata com clareza a utilização de mais graus de liberdade do que graus de liberdade físicos:
"*...one can have a curved four-dimensional space immersed in a flat space of a larger number of dimensions.*"[4]

[2]Notemos que, como os vínculos mostram a dependência entre variáveis de uma teoria, intuitivamente esperamos uma ligação entre vínculos e simetrias, de forma a revelar o setor físico da teoria.

Lagrangeana,

$$L = -\frac{1}{4}\int d^3x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{1}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. É bem sabido que as seguintes transformações deixam L invariante,

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x), \tag{2}$$

onde α é uma função arbitrária.
Com esta transformação de simetria podemos eliminar duas dentre quatro componentes de A_μ. Portanto, não há problemas em formular teorias com mais graus de liberdade do que físicos, pois ganhamos, por exemplo, invariância relativística como no exemplo acima. Contudo, devemos carregar junto à formulação, as simetrias do modelo, que permitem em qualquer momento desejado distinguir o setor físico do não físico da teoria.
Transformações com a forma (2) são chamadas simetrias de calibre ou simetrias locais. Consideremos a seguinte,

Definição 1 *Uma transformação finita,*

$$q(\tau) \to q'(\tau) \tag{3}$$

é uma simetria da ação lagrangeana,

$$S = \int d\tau L(q, \dot{q}) \tag{4}$$

quando,

$$L(q, \dot{q}) \to L(q', \dot{q}') = L(q, \dot{q}) + \frac{dF}{d\tau}. \tag{5}$$

Uma transformação da forma (3) é dita uma transformação de simetria local (ou de calibre) ou simplesmente simetria local quando a transformação é parametrizada por funções arbitrárias do tempo. Sua forma infinitesimal é,

$$\delta q^A = \sum_{k=0}^{[k]} R^A{}_{(k)\alpha}(q, \dot{q}, ...; \tau)\frac{d^k \epsilon^\alpha(\tau)}{d\tau^k}, \tag{6}$$

onde $\epsilon^\alpha(\tau)$; $\alpha = 1, ..., [\alpha]$ são funções arbitrárias de τ, chamados parâmetros da simetria e os $R^A{}_{(k)\alpha}$ são chamados geradores da simetria.

A busca por simetrias locais para teorias singulares foi iniciada por Bergmann nos anos 50 [6]. Vários resultados importantes ligando vínculos presentes no formalismo hamiltoniano com simetrias locais da formulação lagrangeana correspondente foram obtidos por Gitman, Tyutin, Henneaux, Teitelboim, etc [7-18]. O problema da busca de simetrias pode ser formulado com as seguintes questões:

a) Qual a estrutura de uma simetria local arbitrária para uma dada ação?

b) Qual a estrutura dos geradores de uma simetria local?

c) Existe um procedimento construtivo para obtermos todas as simetrias locais de uma dada ação?

d) Como podemos relacionar vínculos presentes na formulção hamiltoniana com a simetria de uma ação lagrangeana dada?

O objetivo deste trabalho é esclarecer estas questões e é dividido da seguinte maneira: na Seção 2 começamos com uma motivação para o método de Dirac de hamiltonização de sistemas singulares e então apresentamos o método com detalhes. As Seções 3 e 4 são dedicadas aos vínculos. Explicamos com clareza o seu significado e os separamos em classes. Em particular, a partir de algumas afirmações mostramos qual a ligação entre vínculos de primeira classe e as simetrias locais presentes na formulação lagrangeana. Apresentamos então nas Seções 5 e 6 um método construtivo de obtenção de simetrias locais para sistemas singulares. Para isso, dada uma teoria singular com Lagrangeana L, que apresenta vínculos somente de primeira classe, construímos uma Lagrangeana $\tilde{L}$, equivalente a L, de forma que todas as simetrias locais irredutíveis de $\tilde{L}$ são obtidas. Todos os vínculos de L aparecem como geradores das simetrias de $\tilde{L}$. Aplicamos a teoria das Seções 5 e 6 na Seção 7, para obtermos as simetrias locais para alguns modelos concretos. Mostramos também como o método pode ser aplicado para teorias de campo, obtendo as simetras de calibre da Eletrodinâmica. Para complementar o trabalho, na Seção 8 discutimos a obtenção das simetrias de uma teoria quando estão presentes vínculos tanto de primeira quanto de segunda classe. A Seção 9 é deixada para a conclusão. No fim do trabalho encontram-se apêndices detalhando alguns cálculos relevantes presentes no texto.

2 O método de Dirac Para Sistemas Vinculados

2.1 Motivação para a hamiltonização de sistemas singulares

Seja um sistema dinâmico definido no espaço de configurações $\{q^A(\tau)\}, A = 1, ..., [A]$, com ação,

$$S = \int d\tau L(q^A, \dot{q}^A), \tag{7}$$

onde L é a Lagrangeana.

As equações de movimento,

$$\frac{\partial L}{\partial q^A} - \frac{d}{d\tau}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}) = 0, \tag{8}$$

são obtidas pelo princípio variacional, que afirma que $\delta S = 0$, sob certas condições de contorno.

Reescrevendo as equações de movimento, obtemos,

$$M_{AB}\ddot{q}^B = K_A, \tag{9}$$

onde,

$$M_{AB} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B}, \tag{10}$$

$$K_A = \frac{\partial L}{\partial q^A} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^B \partial \dot{q}^A}. \tag{11}$$

Se $det M_{AB} \neq 0$, então podemos escrever o sistema de equações diferenciais (9) na forma,

$$\ddot{q}^B = (M^{-1})^{BA} K_A. \tag{12}$$

Fixando $2[A]$ condições iniciais arbitrárias,

$$q^A(0) = q_0^A, \dot{q}^A = v^A, \tag{13}$$

e sob certas condições técnicas para o termo $M^{-1}K$ em (12), o teorema de existêcia e unicidade de solução [19] para o sistema de equações diferenciais ordinárias (12) é válido. Com isso, garantimos uma única solução para as equações de movimento numa vizinhaça do ponto q_0^A. Se $det M_{AB} = 0$, então a estrutura das equações de movimento é mais complicada. Além de equações de segunda ordem como em (9), podem ocorrer também equações de primeira ordem, equações algébricas e identidades entre as mesmas, ou seja, nem todas as equações são independentes.

Uma teoria em que $M_{AB} = 0$ é chamada *singular*. Em geral, teorias de física fundamental são teorias singulares: teorias de cordas, eletrodinâmica, modelo padrão, teorias de calibre, etc. Portanto é interessante desenvolver métodos para análise e quantização de uma teoria singular genérica. O primeiro passo na quantização consiste em construir a formulação hamiltoniana de um sistema mecânico clássico. Chamaremos a passagem do formalismo lagrangeano para o hamiltoniano de *hamiltonização* do sistema. Vejamos qual é o problema e a solução adotada para a hamiltonização de um sistema singular. Primeiramente introduzimos os momentos canônicos,

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}. \tag{14}$$

Sendo a teoria singular ($det\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = 0$), suponhamos que $rank M_{AB} = [i] < [A]$. De acordo com o teorema da aplicação implícita [20] podemos encontrar (no máximo) $[i]$ velocidades em função de q e p. Portanto o método padrão de construção da Hamiltoniana dada a Lagrangeana [1],

$$H(q,p) = (p_A \dot{q}^A - L)|_{\dot{q}^A = \dot{q}^A(q,p)}, \tag{15}$$

não funciona para uma teoria singular, já que nem todas as velocidades podem ser obtidas em função de q e p.

O método de Dirac [5] é um procedimento de hamiltonização de um sistema singular. Com o método conseguimos também escrever as equações de movimento (8) de forma equivalente, revelando sua estrutura. Na próxima subseção descreveremos este método com detalhes.

2.2 Método de Dirac: hamiltonização de uma teoria lagrangeana singular

Nesta seção apresentaremos com detalhes o método de Dirac para hamiltonização de uma teoria degenerada, que consiste de uma série de passos.

Seja $L(q^A, \dot{q}^B)$ a Lagrangeana de uma teoria degenerada, ou seja,

$$rank\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = [i] < [A], \tag{16}$$

definida no espaço de configurações parametrizado por $q^A; A = 1, ..., [A]$.

Do princípio podemos supor [21], sem perda de generalidade, que a submatriz da matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B}$ que determina o *rank* da última é formada pelas $[i]$ primeiras linhas e colunas de $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B}$.

Primeiro passo: momentos canônicos e vínculos primários.

Introduzimos os momentos da seguinte maneira,

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}, \tag{17}$$

ou então,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{18}$$

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}. \tag{19}$$

Estas equações são consideradas equações algébricas para determinarmos o número máximo possível de velocidades $\dot{q}$ em função dos q's e p's. De acordo com o teorema da aplicação implícita (e a condição $rank\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = [i]$) podemos obter $[i]$ velocidades em função dos q's, p's e $\dot{q}$'s restantes, ou seja,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Leftrightarrow \dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha). \tag{20}$$

É imediata a seguinte identidade,

$$p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\Big|_{v^i} \equiv 0. \tag{21}$$

Substituindo as soluções (20) em (19), obtemos,

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \Rightarrow \phi_\alpha(q,p) \equiv p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big|_{\dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha)} = 0. \tag{22}$$

Notemos que as funções $\phi_\alpha(q,p)$ não dependem de $\dot{q}^\alpha$. De fato, se isto ocorresse poderíamos usar a equação (22) para obter mais uma velocidade $\dot{q}$ em função dos q's, p's e $\dot{q}$ restantes, contrariando o teorema da aplicação implícita, já que $rank\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = [i]$.

Assim, até agora temos:

$$p_A = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \Leftrightarrow \dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha); \phi_\alpha(q,p) = p_\alpha - f_\alpha(q^A, p_j) \tag{23}$$

onde

$$f_\alpha(q^A, p_j) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big|_{\dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha)}. \tag{24}$$

Naturalmente obtivemos funções das variáveis q e p que não envolvem derivadas temporais. Chamaremos $\phi_\alpha(q,p)$ vínculos primários e $\phi_\alpha(q,p) = 0$ equações de vínculos primários.

Segundo passo: Hamiltoniana H_0 do sistema singular.

Definimos a Hamiltoniana H_0 do sistema singular da seguinte maneira,

$$H_0 \stackrel{def}{=} (p_A \dot{q}^A - L)\Big|_{\dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha),\, p_\alpha = f_\alpha(q^A, p_j)}. \tag{25}$$

Por construção H_0 não depende das velocidades $\dot{q}^A$. De fato, a dependência com $\dot{q}^i$ desaparece pois usamos as soluções (20) na definição de H_0. Para ver que H_0 também não depende de $\dot{q}^\alpha$, fazemos:

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{q}^\alpha} = p_i \frac{\partial v^i}{\partial q^\alpha} + p_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\Big|_{v^i} \frac{\partial v^i}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\Big|_{v^i}. \tag{26}$$

Usando a identidade (21) e a definição (24),

$$\frac{\partial H_0}{\partial \dot{q}^\alpha} = p_\alpha - f_\alpha = 0. \tag{27}$$

Notemos também que, por construção, $H_0 = H_0(q^A, p_j)$.

Terceiro passo: Hamiltoniana completa H do sistema singular no espaço de fase estendido.

Consideremos o espaço de fase estendido parametrizado por,

$$(q^A(\tau), p_A(\tau), v^\alpha(\tau)). \tag{28}$$

Definimos a Hamiltoniana completa do sistema singular no espaço de fase estendido da seguinte maneira,

$$H(q^A, p_A, v^\alpha) = H_0(q^A, p_j) + v^\alpha \phi_\alpha(q^A, p_A,) \tag{29}$$

onde os v^α são chamados multiplicadores de Lagrange.

Quarto passo: Parêntesis de Poisson no espaço (q^A, p_A, v^α)

Definição 2 *Dadas duas funções definidas no espaço* (q^A, p_A, v^α),

$$A = A(q, p, v), \ B = B(q, p, v) \tag{30}$$

o parêntesis de Poisson de A e B é definido por,

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q^A}\frac{\partial B}{\partial p_A} - \frac{\partial A}{\partial p_A}\frac{\partial B}{\partial q^A}. \tag{31}$$

Quinto passo: Equações de movimento hamiltonianas.

No espaço (q^A, p_A, v^α) de $2[A] + [\alpha]$ dimensões construímos as seguintes equações,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H\} = \{q^A, H_0 + v^\alpha \phi_\alpha\} = \{q^A, H_0\} + v^\alpha \{q^A, \phi_\alpha\} = \frac{\partial H}{\partial p_A}, \tag{32}$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H\} = \{p_A, H_0 + v^\alpha \phi_\alpha\} = \{p_A, H_0\} + v^\alpha \{p_A, \phi_\alpha\} = -\frac{\partial H}{\partial q^A}, \tag{33}$$

$$\phi_\alpha(q^A, p_A) = 0. \tag{34}$$

As formulções (8) e (32), (33), (34) são equivalentes [7]. Observemos que construímos um sistema de equações diferenciais equivalente a (8), contudo em (32) e (33) as equações estão em sua forma normal, isto é, a derivada de maior ordem está isolada (lhs de (32) e (33)). Notemos também que além de equações diferenciais, parte das equações de movimento são dadas por $[\alpha]$ equações algébricas: $\phi_\alpha = 0$.

Podemos então nos perguntar se existem mais equações algébricas, além das $[\alpha]$ já encontradas. Em geral, existem mais de $[\alpha]$ equações algébricas. Para ver como podem aparecer mais equações, consideremos o seguinte,

Lema 1 *O sistema de equações (32), (33) e (34) é equivalente ao sistema de equações abaixo:*

$$\dot{q}^A = \{q^A, H\}, \tag{35}$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H\}, \tag{36}$$

$$\phi_\alpha(q,p) = 0, \tag{37}$$

$$\{\phi_\alpha, H\} = 0. \tag{38}$$

Com efeito, é imediato que qualquer solução do sistema acima é também solução do sistema (32), (33) e (34). Por outro lado, se $q^A = x^A(\tau)$ e $p_A = \pi_A(\tau)$ é solução de (32), (33) e (34), então $\phi_\alpha(x^A(\tau), \pi_A(\tau)) \equiv 0$. Assim,

$$0 = \frac{d}{d\tau}\phi_\alpha(x^A(\tau), \pi_A(\tau)) = \{\phi_\alpha, H\} \Rightarrow 0 = \{\phi_\alpha, H\}. \tag{39}$$

Sexto passo: Trocar o sistema (32), (33), (34) pelo sistema (35), (36), (37), (38).

Mostrada a equivalência entre os sistemas (32), (33), (34) e (35), (36), (37), (38), trata-se de conveniência usar um ou outro sistema. Usaremos o segundo sistema de equações e veremos no próximo passo que a equação,

$$\{\phi_\alpha, H\} = 0 \tag{40}$$

pode trazer novas equações algébricas, ou seja, novas equações de vínculos ao sistema. A equação (40) apresenta uma interpretação simples: é natural pensar que um vínculo e preservado para todo instante de tempo, ou seja, sua evolução temporal é dada por,

$$\frac{d}{d\tau}\phi_\alpha = \{\phi_\alpha, H\} = 0. \tag{41}$$

Sétimo passo: Análise das equações $\{\phi_\alpha, H\} = 0$.

Temos,

$$0 = \{\phi_\alpha, H\} = \{\phi_\alpha, H_0\} + v^\beta\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}. \tag{42}$$

Definindo,

$$\{\phi_\alpha, H_0\} = H_\alpha, \tag{43}$$

$$\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = \Delta_{\alpha\beta}, \tag{44}$$

as equações (42) tomam a forma,

$$\Delta_{\alpha\beta}v^\beta = -H_\alpha. \tag{45}$$

7.1) $det\Delta_{\alpha\beta} \neq 0$**.**

Se $det\Delta_{\alpha\beta} \neq 0$, então obtemos todos os multiplicadores v^β,

$$v^\beta = -(\Delta^{-1})^{\beta\alpha} H_\alpha; \;\; v^\beta = v^\beta(q,p). \tag{46}$$

Não aparecem mais equações algébricas e as equações de movimento tomam a forma,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H\}\Big|_{v^\beta(q,p)}, \tag{47}$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H\}\Big|_{v^\beta(q,p)}, \tag{48}$$

$$\phi_\alpha(q,p) = 0. \tag{49}$$

Como o sistema acima está em sua forma normal, ou seja, a derivada temporal de maior ordem está isolada, fixadas $2[A]$ condições iniciais, existe única solução para (47), (48). Notemos que neste caso, os multiplicadores foram todos encontrados e retornamos ao espaço q^A, p_A.

7.2) $det\Delta_{\alpha\beta} = 0$**.**

Suponhamos que $rank\Delta_{\alpha\beta} = [\bar{a}] < [\alpha]$. Vamos supor, sem perda de generalidade [21], que a submatriz que determina o *rank* de $\Delta_{\alpha\beta}$ seja formada pelas primeiras $[\bar{a}]$ linhas e colunas de $\Delta_{\alpha\beta}$:

$$\boldsymbol{\Delta}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \Delta_{\bar{a}\bar{b}} & \Delta_{\bar{a}b'} \\ \Delta_{a'\bar{b}} & \Delta_{a'b'} \end{pmatrix}$$

onde $det\Delta_{\bar{a}\bar{b}} \neq 0$. Reescrevendo o sistema linear (45), encontramos,

$$\Delta_{\bar{a}\bar{b}} v^{\bar{b}} + \Delta_{\bar{a}b'} v^{b'} = -H_{\bar{a}}, \tag{50}$$

$$\Delta_{a'\bar{b}} v^{\bar{b}} + \Delta_{a'b'} v^{b'} = -H_{a'}. \tag{51}$$

Da equação (50), temos,

$$v^{\bar{b}} = -(\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}}(H_{\bar{a}} + \Delta_{\bar{a}b'} v^{b'}). \tag{52}$$

Encontramos $[\bar{a}]$ multiplicadores em função dos multiplicadores restantes. Substituindo (52) em (51),

$$-\Delta_{a'\bar{b}}(\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}}(H_{\bar{a}} + \Delta_{\bar{a}b'} v^{b'}) + \Delta_{a'b'} v^{b'} = -H_{a'}, \tag{53}$$

que implica,

$$\Delta'_{a'b'} v^{b'} = \Delta_{a'\bar{b}}(\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}} H_{\bar{a}} - H_{a'}, \tag{54}$$

onde

$$\Delta'_{a'b'} = \Delta_{a'b'} - \Delta_{a'\bar{b}}(\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}} \Delta_{\bar{a}b'}. \tag{55}$$

Se pudéssemos encontrar mais um multiplicador v a partir de (54) estaríamos contrariando o teorema da aplicação implícita já que $rank\Delta\alpha\beta = [\bar{a}]$ e já obtemos $[\bar{a}]$ multiplicadores em função dos demais. Portanto, obrigatoriamente, devemos ter,

$$rank\Delta'_{a'b'} = rank(\Delta_{a'b'} - \Delta_{a'\bar{b}}(\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}}\Delta_{\bar{a}b'}) = 0. \tag{56}$$

Isto implica,

$$\Delta'_{a'b'} = \Delta_{a'b'} - \Delta_{a'\bar{b}}(\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}}\Delta_{\bar{a}b'} = 0. \tag{57}$$

De fato, se algum elemento de Δ' fosse diferente de zero, digamos $\Delta'_{c'd'}$, então o determinte da submatriz de ordem 1, formada pelo elemento $\Delta'_{c'd'} \neq 0$ teria determinante diferente de zero e assim $rank\Delta' = 1$, contrariando (56). Retornando com (57) em (54),

$$H_{a'} - \Delta_{a'\bar{b}}(\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}}H_{\bar{a}} = 0. \tag{58}$$

Até agora encontramos, a partir de $\{\phi_\alpha, H\} = 0$,

$$v^{\bar{a}} = -(\Delta^{-1})^{\bar{a}\bar{b}}(\Delta_{\bar{b}c'}v^{c'} + H_{\bar{b}}), \tag{59}$$

$$\phi_{a'}(q,p) \equiv H_{a'} - \Delta_{a'\bar{b}}(\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{a}}H_{\bar{a}} = 0. \tag{60}$$

Dentre as equações (60), podemos ter conseqüências dos vínculos primários $\phi_\alpha(q,p) = 0$ ou ainda podem ocorrer identidades $0 \equiv 0$. Como não queremos informações irrelevantes, considere a seguinte

Definição 3 *Sejam $f_D = f_D(\xi^i)$ funções das variáveis ξ^i, com $[D] < [i]$. As funções f_D são ditas funcionalmente independentes quando,*

$$rank(\frac{\partial f_D}{\partial \xi^i})\Big|_{f_D(\xi^i)=0} = [d]. \tag{61}$$

Ou seja, quando, a partir das equações $f_D(\xi^i) = 0$, pudermos encontrar $[d]$ variáveis ξ em função das demais.

Assim, entre as funções $\phi_{a'}(q,p)$ escolhemos $[a] \leq [a']$ funções funcionalmente independentes e independentes dos $\phi_\alpha(q,p)$:

$$\phi_a(q,p) = H_a - \Delta_{a\bar{b}}(\Delta^{-1})^{\bar{b}\bar{c}}H_{\bar{c}};\ [a] \leq [a']. \tag{62}$$

As funções (62) são os vínculos secundários.

Oitavo passo: Substituição dos multiplicadores encontrados.

Como mostramos a equivalência entre os sistemas (32), (33), (34) e (35), (36), (37), (38) e agora entre $\{\phi_\alpha, H\} = 0$ e (59), (62) (em (62) retiramos as informações irrelevantes de (60)), nosso sistema de equações será,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H\}, \tag{63}$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H\}, \tag{64}$$

$$\phi_\alpha = 0, \tag{65}$$

$$\phi_a = 0, \tag{66}$$

$$v^{\bar{a}} = v^{\bar{a}}(q, p, v^{a'}), \tag{67}$$

ou seja, substituímos os $v^{\bar{a}}$ encontrados nas demais equações,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H\}\Big|_{v^{\bar{a}}}, \tag{68}$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H\}\Big|_{v^{\bar{a}}}, \tag{69}$$

$$\phi_\alpha = 0, \tag{70}$$

$$\phi_a = 0. \tag{71}$$

Nono passo em diante: Repetição dos passos 6, 7 e 8.

Submetendo ϕ_a à mesma análise feita para os vínculos primários, obtemos, quando existirem, vínculos de terceira etapa e alguns multiplicadores v e assim sucessivamente. Este procedimento é finito já que temos um número finito de graus de liberdade e não passa de $2[A]$ etapas.

Com isso completamos o método de Dirac para hamiltonização de sistemas singulares. Temos equações diferenciais de movimento em sua forma normal e dentre as equações de movimento aparecem também equações algébricas: os vínculos (é possível mostrar que todos os vínculos são revelados com o método [7]).

3 Discussão Sobre os Vínculos

3.1 Significado algébrido dos vínculos

A partir das equações de vínculo,

$$\phi_\alpha(q, p) = 0, \tag{72}$$

podemos obter alguns q e p como função dos demais,

$$\tilde{q} = \tilde{q}(q', p'), \tag{73}$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}(q', p'). \tag{74}$$

Conhecendo a dinâmica de q' e p', isto é,

$$q' = q'(\tau), \tag{75}$$

$$p' = p'(\tau), \tag{76}$$

imediatamente obtemos a dinâmica de $\tilde{q}$ e $\tilde{p}$:

$$\tilde{q}(\tau) = \tilde{q}(q'(\tau), p'(\tau)), \tag{77}$$

$$\tilde{p}(\tau) = \tilde{p}(q'(\tau), p'(\tau)). \tag{78}$$

Ou seja, os vínculos retratam o fato que em uma teoria singular, usamos mais variáveis para a descrição do sistema do que graus de liberdade físicos. Mais ainda, vemos também que a dinâmica de certos q's e p's não é independente dos demais.

3.2 Significado geométrico dos vínculos

Para termos uma idéia intuitiva sobre o significado dos vínculos, consideremos a seguinte equação definida no espaço $\Re^4$,

$$F(x, y, z, w) = 0. \tag{79}$$

Sob certas condições técnicas é possível escrever,

$$F(x, y, z, w) = 0 \Leftrightarrow w = f(x, y, z). \tag{80}$$

Então, de acordo com (80), $F = 0$ define um subespaço de $\Re^4$ com $4 - 1$ dimensões. Analogamente, o conjunto de pontos que satisfaz,

$$F_1(x, y, z, w) = 0, \tag{81}$$

$$F_2(x, y, z, w) = 0, \tag{82}$$

é também um subespaço de $\Re^4$ só que com $4 - 2$ dimensões.

A Hamiltoniana completa de um sistema singular foi definida no espaço q^A, p_A, v^α. Suponhamos que todos os v^α tenham sido encontrados em termos dos q's e p's. Portanto temos um espaço de $2[A]$ dimensões, onde os q's e p's são restritos às seguintes $[\alpha]$ equações de vínculos primários,

$$\phi_\alpha(q, p) = 0. \tag{83}$$

As equações (83) definem então um subespaço do espaço de fase com $2[A] - [\alpha]$ dimensões. Qualquer solução das equações de movimento está contida neste subespaço.

4 Classificação dos Vínculos: Primeira e Segunda Classes

Com os passos 7, 8 e 9 do método de Dirac fica claro como a obtenção dos multiplicadores v^α depende de,

$a)$ $det\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}\Big|_{\phi_\alpha=0}$,

$b)$ $rank\{\phi_{a_l}, \phi_\alpha\}\Big|_{\phi_\alpha=0}$, $l = 2, ..., N$,

onde ϕ_{a_l} são os vínculos de etapa l, $l = 2, ..., N$. Assim, naturalmente os vínculos se dividem em dois tipos: primeira e segunda classes, de acordo com as definições abaixo,

Definição 4 *Seja uma teoria singular com sistema de todos os vínculos dados por G_I, $I = 1, ..., [I]$. Dizemos que um vínculo T é de primeira classe quando,*

$$\{T, G_I\} = C_I{}^J G_J, \forall I = 1, ..., [I], \tag{84}$$

onde $C_I{}^J$ são funções de q e p.[3]

Definição 5 *Seja G_a, $a = 1, ..., [a]$ um sistema de vínculos. Dizemos que o sistema G_a é de segunda classe quando,*

$$det\{G_a, G_b\} \neq 0. \tag{85}$$

Para vermos a importância da separação de vínculos em primeira e segunda classe, primeiramente, consideremos uma teoria em que só estejam presentes vínculos primários e de segunda classe,

$$det\{\phi_\alpha, \phi_\beta\}\Big|_{\phi_\alpha=0} = det\Delta_{\alpha\beta} \neq 0. \tag{86}$$

Temos,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H_0\} + v^\alpha\{q^A, \phi_\alpha\} \tag{87}$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H_0\} + v^\alpha\{p_A, \phi_\alpha\} \tag{88}$$

$$\phi_\alpha(q^A, p_A) = 0. \tag{89}$$

Da condição $0 = \{\phi_\alpha, H\}$ obtemos,

$$0 = \{\phi_\alpha, H\} = \{\phi_\alpha, H_0\} + \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}v^\beta \Rightarrow v^\beta = -(\Delta^{-1})^{\beta\alpha}\{\phi_\alpha, H_0\}. \tag{90}$$

[3]Notemos que esta definição está ligada com o seguinte teorema [8]: se uma função suave G definida no espaço de fase zera na superfície $\phi_\alpha = 0$, então $G = g^\alpha\phi_\alpha$, para algumas funções g^α.

Retornando com os v^β encontrados em (90) nas equações (87) e (88) encontramos,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H_0\} - \{q^A, \phi_\alpha\}(\Delta^{-1})^{\alpha\beta}\{\phi_\beta, H_0\} \tag{91}$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H_0\} - \{p_A, \phi_\alpha\}(\Delta^{-1})^{\alpha\beta}\{\phi_\beta, H_0\} \tag{92}$$

$$\phi_\alpha(q^A, p_A) = 0. \tag{93}$$

As equações (91) e (92) motivam a definição do parêntesis de Dirac de duas funções A e B definidas no espaço de fase,

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \phi_\alpha\}(\Delta^{-1})^{\alpha\beta}\{\phi_\beta, B\}, \tag{94}$$

o que nos permite escrever as equações de movimento (91), (92) e (93) de forma compacta,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H_0\}^*, \tag{95}$$

$$\dot{p}_A = \{p_A, H_0\}^*, \tag{96}$$

$$\phi_\alpha(q^A, p_A) = 0. \tag{97}$$

Portanto, os vínculos de segunda classe nos permitem obter multiplicadores bem como formular equações de movimento através do parêntesis de Dirac.

Vamos discutir agora a importância dos vínculos de primeira classe. Para isso usaremos um modelo concreto e mostraremos a ligação entre vínculos de primeira classe, equações de movimento lagrangeanas e simetrias. Isto servirá como motivação para as seções seguintes deste trabalho, onde discutiremos um método construtivo de obtenção de simetrias locais para uma teoria singular.

Seja o modelo descrito pela ação

$$S = \int d\tau L, \tag{98}$$

onde a Lagrangeana L é dada por [13,17],

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x} - y)^2 + \frac{1}{2}(z + \dot{y})^2. \tag{99}$$

As equações lagrangeanas de movimento são dadas por [1],

$$\frac{\delta S}{\delta x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} - \dot{y} = 0, \tag{100}$$

$$\frac{\delta S}{\delta y} = 0 \Rightarrow \dot{z} + \ddot{y} = -(\dot{x} - y), \tag{101}$$

$$\frac{\delta S}{\delta z} = 0 \Rightarrow z + \dot{y} = 0. \tag{102}$$

Existe a seguinte identidade entre as equações (100), (101) e (102),

$$(\frac{d^2}{d\tau^2}\frac{\delta}{\delta z} - \frac{d}{d\tau}\frac{\delta}{\delta y} - \frac{\delta}{\delta x})S = 0. \tag{103}$$

A identidade (103) retrata o fato que a ação S e neste caso, a própria Lagrangeana L são invariantes sob as transformações de simetria local,

$$x \to x' = x + \alpha, \tag{104}$$

$$y \to y' = y + \dot{\alpha}, \tag{105}$$

$$z \to z' = z - \ddot{\alpha}, \tag{106}$$

onde $\alpha = \alpha(\tau)$ é uma função arbitrária de τ.
É conseqüência imediata da identidade (103) e das transformações de simetria (104), (105) e (106) uma arbitrariedade na solução das equações de movimento. De fato, fixando condições iniciais,

$$z(0) = z_0, \tag{107}$$

$$\dot{y}(0) = -z_0, \tag{108}$$

$$y(0) = y_0, \tag{109}$$

$$\dot{x}(0) = y_0, \tag{110}$$

$$x(0) = x_0, \tag{111}$$

encontramos as seguintes soluções para as equações de movimento (100), (101) e (102),

$$x = x_0 + y_0\tau - \frac{z_0}{2}\tau^2 - \int_0^\tau (\int_0^{\tau'} \varphi(\tau'')d\tau'')d\tau', \tag{112}$$

$$y = y_0 - z_0\tau - \int_0^\tau \varphi(\tau')d\tau', \tag{113}$$

$$z = z_0 + \varphi(\tau), \tag{114}$$

onde, com exceção de $\varphi(0) = 0$, a função φ é arbitrária. Mais ainda, a presença de simetrias locais (juntamente com a arbitrariedade nas equações (112), (113) e (114)) nos mostra que das variáveis x, y e z, nem todas possuem dinâmica independente. Notemos que a dinâmica de z é determinada a partir da dinâmica de y. Vejamos agora as conseqüências dos fatos citados acima para o formalismo hamiltoniano. Seguindo os passos do método de Dirac, começamos com os momentos canônicos,

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y \Rightarrow \dot{x} = p_x + y, \tag{115}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = z + \dot{y} \Rightarrow \dot{y} = p_y - z, \tag{116}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0. \tag{117}$$

A Hamiltoniana completa é,

$$H = H_0 + \lambda p_z, \tag{118}$$

onde,

$$H_0 = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + yp_x - zp_y, \tag{119}$$

e λ é o multiplicador para o vínculo primário $p_z = 0$. Prosseguindo com o procedimento, encontramos os seguintes vínculos de etapas superiores,

$$0 = \{p_z, H\} = p_y \Rightarrow p_y = 0, \tag{120}$$

$$0 = \{p_y, H\} = -p_x \Rightarrow p_x = 0, \tag{121}$$

$$0 = \{p_x, H\} = 0. \tag{122}$$

Como $\{p_x, p_y\} = \{p_x, p_z\} = \{p_y, p_z\} = 0$, os vínculos são todos de primeira classe.

O primeiro resultado que encontramos com a presença somente de vínculos de primeira classe é que nenhum multiplicador pode ser encontrado como função dos q's, p's e outros multiplicadores. Notemos que o número de vínculos primários de primeira classe coincide com o número de funções arbitrárias das soluções (112), (113) e (114) das equações de movimento lagrangeanas, neste caso temos um vínculo e uma função arbitrária. Mais ainda, a simetria (104), (105) e (106) tem ordem 2 e encontramos um vínculo de terceira etapa. Por fim, o número de identidades entre as equações (100), (101) e (102), neste caso, uma identidade, coincide com uma simetria com um parâmetro, que é uma função arbitrária de τ. Estes fatos não são coincidência. Na verdade são resultados e no caso geral têm os seguintes enunciados [7]:

Afirmação 1 *Em uma teoria singular, a solução das equações de movimento de Lagrange contem exatamente n funções arbitrárias do tempo, igual ao número de vínculos primários de primeira classe presentes no formalismo hamiltoniano correspondente.*

Afirmação 2 *Se*

$$\delta q^A = \sum_{k=0}^{[k]} R^A{}_{(k)\alpha}(q, \dot{q}, ...; \tau) \frac{d^k}{d\tau^k}\epsilon^\alpha(\tau);\ \alpha = 1, ..., r, \tag{123}$$

é uma simetria local de uma teoria lagrangeana singular, então em geral obtemos no formalismo hamiltoniano correspondente vínculos de etapa $[k]+1$.

Afirmação 3 *Ocorrem r identidades independentes satisfeitas pelas equações de movimento de Lagrange se, e somente se, existem simetrias da ação lagrangeana com r parâmetros, que são funções arbitrárias do tempo.*

Com essas afirmações vemos claramente a ligação entre vínculos de primeira classe e a presença de simetrias locais em teorias singulares. Estes resultados serão essenciais para a próxima Seção deste trabalho, quando apresentaremos um método de obtenção de simetrias locais para teorias singulares.

Discutimos com detalhes um modelo simples, contudo vale a pena mencionar que a Eletrodinâmica, descrita por,

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{124}$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{125}$$

apresenta a mesma estrutura do modelo (99):

a) Identidade entre equações de movimento;

b) Simetria local;

c) Vínculo de primeira classe presente no formalismo hamiltoniano;

d) Dentre as 4 componentes de A_μ, só duas são físicas já que com as simetrias locais conseguimos eliminar os graus de liberdade não físicos.

Para finalizar esta seção gostaríamos de ressaltar dois resultados centrais sobre classificação dos vínculos [7,18].

Teorema 1 *Seja uma teoria hamiltoniana singular com sistema completo de vínculos dados por G_I e $rank\{G_I, G_J\} = [i] < [I]$. Então existe uma matriz ${C_I}^J$, $det{C_I}^J\big|_{G_I=0} \neq 0$, tal que $G'_I = {C_I}^J G_J$ (neste caso dizemos que os sistemas G'_I e G_I são equivalentes) de forma que,*

$$G'_I = (G_{I'}, T_{I''}) \tag{126}$$

onde $G_{I'}$ são vínculos de segunda classe e cada $T_{I''}$ é de primeira classe.

Um outro resultado não menos importante, que apesar de colocar certas restrições na Hamiltoniana e no sistema de vínculos, é o seguinte,

Teorema 2 *Seja o espaço de fase parametrizado por $\eta = (q, p, \lambda)$ e uma teoria singular com Hamiltoniana e vínculos dados por,*

$$H = H(\eta^2) \tag{127}$$

$$\Phi^J = \Phi^J(\eta) \tag{128}$$

onde Φ^J é o sistema completo de vínculos revelado pelo método de Dirac. Neste caso, é possível obter uma matriz $C^J{}_K$ com $detC^J{}_K \neq 0$, de forma que,

$$C^J{}_K \Phi^K = \tilde{\Phi}^J \tag{129}$$

onde $\tilde{\Phi}^J = (\varphi^l, \chi^m)$; os vínculos φ são de segunda classe, os vínculos χ são de primeira classe e se dividem da seguinte maneira: $\varphi^l = \varphi^{(i|a)}$ e $\chi^m = \chi^{(i|u)}$. O índice i corresponde ao estágio do procedimento de Dirac e os índices a e u enumeram os vínculos em cada estágio. Esta reorganização é consistente com o método de Dirac, ou seja, os vínculos são separados em primeira e segunda classes em cada etapa do procedimento de hamiltonização.

A organização dos vínculos segundo os teoremas acima é conveniente tanto para formular as equações de movimento via parêntesis de Dirac (vínculos de segunda classe) quanto para a análise do setor físico da teoria via simetrias locais (vínculos de primeira classe).

5 Obtenção Das Simetrias Locais Para Uma Teoria Lagrangena Singular

5.1 Método de obtenção de simetrias locais para uma teoria singular em linhas gerais

Já discutimos em seções anteriores a importância das simetrias locais para teorias degeneradas: a distinção entre o setor físico do não físico de um sistema. Nesta seção discutiremos em linhas gerais um método de obtenção das simetrias locais para uma teoria singular arbitrária [15].

Fixada uma teoria singular com Lagrangeana L onde estão presentes somente vínculos de primeira classe de etapa N no formalismo hamiltoniano correspondente, construímos uma Lagrangena $\tilde{L}$, por métodos algébricos em termos das grandezas da formulação inicial, equivalente a L. $\tilde{L}$ apresenta somente vínculos de primeira classe, no máximo, secundários. Todas as simetrias de $\tilde{L}$ são obtidas, onde os geradores são os vínculos de L. Formularemos e demonstraremos então um teorema que nos permite obter, a partir das simetrias de $\tilde{L}$, as simetrias locais de L.

5.2 A construção de $\tilde{L}$

A evolução temporal de um sistema hamiltoniano é ditada pela Hamiltoniana completa do sistema: $H = H_0 + v^\alpha \phi_\alpha$. Como já vimos, o método de

Dirac revela, além dos vínculos primários ϕ_α, vínculos de etapas superiores que chamaremos $T_a(q^A, p_j)$.[4]

Em uma formulação equivalente, a análise de sistemas vinculados pode ser feita através do formalismo da Hamiltoniana estendida [7], H_{est}, definida por,

$$H_{est} = H + \lambda^a T_a = H_0(q^A, p_j) + \lambda^\alpha \phi_\alpha + \lambda^a T_a, \tag{130}$$

onde λ^α e λ^a são os multiplicadores correspondentes. Imediatamente notamos que as equações de movimento no formalismo estendido são diferentes das equações obtidas com H, já que H_{est} apresenta explicitamente todos os vínculos da teoria. Contudo, como mencionamos, estes formalismos são equivalentes. Apesar de ser útil para a análise da estrutura dos vínculos no caso geral, H_{est} apresenta alguns pontos misteriosos. Em particular, não existe Lagrangeana tal que, passando para o formalismo hamiltoniano, encontramos H_{est} como Hamiltoniana completa. De fato, resolvendo $T_a = 0$ em função de alguns $p_{a'}$, obtemos,

$$T_{a'} = p_{a'} - t_{a'}(q^A, p'). \tag{131}$$

Como H_0 em geral também depende de p', então H_{est} não pode ser a Hamiltoniana completa para alguma Lagrangeana já que a equação (130) não tem a forma (29). Para ver então como o formalismo de H_{est} sugere alguma dica para a construção de $\tilde{L}$, seja $L = L(q^A, \dot{q}^A)$ uma Lagrangeana de uma teoria singular, definida no espaço de configurações q^A; $A = 1, ..., [A]$. Passando ao formalismo hamiltoniano encontramos,

$$H(q^A, p_A, v^\alpha) = H_0(q^A, p_j) + v^\alpha \phi_\alpha(q^A, p_A,). \tag{132}$$

(Enfatizamos que as notações utilizadas são as mesmas da seção 2). Suponhamos que a teoria apresente vínculos de etapa N, $N > 1$. Vínculos de etapas superiores serão denotados por $T_a(q^A, p_j)$ e o sistema completo de vínculos por $G_I \equiv (\phi_\alpha, T_a)$. Como buscamos simetrias locais, vamos supor também, à luz das afirmações 1, 2 e 3, que o sistema tenha vínculos somente de primeira classe, isto é,

$$\{G_I, G_J\} = c_{IJ}{}^K(q^A, p_j) G_K, \qquad \{G_I, H_0\} = b_I{}^J(q^A, p_j) G_J. \tag{133}$$

Chamaremos os parêntesis acima de álgebra de calibre ou gauge.
Como mostramos, H_{est} não pode ser Hamiltoniana para nenhuma Lagrangeana.

[4] A seção 2, além de descrever com detalhes o método de Dirac serve para fixar a notação que será usada daqui para frente.

Consideremos então a seguinte função $\tilde{H}$, com estrutura similar à estrutura de H_{est}, definida no espaço parametrizado por $q^A, \tilde{p}_A, s^a, \pi_a, v^\alpha, v^a$,

$$\tilde{H}(q^A, \tilde{p}_A, s^a, \pi_a, v^\alpha, v^a) = \tilde{H}_0(q^A, \tilde{p}_j, s^a) + v^\alpha \Phi_\alpha(q^A, \tilde{p}_B) + v^a \pi_a, \qquad (134)$$

onde,

$$\tilde{H}_0 = H_0(q^A, \tilde{p}_j) + s^a T_a(q^A, \tilde{p}_j), \qquad (135)$$

e as funções ϕ_α, H_0 e T_a são tomadas da formulação inicial.

Afirmamos que a Hamiltoniana (134) é a Hamiltoniana completa para uma Lagrangeana $\tilde{L} = \tilde{L}(q^A, \dot{q}^A, s^a)$ definida no espaço de configurações q^A, s^a. $\tilde{H}_0$ será a Hamiltoniana de $\tilde{L}$ e $\phi_\alpha = 0$, $\pi_a = 0$ (onde π_a são os momentos conjugados às variáveis s^a: $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{s}^a}$) são vínculos primários. Para mostrar estes fatos, começamos escrevendo a equação de movimento para q^i no formalismo hamiltoniano,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} = \frac{\partial H_0}{\partial \tilde{p}_i} + s^a \frac{\partial T_a}{\partial \tilde{p}_i} - v^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \tilde{p}_i}. \qquad (136)$$

Esta equação pode ser invertida em relação a $\tilde{p}_i$ numa vizinhança do ponto $s^a = 0$. Com efeito, para $s^a = 0$, esta equação tem a forma,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_i} \qquad (137)$$

que é simplesmente a equação (23) da formulação inicial,

$$\dot{q}^i = v^i(q^A, \tilde{p}_j, \dot{q}^\alpha). \qquad (138)$$

Invertendo em relação a $\tilde{p}_j$, obtemos a equação (18). Portanto, det $\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i \partial \tilde{p}_j} \neq 0$ e logo isso é também verdade numa vizinhança do ponto $s^a = 0$. Daí a equação (136) pode ser resolvida. Vamos denotar sua solução por,

$$\tilde{p}_i = \omega_i(q^A, \dot{q}^i, v^\alpha, s^a). \qquad (139)$$

São imediatas as seguintes identidades envolvendo ω_i:

(i) $\omega_i\big|_{\dot{q}^i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}} \equiv \tilde{p}_i$;

(ii) $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}\Big|_{\tilde{p}_i = \omega_i} \equiv \dot{q}^i$,

bem como a seguinte propriedade de ω_i,

$$\omega_i(q^A, \dot{q}^i, v^\alpha, s^a)\Big|_{s^a = 0, v^\alpha \to \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \qquad (140)$$

Na propriedade acima usamos o fato que as equações para $\dot{q}^i$, vindas de,

$$\dot{q}^A = \{q^A, \tilde{H}\}, \tag{141}$$

coincidem com as equações,

$$\dot{q}^i = v^i(q^A, \dot{q}^i, v^\alpha, s^a), \tag{142}$$

bastantdo para isso substituir v^α por $\dot{q}^\alpha$ [22]. Usando a notação,

$$\omega_i(q^A, \dot{q}^i, v^\alpha, s^a)\Big|_{v^\alpha \to \dot{q}^\alpha} \equiv \omega_i(q, \dot{q}, s), \tag{143}$$

definimos a seguinte função $\tilde{L}$ no espaço q^A, s^a,

$$\begin{gathered}\tilde{L}(q^A, \dot{q}^A, s^a) = \\ \Big(\omega_i \dot{q}^i + f_\alpha(q^A, \omega_j)\dot{q}^\alpha - H_0(q^A, \omega_j) - s^a T_a(q^A, \omega_j)\Big)\Big|_{\omega(q,\dot{q},s)}.\end{gathered} \tag{144}$$

$\tilde{L}$ é a Lagrangeana estendida procurada e possui as seguintes propriedades,

a) $\tilde{L}$ envolve as novas variáveis s^a em número igual ao de vínculos de etapas superiores T_a de L.

b) Os vínculos de etapas superiores T_a de L entram explicitamente em $\tilde{L}$.

c) Considerando $\tilde{L}$ uma função de ω_i encontramos,

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_i}\bigg|_{\omega(q,\dot{q},s)} = \left(\dot{q}^i - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}\right)\bigg|_{\tilde{p}=\omega(q,\dot{q},s)} = 0. \tag{145}$$

d) $\tilde{L}(q^A, \dot{q}^A, s^a)|_{s^a=0} = L(q^A, \dot{q}^A)$.

e) Passando ao formalismo hamiltoniano,

$$\tilde{p}_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^i} = \omega_i(q^A, \dot{q}^A, s^a), \tag{146}$$

$$\tilde{p}_\alpha = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} = f_\alpha(q^A, \omega_j), \tag{147}$$

$$\pi_a = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{s}^a} = 0. \tag{148}$$

De acordo com as identidades (i) e (ii) envolvendo ω_i podemos reescrever (146), (147) (e (148)) como,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \tag{149}$$

$$\phi_\alpha = \tilde{p}_\alpha - f_\alpha(q^A, \tilde{p}_j) = 0, \tag{150}$$

$$\pi_a = 0. \tag{151}$$

Portanto, $\phi_\alpha = 0$ e $\pi_a = 0$ são vínculos primários e as velocidades $\dot{q}^i$ foram encontradas. Escrevendo $\tilde{H}_0$ encontramos,

$$\tilde{H}_0 = \tilde{p}_A \dot{q}^A + \pi_a \dot{s}^a - \tilde{L} = H_0 + s^a T_a(q^A, \tilde{p}_j). \tag{152}$$

Logo $\tilde{H}$ é dada por (134) e $\tilde{L}$ é a Lagrangeana correspondente, como afirmamos. Para completar a dinâmica de $\tilde{H}$, vejamos quais vínculos de etapas superiores são obtidos:

$$0 = \{\pi_a, \tilde{H}\} = -T_a \Rightarrow T_a = 0. \tag{153}$$

Todas as equações de vínculos oriundas de $0 = \{\phi_\alpha, \tilde{H}\}$ já são parte de $T_a = 0$ pois $\{\phi_\alpha, \tilde{H}\} = \{\phi_\alpha, H\} + s^a c_{\alpha a}{}^I G_I \approx \{\phi_\alpha, H\} = 0$. Logo o procedimento de Dirac pára na segunda etapa.

As propriedades (a)-(e) serão essenciais para a discussão das simetrias locais da Lagrangeana estendida, como veremos nas próximas seções. Em particular, como o método de Dirac pára na segunda etapa, de acordo com a afirmação 2 esperamos que $\tilde{L}$ tenha uma simetria local da forma,

$$\delta q = \tilde{\varepsilon} R_1 + \dot{\tilde{\varepsilon}} R_2 \tag{154}$$

ou seja, com estrutura bem mais simples que a simetria local de L, que é da forma,

$$\delta q = \varepsilon R_0 + \dot{\varepsilon} R_1 + ... + \frac{d^{N-1}\varepsilon}{d\tau^{N-1}} R_N \tag{155}$$

já que supomos que L apresenta vínculos de etapa N.

Resumindo, construímos o seguinte esquema: $L \Rightarrow \tilde{H} \Rightarrow \tilde{L} \Leftrightarrow L$.

5.3 As dinâmicas de L e $\tilde{L}$

As equações hamiltonianas de movimento de $\tilde{L}$ são dadas por,

$$\dot{q}^A = \{q^A, H\} + s^a \{q^A, T_a\}, \tag{156}$$

$$\dot{\tilde{p}}_A = \{\tilde{p}_A, H\} + s^a \{\tilde{p}_A, T_a\}, \tag{157}$$

$$\dot{s}^a = v^a, \tag{158}$$

$$\dot{\pi}_a = 0, \tag{159}$$

com os seguintes vínculos,

$$\pi_a = 0, \qquad \Phi_\alpha = 0, \qquad T_a = 0, \tag{160}$$

onde H é a Hamiltoniana da formulação inicial e o parêntesis de Poisson $\{,\}$ é definido no espaço q^A, $\tilde{p}_A$, s^a, π_a. De acordo com Dirac [5], para cada vínculo de primeira classe podemos fixar um calibre, ou seja, escolher uma equação arbitrária que acompanhe a equação de vínculo. Fixemos parcialmente os calibres,[5]

$$s^a = 0 \tag{161}$$

para os vínculos,

$$\pi_a = 0. \tag{162}$$

Desta maneira, o setor (s^a, π_a) desaparece da teoria $\tilde{L}$ e as equações de movimento (157)-(160) coincidem com as equações de movimento hamiltonianas de L. Como L representa um dos calibres de $\tilde{L}$, mostramos a equivalência entre as duas formulações [7]. Agora é questão de conveniência usar L ou $\tilde{L}$. Como buscamos simetrias locais, de acordo com (154), partiremos da Lagrangeana $\tilde{L}$.

6 Simetrias Locais das Ações Hamiltoniana e Lagrangeana

Devido à estrutura de $\tilde{L}$, que apresenta vínculos somente de segunda etapa, esperamos que a obtenção das simetrias locais de $\tilde{L}$ seja mais simples, comparada com a obtenção das de L (veja equações (154) e (155)). Na verdade, é isto que acontece. Como $\tilde{L}$ apresenta $[\alpha]+[a]$ vínculos primários de primeira classe, esperamos o mesmo número de simetrias locais independentes (Afirmações 1 e 3). Estas simetrias podem facilmente ser encontradas em função dos vínculos da formulação inicial.

6.1 Simetrias da ação hamiltoniana

No trabalho [11], mostrou-se que se δq é uma simetria da ação lagrangeana, então as simetrias da ação hamiltoniana podem ser expressas como,

$$\delta q^A = \{q^A, G\} \tag{163}$$

$$\delta p_A = \{p_A, G\} \tag{164}$$

$$\delta v^\alpha = \{H, \delta q^\alpha\} \tag{165}$$

onde v^α são os multiplicadores e G é uma combinação de vínculos presentes no formalismo hamiltoniano. Isto sugere que as simetrias da ação hamiltoniana

[5] Notemos que o calibre $s^a = 0$ é consistente com a construção de $\tilde{L}$, que foi feita numa vizinhança do próprio ponto $s^a = 0$.

tenham geradores: $\{\eta, G_I\}$ onde $\eta = (q,p)$. Consideremos então a variação da ação hamiltoniana que corresponde a $\tilde{L}$,

$$S_{\tilde{H}\tilde{L}} = \int d\tau(\tilde{p}_A\dot{q}^A + \pi_a\dot{s}^a - \tilde{H}) =$$
$$\int d\tau(\tilde{p}_A\dot{q}^A + \pi_a\dot{s}^a - H_0(q^A,\tilde{p}_j) - s^aT_a(q^A,\tilde{p}_j) -$$
$$v^\alpha\Phi_\alpha(q^A,\tilde{p}_B) - v^a\pi_a), \tag{166}$$

sob as transformações infinitesimais,

$$\delta_I q^A = \epsilon^I\{q^A, G_I\} \tag{167}$$

$$\delta_I \tilde{p}_A = \epsilon^I\{\tilde{p}_A, G_I\} \tag{168}$$

onde ϵ^I são os parâmetros e I é algum valor fixo α ou a. Isto implica, a menos um termo de derivada total,

$$\delta(\tilde{p}_A\dot{q}^A) = \dot{q}^A\delta\tilde{p}_A + \tilde{p}_A(\delta q^A)^{\cdot} = \dot{q}^A\delta\tilde{p}_A - \dot{\tilde{p}}_A\delta q^A. \tag{169}$$

Usando as transformações (167) e (168) chegamos a,

$$\delta(\tilde{p}_A\dot{q}^A) = \epsilon^I(-\frac{\partial H}{\partial\tilde{p}_A}\frac{\partial G_I}{\partial q^A} + \frac{\partial H}{\partial q^A}\frac{\partial G_I}{\partial\tilde{p}_A}) = -\epsilon^I\dot{G}_I = \dot{\epsilon}^I G_I. \tag{170}$$

Para qualquer função $A = A(q,\tilde{p})$,

$$\delta A(q,\tilde{p}) = \frac{\partial A}{\partial q^A}\delta q^A + \frac{\partial A}{\partial\tilde{p}_A}\delta\tilde{p}_A = \epsilon^I\{A, G_I\}. \tag{171}$$

De acordo com as equações (170) e (171), não é difícil ver que a variação de $S_{\tilde{H}}$ no subespaço $q^A, \tilde{p}_A$ é proporcional a G_I (Veja apêndice A). Assim, podemos cancelá-la com transformações apropriadas para s^a e v^α. Por sua vez, fazendo $\delta\pi_a = 0$, tomamos a variação para v^a como $\delta v^a = (\delta s^a)^{\cdot}$. Portanto é só questão de cálculo mostrar que as seguintes transformações são simetrias de $S_{\tilde{H}}$, (veja apêndice B)

$$\delta_I q^A = \epsilon^I\{q^A, G_I\} \tag{172}$$

$$\delta_I \tilde{p}_A = \epsilon^I\{\tilde{p}_A, G_I\} \tag{173}$$

$$\delta_I s^a = \dot{\epsilon}^a\delta_{aI} + \epsilon^I {b_I}^a - s^b\epsilon^I {c_{bI}}^a - v^\beta\epsilon^I {c_{\beta I}}^a, \tag{174}$$

$$\delta_I\pi_a = 0, \tag{175}$$

$$\delta_I v^\alpha = \dot{\epsilon}^\alpha\delta_{\alpha I}, \tag{176}$$

$$\delta_I v^a = (\delta_I s^a)^{\cdot}, \tag{177}$$

onde b e c são as funções da álgebra (133). Logo, todos os vínculos G_I da formulação inicial são geradores das transformações de simetria no subespaço $q^A, \tilde{p}_A$ do espaço de fase.

6.2 Simetrias da ação lagrangeana estendida

Seja a ação lagrangeana,

$$S_{\tilde{L}} = \int d\tau \tilde{L}. \tag{178}$$

Vamos mostrar que as seguintes transformações são simetrias de (178),

$$\delta_I q^A = \epsilon^I \left.\{q^A, G_I\}\right|_{p\to\omega(q,\dot{q},s)}, \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \delta_I q^\alpha & = & \epsilon^\alpha \delta_{\alpha I}, \\ \delta_I q^i & = & \epsilon^I \left.\frac{\partial G_I}{\partial \tilde{p}_i}\right|_{p\to\omega(q,\dot{q},s)}; \end{array} \right.$$
$$\delta_I s^a = \left.\left(\dot{\epsilon}^a \delta_{aI} + \epsilon^I {b_I}^a - s^b \epsilon^I {c_{bI}}^a - \dot{q}^\beta \epsilon^I {c_{\beta I}}^a\right)\right|_{p\to\omega(q,\dot{q},s)}. \tag{179}$$

Sob uma variação arbitrária δq^A, δs^a de $\tilde{L}$ encontramos,

$$\delta\tilde{L} = -\dot{\omega}_i \delta q^i - \dot{f}_\alpha \delta q^\alpha + \dot{q}^\alpha \left.\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^A}\right|_{\omega(q,\dot{q},s)} \delta q^A -$$
$$\left.\frac{\partial H_0}{\partial q^A}\right|_{\omega(q,\dot{q},s)} \delta q^A - \delta s^a T_a - s^a \left.\frac{\partial T_a}{\partial q^A}\right|_{\omega(q,\dot{q},s)} \delta q^A + \left.\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_i}\right|_{\omega(q,\dot{q},s)} \delta\omega_i. \tag{180}$$

De acordo com a propriedade (c) de $\tilde{L}$, $\left.\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_i}\right|_{\omega(q,\dot{q},s)} = 0$, podemos escolher $\delta\omega_i$ arbitrariamente sem alterar a variação $\delta\tilde{L}$. Tomemos então,

$$\delta\omega_i = -\epsilon^I \left.\frac{\partial G_I}{\partial q^i}\right|_{\tilde{p}\to\omega}. \tag{181}$$

Substituindo δq^A dada em (179) e $\delta\omega_i$ acima em (180) obtemos após alguns cálculos (apêndice C),

$$\delta\tilde{L} = \left[-\dot{T}_a \epsilon^a + \dot{q}^\alpha \epsilon^\beta \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^\beta} - \frac{\partial f_\beta}{\partial q^\alpha} - \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial f_\beta}{\partial \tilde{p}_i} - \alpha \leftrightarrow \beta\right)\right) - \right.$$
$$(s^a \epsilon^\alpha - \dot{q}^\alpha \epsilon^a)\left(\frac{\partial T_a}{\partial q^\alpha} + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial T_a}{\partial \tilde{p}_i} - f \leftrightarrow T\right)\right) -$$
$$\epsilon^\alpha \left(\frac{\partial H_0}{\partial q^\alpha} - \left(\frac{\partial H_0}{\partial q^i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \tilde{p}_i} - H_0 \leftrightarrow f\right)\right) -$$
$$\left.\left.\epsilon^a \left(\frac{\partial H_0}{\partial q^i}\frac{\partial T_a}{\partial \tilde{p}_i} - H_0 \leftrightarrow T\right) - s^a \epsilon^b \left(\frac{\partial T_a}{\partial q^i}\frac{\partial T_b}{\partial \tilde{p}_i} - a \leftrightarrow b\right) - \delta s^a T_a\right]\right|_{p\to\omega}$$
$$\equiv \left[\dot{\epsilon}^a T_a - \dot{q}^\alpha \epsilon^\beta \{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\} + (s^a \epsilon^\alpha - \dot{q}^\alpha \epsilon^a)\{\Phi_\alpha, T_a\} - \right.$$
$$\left.\left.\epsilon^\alpha \{H_0, \Phi_\alpha\} - \epsilon^a \{H_0, T_a\} - s^a \epsilon^b \{T_a, T_b\} - \delta s^a T_a\right]\right|_{p\to\omega},$$
$$= \left.\left[\left(\dot{\epsilon}^a - \dot{q}^\alpha \epsilon^I {c_{\alpha I}}^a + \epsilon^I {b_I}^a - s^b \epsilon^I {c_{bI}}^a - \delta s^a\right) T_a\right]\right|_{\tilde{p}\to\omega}. \tag{182}$$

Portanto a variação de s^a dada em (179) fornece,

$$\delta\tilde{L} = \frac{d}{d\tau}F, \tag{183}$$

como afirmamos.

6.3 Simetrias da ação lagrangeana inicial

Para obter as simetrias da ação inicial, consideremos o seguinte

Teorema 3 *Seja δq^A, δs^a uma simetria de $\tilde{L}$, onde*

$$\delta \equiv \sum_I \delta_I \tag{184}$$

A ação inicial é invariante sob as transformações,

$$\delta q^A = \sum_I \delta_I q^A, \tag{185}$$

que obedecem $\delta s^a = 0$ no ponto $s^a = 0$.

Demonstração:
Como temos uma simetria de $\tilde{L}$ ocorre,

$$\delta\tilde{L} = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q^A}\delta q^A + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}^A}(\delta q^A)^{\cdot} + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial s^a}\delta s^a = \frac{d}{d\tau}F,\ \forall s^a. \tag{186}$$

Em particular, consideremos a combinação de simetrias de $\tilde{L}$, $\delta = \sum_I \delta_I$, que obedece $\delta s^a = 0$ para $s^a = 0$. Neste caso,

$$\delta\tilde{L}|_{s^a=0;\delta s^a=0} = \left.\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q^A}\right|_{s^a=0}\delta q^A + \left.\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}^A}\right|_{s^a=0}(\delta q^A)^{\cdot} = \frac{d}{d\tau}F. \tag{187}$$

Pela propriedade (d) da Lagrangeana estendida encontramos,

$$\delta\tilde{L}|_{s^a=0;\delta s^a=0} = \frac{\partial L}{\partial q^A}\delta q^A + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^A}(\delta q^A)^{\cdot} = \delta L = \frac{d}{d\tau}F. \tag{188}$$

Portanto a ação inicial é invariante sob as transformações,

$$\delta q^A = \sum_I \delta_I q^A\Big|_{s^a=0} \tag{189}$$

que obedecem $\delta s^a = 0$.

De acordo com a transformação (179) para $\delta_I s^a$,

$$\sum_I \delta_I s^a\Big|_{s^a=0} \Rightarrow \dot{\epsilon}^a + \epsilon^I {b_I}^a - \dot{q}^\beta {c_{\beta I}}^a = 0. \tag{190}$$

Temos então $[a]$ equações para $[\alpha] + [a]$ variáveis ϵ. O sistema (190) pode ser resolvido por métodos algébricos [10], o que fornece $[a]$ ϵ's em termos dos ϵ's restantes e suas derivadas de ordem menor que N. Isto permite obter $[\alpha]$ simetrias locais de L.

7 Aplicação do Método: Obtenção das Simetrias Locais para Modelos Concretos

Nesta seção utilizaremos o método de obtenção das simetrias locais para alguns modelos específicos. Nestes modelos singulares só estão presentes vínculos de primeira classe. Para cada uma das Lagrangeanas que serão apresentadas, procederemos da seguinte maneira:

a) Dada a Lagrangeana L, aplicamos o método de Dirac para hamiltonização do sistema singular.

b) Obtemos a álgebra de gauge (c, b) dada pelas equações (133). (Observe que as álgebras de H e $\tilde{H}$ coincidem).

c) Construímos a Hamiltoniana estendida $\tilde{H}$.

d) Obtemos a Lagrangeana $\tilde{L}$ tal que a Hamiltoniana correspondente seja $\tilde{H}$.

e) Obtemos as simetrias de $\tilde{L}$.

f) Obtemos as simetrias de L.

7.1 Primeiro modelo

Consideremos o modelo descrito pela ação [17],

$$S = \int d\tau L = \int d\tau [\frac{1}{2}(\dot{x} - y)^2 + \frac{1}{2}(z + \dot{y})^2], \tag{191}$$

definida no espaço $\{x, y, z\}$ e Lagrangeana L indicada em (191). Utilizando o método de Dirac para hamiltonização, começamos com os momentos canônicos,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x = \dot{x} - y \Rightarrow \dot{x} = p_x + y, \tag{192}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = p_y = \dot{y} + z \Rightarrow \dot{y} = p_y - z, \tag{193}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = p_z = 0 \Rightarrow \phi_1 = p_z. \tag{194}$$

(Neste caso, $q^i = (x, y)$ e $q^\alpha = z$).
Obtemos então a Hamiltoniana H_0 bem como a Hamiltoniana completa H,

$$H_0 = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + p_x y - p_y z, \tag{195}$$

$$H = H_0 + \lambda_z p_z, \tag{196}$$

onde λ_z é o multiplicador para o vínculo primário $\phi_1 = p_z$.

Prosseguindo com o método, encontramos os seguintes vínculos de etapas superiores,

$$0 = \{p_x, H\} = p_y \Rightarrow T_2 \equiv p_y = 0, \tag{197}$$

$$0 = \{p_y, H\} = -p_x \Rightarrow T_3 \equiv p_x = 0, \tag{198}$$

$$0 = \{p_x, H\} = 0. \tag{199}$$

O sistema completo de vínculos é dado por,

$$G_I = \{p_z, p_y, p_x\} = \{\phi_1, T_2, T_3\}. \tag{200}$$

A álgebra de gauge é dada por,

$$\{\phi_1, H_0\} = T_2 \Rightarrow {b_1}^2 = 1, \tag{201}$$

$$\{T_2, H_0\} = -T_3 \Rightarrow {b_2}^3 = -1, \tag{202}$$

$$\{T_3, H_0\} = 0, \tag{203}$$

$$\{G_I, G_J\} = 0 \Rightarrow {c_{IJ}}^K = 0, \ \forall I, J, K. \tag{204}$$

A Hamiltoniana estendida toma a forma,

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\tilde{p}_x^2 + \frac{1}{2}\tilde{p}_y^2 + \tilde{p}_x z - \tilde{p}_y z + \lambda_z \tilde{p}_z + s^2 T_2 + s^3 T_3 + v^a \pi_a, \ a = 2, 3. \tag{205}$$

A partir de,

$$\dot{x} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_x} = \tilde{p}_x + y + s^3 \Rightarrow \tilde{p}_x = \dot{x} - y - s^3, \tag{206}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_y} = \tilde{p}_y - z + s^2 \Rightarrow \tilde{p}_y = \dot{y} + z - s^2, \tag{207}$$

encontramos a Lagrangeana $\tilde{L}$,

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(\dot{x} - y - s^3)^2 + \frac{1}{2}(\dot{y} + z - s^2)^2. \tag{208}$$

Imediatamente escrevemos as simetrias de $\tilde{L}$,

$$\delta_1 : \ \delta_1 x = \delta_1 y = \delta_1 s^3 = 0; \quad \delta_1 z = \delta_1 s^2 = \epsilon^1. \tag{209}$$

$$\delta_2 : \ \delta_2 x = \delta_2 z = 0; \ \delta_2 y = \epsilon^2; \ \delta_2 s^2 = \dot{\epsilon}^2; \ \delta_2 s^3 = -\epsilon^2. \tag{210}$$

$$\delta_3 : \ \delta_3 y = \delta_3 z = \delta_3 s^3 = 0; \ \delta_3 x = \epsilon^3; \ \delta_3 s^3 = \dot{\epsilon}^3. \tag{211}$$

Como a ação inicial apresenta vínculo de terceira etapa, esperamos uma simetria da forma $\ddot{\epsilon}$. O sistema (190) fornece,

$$\dot{\epsilon}^2 + \epsilon^1 = 0, \qquad \dot{\epsilon}^3 - \epsilon^2 = 0. \tag{212}$$

Podemos obter ϵ^1 e ϵ^2 em função de $\epsilon^3 \equiv \epsilon$:

$$\epsilon^1 = -\ddot{\epsilon}, \qquad \epsilon^2 = \dot{\epsilon}. \tag{213}$$

A equação (189) nos dá a simetria local da Lagrangeana inicial,

$$\delta x = \epsilon, \qquad \delta y = \dot{\epsilon}, \qquad \delta z = -\ddot{\epsilon}. \tag{214}$$

7.2 Segundo modelo

Consideremos o modelo descrito pela ação [17],

$$S = \int d\tau [\frac{1}{2}(\dot{x}^A - g x^A)^2 - ag] \tag{215}$$

definida no espaço $\{x^A, g\}$, $\eta_{AB} = diag(-,+,+,+,+)$, a =const. e com Lagrangeana dada por $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^A - gx^A)^2 - ag$.
Os momentos e vínculos primários são dados por,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^A} = p_A = \dot{x}^A - gx^A \Rightarrow \dot{x}^A = p^A + gx^A, \tag{216}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{g}} = p_g = 0 \Rightarrow \phi_1 \equiv p_g = 0. \tag{217}$$

(Neste caso, $q^i = x^A$ e $q^\alpha = g$).
Obtemos a Hamiltoniana H_0 e a Hamiltoniana completa H,

$$H_0 = \frac{1}{2} p_A p^A + g p_A x^A + ag, \tag{218}$$

$$H = H_0 + v_g p_g, \tag{219}$$

onde v_g é o multiplicador para o vínculo primário $p_g = 0$.
Prosseguindo com o procedimento de Dirac, encontramos os seguintes vínculos de etapas superiores (usaremos a seguinte notação para contrações com a métrica η: $p_A x^A \equiv px$),

$$0 = \{p_g, H\} = -(px + a) \Rightarrow T_2 \equiv px + a = 0, \tag{220}$$

$$0 = \{T_2, H\} = p^2 \Rightarrow T_3 \equiv p^2 = 0, \tag{221}$$

$$0 = \{T_3, H\} \sim T_3. \tag{222}$$

Assim, o sistema completo de vínculos é dado por,

$$G_I = \{p_g, px + a, p^2\} = \{\phi_1, T_2, T_3\}. \tag{223}$$

A álgebra de gauge é dada por,

$$\{\phi_1, H_0\} = -T_2 \Rightarrow {b_1}^2 = -1, \tag{224}$$

$$\{T_2, H_0\} = T_3 \Rightarrow {b_2}^3 = 1, \tag{225}$$

$$\{T_3, H_0\} = -2gT_3 \Rightarrow {b_3}^3 = -2g, \tag{226}$$

$$\{\phi_1, T_2\} = \{\phi_1, T_3\} = 0 \tag{227}$$

$$\{T_2, T_3\} = 2T_3 \Rightarrow {c_{23}}^3 = -{c_{32}}^3 = 2. \tag{228}$$

A Hamiltoniana estendida toma a forma,

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\tilde{p}^2 + g\tilde{p}x + ag + s^2(\tilde{p}x + a) + s^3\tilde{p}^2 + v_g\tilde{p}_g + v^l\pi_l;\ l = 2, 3. \tag{229}$$

A partir de,

$$\dot{x}^A = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{p}_A} = \tilde{p}^A + gx^A + s^2x^A + 2s^3\tilde{p}^A \Rightarrow \tilde{p}^A = \frac{\dot{x}^A - (g + s^2)x^A}{1 + 2s^3}, \tag{230}$$

encontramos a Lagrangeana $\tilde{L}$,

$$\tilde{L} = \frac{[\dot{x}^A - (g + s^2)x^A]^2}{2(1 + 2s^3)} - a(g + s^2). \tag{231}$$

As simetrias de $\tilde{L}$ são dadas por,

$$\delta_1 :\ \delta_1 x = \delta_1 s^3 = 0; \quad \delta_1 g = -\delta_1 s^2 = \epsilon^1. \tag{232}$$

$$\delta_2 :\ \delta_2 x = \epsilon^2 x;\ \delta_2 g = 0;\ \delta_2 s^2 = \dot{\epsilon}^2;\ \delta_2 s^3 = \epsilon^2. \tag{233}$$

$$\delta_3 :\ \delta_3 x = 2\epsilon^3(\frac{\dot{x} - (g + s^2)x}{1 + 2s^3});\ \delta_3 g = \delta_3 s^2 = 0;\ \delta_3 s^3 = \dot{\epsilon}^3 - 2\epsilon^3(g + s^2). \tag{234}$$

Como a ação inicial apresenta vínculo de terceira etapa, esperamos uma simetria da forma $\ddot{\epsilon}$. O sistema (190) fornece,

$$\epsilon^1 - \dot{\epsilon}^2 = 0, \tag{235}$$

$$\epsilon^2 - 2g\epsilon^3 + \dot{\epsilon}^3 = 0, \tag{236}$$

o que permite escrever ϵ^1 e ϵ^2 em função de $\epsilon^3 \equiv \epsilon$,

$$\epsilon^1 = 2(g\epsilon)^{\cdot} - \ddot{\epsilon}, \tag{237}$$

$$\epsilon^2 = 2g\epsilon - \dot{\epsilon}. \tag{238}$$

A equação (189) nos dá a simetria local da Lagrangeana inicial,

$$\delta g = 2(g\epsilon)^{\cdot} - \ddot{\epsilon}, \tag{239}$$

$$\delta x^A = 2\epsilon\dot{x}^A - \dot{\epsilon}x^A. \tag{240}$$

7.3 Terceiro modelo

Consideremos o modelo descrito pela ação [17],

$$S = \int d\tau [\frac{1}{2}(\dot{x}^M)^2 + g(x^M)^2 - \frac{1}{2}a^2m^2(x^5)^{-2}], \tag{241}$$

definida no espaço $\{x^M, g\}$, $\eta_{MN} = diag(-,+,+,+,+,-)$, $a, m =$ const. e com Lagrangeana dada por $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^M)^2 + g(x^M)^2 - \frac{1}{2}a^2m^2(x^5)^{-2}$.
Os momentos e vínculo primário são dados por,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^M} = p_M = \dot{x}_M, \tag{242}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{g}} = p_g = 0 \Rightarrow \phi_1 \equiv p_g = 0. \tag{243}$$

(Neste caso, $q^i = x^M$ e $q^\alpha = g$).
Obtemos a Hamiltoniana H_0 e a Hamiltoniana completa H,

$$H_0 = \frac{1}{2}p^2 - gx^2 + \frac{1}{2}a^2m^2(x^5)^{-2}, \tag{244}$$

$$H = H_0 + v_g p_g, \tag{245}$$

onde v_g é o multiplicador para o vínculo primário $p_g = 0$.
Encontramos os seguintes vínculos de etapas superiores,

$$0 = \{p_g, H\} = x^2 \Rightarrow T_2 \equiv x^2 = 0, \tag{246}$$

$$0 = \{x^2, H\} = 2xp \Rightarrow T_3 \equiv xp = 0, \tag{247}$$

$$0 = \{xp, H\} = p^2 + a^2m^2(x^5)^{-2} \Rightarrow T_4 \equiv p^2 + a^2m^2(x^5)^{-2}, \tag{248}$$

$$0 = \{T_4, H\} \sim T_3. \tag{249}$$

Assim, o sistema completo de vínculos é dado por,

$$G_I = \{p_g, x^2, xp, p^2 + a^2m^2(x^5)^{-2}\} = \{\phi_1, T_2, T_3, T_4\}. \tag{250}$$

A álgebra de gauge é dada por,

$$\{\phi_1, H_0\} = T_2 \Rightarrow {b_1}^2 = 1, \tag{251}$$

$$\{T_2, H_0\} = 2T_3 \Rightarrow {b_2}^3 = 2, \tag{252}$$

$$\{T_3, H_0\} = -2gT_2 + T_4 \Rightarrow {b_3}^2 = 2g;\ {b_3}^4 = 1, \tag{253}$$

$$\{T_4, H_0\} = 4gT_3 \Rightarrow {b_4}^3 = 4g, \tag{254}$$

$$\{\phi_1, T_2\} = \{\phi_1, T_3\} = \{\phi_1, T_4\} = 0 \tag{255}$$
$$\{T_2, T_3\} = 2T_2 \Rightarrow {c_{23}}^2 = -{c_{32}}^2 = 2, \tag{256}$$
$$\{T_2, T_4\} = 4T_3 \Rightarrow {c_{24}}^3 = -{c_{42}}^3 = 4, \tag{257}$$
$$\{T_3, T_4\} = 2T_4 \Rightarrow {c_{34}}^4 = -{c_{43}}^4 = 2. \tag{258}$$

A Hamiltoniana estendida toma a forma,

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\tilde{p}^2 - gx^2 + \frac{1}{2}a^2m^2(x^5)^{-2} + s^l T_l + v_g\tilde{p}_g + v^l\pi_l;\ l = 2, 3, 4. \tag{259}$$

A partir de,

$$\dot{x}^M = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_M} = \tilde{p}^M + s^3x^M + 2s^4\tilde{p}^M \Rightarrow \tilde{p}^M = \frac{\dot{x}^M - s^3x^M}{1 + 2s^4}, \tag{260}$$

encontramos a Lagrangeana $\tilde{L}$,

$$\tilde{L} = \frac{[\dot{x}^M - s^3x^M]^2}{2(1 + 2s^4)} + x^2(g - s^2) - \frac{1}{2}a^2m^2(x^5)^{-2}(1 + 2s^4). \tag{261}$$

As simetrias de $\tilde{L}$ no setor (x^M, g) são dadas por,[6]

$$\delta_1 :\ \delta_1 x = 0; \quad \delta_1 g = \epsilon^1. \tag{262}$$

$$\delta_2 :\ \delta_2 x = \delta_2 g = 0, \tag{263}$$

$$\delta_3 :\ \delta_3 x = \epsilon^3 x; \quad \delta_3 g = 0 \tag{264}$$

$$\delta_4 :\ \delta_4 x = 2\epsilon^4\Big(\frac{\dot{x} - s^3x}{1 + 2s^4}\Big); \quad \delta_4 g = 0. \tag{265}$$

O sistema (190) fornece,

$$\dot{\epsilon}^2 + \epsilon^1 + 2g\epsilon^3 = 0, \tag{266}$$

$$\dot{\epsilon}^3 + 2\epsilon^2 + 4g\epsilon^4 = 0, \tag{267}$$

$$\dot{\epsilon}^4 + \epsilon^3 = 0. \tag{268}$$

Com o sistema acima podemos encontrar ϵ^1, ϵ^2 e ϵ^3 em função de $\epsilon^4 \equiv \epsilon$ e de suas derivadas,

$$\epsilon^1 = -\frac{1}{2}\overset{(3)}{\epsilon} + 2\dot{g}\epsilon + 4g\dot{\epsilon}, \tag{269}$$

[6]Vamos omitir $\delta_I s^a$ por simplicidade pois como buscamos as simetrias da ação inicial, faremos $\delta_I s^a = 0$.

$$\epsilon^2 = \frac{1}{2}\ddot{\epsilon} - 2g\epsilon, \tag{270}$$

$$\epsilon^3 = -\dot{\epsilon}. \tag{271}$$

A equação (189) nos dá a simetria local da Lagrangeana inicial,

$$\delta g = -\frac{1}{2}\overset{(3)}{\epsilon} + 2\dot{g}\epsilon + 4g\dot{\epsilon}, \tag{272}$$

$$\delta x^M = -\dot{\epsilon}x^M + 2\epsilon\dot{x}^M. \tag{273}$$

Notemos que a simetria é da forma $\overset{(3)}{\epsilon}$, como era de se esperar pois temos vínculo de primeira classe de quarta etapa.

7.4 Quarto modelo

Consideremos o modelo descrito pela Lagrangeana [9],

$$L = \frac{1}{2}\dot{\omega}_i^2 - \frac{1}{2}\omega_i^2 + \frac{1}{2}(\dot{q}_2 - q_1)^2 + \frac{1}{2}(\dot{q}_3 - q_2)^2 + + \frac{1}{2}(\dot{q}_4 - q_3 - g\omega_1 q_1 q_2)^2 \tag{274}$$

definida no espaço de configurações $\{\omega_i, q_a\}$, $i = 1, 2$, $a = 1, 2, 3, 4$ e g é uma constante.
Passando ao formalismo hamiltoniano, começamos com os momentos canônicos e vínculos primários,

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}_i} = \dot{\omega}_i, \tag{275}$$

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0, \tag{276}$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 - q_1 \Rightarrow \dot{q}_2 = p_2 + q_1, \tag{277}$$

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = \dot{q}_3 - q_2 \Rightarrow \dot{q}_3 = p_3 + q_2, \tag{278}$$

$$p_4 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} = \dot{q}_4 - q_3 - g\omega_1 q_1 q_2 \Rightarrow \dot{q}_4 = p_4 + q_3 + g\omega_1 q_1 q_2. \tag{279}$$

A Hamiltoniana H_0 e a Hamiltoniana completa H são dadas então por,

$$H_0 = \frac{1}{2}\pi_i^2 + \frac{1}{2}\omega_i^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}p_3^2 + \frac{1}{2}p_4^2 + p_2 q_1 + p_3 q_2 + p_4 q_3 + g\omega_1 q_1 q_2 p_4, \tag{280}$$

$$H = H_0 + \lambda p_1, \tag{281}$$

onde λ é o multiplicador para o vínculo primário $\phi_1' \equiv p_1 = 0$.
Continuando o método de Dirac, obtemos os seguintes vínculos de etapas superiores,

$$0 = \{p_1, H\} = -(p_2 + g\omega_1 q_2 p_4) \Rightarrow T_2' \equiv p_2 + g\omega_1 q_2 p_4, \tag{282}$$

$$0 = \{T_2', H\} = -p_3 + p_4(g\omega_1 p_2 + g q_2 \pi_1) \equiv T_3', \tag{283}$$

$$0 = \{T_3', H\} = p_4 f(g, q, p, \omega, \pi), \tag{284}$$

onde f é dada por,

$$\begin{aligned} f(g, q, p, \omega, \pi) = 1 + g p_2 \pi_1 - g\omega_1 p_3 - g^2 \omega_1^2 q_1 p_4 + \\ + g\pi_1(p_2 + q_1) - g q_2(\omega_1 + g q_1 q_2 p_4). \end{aligned} \tag{285}$$

Isto implica que $p_4 = 0$. Assim $T_4' = p_4 = 0$. O vínculo p_4 não traz nenhuma informação nova,

$$0 = \{p_4, H\} = 0. \tag{286}$$

Retornando com $p_4 = 0$ nas equações de vínculo (282) e (283), encontramos o seguinte sistema de vínculos equivalente a $\{\phi_1', T_2', T_3', T_4'\}$,

$$G_I = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{\phi_1, T_2, T_3, T_4\} \tag{287}$$

A álgebra de gauge é dada por,

$$\{G_I, G_J\} = 0 \Rightarrow c_{IJ}{}^K = 0, \ \forall I, J, K, \tag{288}$$

$$\{p_1, H\} = -p_2 - g\omega_1 q_2 p_4 \Rightarrow b_1{}^2 = -1, \ b_1{}^4 = -g\omega_1 q_2 \tag{289}$$

$$\{p_2, H\} = -p_3 - g\omega_1 q_1 p_4 \Rightarrow b_2{}^3 = -1, \ b_2{}^4 = -g\omega_1 q_1, \tag{290}$$

$$\{p_3, H\} = -p_4 \Rightarrow b_3{}^4 = -1, \tag{291}$$

$$\{p_4, H\} = 0 \Rightarrow b_4{}^a = 0, \ \forall a = 1, 2, 3, 4. \tag{292}$$

A Hamiltoniana reconstruída $\tilde{H}$ toma a forma,

$$\tilde{H} = H_0(\omega, \tilde{\pi}, q, \tilde{p}) + s^m \tilde{p}_m + \lambda \tilde{p}_1 + v^m \Pi_m, \tag{293}$$

onde $m = 2, 3, 4$, Π_m são os mementos conjugados a s_m e substituímos em H_0 os momentos p e π por $\tilde{p}$ e $\tilde{\pi}$.
A partir de,

$$\dot{\omega}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{\pi}_i} = \tilde{\pi}_i \Rightarrow \tilde{\pi}_i = \dot{\omega}_i, \tag{294}$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_2} = \tilde{p}_2 + q_1 + s^2 \Rightarrow \tilde{p}_2 = \dot{q}_2 - q_1 - s^2, \tag{295}$$

$$\dot{q}_3 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_3} = \tilde{p}_3 + q_2 + s^3 \Rightarrow \tilde{p}_3 = \dot{q}_3 - q_2 - s^3, \tag{296}$$

$$\dot{q}_4 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_4} = \tilde{p}_4 + q_3 + s^4 + g\omega_1 q_1 q_2 \Rightarrow \tilde{p}_4 = \dot{q}_4 - q_3 - g\omega_1 q_1 q_2 - s^4, \tag{297}$$

obtemos a seguinte Lagrangeana estendida $\tilde{L}$,

$$\begin{array}{c} \tilde{L} = \frac{1}{2}\dot{\omega}_i^2 - \frac{1}{2}\omega_i^2 + \frac{1}{2}(\dot{q}_2 - q_1 - s^2)^2 + \\ + \frac{1}{2}(\dot{q}_3 - q_2 - s^3)^2 + \frac{1}{2}(\dot{q}_4 - q_3 - g\omega_1 q_1 q_2 - s^4)^2. \end{array} \tag{298}$$

As simetrias de $\tilde{L}$ no subespaço (ω_i, q_a), $i = 1, 2$, $a = 1, 2, 3, 4$,

$$\delta_1 : \ \delta_1 q_1 = \epsilon_1; \quad \delta_1 q_{2,3,4} = \delta_1 \omega_i = 0, \tag{299}$$

$$\delta_2 : \ \delta_2 q_2 = \epsilon_2; \quad \delta_2 q_{1,3,4} = \delta_2 \omega_i = 0, \tag{300}$$

$$\delta_3 : \ \delta_3 q_3 = \epsilon_3; \quad \delta_3 q_{1,2,4} = \delta_3 \omega_i = 0, \tag{301}$$

$$\delta_4 : \ \delta_4 q_4 = \epsilon_4; \quad \delta_4 q_{1,2,3} = \delta_4 \omega_i = 0. \tag{302}$$

As simetrias da Lagrangeana inicial são então dadas por,

$$\delta\omega_i = 0, \ i = 1, 2, \tag{303}$$

$$\delta q_a = \epsilon_a, \ a = 1, 2, 3, 4, \tag{304}$$

onde os ϵ_a obedecem o sistema (190),

$$\dot{\epsilon}_2 - \epsilon_1 = 0, \tag{305}$$

$$\dot{\epsilon}_3 - \epsilon_2 = 0, \tag{306}$$

$$\dot{\epsilon}_4 - g\omega_1 q_1 \epsilon_2 - g\omega_1 q_2 \epsilon_1 - \epsilon_3 = 0. \tag{307}$$

Nos três primeiros exemplos o sistema de vínculos não foi trocado por outro equivalente. Isto permitiu que o sistema (190) fosse resolvido diretamente. Como os coeficientes b e c da álgebra de gauge são alterados pela troca de um sistema por outro (veja apêndice D) como neste exemplo, para obter alguns ϵ em função dos outros, procederemos da seguinte forma: substituindo (305) em (307) e reescrevendo (307), encontramos:

$$(\epsilon_4 - g\omega_1 q_2 \epsilon_2)^{\cdot} + [g(\omega_1 q_2)^{\cdot} - g\omega_1 q_1]\epsilon_2 - \epsilon_3 = 0. \tag{308}$$

Definindo $\eta \equiv \epsilon_4 - g\omega_1 q_2 \epsilon_2$ e $\gamma \equiv g(\omega_1 q_2)^{\cdot} - g\omega_1 q_1$, (308) fica,

$$\dot{\eta} + \gamma\epsilon_2 - \epsilon_3 = 0. \tag{309}$$

Substituindo agora (306) em (309),

$$\dot{\eta} + \dot{\epsilon}_3\gamma - \epsilon_3 = 0, \tag{310}$$

que pode ser reescrita como,

$$(\eta + \gamma\epsilon_3)^{\cdot} - (1 + \dot{\gamma})\epsilon_3. \tag{311}$$

Definindo $\xi \equiv \eta + \gamma\epsilon_3$, encontramos,

$$\epsilon_3 = \frac{\dot{\xi}}{1 + \dot{\gamma}}. \tag{312}$$

Com (305) e (306), obtemos,

$$\epsilon_1 = \Big(\frac{\dot{\xi}}{1 + \dot{\gamma}}\Big)^{\cdot\cdot} \tag{313}$$

$$\epsilon_2 = \Big(\frac{\dot{\xi}}{1 + \dot{\gamma}}\Big)^{\cdot}. \tag{314}$$

Resta determinar ϵ_4 em função do parâmetro arbitrário ξ. Somando membro a membro as equações abaixo,

$$\begin{aligned} \epsilon_4 - g\omega_1 q_2 \epsilon_2 &= \eta \\ \eta + \gamma\epsilon_3 &= \xi \end{aligned} \tag{315}$$

encontramos,

$$\epsilon_4 = \xi + g\omega_1 q_2 \Big(\frac{\dot{\xi}}{1 + \dot{\gamma}}\Big)^{\cdot} - \frac{\gamma}{1 + \dot{\gamma}}\dot{\xi}. \tag{316}$$

Assim, a forma manifesta da simetria de L é dada por,

$$\delta q_1 = \Big(\frac{\dot{\xi}}{1 + \dot{\gamma}}\Big)^{\cdot\cdot} \tag{317}$$

$$\delta q_2 = \Big(\frac{\dot{\xi}}{1 + \dot{\gamma}}\Big)^{\cdot} \tag{318}$$

$$\delta q_3 = \frac{\dot{\xi}}{1 + \dot{\gamma}} \tag{319}$$

$$\delta q_4 = \xi - \frac{\gamma}{1 + \dot{\gamma}}\dot{\xi} + g\omega_1 q_2 \Big(\frac{\dot{\xi}}{1 + \dot{\gamma}}\Big)^{\cdot} \tag{320}$$

$$\delta\omega_i = 0,\ i = 1, 2, \tag{321}$$

onde $\gamma \equiv g(\omega_1 q_2)^{\cdot} - g\omega_1 q_1$.

7.5 Quinto modelo

Seja o modelo descrito pela seguinte ação definida no espaço $\{x^i, y^i, z^i\}$ [9,14,18],

$$S = \int d\tau L = \int d\tau [\frac{1}{2}(\dot{y}^i + x^i)^2 + \frac{1}{2}(\dot{z}^i + y^i + gE^i{}_{ml}x^m y^l)^2];\ i, m, l = 1, 2, \quad (322)$$

onde g é uma constante de acoplamento e $E^i{}_{ml}$ é tal que $E^i{}_{12} = 1$ e $E^i{}_{ml} = -E^i{}_{lm}$, $\forall i, l, m$ ($E^i{}_{ml}$ =const.)
Passando ao formalismo hamiltoniano, os momentos e vínculos primários são dados por,

$$p_{x^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0 \Rightarrow \tilde{\phi}_i = p_{x^i}, \quad (323)$$

$$p_{y^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}^i} = \dot{y}_i + x_i \Rightarrow \dot{y}_i = p_{y^i} - x_i, \quad (324)$$

$$p_{z^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^i} = \dot{z}_i + y_i + gE^i{}_{jl}x^j y^l \Rightarrow \dot{z}_i = p_{z^i} - y_i - gE^i{}_{jl}x^j y^l. \quad (325)$$

(Neste caso, $q^i = (y^i, z^i)$ e $q^\alpha = x^i$).
A Hamiltoniana H_0 e a Hamiltoniana completa H são dadas por,

$$H_0 = \frac{1}{2}p^2_{y^i} + \frac{1}{2}p^2_{z^i} - x^i p_{y^i} - y^i p_{z^i} - gE^i{}_{jl}p_{z^i}x^j y^l, \quad (326)$$

$$H = H_0 + v_{x^i}p_{x^i}, \quad (327)$$

onde v_{x^i} são os multiplicadores para os vínculos primários $\tilde{\phi}_i = p_{x^i}$.
Com H, encontramos os seguintes vínculos de etapas superiores,

$$0 = \{\tilde{\phi}_1, H\} = p_{y^1} + gE^l{}_{1j}p_{z^l}y^j \equiv \tilde{T}_3, \quad (328)$$

$$0 = \{\tilde{\phi}_2, H\} = p_{y^2} + gE^l{}_{2j}p_{z^l}y^j \equiv \tilde{T}_4, \quad (329)$$

$$0 = \{\tilde{T}_3, H\} = p_{z^1} + 2gE^l{}_{21}p_{z^l}x^2 + gE^l{}_{12}p_{z^l}p_{y^2} \equiv \tilde{T}_5, \quad (330)$$

$$0 = \{\tilde{T}_4, H\} = p_{z^2} + 2gE^l{}_{12}p_{z^l}x^1 + gE^l{}_{21}p_{z^l}p_{y^1} \equiv \tilde{T}_6. \quad (331)$$

A partir de $0 = \{\tilde{T}_5, H\}$ e $0 = \{\tilde{T}_6, H\}$ nada novo ocorre. De fato, $0 = \{\tilde{T}_{5,6}, H\} \sim p_{z^i}$ e como veremos à frente, $p_{z^i} = 0$. Assim o procedimento de Dirac pára na terceira etapa.
Para vermos que os vínculos obtidos são de primeira classe e para obtermos a álgebra de gauge, consideremos a matriz,

$$\mathbf{C_I}^{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & gE^1{}_{1j}y^j & gE^2{}_{1j}y^j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & gE^1{}_{2j}y^j & gE^2{}_{2j}y^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta & \Omega \end{pmatrix} \quad (332)$$

onde,

$$\Delta = 1 + 2gE^1{}_{j1}x^j + gE^1{}_{1j}p_{y^j}, \tag{333}$$
$$\Gamma = 2gE^2{}_{j1}x^j + gE^2{}_{2j}p_{y^j}, \tag{334}$$
$$\Theta = 2gE^1{}_{j2}x^j + E^1{}_{2j}p_{y^j}, \tag{335}$$
$$\Omega = 1 + 2gE^2{}_{j2}x^j + gE^2{}_{2j}p_{y^j}. \tag{336}$$

É imediato que,

$$\tilde{G}_I = C_I{}^J G_J;\ detC|_{\tilde{G}_J=0} = -g(x^2 + p_{y^1}) \neq 0, \tag{337}$$

onde $\{\tilde{G}_I\} = \{\tilde{\phi}_i, \tilde{T}_a\}$, $i =, 1, 2$, $a = 3, 4, 5, 6$ é o sistema inicial de vínculos e $\{G_I\} = \{p_{x^i}, p_{y^i}, p_{z^i}\}$. Portanto o sistema de vínculos inicial é equivalente ao sistema G_I, sendo o último de primeira classe. Logo, os vínculos $\tilde{G}_I$ são também de primeira classe.
Vamos usar o sistema de vínculos G_I, segundo a notação,

$$\begin{aligned} \{p_{x^i}, p_{y^i}, p_{z^i}\} \equiv \{\phi_\alpha, T_a\};\ \alpha = 1, 2;\ a = 3, 4, 5, 6; \\ \phi_1 = p_{x^1};\ \phi_2 = p_{x^2}; \\ T_3 = p_{y^1};\ T_4 = p_{y^2};\ T_5 = p_{z^1};\ T_6 = p_{z^2}. \end{aligned} \tag{338}$$

A álgebra de gauge é dada por,

$$\{G_I, G_J\} = 0,\ \forall I, J \Rightarrow c_{IJ}{}^K = 0,\ \forall I, J, K. \tag{339}$$

$$\{\phi_1, H_0\} = p_{y^1} + y^2 g(p_{z^1} + p_{z^2}) \Rightarrow b_1{}^3 = 1,\ b_1{}^5 = gy^2,\ b_1{}^6 = gy^2, \tag{340}$$
$$\{\phi_2, H_0\} = p_{y^2} + y^1 g(p_{z^1} + p_{z^2}) \Rightarrow b_2{}^4 = 1,\ b_2{}^5 = -gy^1,\ b_2{}^6 = -gy^1, \tag{341}$$
$$\{T_3, H_0\} = p_{z^1} - gx^2(p_{z^1} + p_{z^2}) \Rightarrow b_3{}^5 = 1 - gx^2,\ b_3{}^6 = -gx^2, \tag{342}$$
$$\{T_4, H_0\} = p_{z^2} + gx^1(p_{z^1} + p_{z^2}) \Rightarrow b_4{}^5 = gx^1,\ b_4{}^6 = 1 + gx^1, \tag{343}$$
$$\{T_5, H_0\} = \{T_6, H_0\} = 0 \Rightarrow b_5{}^\ell = b_6{}^\ell = 0;\ \forall \ell = 1, ..., 6. \tag{344}$$

A Hamiltoniana reconstruída toma a forma,

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\tilde{p}_{y^i}^2 + \frac{1}{2}\tilde{p}_{z^i}^2 - x^i\tilde{p}_{y^i} - y^i\tilde{p}_{z^i} - gE^i{}_{jl}\tilde{p}_{z^i}x^j y^l + v_{x^i}\tilde{p}_{x^i} + v^a\pi_a + s^a T_a, \tag{345}$$

onde $a = 3, ..., 6$.
Usando a notação $(s^3, s^4) = s_{y^i}$ e $(s^5, s^6) = s_{z^i}$ e a partir de,

$$\dot{y}^i = \frac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{p}_{y^i}} = \tilde{p}_{y^i} - x^i + s_{y^i} \Rightarrow \tilde{p}_{y^i} = \dot{y}^i + x^i - s_{y^i}, \tag{346}$$

$$\dot{z}^i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_{z^i}} = \tilde{p}_{z^i} - y^i - gE^i{}_{jl}x^j y^l + s_{z^i} \Rightarrow \tilde{p}_{z^i} = \dot{z}^i + y^i + gE^i{}_{jl}x^j y^l - s_{z^i}, \quad (347)$$

encontramos a Lagrangiana estendida,

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(\dot{y}^i + x^i - s_{y^i})^2 + \frac{1}{2}(\dot{z}^i + y^i + gE^i{}_{jl}x^j y^l - s_{z^i})^2. \quad (348)$$

As simetrias de $\tilde{L}$ no setor x^i, y^i, z^i são dadas por,

$$\delta_1 : \ \delta_1 x^1 = \epsilon_{x^1};\ \delta_1 x^2 = \delta_1 y^i = \delta_1 z^i = 0; \quad (349)$$
$$\delta_2 : \ \delta_2 x^2 = \epsilon_{x^2};\ \delta_2 x^1 = \delta_2 y^i = \delta_2 z^i = 0; \quad (350)$$
$$\delta_3 : \ \delta_3 y^1 = \epsilon_{y^1};\ \delta_3 y^2 = \delta_3 x^i = \delta_3 z^i = 0; \quad (351)$$
$$\delta_4 : \ \delta_4 y^2 = \epsilon_{y^2};\ \delta_4 y^1 = \delta_4 x^i = \delta_4 z^i = 0; \quad (352)$$
$$\delta_5 : \ \delta_5 z^1 = \epsilon_{z^1};\ \delta_5 z^2 = \delta_5 x^i = \delta_5 y^i = 0; \quad (353)$$
$$\delta_6 : \ \delta_6 z^2 = \epsilon_{z^2};\ \delta_6 z^1 = \delta_6 x^i = \delta_6 y^i = 0. \quad (354)$$

Com a equação (189) obtemos as simetrias da ação inicial L,

$$\delta x^i = \epsilon_{x^i}, \quad (355)$$
$$\delta y^i = \epsilon_{y^i}, \quad (356)$$
$$\delta z^i = \epsilon_{z^i}, \quad (357)$$

onde os ϵ's obedecem ao sistema (190),

$$\dot{\epsilon}_{y^i} + \epsilon_{x^i} = 0, \quad (358)$$

$$\dot{\epsilon}_{z^i} + \alpha^i{}_j \epsilon_{x^j} + \beta^i{}_j \epsilon_{y^j} = 0, \quad (359)$$

onde $\alpha^i{}_j = gE^i{}_{jl}y^l$ e $\beta^i{}_j = \delta^i{}_j + gE^i{}_{lj}x^l$.
De (358),

$$\epsilon_{x^i} = -\dot{\epsilon}_{y^i}, \quad (360)$$

que substituído em (359) fornece,

$$\dot{\epsilon}_{z^i} - \alpha^i{}_j \dot{\epsilon}_{y^j} + \beta^i{}_j \epsilon_{y^j} = 0 \Rightarrow (\epsilon_{z^i} - \alpha^i{}_j \epsilon_{y^j})^{\cdot} + (\dot{\alpha}^i{}_j + \beta^i{}_j)\epsilon_{y^j} = 0. \quad (361)$$

Definindo, $\eta^i \equiv \epsilon_{z^i} - \alpha^i{}_j \epsilon_{y^j}$ e $\gamma^i{}_j = \dot{\alpha}^i{}_j + \beta^i{}_j$, encontramos ϵ_{x^i}, ϵ_{y^i} e ϵ_{z^i} em função do parâmetro arbitrário η,

$$\epsilon_{x^i} = (\dot{\gamma}^{-1})^i{}_j \dot{\eta}^j + (\gamma^{-1})^i{}_j \ddot{\eta}^j, \quad (362)$$

$$\epsilon_{y^i} = -(\gamma^{-1})^i{}_j \dot{\eta}^j, \quad (363)$$

$$\epsilon_{z^i} = \eta^i - \alpha^i{}_j (\gamma^{-1})^j{}_l \dot{\eta}^l. \quad (364)$$

Logo, a forma manifesta da simetria de L é dada por,

$$\delta x^i = (\dot{\gamma}^{-1})^i{}_j \dot{\eta}^j + (\gamma^{-1})^i{}_j \ddot{\eta}^j, \tag{365}$$

$$\delta y^i = -(\gamma^{-1})^i{}_j \dot{\eta}^j, \tag{366}$$

$$\delta z^i = \eta^i - \alpha^i{}_j (\gamma^{-1})^j{}_l \dot{\eta}^l, \tag{367}$$

onde $\alpha^i{}_j = gE^i{}_{jl} y^l$ e $\gamma^i{}_j = \delta^i{}_j + gE^i{}_{lj} x^l + gE^i{}_{jl} \dot{y}^l$.

7.6 Procura de simetrias locais para teoria de campo

Para ver como o formalismo desenvolvido pode ser usado para a busca de simetrias locais para teorias de campo, consideremos o exemplo do Eletromagnetismo, com Lagrangeana dada por,

$$L = -\frac{1}{4}\int d^3x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \int d^3x [\frac{1}{2}(\dot{A}_i - \partial_i A_0)^2 - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}], \tag{368}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. (Lembramos que usaremos a notação: μ, ν = $0, 1, 2, 3$ e i, $j = 1, 2, 3$).

Para hamiltonizar o modelo singular acima, começamos com os momentos canônicos e vínculo primário,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_0} = p_0 = 0 \Rightarrow \phi_1 \equiv p_0 = 0, \tag{369}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{A}_i} = p_i = \dot{A}_i - \partial_i A_0 \Rightarrow \dot{A}_i = p_i + \partial_i A_0. \tag{370}$$

A Hamiltoniana H_0 e a Hamiltoniana comleta H são dadas por,

$$H_0 = \int d^3x [\frac{1}{2}p_i^2 + p_i \partial_i A_0 + \frac{1}{4}F_{ij}^2], \tag{371}$$

$$H = H_0 + \int d^3x v^0 p_0, \tag{372}$$

onde v^0 é o multiplicador para o vínculo primário $\phi_1 = p_0$. Para encontrarmos os vínculos de etapas superiores, fazemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \{p_0(x_1), H(x_2)\} \\ &= -\int d^3x_3 \int d^3x_2 \Big[\frac{\delta p_0(x_1)}{\delta p_0(x_3)} \frac{\delta(p_i(x_2)\partial_i^{(x_2)} A_0(x_2))}{\delta A_0(x_3)}\Big]. \end{aligned} \tag{373}$$

Resolvendo a integral acima, encontramos o seguinte vínculo de segunda etapa,

$$T_2 \equiv \partial_i p_i = 0. \tag{374}$$

O vínculo T_2 não traz vínculos de terceira de etapa.
A álgebra de calibre é dada por,

$$\{p_0, \partial_i p_i\} = 0 \Rightarrow c_{IJ}{}^K = 0, \forall I, J, K, \tag{375}$$

$$\{p_0, H_0\} = \partial_i p_i \Rightarrow b_1{}^2 = 1, \tag{376}$$

$$\{\partial_i p_i, H_0\} = 0 \Rightarrow b_2{}^a = 0;\ a = 1, 2. \tag{377}$$

(Notemos que ambos os vínculos são de primeira classe).
A Hamiltoniana estendida tem a forma,

$$\tilde{H} = \int d^3x \Big[\frac{1}{2}\tilde{p}_i^2 + \tilde{p}_i \partial_i A_0 + \frac{1}{4}F_{ij}^2 + s^2 \partial_i \tilde{p}_i + v^2 \pi_2 + v^0 \tilde{p}_0\Big]. \tag{378}$$

A partir de,

$$\dot{A}_i = \{A_i, \tilde{H}\} = \tilde{p}_i + \partial_i A_0 - \partial_i s^2 \Rightarrow \tilde{p}_i = \dot{A}_i - \partial_i A_0 + \partial_i s^2, \tag{379}$$

encontramos a Lagrangeana estendida,

$$\tilde{L} = \int d^x \Big[\frac{1}{2}(\dot{A}_i - \partial_i A_0 + \partial_i s^2)^2 - \frac{1}{4}F_{ij}^2\Big]. \tag{380}$$

As simetrias de $\tilde{L}$ são dadas por,

$$\delta_1 :\ \delta_1 A_i = 0;\ \delta_1 A_0 = \delta_1 s^2 = \epsilon^1, \tag{381}$$

$$\delta_2 :\ \delta_2 A_i = \int d^3x \epsilon^2 \{A_i, \partial_l p_l\} = -\partial_i \epsilon^2, \tag{382}$$

$$\delta_2 A_0 = 0;\ \delta_2 s^2 = \dot{\epsilon}^2. \tag{383}$$

As simetrias de L são então dadas por, (veja a equação (189)),

$$\delta_1 A_i + \delta_2 A_i = -\partial_i \epsilon^2, \tag{384}$$

$$\delta_1 A_0 + \delta_2 A_0 = \epsilon^1, \tag{385}$$

onde os ϵ's obedecem ao sistema (190),

$$\dot{\epsilon}^2 + \epsilon^1 = 0 \Rightarrow \epsilon^1 = -\dot{\epsilon}^2. \tag{386}$$

Logo,

$$\delta A_i = -\partial_i \epsilon, \tag{387}$$

$$\delta A_0 = -\dot{\epsilon}. \tag{388}$$

Definindo $\epsilon \equiv -\alpha$, encontramos a simetria de calibre conhecida do Eletromagnetismo,

$$A_\mu(x^\mu) \rightarrow A'_\mu(x^\mu) = A_\mu(x^\mu) + \partial_\mu \alpha(x^\mu), \tag{389}$$

onde α é uma função arbitrária de x^μ.

8 O Caso Geral: Teorias com Vínculos de Primeira e Segunda Classe

Nesta seção discutiremos a obtenção de simetrias locais para uma teoria lagrangeana singular L onde estejam presentes tanto vínculos de primeira quanto de segunda classe no formalismo hamiltoniano correspondente [16]. A construção desta Seção é similar à da Seção 3 e usaremos as mesmas notações. Construiremos $\tilde{L}$ equivalente a L e mostraremos que todos os vínculos de primeira classe de L são os geradores das simetrias de $\tilde{L}$.

8.1 Construção de $\tilde{L}$

Seja $L = L(q^A, \dot{q}^A)$ uma Lagrangeana singular definida no espaço q^A; $A = 1, ..., [A]$. Mais uma vez rearranjamos as variáveis de forma que a submatriz que determina o *rank* da matriz$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B}$ seja formada pelas suas $[i]$ primeiras linhas e colunas. Assim, $rank\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} = [i] < [A]$ e $det\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \neq 0$. Passando ao formalismo hamiltoniano, começamos com os momentos e vínculos primários,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \Leftrightarrow \dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha). \qquad (390)$$

$$\phi_\alpha(q,p) \equiv p_\alpha - f_\alpha(q^A, p_j) = 0;\ f_\alpha(q^A, p_j) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}|_{\dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha)}. \qquad (391)$$

Construímos então as Hamiltonianas H_0 e H de acordo com as definições abaixo,

$$H_0 = (p_A \dot{q}^A - L)\Big|_{\dot{q}^i = v^i(q^A, p_j, \dot{q}^\alpha),\, p_\alpha = f_\alpha(q^A, p_j)}. \qquad (392)$$

$$H = H_0 + v^\alpha \phi_\alpha \qquad (393)$$

onde v^α são os multiplicadores para os vínculos primários ϕ_α.
Suponhamos que o método de Dirac forneça vínculos de etapa N, $N > 1$, que serão agrupados da seguinte maneira,

$$G_I = (\phi_\alpha, T_a), \qquad (394)$$

onde ϕ_α são os vínculos primários e T_a são todos os vínculos secundários,...,N-ésima etapa. Por hipótese, estão presentes vínculos de primeira e segunda classe, ou seja, definindo a matriz $\triangle_{IJ} \equiv \{G_I, G_J\}$, temos,

$$rank \triangle_{IJ}\big|_{G_I = 0} = [I_2] < [I]. \qquad (395)$$

Como já discutimos (veja comentário após o teorema 2), é conveniente separar os vínculos em primeira e segunda classe. De acordo com (395), a matriz

$\triangle_{IJ}$ possui $[I_1] = [I] - [I_2]$ vetores nulos independentes $\vec{K}_{I_1}$ com componentes ${K_{I_1}}^J(q^A, p_j)$. Consideremos as seguintes $[I_1]$ combinações de vínculos,

$$G_{I_1} \equiv {K_{I_1}}^J G_J. \tag{396}$$

Temos,

$$\{G_{I_1}, G_J\} = \{{K_{I_1}}^K G_K, G_J\} = \underbrace{{K_{I_1}}^K \{G_K, G_J\}}_{=0} + G_K \{{K_{I_1}}^K, G_J\}. \tag{397}$$

Logo, por definição os vínculos G_{I_1} são de primeira classe. Completando o conjunto $\{\vec{K}_{I_1}\}$ de vetores independentes podemos obter uma base $\mathbf{B}$ para um espaço vetorial $[I]$-dimensional [23]: $\mathbf{B} = \{\vec{K}_{I_1}, \vec{K}_{I_2}\}$. Por construção, a matriz

$${K_I}^J \equiv \begin{pmatrix} {K_{I_1}}^J \\ {K_{I_2}}^J \end{pmatrix}, \tag{398}$$

que representa a base $\mathbf{B}$ é invertível. Logo, o sistema de vínculos $\tilde{G}_I \equiv (G_{I_1}, G_{I_2})$ onde $G_{I_1} = {K_{I_1}}^J G_J$ e $G_{I_2} = {K_{I_2}}^L G_L$ é equivalente ao sistema completo G_I. Os vínculos G_{I_2} formam um subconjunto de segunda classe do sistema completo. Portanto os vínculos obedecem a seguite álgebra,

$$\begin{gathered} \{G_{I_1}, G_J\} = {c_{I_1 J}}^K(q^A, p_B) G_K, \quad \{G_{I_1}, H_0\} = {b_{I_1}}^J(q^A, p_B) G_J, \\ \{G_{I_2}, G_{J_2}\} = \triangle_{I_2 J_2}(q^A, p_B), \end{gathered} \tag{399}$$

onde,

$$rank \triangle_{IJ}|_{G_I=0} = [I_2], \qquad \det \triangle_{I_2 J_2}|_{G_I=0} \neq 0. \tag{400}$$

A construção das funções $\tilde{H}$ e $\tilde{L}$ é idêntica à construção feita na Seção 5. Definimos no espaço $q^A, p_A, s^a, \pi_a, v^\alpha, v^a$,

$$\tilde{H} = H_0 + s^a T_a + v^\alpha \phi_\alpha + v^a \pi_a, \tag{401}$$

onde as funções H_0, ϕ_α e T_a são tomadas da formulação inicial. Pelos mesmos argumentos anteriores a equação,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i}, \tag{402}$$

pode ser resolvida em relação a $\tilde{p}_j$ numa vizinhança de $s^a = 0$. Denotaremos estas soluções por,

$$\tilde{p}_i = \omega_i(q^A, \dot{q}^i, v^\alpha, s^a). \tag{403}$$

Usaremos a notação: $\omega_i(q^A, \dot{q}^i, v^\alpha, s^a)|_{v^\alpha \to \dot{q}^\alpha} \equiv \omega_i(q, \dot{q}, s)$. Definimos então $\tilde{L}$ no espaço q^A, s^a por,

$$\tilde{L} = (\omega_i \dot{q}^i + f_\alpha \dot{q}^\alpha - H_0 - s^a T_a)|_{\omega_i(q,\dot{q},s)}, \tag{404}$$

e as mesmas propriedades (a)-(e) de $\tilde{L}$ seguem da Seção 5. Devido à presença de vínculos também de segunda classe, a diferença entre as formulações desta Seção e da Seção 5 aparece quando buscamos os vínculos de etapas superiores de $\tilde{H}$ (daí veremos a importância da separação dos vínculos em primeira e segunda classe pela matriz K).
$\tilde{L}$ apresenta os seguintes vínculos primários,

$$\phi_\alpha = 0, \quad \pi_a = 0. \tag{405}$$

Com $\tilde{H}$ em mãos obtemos os vínculos secundários,

$$0 = \{\pi_a, \tilde{H}\} = -T_a \Rightarrow T_a = 0. \tag{406}$$

Portanto todos os vínculos de etapas superiores de L aparecem como vínculos secundários de $\tilde{L}$. Resta analisar as equações,

$$0 = \{\phi_\alpha, \tilde{H}\} = \{\phi_\alpha, H_0\} + \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} v^\beta + \{\phi_\alpha, T_b\} s^b, \tag{407}$$
$$0 = \{T_a, \tilde{H}\} = \{T_a, H_0\} + \{T_a, \phi_\beta\} v^\beta + \{T_a, T_b\} s^b. \tag{408}$$

É conveniente unificá-las usando a notação,

$$\{G_I, H_0\} + \{G_I, G_J\} S^J = 0, \tag{409}$$

onde $S^J = (v^\alpha, s^a)$.
Usando a matriz (398) o sistema (409) pode ser reescrito de forma equivalente como,

$$\{G_{I_1}, H_0\} + O(G_I) = 0, \tag{410}$$

$$\{G_{I_2}, H_0\} + \{G_{I_2}, G_J\} S^J = O(G_I). \tag{411}$$

Com mais detalhes,

$$\begin{gathered} 0 = \{G, H_0\} + \{G, G\} S \Leftrightarrow \{K^{-1}\tilde{G}, H_0\} + \{K^{-1}, G\} S \Leftrightarrow \\ K{-}1(\{\tilde{G}, H_0\} + \{\tilde{G}, G\} S) + \tilde{G}(\{K^{-1}, H_0\} + \{K{-}1, G\} S) = 0 \Leftrightarrow \\ \{\tilde{G}, H_0\} + \{\tilde{G}, G\} S = -K\tilde{G}(\{K^{-1}, H_0\} + \{K{-}1, G\} S) = O(G). \end{gathered} \tag{412}$$

A equação (410) não traz nada novo já que $\{G_{I_1}, H_0\} \sim G_I$ (veja a álgebra (399)).

Sendo $rank\triangle_{IJ}|_{G_I=0} = [I_2]$, podemos encontrar $[I_2]$ variáveis entre todas S^J. Seguindo o procedimento de Dirac, devemos encontrar o número máximo de multiplicadores v^α. Seja $[\alpha_2]$ o número de vínculos primários de segunda classe dentre os ϕ_α. Reescrevendo (411) explicitamente,

$$\{G_{I_2}, H_0\} + \{G_{I_2}, \phi_\alpha\}v^\alpha + \{G_{I_2}, T_b\}s^b = 0. \tag{413}$$

Podemos então determinar $[\alpha_2]$ multiplicadores em função de q, p, s e dos multiplicadores v^{α_1} restantes,

$$v^{\alpha_2} = v^{\alpha_2}(q, p, s^a, v^{\alpha_1}). \tag{414}$$

Substituindo (414) de volta em (413) encontramos,

$$Q_{a_2 b}(q, p)s^b + P_{a_2}(q, p) = 0. \tag{415}$$

(Veja a discussão no sétimo passo do método de Dirac).
Notemos que $rankQ_{a_2 b} = [a_2]$. De fato, caso $rankQ = [a'] < [a_2]$, então somente $[\alpha_2] + [a'] < [\alpha_2] + [a_2] = [I_2]$ variáveis entre as S^J poderiam ser encontradas contrariando a conclusão que $[I_2]$ variáveis S^J podem ser obtidas. Usando que $rankQ_{a_2 b} = [a_2]$ podemos reescrever (415) de forma equivalente,

$$s^{a_2} = R^{a_2}{}_{b_1}(q, p)s^{b_1}. \tag{416}$$

A conservação no tempo dos vínculos (416) não produz novos vínculos, trazendo equações para determinar a dinâmica dos multiplicadores v^{a_2}:

$$0 = \{s^{a_2} - R^{a_2}{}_{b_1}s^{b_1}, \tilde{H}\} \Rightarrow v^{a_2} = \{R^{a_2}{}_{b_1}s^{b_1}, \tilde{H}\}. \tag{417}$$

O método de Dirac pára aí e determinamos todos os vínculos de $\tilde{L}$.

8.2 Equivalência entre as formulações L e $\tilde{L}$

Revelados todos os vínculos de $\tilde{L}$, podemos comparar as dinâmicas de L e $\tilde{L}$. As equações hamiltonianas de movimento de $\tilde{L}$ são dadas por,

$$\begin{aligned} &\dot{q}^A = \{q^A, H\} + s^a\{q^A, T_a\}, \qquad &&\dot{\tilde{p}}_A = \{\tilde{p}_A, H\} + s^a\{\tilde{p}_A, T_a\}, \\ &\dot{s}^a = v^a, &&\dot{\pi}_a = 0, \end{aligned} \tag{418}$$

assim como pelos vínculos,

$$\phi_\alpha = 0, \qquad T_a = 0, \tag{419}$$

$$\pi_{a_1} = 0, \tag{420}$$

$$\pi_{a_2} = 0, \qquad s^{a_2} = R^{a_2}{}_{b_1}(q,p)s^{b_1}, \tag{421}$$

onde o parêntesis de Poisson $\{,\}$ é definido no espaço $q^A, s^a, \tilde{p}_A, \pi_a$.
Podemos substituir o vínculo $\pi_{a_1} = 0$ pela combinação,

$$\pi_{a_1} + \pi_{a_2}R^{a_2}{}_{a_1}(q,p) = 0, \tag{422}$$

que representa os vínculos de primeira classe. Fixando então os calibres $s^{a_1} = 0$ para estes vínculos, encontramos,

$$s^{a_2} = R^{a_2}{}_{a_1}s^{a_1} \Rightarrow s^{a_2} = 0, \tag{423}$$

e o setor (s^a, π_a) desaparece. Desta forma, as equações (418) coincidem com as equações hamiltonianas de movimento de L. Sendo L um dos calibres de $\tilde{L}$, mostramos a equivalência das duas formulações.

8.3 Simetrias locais da Lagrangiana estendida $\tilde{L}$

Como mostramos a equivalência entre as formulações L e $\tilde{L}$, é questão de conveniência usar uma ou outra Lagrangeana. Usaremos $\tilde{L}$ devido à facilidade de obtenção de todas as suas simetrias locais. De acordo com as afirmações 1 e 3, esperamos um número de simetrias locais independentes igual ao número de vínculos primários de primeira classe. Entre os vínculos $\phi_\alpha = 0$ estão presentes $[\alpha_1] = [\alpha] - [\alpha_2]$ vínculos de primeira classe, número igual ao de vínculos primários de primeira classe de L. Entre os vínculos $\pi_a = 0$ encontramos os $[a_1]$ vínculos de primeira classe $\pi_{a_1} + \pi_{a_2}R^{a_2}{}_{a_1}s^{a_1} = 0$, em número igual ao de vínculos de primeira classe de estágios superiores de L. Ou seja, $\tilde{L}$ apresenta $[\alpha_1] + [a_1] = [I_1]$ vínculos primários de primeira classe, número igual ao de vínculos de primeira classe de L. Esperamos então $[I_1]$ simetrias locais na formulação $\tilde{L}$.
Vamos então demonstrar que a ação,

$$S_{\tilde{L}} = \int d\tau \tilde{L}, \tag{424}$$

é invariante sob as seguintes transformações infinitesimais,

$$\begin{aligned}
&\delta_{I_1} q^A = \epsilon^{I_1} \left.\{q^A, G_{I_1}(q^A, p_B)\}\right|_{p_i \to \omega_i(q,\dot{q},s), p_\alpha \to f_\alpha(q,\omega(q,\dot{q},s))}, \\
&\qquad \delta_{I_1} s^a = \\
&\left.\left[\dot{\epsilon}^{I_1} K_{I_1}{}^a + \epsilon^{I_1}\left(b_{I_1}{}^a + s^b c_{I_1 b}{}^a + \dot{q}^\beta c_{I_1\beta}{}^a\right)\right]\right|_{p_i \to \omega_i(q,\dot{q},s), p_\alpha \to f_\alpha(q,\omega(q,\dot{q},s))}.
\end{aligned} \tag{425}$$

ϵ^{I_1}, $I_1 = 1, ..., [I_1]$ são os parâmetros da simetria e K é a matriz dada em (398).

Nos cálculos seguintes omitiremos todos os termos de derivada total e usaremos a notação $A|$ para indicar a substituição feita em (425). Assim, sob uma variação arbitrária $\delta q^A, \delta s^a$ de $\tilde{L}$ obtemos,

$$\delta\tilde{L} = -\dot{\omega}_i \delta q^i - \dot{f}_\alpha \delta q^\alpha + \dot{q}^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^A}\delta q^A - \frac{\partial H_0}{\partial q^A}\delta q^A + \\ -s^a \frac{\partial T_a}{\partial q^A}\delta q^A - T_a \delta s^a + \underbrace{\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_i}}_{=0}\delta\omega_i. \tag{426}$$

Usando as transformações (425), encontramos,

$$\delta_{I_1}\tilde{L} = -\dot{\omega}_i(q,\dot{q},s)\left.\frac{\partial G_{I_1}}{\partial p_i}\right| \epsilon^{I_1} - \dot{f}_\alpha(q,\omega(q,\dot{q},s)\left.\frac{\partial G_{I_1}}{\partial p_\alpha}\right| \epsilon^{I_1} \\ -\left.\left(\frac{\partial H_0(q^A,p_j)}{\partial q^A} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha(q^A,p_B)}{\partial q^A} + s^a \frac{\partial T_a(q^A,p_j)}{\partial q^A}\right)\right| \{q^A, G_{I_1}\}\Big| \epsilon^{I_1} \\ -\delta_{I_1} s^a T_a(q^A,\omega_j). \tag{427}$$

Para ver que $\delta\tilde{L}$ é uma derivada total, acrescentamos a seguinte identidade ao lado direito da expressão (427),

$$0 \equiv \Bigg[\left.\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_i}\right|_{\omega_i} \{p_i, G_{I_1}\} \\ -\left(\frac{\partial H_0}{\partial p_\beta} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_\beta} + s^a \frac{\partial T_a}{\partial p_\beta}\right)\{p_\beta, G_{I_1}\} + \dot{q}^\alpha \{p_\alpha, G_{I_1}\}\Bigg]\Bigg| \epsilon^{I_1}, \tag{428}$$

A primeira parte da identidade acima vem de $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_i}| \equiv 0$ e a segunda vem da contração de $\frac{\partial G_{I_1}}{\partial q^\beta}\epsilon^{I_1}$ com $\dot{q}^\beta - \{q^\beta, \tilde{H}\} \equiv 0$.
Obtemos então,

$$\delta\tilde{L} = \left[\dot{\epsilon}^{I_1} G_{I_1} - \epsilon^{I_1}\left(\{H_0, G_{I_1}\} + \dot{q}^\alpha\{\Phi_\alpha, G_{I_1}\} + s^a\{T_a, G_{I_1}\}\right)\right]\Big| \\ -\delta_{I_1} s^a T_a(q^A,\omega_j) = \\ \left[\dot{\epsilon}^{I_1} G_{I_1} + \epsilon^{I_1}\left(b_{I_1}{}^I + \dot{q}^\alpha c_{I_1\alpha}{}^I + s^b c_{I_1 b}{}^I\right) G_I\right]\Big| - \delta_{I_1} s^a T_a(q^A,\omega_j), \tag{429}$$

onde b e c são os coeficientes da álgebra (399).
Das igualdades $G_I| = (0,\ T_a(q^A,\omega_j)),\ G_{I_1}| = K_{I_1}{}^a T_a(q^A,\omega_j)$,

$$\delta\tilde{L} = \\ \left[\dot{\epsilon}^{I_1} K_{I_1}{}^a + \epsilon^{I_1}\left(b_{I_1}{}^a + \dot{q}^\alpha c_{I_1\alpha}{}^a + s^b c_{I_1 b}{}^a\right) - \delta_{I_1} s^a\right]\Big|_{p_i \to \omega_i} T_a. \tag{430}$$

Logo, com a variação de s^a dada em (425) encontramos finalmente,

$$\delta\tilde{L} = \frac{dF}{d\tau}, \tag{431}$$

como afirmamos.
Este resultado mostra que, mesmo quando estão presentes tanto vínculos de primeira quanto de segunda classe, os geradores das simetrias de $\tilde{L}$ são todos os vínculos de primeira classe de L.

9 Conclusão

A primeira parte deste trabalho foi dedicada ao procedimento de Dirac de hamiltonização de sistemas singulares. Apresentamos uma motivação para o método e o descrevemos com detalhes em uma série de passos, revelando a estrutura das equações de movimento para sistemas singulares que, além de equações diferenciais, apresenta também equações algébricas, chamadas equações de vínculos. Com um exemplo simples mostramos a ligação entre vínculos de primeira classe e simetrias locais. Isto motivou o objetivo central deste trabalho: apresentar um método construtivo de obtenção de simetrias locais para sistemas singulares. Para isto, dada uma teoria lagrangeana singular L com vínculos somente de primeira classe, construímos uma Lagrangeana $\tilde{L}$, equivalente a L, de forma que as simetrias de $\tilde{L}$ pudessem ser obtidas facilmente quando comparadas com a obtenção das simetrias de L. Em particular, todos os vínculos de L são os geradores das simetrias de $\tilde{L}$. Formulamos e demonstramos então um teorema que permite obter as simetrias de L, partindo das simetrias de $\tilde{L}$. Como exemplo, aplicamos o método de obtenção de simetrias para alguns exemplos. Mostramos na subseção 7.6 como o método pode ser generalizado para teorias de campo, quando encontramos a simetria de calibre da Eletrodinâmica. Para complementar o trabalho, discutimos também o caso geral: obtenção de simetrias locais quando estão presentes vínculos de primeira e segunda classe. A construção é similar à das Seções 5 e 6: construímos $\tilde{L}$ e novamente somente os vínculos de primeira classe de L são os geradores das simetrias de $\tilde{L}$.

Esperamos que este trabalho contribua para a literatura existente ligada com a busca de simetrias para sistemas singulares e, em particular, para o desenvolvimento do formalismo geral de conversão de vínculos de segunda classe em vínculos de primeira classe e obtenção de simetrias escondidas [17,24,25]. Como perspectiva, gostaríamos também de analisar as simetrias de teorias de campo incluindo campos de vetores de Yang-Mills, espinores, entre outros.

Apêndice A

Vamos mostrar que sob as transformações,

$$\delta_I q^A = \epsilon^I \{q^A, G_I\}, \tag{432}$$
$$\delta_I \tilde{p}_A = \epsilon^I \{\tilde{p}_A, G_I\}, \tag{433}$$

o setor $q^A, \tilde{p}_A$ da ação hamiltoniana,

$$S_{\tilde{H}\tilde{L}} = \int d\tau(\tilde{p}_A \dot{q}^A + \pi_a \dot{s}^a - \tilde{H}) =$$
$$\int d\tau(\tilde{p}_A \dot{q}^A + \pi_a \dot{s}^a - H_0(q^A, \tilde{p}_j) - s^a T_a(q^A, \tilde{p}_j) -$$
$$v^\alpha \Phi_\alpha(q^A, \tilde{p}_B) - v^a \pi_a), \tag{434}$$

é proporcional a G_I. Isto permitirá escolher transformações apropriadas para s^a, v^α, v^a e π_a de forma que tenhamos $\delta S_{\tilde{H}\tilde{L}} = div$.
Temos, já usando (170) e (171),

$$\delta_I S = \int d\tau[\dot{\epsilon}^I G_I - \epsilon^I \{H_0, G_I\} + (\dot{s}^a - v^a)\delta\pi_a + \pi_a((\delta s^a)^{\cdot} - \delta v^a) -$$
$$-s^a \epsilon^I \{T_a, G_I\} - T_a \delta s^a - v^\alpha \epsilon^I \{\phi_\alpha, G_I\} - \phi_\alpha \delta v^\alpha]. \tag{435}$$

Tomando $\delta\pi_a = 0$, $(\delta s^a)^{\cdot} = \delta v^a$ e usando a álgebra de gauge (133) ($\{G, G\} \sim G$, $\{G, H_0\} \sim G$), encontramos,

$$\delta_I S = \int d\tau[\dot{\epsilon}^I G_I - \epsilon^I b_I{}^J G_J - s^a \epsilon^I c_{aI}{}^J G_J - v^\alpha \epsilon^I c_{\alpha I}{}^K G_K -$$
$$-T_a \delta s^a - \phi_\alpha \delta v^\alpha]. \tag{436}$$

Isto mostra que o setor $q^A, \tilde{p}_A$ de $S_{\tilde{H}\tilde{L}}$ é proporcional a G_I sob as transformações (432). (No próximo apêndice obteremos as transformações apropriadas para s^a e v^α).

Apêndice B

Dando continuidade ao apêndice A, vamos obter as transformações para s^a e v^α que deixam $S_{\tilde{H}\tilde{L}}$ invariante.
Primeiramente, em (436), consideremos $I = \alpha$, para algum α. Temos,

$$\delta_\alpha S_{\tilde{H}\tilde{L}} = \int d\tau[\dot{\epsilon}^\alpha \phi_\alpha - \epsilon^\alpha b_\alpha{}^d T_d - s^a \epsilon^\alpha c_{a\alpha}{}^\beta \phi_\beta - s^a \epsilon^\alpha c_{a\alpha}{}^b T_b -$$
$$-v^\beta \epsilon^\alpha c_{\beta\alpha}{}^\gamma \phi_\gamma - v^\beta \epsilon^\alpha c_{\beta\alpha}{}^b T_b - T_a \delta s^a - \phi_\alpha \delta v^\alpha]. \tag{437}$$

Como o lado esquerdo das equações da álgebra (133) são, no máximo, lineares em p_α, obtemos: $b_I{}^\alpha = 0$ e $c_{IJ}{}^\alpha = 0$, $\forall I, J, \alpha$. Assim,

$$\delta_\alpha S_{\tilde{H}\tilde{L}} = \int d\tau[\phi_\alpha(\dot{\epsilon}^\alpha - \delta v^\alpha) - T_a(\epsilon^\alpha b_\alpha{}^a + s^b \epsilon^\alpha c_{\alpha b}{}^a + v^\beta \epsilon^\alpha c_{\alpha\beta}{}^a - \delta s^a)]. \quad (438)$$

Logo, quando $I = \alpha$, para algum α, tomamos,

$$\begin{aligned} \delta v^\alpha &= \dot{\epsilon}^\alpha, \\ \delta s^a &= \epsilon^\alpha b_\alpha{}^a + s^b \epsilon^\alpha c_{\alpha b}{}^a + v^\beta \epsilon^\alpha c_{\alpha\beta}{}^a, \end{aligned} \quad (439)$$

e obtemos $\delta_\alpha S_{\tilde{H}\tilde{L}} = div$.

Consideremos agora $I = a$, para algum a. Temos,

$$\begin{aligned} \delta_a S_{\tilde{H}\tilde{L}} = \int d\tau[&\dot{\epsilon}^a T_a - \epsilon^a b_a{}^\alpha \phi_\alpha - \epsilon^a b_a{}^d T_d - s^d \epsilon^a c_{da}{}^\alpha \phi_\alpha - s^d \epsilon^a c_{da}{}^e T_e - \\ &- v^\alpha \epsilon^a c_{\alpha a}{}^\beta \phi_\beta - v^\alpha \epsilon^a c_{\alpha a}{}^d T_d - T_a \delta s^a - \phi_\alpha \delta v^\alpha]. \end{aligned} \quad (440)$$

Novamente usando o fato que $b_I{}^\alpha = 0$ e $c_{IJ}{}^\alpha = 0$, encontramos,

$$\delta_a S_{\tilde{H}\tilde{L}} = \int d\tau[-\phi_\alpha \delta v^\alpha - T_a(\epsilon^b b_b{}^a + s^d \epsilon^b c_{bd}{}^a + v^\alpha \epsilon^b c_{b\alpha}{}^a - \delta s^a)]. \quad (441)$$

Logo, quando $I = a$, para algum a, tomamos,

$$\begin{aligned} \delta v^\alpha &= 0, \\ \delta s^a &= \epsilon^b b_b{}^a + s^d \epsilon^b c_{bd}{}^a + v^\alpha \epsilon^b c_{b\alpha}{}^a, \end{aligned} \quad (442)$$

e obtemos $\delta_a S_{\tilde{H}\tilde{L}} = div$.
Com as transformações (439) e (442), podemos escrever, para qualquer I,

$$\delta_I v^\alpha = \dot{\epsilon}^\alpha \delta_{\alpha I} \quad (443)$$
$$\delta_I s^a = \dot{\epsilon}^a \delta_{aI} + \epsilon^I b_I{}^a - s^b \epsilon^I c_{bI}{}^a - v^\beta \epsilon^I c_{\beta I}{}^a, \quad (444)$$

e junto com,

$$\delta_I q^A = \epsilon^I \{q^A, G_I\}, \quad (445)$$
$$\delta_I \tilde{p}_A = \epsilon^I \{\tilde{p}_A, G_I\}, \quad (446)$$
$$\delta_I v^a = (\delta_I s^a)^\cdot, \quad (447)$$
$$\delta_I \pi_a = 0, \quad (448)$$

temos as transformações que deixam $S_{\tilde{H}\tilde{L}}$ invariante.

Apêndice C

Vamos mostra com detalhes que a ação,

$$S_{\tilde{L}} = \int d\tau \tilde{L} \tag{449}$$

é invariante sob as transformações,

$$\delta_I q^A = \epsilon^I \left.\{q^A, G_I\}\right|_{p\to\omega(q,\dot{q},s)}, \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_I q^\alpha &= \epsilon^\alpha \delta_{\alpha I}, \\ \delta_I q^i &= \epsilon^I \left.\frac{\partial G_I}{\partial \tilde{p}_i}\right|_{p\to\omega(q,\dot{q},s)} \end{cases};$$
$$\delta_I s^a = \left.\left(\dot{\epsilon}^a \delta_{aI} + \epsilon^I {b_I}^a - s^b \epsilon^I {c_{bI}}^a - \dot{q}^\beta \epsilon^I {c_{\beta I}}^a\right)\right|_{p\to\omega(q,\dot{q},s)}. \tag{450}$$

Sob uma variação arbitrária δq^a, δs^a de $\tilde{L}$ encontramos,

$$\delta\tilde{L} = -\dot{\omega}_i \delta q^i - \dot{f}_\alpha \delta q^\alpha + \dot{q}^\alpha \left.\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^A}\right|_{\omega(q,\dot{q},s)} \delta q^A -$$
$$\left.\frac{\partial H_0}{\partial q^A}\right|_{\omega(q,\dot{q},s)} \delta q^A - \delta s^a T_a - s^a \left.\frac{\partial T_a}{\partial q^A}\right|_{\omega(q,\dot{q},s)} \delta q^A + \left.\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_i}\right|_{\omega(q,\dot{q},s)} \delta\omega_i. \tag{451}$$

De acordo com a propriedade (c) de $\tilde{L}$, podemos escolher $\delta\omega_i$ arbitrariamente sem alterar $\delta\tilde{L}$ já que,

$$\left.\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_i}\right|_{\omega(q,\dot{q},s)} = 0. \tag{452}$$

Tomemos então,

$$\delta\omega_i = -\epsilon^I \left.\frac{\partial G_I}{\partial q^i}\right|_{\tilde{p}\to\omega}. \tag{453}$$

Vamos usar a notação,

$$\delta\omega_i = \epsilon^I \frac{\partial G_I}{\partial q^i} \equiv -\frac{\partial \bar{G}}{\partial q^i}. \tag{454}$$

Com as variações,

$$\delta q^\alpha = \epsilon^\alpha \tag{455}$$

$$\delta q^i = \epsilon^I \left.\frac{\partial G_I}{\partial \omega_i}\right|_\omega \equiv \frac{\partial \bar{G}}{\partial \omega_i} \tag{456}$$

obtemos,

$$\delta\tilde{L} = -\dot{\omega}_i \frac{\partial \bar{G}}{\partial \omega_i} + \dot{q}^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial \bar{G}}{\partial \omega_i} - \dot{q}^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q^\beta}\epsilon^\beta - \frac{\partial H_0}{\partial q^i}\frac{\partial \bar{G}}{\partial \omega_i} +$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial H_0}{\partial q^\beta}\epsilon^\beta - s^a\frac{\partial T_a}{\partial q^i}\frac{\partial \bar{G}}{\partial \omega_i} - s^a\frac{\partial T_a}{\partial q^\beta}\epsilon^\beta - \dot{f}_\beta\epsilon^\beta + \\
-\dot{q}^i\frac{\partial \bar{G}}{\partial q^i} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \omega_i}\frac{\partial \bar{G}}{\partial q^i}\dot{q}^\alpha + \frac{\partial H_0}{\partial \omega_i}\frac{\partial \bar{G}}{\partial q^i} + s^a\frac{\partial T_a}{\partial \omega_i}\frac{\partial \bar{G}}{\partial q^i}.
\end{aligned}
\tag{457}
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{G}}{\partial \omega_i} &= \epsilon^I\frac{\partial G_I}{\partial \omega_i} = -\epsilon^\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \omega_i}\Big|_{\omega(q,\dot{q},s)} + \epsilon^a\frac{\partial T_a}{\partial \omega_i}\Big|_{\omega(q,\dot{q},s)}, \\
\frac{\partial \bar{G}}{\partial q^i} &= \epsilon^I\frac{\partial G_I}{\partial q^i} = -\epsilon^\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\Big|_{\omega(q,\dot{q},s)} + \epsilon^a\frac{\partial T_a}{\partial q^i}\Big|_{\omega(q,\dot{q},s)}.
\end{aligned}
\tag{458}
$$

Retornando com (458) em (457) e usando as identidades abaixo,

$$
\dot{\omega}_i\epsilon^\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \omega_i} + \dot{q}^i\epsilon^\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q^i} - \dot{f}_\beta\epsilon^\beta + \dot{q}^\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^\beta}\epsilon^\beta \equiv \dot{q}^\alpha\epsilon^\beta\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^\beta} - \epsilon^\beta\dot{q}^\alpha\frac{\partial f_\beta}{\partial q^\alpha}, \tag{459}
$$

$$
-\dot{\omega}_i\epsilon^a\frac{T_a}{\partial \omega_i} - \dot{q}^i\epsilon^a\frac{\partial T_a}{\partial q^i} \equiv -\dot{T}_a\epsilon^a + \epsilon^a\dot{q}^\alpha\frac{\partial T_a}{\partial q^\alpha}, \tag{460}
$$

(que são imediatas a partir da derivada temporal de f_β e T_a) encontramos,

$$
\begin{aligned}
\delta\tilde{L} = \dot{q}^\alpha\Big(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^\beta} - \frac{\partial f_\beta}{\partial q^\alpha}\Big)\epsilon^\beta - \dot{q}^\alpha\Big(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial f_\beta}{\partial \omega_i} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \omega_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial q^i}\Big) + \\
-\dot{T}_a\epsilon^a + \epsilon^a\dot{q}^\alpha\frac{\partial T_a}{\partial q^\alpha} + \dot{q}^\alpha\Big(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial T_a}{\partial \omega_i} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \omega_i}\frac{\partial T_a}{\partial q^i}\Big)\epsilon^a + \\
-\epsilon^\alpha\Big[\frac{\partial H_0}{\partial q^\alpha} - \Big(\frac{\partial H_0}{\partial q^i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \omega_i} - \frac{\partial H_0}{\partial \omega_i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\Big)\Big] + \\
-\epsilon^a\Big(\frac{\partial H_0}{\partial q^i}\frac{\partial T_a}{\partial \omega_i} - \frac{\partial H_0}{\partial \omega_i}\frac{\partial T_a}{\partial q^i}\Big) - s^a\epsilon^\beta\Big[\frac{\partial T_a}{\partial q^\beta} - \Big(\frac{\partial T_a}{\partial q^i}\frac{\partial f_\beta}{\partial \omega_i} - \frac{\partial T_a}{\partial \omega_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial q^i}\Big)\Big] + \\
-\epsilon^b s^a\Big(\frac{\partial T_a}{\partial q^i}\frac{\partial T_b}{\partial \omega_i} - \frac{\partial T_a}{\partial \omega_i}\frac{\partial T_b}{\partial q^i}\Big) - T_a\delta s^a.
\end{aligned}
\tag{461}
$$

Reagrupando os termos na expressão acima,

$$
\begin{aligned}
\delta\tilde{L} = \dot{q}^\alpha\Big[\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^\beta} - \frac{\partial f_\beta}{\partial q^\alpha} - \Big(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial f_\beta}{\partial \omega_i} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \omega_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial q^i}\Big)\Big]\epsilon^\beta + \\
-\dot{T}_a\epsilon^a + \dot{q}^\alpha\Big(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial T_a}{\partial \omega_i} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \omega_i}\frac{\partial T_a}{\partial q^i} + \frac{\partial T_a}{\partial q^\alpha}\Big)\epsilon^a + \\
-\epsilon^\alpha\Big[\frac{\partial H_0}{\partial q^\alpha} - \Big(\frac{\partial H_0}{\partial q^i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \omega_i} - \frac{\partial H_0}{\partial \omega_i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\Big)\Big] - \epsilon^a\Big(\frac{\partial H_0}{\partial q^i}\frac{\partial T_a}{\partial \omega_i} - \frac{\partial H_0}{\partial \omega_i}\frac{\partial T_a}{\partial q^i}\Big) + \\
-s^a\epsilon^\beta\Big[\frac{\partial T_a}{\partial q^\beta} - \Big(\frac{\partial T_a}{\partial q^i}\frac{\partial f_\beta}{\partial \omega_i} - \frac{\partial T_a}{\partial \omega_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial q^i}\Big)\Big] - \epsilon^b s^a\Big(\frac{\partial T_a}{\partial q^i}\frac{\partial T_b}{\partial \omega_i} - \frac{\partial T_a}{\partial \omega_i}\frac{\partial T_b}{\partial q^i}\Big) +
\end{aligned}
$$

$$-T_a\delta s^a. \quad (462)$$

A expressão (462) sugere o cálculo de alguns parêntesis de Poisson,

$$\{\phi_\alpha, T_a\} = \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial q^A}\frac{\partial T_a}{\partial\tilde{p}_A} - \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\tilde{p}_A}\frac{\partial T_a}{\partial q^A}$$

$$= \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial T_a}{\partial\tilde{p}_i} + \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial q^\gamma}\underbrace{\frac{\partial T_a}{\partial\tilde{p}_\gamma}}_{=0} - \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\tilde{p}_i}\frac{\partial T_a}{\partial q^i} - \underbrace{\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\tilde{p}_\gamma}}_{=\delta_\alpha{}^\gamma}\frac{\partial T_a}{\partial q^\gamma}$$

$$= -\Big[\frac{\partial T_a}{\partial q^\alpha} - \Big(\frac{\partial T_a}{\partial q^i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\tilde{p}_i} - \frac{\partial T_a}{\partial\tilde{p}_i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\Big)\Big]. \quad (463)$$

$$\{H_0, \phi_\alpha\} = \frac{\partial H_0}{\partial q^A}\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\tilde{p}_A} - \frac{\partial H_0}{\partial\tilde{p}_A}\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial q^A}$$

$$= \frac{\partial H_0}{\partial q^i}\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\tilde{p}_i} + \frac{\partial H_0}{\partial q^\gamma}\underbrace{\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\tilde{p}_\gamma}}_{=\delta_\alpha{}^\gamma} - \frac{\partial H_0}{\partial\tilde{p}_i}\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial q^i} - \frac{\partial H_0}{\partial\tilde{p}_\gamma}\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial q^\gamma}}_{=0}$$

$$= \frac{\partial H_0}{\partial q^\alpha} - \Big(\frac{\partial H_0}{\partial q^i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial\tilde{p}_i} - \frac{\partial H_0}{\partial\tilde{p}_i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\Big). \quad (464)$$

$$\{H_0, T_a\} = \frac{\partial H_0}{\partial q^A}\frac{\partial T_a}{\partial\tilde{p}_A} - \frac{\partial H_0}{\partial\tilde{p}_A}\frac{\partial T_a}{\partial q^A}$$

$$= \frac{\partial H_0}{\partial q^i}\frac{\partial T_a}{\partial\tilde{p}_i} + \frac{\partial H_0}{\partial q^\gamma}\underbrace{\frac{\partial T_a}{\partial\tilde{p}_\gamma}}_{=0} - \frac{\partial H_0}{\partial\tilde{p}_i}\frac{\partial T_a}{\partial q^i} - \underbrace{\frac{\partial H_0}{\partial\tilde{p}_\gamma}}_{=0}\frac{\partial T_a}{\partial q^\gamma}$$

$$= \frac{\partial H_0}{\partial q^i}\frac{\partial T_a}{\partial\tilde{p}_i} - \frac{\partial H_0}{\partial\tilde{p}_i}\frac{\partial T_a}{\partial q^i}. \quad (465)$$

Usando o fato que $\frac{\partial T_a}{\partial\tilde{p}_\gamma} = 0$, temos,

$$\{T_a, T_b\} = \frac{\partial T_a}{\partial q^i}\frac{\partial T_b}{\partial\tilde{p}_i} - \frac{\partial T_a}{\partial\tilde{p}_i}\frac{\partial T_b}{\partial q^i}. \quad (466)$$

$$\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial q^A}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\tilde{p}_A} - \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\tilde{p}_A}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial q^A}$$

$$\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\tilde{p}_i} + \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial q^\gamma}\underbrace{\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\tilde{p}_\gamma}}_{=\delta_\beta{}^\gamma} - \frac{\partial\phi_\alpha}{\partial\tilde{p}_i}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial q^i} - \underbrace{\frac{\phi_\alpha}{\partial\tilde{p}_\gamma}}_{=\delta_\alpha{}^\gamma}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial q^\gamma}$$

$$= -\Big[\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^\beta} - \frac{\partial f_\beta}{\partial q^\alpha} - \Big(\frac{\partial f_\alpha}{\partial q^i}\frac{\partial f_\beta}{\partial \tilde{p}_i} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \tilde{p}_i}\frac{\partial f_\beta}{\partial q^i}\Big)\Big]. \tag{467}$$

Substituindo os parêntesis (463)-(467) em (462) encontramos,

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{L} = -\dot{q}^\alpha\{\phi_\alpha,\phi_\beta\}|_{\tilde{p}\to\omega}\epsilon^\beta - \dot{T}_a\epsilon^a - \dot{q}^\alpha\{\phi_\alpha,T_a\}|_{\tilde{p}\to\omega}\epsilon^a + \\
-\epsilon^\alpha\{H_0,\phi_\alpha\}|_{\tilde{p}\to\omega} - \epsilon^a\{H_0,T_a\}|_{\tilde{p}\to\omega} + s^a\epsilon^\beta\{\phi_\beta,T_a\}|_{\tilde{p}\to\omega} + \\
-\epsilon^b s^a\{T_a,T_b\}|_{\tilde{p}\to\omega} - T_a\delta s^a \\
= -\dot{q}^\alpha\epsilon^\beta c_{\alpha\beta}{}^I G_I + T_a\dot{\epsilon}^a - \dot{q}^\alpha\epsilon^a c_{\alpha a}{}^I G_I - \epsilon^\alpha b_\alpha{}^I G_I + \\
-\epsilon^a b_a{}^I G_I + s^a\epsilon^\beta c_{\beta a}{}^I G_I - \epsilon^b s^a c_{ab}{}^I G_I - T_a\delta s^a.
\end{aligned} \tag{468}$$

Lembrando que $b_I{}^\alpha = 0$ e $c_{IJ}{}^\alpha = 0 \; \forall I, J$ obtemos,

$$\delta\tilde{L} = T_a(\dot{\epsilon}^a + \epsilon^I b_I{}^a - \dot{q}^\alpha\epsilon^I c_{\alpha I}{}^a - s^b\epsilon^I c_{bI}{}^a - \delta s^a). \tag{469}$$

Finalmente, usando a variação para s^a dada em (450) encontramos,

$$\delta\tilde{L} = \frac{dF}{d\tau} \tag{470}$$

como afirmamos.

Apêndice D

Consideremos uma teoria hamiltoniana $H = H_0 + v^\alpha\phi_\alpha$ que possui o seguinte sistema de vínculos somente de primeira classe: $\{G_I\}$. Sabemos por hipótese que,

$$\{G_I, G_J\} = c_{IJ}{}^K G_K, \tag{471}$$

$$\{G_I, H_0\} = b_I{}^K G_K. \tag{472}$$

Trocando o sistema $\{G_I\}$ por outro $\{G'_I\}$ equivalente, isto é, $G_I = D_I{}^J G'_J$, $detD_I{}^J \neq 0$, vamos obter a álgebra de calibre para o sistema de vínculos $\{G'_I\}$.

Começamos com o parêntesis,

$$\{G'_I, G'_J\} = \{(D^{-1})_I{}^L G_L, (D^{-1})_J{}^K G_K\}$$

$$= (D^{-1})_I{}^L (D^{-1})_J{}^K \{G_L, G_K\} + (D^{-1})_I{}^L \{(D^{-1})_J{}^K, G_L\} G_K +$$
$$+\{(D^{-1})_I{}^L, (D^{-1})_J{}^K G_K\} G_L$$
$$= (D^{-1})_I{}^L (D^{-1})_J{}^K c_{LK}{}^A G_A + (D^{-1})_I{}^L \{(D^{-1})_J{}^A, G_L\} G_A +$$
$$+\{(D^{-1})_I{}^A, (D^{-1})_J{}^K G_K\} G_A \qquad (473)$$

Obtemos então,

$$\{G'_I, G'_J\} = d_{IJ}{}^A G_A = d_{IJ}{}^A D_A{}^M G'_M = c'_{IJ}{}^M G'_M, \qquad (474)$$

onde,

$$c'_{IJ}{}^M = ((D^{-1})_I{}^L (D^{-1})_J{}^K c_{LK}{}^A +$$
$$+(D^{-1})_I{}^L \{(D^{-1})_J{}^A, G_L\} + \{(D^{-1})_I{}^A, (D^{-1})_J{}^K G_K\}) D_A{}^M. \qquad (475)$$

Resta o cálculo de $\{G'_I, H_0\}$. Temos,

$$\{G'_I, H_0\} = \{(D^{-1})_I{}^J G_J, H_0\}$$
$$= ((D^{-1})_I{}^J b_J{}^K + \{(D^{-1})_I{}^K, H_0\}) G_K$$
$$= ((D^{-1})_I{}^J b_J{}^K + \{(D^{-1})_I{}^K, H_0\}) D_K{}^M G'_M, \qquad (476)$$

ou seja,

$$\{G'_I, H_0\} = b'_I{}^M G'_M, \qquad (477)$$

onde,

$$b'_I{}^M = ((D^{-1})_I{}^J b_J{}^K + \{(D^{-1})_I{}^K, H_0\}) D_K{}^M. \qquad (478)$$

Portanto, na obtenção das simetrias locais, caso decidirmos trocar um sistema de vínculos por outro, basta trocar também a álgebra (c, b) por (c', b').

Referências

[1] H. Goldstein, Classical Mechanics (Addison-Wesley, 1950).

[2] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, Solid State Physics (Saunders College, 1976).

[3] B. J. Lesche, Notas de Aula em Mecânica Quântica.

[4] P. A. M. Dirac, General Theory of Relativity (John Wiley and Sons, 1975).

[5] P.A.M. Dirac, Can. J. Math. **2** (1950) 129; Lectures on Quantum Mechanics (Yeshiva Univ., New York, 1964).

[6] J.L. Anderson and P.G. Bergmann, Phys. Rev. **83** (1951) 1018; P.G. Bergmann and I. Goldberg, Phys. Rev. **98** (1955) 531.

[7] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, Quantization of Fields with Constraints (Berlin: Springer-Verlag, 1990).

[8] M. Henneaux and C. Teitelboim, Quantization of Gauge Systems (Princeton: Princeton Univ. Press, 1992).

[9] V. A. Borokhov and I. V. Tyutin, Physics of Atomic Nuclei **62** (1999) 1070.

[10] M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, Nucl. Phys. **B 332** (1990) 169.

[11] A. A. Deriglazov, K. E. Evdokimov, Int.J.Mod.Phys. A15 (2000) 4045 [hep-th/9912179].

[12] B. Geyer, D. M. Gitman, I. V. Tyutin, J.Phys. A36 (2003) 6587; [hep-th/0212289].

[13] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, hep-th/0409087.

[14] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, Int.J.Mod.Phys. A21 (2006) 327-360; [hep-th/0503218].

[15] A. A. Deriglazov, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007) 11083-11092; [hep-th/0701021]

[16] A. A. Deriglazov, hep-th/0708.3511.

[17] A. A. Deriglazov and Z. Kuznetsova, Phys. Lett. **B 646** (2007) 47; [hep-th/0610082].

[18] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, hep-th/0112103.

[19] Djairo Figueiredo, Aloísio Neves, Equações Direrenciais Aplicadas (Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2002).

[20] Elon Lages Lima, Curso de Análise, vol. 2 (Projeto Euclides, IMPA, 2005).

[21] http://www.mat.ufjf.br/Links/Professores/Andre/anrn-06.pdf, Notas de Aula em Análise no $\Re^n$.

[22] A. A. Deriglazov, Phys. Lett. **B 626** (2005) 243.

[23] K. Hoffman and R. Kunze, Álgebra Linear (Livros Técnicos e Científicos, 1970).

[24] J. Barcelos-Neto, W. Oliveira, Int.J.Mod.Phys. A12 (1997) 5209-5222; [hep-th/9701058].

[25] J. Ananias Neto, C. Neves, W. Oliveira, Int.J.Mod.Phys. A18 (2003) 1883-1901; [hep-th/0112159].