Dissertação de Mestrado

Obtenção de teorias de calibre não abelianas via formalismo simplético de Faddeev-Jackiw

Rodrigo Cesar Nascimento Silva

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Física

Orientador: Prof. Dr. Wilson Oliveira

Juiz de Fora
Agosto de 2011

Obtenção de teorias de calibre não abelianas via formalismo simplético de Faddeev-Jackiw

Rodrigo Cesar Nascimento Silva

Dissertação para o Curso de Mestrado em Física, Área da Física Teórica, do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Aprovada em 5 de Agosto de 2011.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.Dr. Wilson Oliveira (Orientador)
Universidade Federal de Juiz de Fora

____

Prof.Dr. Everton M. C. de Abreu
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

____

Prof.Dr. Albert C. R. Mendes
Universidade Federal de Juiz de Fora

Agradecimentos

Agradeço a UFJF e a CAPES pela oportunidade de realizar um curso de mestrado.

Agradeço aos meus professores, e em especial ao meu orientador, por todo meu aprendizado e pela amizade.

Agradeço aos meus amigos e familiares, pelo apoio e companheirismo.

Sumário

1 Resumo

Neste trabalho nosso objetivo é construir teorias não-Abelianas a partir de teorias Abelianas. Para realizar esta tarefa foi utilizado o método de Faddeev-Jackiw conhecido na literatura como formalismo simplético. O caminho para obter essas teorias é modificar as teorias originais Abelianas a fim de introduzir convenientemente a álgebra não-abeliana. Desta forma obtivemos duas teorias não-abelianas, as teorias de Yang-Mills $SU(2)$ e $SU(2) \otimes U(1)$. O ponto de partida foi a teoria de Maxwell para o eletromagnetismo U(1) que é abeliana. Embora estes resultados são muito bem conhecidos, a idéia é usar o método de Faddeev-Jackiw para realizar isso. Em outras palavras, estes resultados mostram uma nova interpretação e um novo procedimento para o método.

Palavras-chave: teorias não-abelianas. teorias de Yang-Mills. formalismo simplético.

2 Abstract

In this work our objective is to construct nom-Abelian field theories starting from well-known Abelian ones. To accomplish this task we used the Faddeev-Jackiw method so-called in the literature as the symplectic formalism. The path to obtain this non-Abelianity is to modify the original Abelian theories in order to introduce conveniently the non-Abelian algebra. In this way we obtained two non-Abelian theories, i. e. , the $SU(2)$ and $SU(2) \otimes U(1)$ Yang-Mills theories. The starting pont was the Abelian $U(1)$ Maxwell eletromagnetic theory. Although these cost results are very well-known, the idea is to use the Faddeev-Jackiw method to carry out it. In other words, these results show a new interpretation and a new procedure for the method.
Keywords: nom-Abelian field theories. Yang-Mills theories. symplectic formalism.

3 Introdução

A simetria em um sistema físico é caracterizada pela invariância deste com relação a possíveis transformações. Matematicamente isto significa uma invariância da lagrangeana do sistema com relação as transformações no espaço-tempo ou nos campos que descrevem esse sistema. Uma translação espacial, por exemplo, que deixa a lagrangeana invariante, estabelece sobre o sistema uma simetria de translação. Ou seja, o sistema continua o mesmo do ponto de vista de diferentes pontos do espaço.

Existem em geral dois tipos de simetria: as simetrias globais e as simetrias locais. As simetrias globais estão associadas a transformações dos campos que atuam da mesma forma em todos os pontos do espaço-tempo, enquanto que as simetrias locais estão associadas as transformações dos campos que atuam de forma distinta em diferentes pontos do espaço-tempo. Uma teoria com simetria local é dita uma teoria de calibre.

Uma teoria com simetria global pode ser reformulada a fim de apresentar uma simetria local. A técnica convencional para se fazer isso é por meio da introdução de campos auxiliares (campos de calibre) via derivadas covariantes[1] de tal forma que a simetria seja mantida.

Como exemplo de teorias de calibre, discutiremos a respeito dos campos eletromagnéticos, ligados à simetria U(1), e campos de Yang-Mills, ligados à simetria SU(2). Discutiremos sobre a obtenção dessas teorias por meio da introdução de campos de calibre via derivadas covariantes.

No entanto, o objetivo real desse trabalho é apresentar um método alternativo para a obtenção de teorias não abelianas em teoria de campos. Este método é baseado no chamado formalismo simplético e consiste nas seguintes etapas: os campos abelianos originais são mudados com o intuito de introduzir uma àlgebra não abeliana; o formalismo simplético é então implementado e a simetria de calibre é introduzida.

Mostraremos como obter teorias de Yang-Mills $SU(2)$ utilizando-se desse método e em seguida obteremos teorias $SU(2) \otimes U(1)$.

Muitos dos cálculos desse trabalho são extensos e complicados e sua localização dentro dos textos os tornam cansativos e tiram a atenção do objetivo principal do trabalho que é o de discutir o método e sua aplicação. Portanto preferimos deixar muitos desses cálculos nos apêndices, deixando sempre claro

[1] A expressão derivada covariante diz respeito à expressão que substituirá a derivada ordinária ∂_μ e que será responsável por deixar a lagrangeana invariante.

quando isso for feito e sua localização.

4 Simetrias globais

Consideremos uma teoria qualquer formulada em termos de campos ϕ^Ae que descreva um determinado sistema físico (a teoria de Maxwell para o eletromagnetismo, por exemplo). Suponhamos que essa teoria admita uma lagrangeana $\mathcal{L}\left(\phi^A,\partial_\mu\phi^A\right)$[2].

Consideremos agora que nosso sistema físico seja descrito em termos de novos campos $\phi^{A\prime}$ deslocados dos campos originais ϕ^A por uma distância muito pequena que chamaremos $\Delta\phi^A$. A análize ocorrerá num ponto do espaço-tempo $x^{\mu\prime}$ deslocado do ponto inicial x^μ também por uma distância muito pequena que chamaremos δx^μ. Podemos dessa forma representar as novas coordenadas espaço-temporais e os campos pelas respectivas transformações infinitesimais:

$$x^{\mu\prime} = x^\mu + \delta x^\mu \tag{4.1}$$

$$\phi^{A\prime}(x') = \phi^A(x) + \Delta\phi^A(x). \tag{4.2}$$

Os símbolos δ e Δ significam ambos variações de certas quantidades mas, no entanto, possuem significados ligeiramente diferentes. O símbolo δ denota uma variação na forma da quantidade sem que seja necessário variar seu argumento, ou seja, $\delta\phi^A(x) = \phi^{A\prime}(x) - \phi^A(x)$. Por outro lado o símbolo Δ denota uma variação mais geral, onde tanto a forma quanto o argumento de uma certa quantidade variam, ou seja, $\Delta\phi^A(x') = \phi^{A\prime}(x') - \phi^A(x)$. Para que possamos encontrar uma expressão para a variação Δ usaremos o fato de que nossas transformações são infinitesimais. Dessa forma temos que:

$$\phi^{A\prime}(x') = \phi^{A\prime}(x) + \partial_\mu\phi^{A\prime}(x)\,\delta x^\mu + ...$$

$$= \phi^{A\prime}(x) + \partial_\mu\left[\phi^A(x) + \delta\phi^A(x)\right]\delta x^\mu + ...$$

$$= \phi^{A\prime}(x) + \partial_\mu\phi^A(x)\,\delta x^\mu + ... \tag{4.3}$$

Comparando as expressões (4.2) e (4.3) chegamos então à expressão para a variação Δ que é dada por:

[2]O índice A indica qualquer tipo de indice de Lorentz, ou seja, ϕ^A pode representar um eascalar, tensor ou spinor.

$$\Delta\phi^A(x) = \delta\phi^A(x) + \partial_\mu\phi^A(x)\,\delta x^\mu. \tag{4.4}$$

Vamos agora supor que as transformações para as coordenadas e campos dadas por (4.1) e (4.2) possam ser expressas em termos de um conjunto finito de parâmetros ϵ^a tal que:

$$\delta x^\mu = \chi_a^\mu(x)\epsilon^a \tag{4.5}$$

$$\delta\phi^A(x) = \Upsilon_a^A\left(x,\phi^A(x),\partial_\mu\phi^A(x)\right)\epsilon^a. \tag{4.6}$$

Consideraremos apenas transformações cuja forma de atuação não dependa das coordenadas espaço-temporais, para isso suporemos uma independência dos parâmetros ϵ^a com relação às coordenadas do espaço-tempo.

Surge nesse momento uma questão: que informações consigo obter apenas exigindo que a física do sistema seja a mesma quando descrita por campos ϕ^A ou quando descrita por $\phi^{A\prime}$? Esse fato caracteriza sobre o sistema uma simetria, e é conseguida garantindo-se a invariância da lagrangeana com relação às transformações para os campos.

No caso de transformações dadas por (4.5) e (4.6), exigir que a física seja a mesma em termos dos campos ϕ^A e $\phi^{A\prime}$ pode ser traduzida na seguinte expressão:

$$\mathcal{L}\left(\phi^A,\partial_\mu\phi^A\right) = \mathcal{L}\left(\phi^{A\prime},\partial_\mu\phi^{A\prime}\right) + \partial_\mu N^\mu \tag{4.7}$$

onde N^μ é um campo vetorial. Transformações que conduzem à verificação da expressão (4.7) são ditas transformações infinitesimais de simetria e a simetria por de trás dessas transformações é dita uma simetria global.

Existem dois tipos de simetrias globais: simetrias espaço-temporais e simetrias internas. Como exemplo de simetrias espaço-temporais temos a simetria de Lorentz que está presente em teorias relativísticas. As simetrias internas estão relacionadas às propriedades da estrutura interna das partículas elementares, tais como isospin, cor e estranheza.

Analizaremos de forma mais detalhada as simetrias internas. Para isso consideremos que os campos tenham a forma ϕ_A^i onde i toma os valores $i = 1,\ldots,n$.

As simetrias internas são caracterizadas por não apresentarem uma transformação nas coordenadas espaço-temporais, mas apenas uma transformação nos campos. Dessa forma podemos reescrever as expressões (4.5) e (4.6) que tomam a seguinte forma:

$$\phi^{i\prime}_A(x) = \phi^i_A(x) + \delta\phi^i_A(x) \tag{4.8}$$

onde

$$\delta\phi^i_A(x) = i(T^a)^{ij}\phi^j_A(x)\epsilon^a. \tag{4.9}$$

Aqui as matrizes T^a são geradoras de uma álgebra de Lie[3], isto é,

$$\left[T^a, T^b\right] = if^{abc}T^c. \tag{4.10}$$

As equações (4.9) e (4.10) determinam a forma da representação de um grupo de Lie.

Se a lagrangeana de uma teoria é invariante sob transformações da forma (4.8) e (4.9) então estas transformações são ditas uma simetria interna. Discutiremos a partir desse momento alguns exemplos.

A teoria para o campo escalar complexo é utilizada para descrever partículas massivas, carregadas e sem spin. Nessa teoria a lagrangeana tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi - V(\varphi^*\varphi). \tag{4.11}$$

Essa lagrangiana é mantida invariante sob transformações do tipo:

$$\varphi \to \varphi' = \exp{(ie\epsilon)}\varphi \tag{4.12}$$

onde e é uma constante e ϵ é um parâmetro real. De fato temos que:

$$\mathcal{L}' = \partial_\mu\varphi^{*\prime}\partial^\mu\varphi' - m^2\varphi^{*\prime}\varphi' - V(\varphi^{*\prime}\varphi')$$

$$= \partial_\mu\left[\exp{(-ie\epsilon)}\varphi^*\right]\partial^\mu\left[\exp{(ie\epsilon)}\varphi\right] - m^2\exp{(-ie\epsilon)}\varphi^*\exp{(ie\epsilon)}\varphi -$$

$$-V[\exp{(-ie\epsilon)}\varphi^*\exp{(ie\epsilon)}\varphi]$$

[3] Para uma melhor compreensão sobre grupos e álgebras de Lie veja por exemplo (3).

$$= \partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi - V(\varphi^* \varphi) = \mathcal{L}.$$

Esse fato caracteriza sobre o sistema uma simetria, e as transformações em (4.12) indicam que essa simetria está associada ao grupo U(1). Em linhas gerais dizemos que o sistema apresenta simetria U(1).

O mesmo ocorre para a teoria dos campos fermiônicos (campos de Dirac), onde a lagrangeana tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi. \tag{4.13}$$

Esta teoria é utilizada para descrever férmions, que são partículas que apresentam spin, como por exemplo o elétron, próton ou nêutron. Aplicando-se transformações análogas às dadas por (4.12) sobre os campos dessa teoria temos que:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}' i \gamma^\mu \partial_\mu \psi' - m \bar{\psi}' \psi'$$

$$= \left[\exp\left(-ie\epsilon\right)\bar{\psi}\right] i\gamma^\mu \partial_\mu \left[\exp\left(ie\epsilon\right)\psi\right] - m \left[\exp\left(-ie\epsilon\right)\bar{\psi}\right] \left[\exp\left(ie\epsilon\right)\psi\right]$$

$$= \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi = \mathcal{L}.$$

Portanto temos também nesse caso uma simetria U(1).

Consideremos agora que nosso sistema seja composto por um próton e um nêutron. De uma forma geral essas partículas são indistinguíveis dentro do sistema. Prótons e nêutrons possuem massas distintas (938,3 Mev e 939,6 Mev respectivamente) embora muito próximas uma da outra, e podemos portanto usar essa diferença para identificá-los dentro do sistema. No entanto essa pequena diferença entre as massas de prótons e nêutrons é devido às diferentes propriedades eletromagnéticas que essas partículas possuem. Desprezando os efeitos eletromagnéticos estaremos tornando essas partículas indistinguíveis do ponto de vista das interações fortes. Esse fato indica no sistema uma simetria nas interações fortes.

Como sabemos, prótons e nêutrons são férmions e, portanto, são descritos através da teoria para campos fermiônicos mencionada anteriormente. Sendo assim, a lagrangeana para o sistema pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_p i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_p - m\bar{\psi}_p\psi_p + \bar{\psi}_n i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_n - m\bar{\psi}_n\psi_n \tag{4.14}$$

onde o índice p faz referência ao próton e n ao nêutron.

Como podemos observar, a lagrangeana em (4.14) apresenta uma simetria com relação à troca entre prótons e nêutrons, caracterizando sobre o sistema a indistinguibilidade dessas partículas. Sendo assim, podemos introduzir a seguinte quantidade:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Feito isso podemos então pensar em ψ_p e ψ_n como sendo estados diferentes de uma mesma quantidade, a qual chamaremos de nucleon. Em termos dessa nova quantidade a lagrangiana dada por (4.14) pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi. \tag{4.16}$$

Dessa forma ψ_p corresponde ao autoestado de σ_3 (matriz de spin de Pauli) com autovalor $+\frac{1}{2}$ e ψ_n com autovalor $-\frac{1}{2}$. Devido à semelhança com o conceito usual de spin, dizemos que ψ_p e ψ_n correspondem a diferentes estados de isospin (falso spin) do nucleon. As matrizes γ^μ estão numa representação redutível da seguinte forma:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^\mu & 0 \\ 0 & \gamma^\mu \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

A lagrangeana em (4.16) se mantêm invariante sob transformações do tipo:

$$\psi \to \psi' = \exp\left(i\epsilon^i \frac{\sigma^i}{2}\right)\psi \tag{4.18}$$

onde ϵ^i é um parâmetro real e σ^i são as matrizes de Pauli. De fato temos que:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}' i\gamma^\mu \partial_\mu \psi' - m\bar{\psi}'\psi'$$

$$= \bar{\psi} \exp\left(-i\epsilon^i \frac{\sigma^i}{2}\right) i\gamma^\mu \partial_\mu \exp\left(i\epsilon^i \frac{\sigma^i}{2}\right)\psi -$$

$$-m\bar{\psi}\exp\left(-i\epsilon^i\frac{\sigma^i}{2}\right)\exp\left(i\epsilon^i\frac{\sigma^i}{2}\right)\psi$$

$$=\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = \mathcal{L}.$$

A estrutura das transformações que estabelecem uma simetria em nosso sistema está ligada ao grupo SU(2). Dessa forma dizemos que esse sistema apresenta uma simetria SU(2).

5 Simetrias locais

Em nosso estudo sobre simetrias em sistemas físicos consideramos, até o presente momento, apenas as transformações de simetria ditas globais. Como sabemos, essas transformações são caracterizadas pela independência de seus parâmetros com relação aos pontos do espaço-tempo, ou seja, elas atuam da mesma forma em todos os pontos do espaço-tempo. No entanto, podemos considerar outra categoria de transformações que não sejam as de simetria global mas que também caracterizem sobre o sistema uma simetria. Para isso consideraremos transformações onde exista uma dependência de seus argumentos com respeito aos pontos do espaço-tempo. Chamadas transformações locais de simetria, essas transformações podem atuar de formas distintas em diferentes pontos do espaço-tempo, caracterizando sobre o sistema uma simetria dita local.

Por hipótese, as simetrias de um sistema devem ser independentes da evolução desse sistema. Dessa forma, se um sistema apresenta uma simetria global devido a um grupo qualquer (simetria interna SU(2), por exemplo), é de se esperar que esta mesma simetria esteja presente também quando formulada localmente. Esse fato constitui a base do chamado princípio de calibre.

As transformações de simetria local são também chamadas de transformações de calibre. Uma teoria com uma simetria local é chamada uma teoria de calibre.

6 Eletromagnetismo como teoria de calibre

Vimos anteriormente que a teoria para o campo escalar complexo é globalmente invariante sob transformações U(1). Iremos mostrar agora que essa mesma teoria pode ser reformulada a fim de se tornar uma teoria de calibre, ou seja, que apresenta uma simetria local. Para que isso seja feito nos apoiaremos no princípio de calibre.

Como transformações de calibre, as transformações U(1) para os campos escalares complexos são dadas por:

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \exp\left[i\epsilon(x)\right]\varphi \tag{6.1}$$

onde $\epsilon(x)$ é uma função escalar real.

Como desejamos estabelecer sobre o sistema uma simetria, devemos ter uma invariância da lagrangeana sob as transformações em (6.1), mas isso não acontece.

A lagrangeana do nosso sistema é dada por (4.11). É imediato ver que os termos $m^2\varphi^*\varphi$ e $V(\varphi^*\varphi)$ são invariantes. A invariância não é conseguida devido ao termo cinético $\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi$. De fato temos que:

$$\partial_\mu\varphi' = \partial_\mu\{\exp[i\epsilon(x)]\varphi\}$$

$$= \exp[i\epsilon(x)]\partial_\mu\varphi + i\,[\partial_\mu\epsilon(x)]\exp[i\epsilon(x)]\varphi$$

Como podemos constatar, a segunda parcela da expressão acima faz com que o termo cinético não seja invariante, e portanto a lagrangeana também não será.

Para contornarmos esse problema, vamos substituir a derivada ordinária ∂_μ por uma outra D_μ, chamada de derivada covariante, tal que:

$$D_\mu\varphi \to (D_\mu\varphi)' = \exp[i\epsilon(x)]D_\mu\varphi \tag{6.2}$$

No entanto, para que seja possível a transformação indicada em (6.2), precisamos introduzir um campo A_μ, chamado campo de calibre, tal que:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \tag{6.3}$$

e tendo A_μ a seguinte transformação de calibre:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\epsilon(x). \tag{6.4}$$

Como bem sabemos, uma transformação desse tipo deixa invariante a teoria eletromagnética. Sendo assim, nada mais natural do que identificar o campo de calibre A_μ como o potencial vetor do campo eletromagnético. Em vista dessa analogia A_μ é também conhecido como potencial de calibre.

O formato das equações (6.3) e (6.4) nos permitem escrever as transformações dadas por (6.2). De fato temos que:

$$D_\mu\varphi \to (D_\mu\varphi)' = \left(\partial_\mu + ieA'_\mu\right)\varphi'$$

$$= (\partial_\mu + ieA_\mu - i\partial_\mu \epsilon(x)) \exp[i\epsilon(x)]\varphi$$

$$= \exp[i\epsilon(x)]\partial_\mu\varphi + i\partial_\mu\epsilon(x)\exp[i\epsilon(x)]\varphi +$$

$$+ieA_\mu \exp[i\epsilon(x)]\varphi - i\partial_\mu\epsilon(x)\exp[i\epsilon(x)]\varphi$$

$$= \exp[i\epsilon(x)]\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\varphi$$

$$= \exp[i\epsilon(x)]D_\mu\varphi$$

Sendo assim, o termo cinético que era dado por $\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi$ passa a ser expresso como $D_\mu\varphi^* D^\mu\varphi$, e a lagrangeana que não era invariante passa a se-lo. Dessa forma a lagrangeana para os campos escalares complexos, invariantes sob transformações de calibre dadas por (6.1) e (6.4) deve ser dada por:

$$\mathcal{L} = D_\mu\varphi^* D^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi - V(\varphi^*\varphi). \tag{6.5}$$

Agora, devemos notar que o campo de calibre A_μ introduzido na teoria, é uma variável dinâmica dessa teoria e, portanto, devemos acrescentar ainda na lagrangiana dada pela expressão (6.5) um termo cinético $\mathcal{L}_A$ que está ligado a dinâmica desse campo. Para que possamos construir esse termo devemos obedecer algumas regras: em primeiro lugar, como termo cinético relativo a A_μ esse termo deve envolver derivadas desse campo; em segundo lugar, como parte da teoria, esse termo deve ser um invariante de calibre e um invariante de Lorentz. Uma forma de construirmos este termo é fazendo uso da derivada covariante. Para isso notemos que:

$$[D_\mu, D_\nu]\varphi = \left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\left(\partial_\nu + ieA_\nu\right)\varphi -$$

$$-\left(\partial_\nu + ieA_\nu\right)\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\varphi$$

$$= \partial_\mu\partial_\nu\varphi + ie\partial_\mu A_\nu\varphi + ieA_\mu\partial_\nu\varphi - e^2 A_\mu A_\nu\varphi -$$

$$-\partial_\nu\partial_\mu\varphi - ie\partial_\nu A_\mu\varphi - ieA_\nu\partial_\mu\varphi - e^2 A_\mu A_\nu\varphi$$

$$= ie\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\varphi \tag{6.6}$$

Definiremos a seguinte quantidade:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{6.7}$$

Como podemos observar, $F_{\mu\nu}$ apresenta invariância de calibre. De fato:

$$F_{\mu\nu}{}' = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$$

$$= \partial_\mu \left(A_\nu - \frac{1}{e}\partial_\nu \epsilon \right) - \partial_\nu \left(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \epsilon \right)$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{e}\partial_\mu \partial_\nu \epsilon - \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\nu \partial_\mu \epsilon$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

Portanto, nosso termo de energia cinética será um invariante de calibre e de Lorentz se for colocado na seguinte forma:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{6.8}$$

O coeficiente $-\frac{1}{4}$ na equação acima é colocado para cumprir a exigência de que as equações de Euler-Lagrange resultem nas equações de Maxwell.

Sendo assim, a lagrangeana mais geral possível para nosso sistema é dada por:

$$\mathcal{L} = D_\mu \varphi^* D^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi - V(\varphi^* \varphi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{6.9}$$

Essa lagrangeana descreve o acoplamento entre o fóton e o campo escalar complexo, conhecido como acoplamento mínimo, obtido apenas por questões de simetria das transformações de calibre, introduzindo no sistema interações eletromagnéticas.

O que foi exposto acima, é um método para obtenção de teorias de calibre. Como exemplo da aplicação desse método, utilizamos a teoria para o campo escalar complexo para encontrar sua versão invariante de calibre, mas o mesmo método poderia ser utilizado em outras teorias.

Para a teoria de campos fermiônicos (campo de Dirac), por exemplo, assim como no caso de campos escalares complexos, o método introduz no sistema interações eletromagnéticas. O sistema que tem lagrangeana dada por (4.13), em sua versão invariante de calibre terá a seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^{\mu} D_{\mu} \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{6.10}$$

Esse método pode ser usado ainda para introduzir outras interações, que não as eletromagnéticas. O que muda de um caso para o outro é o grupo de simetria. Podemos inclusive usar esse método para o caso de simetrias ligadas a grupos não abelianos como, por exemplo, o grupo SU(2).

De uma forma geral, uma teoria invariante sob um grupo de transformações globais pode ser reformulada de tal forma que esta teoria seja invariante sob o mesmo grupo de transformações, mas com parâmetros locais. Este é um resultado garantido pelo princípio de Calibre.

7 Teoria de Yang-Mills

Como bem sabemos, um sistema composto por dois fermiôns é uma teoria globalmente invariante sob transformações ligadas ao grupo SU(2), ou seja, apresenta uma simetria global SU(2)[4]. Devemos lembrar que as interações eletromagnéticas entre essas partículas foram negligenciadas, e por esse motivo temos tal simetria no sistema. O princípio de calibre nos permite reformular essa teoria tornando-a uma teoria de calibre. Faremos isso seguindo o mesmo método utilizado no capítulo anterior, em que introduzimos a interação eletromagnética na teoria para o campo escalar complexo e para os campos fermiônicos.

Como transformações de calibre as transformações SU(2) para campos fermiônicos são dadas por:

$$\psi \to \psi' = \exp\left[-i\epsilon^a(x)\frac{\sigma^a}{2}\right]\psi \tag{7.1}$$

onde $\epsilon(x)$ é uma função escalar real e σ^i são as matrizes de Pauli.

A lagrangeana do nosso sistema, que é dada por (4.16), não se mantem invariante sob as transformações dadas em (7.1). Isso se deve ao termo $\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi$. De fato temos que:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'i\gamma^\mu\partial_\mu\psi' &= \bar{\psi}\exp\left[i\epsilon^a(x)\frac{\sigma^a}{2}\right]i\gamma^\mu\partial_\mu\exp\left[-i\epsilon^b(x)\frac{\sigma^b}{2}\right]\psi\\
&= \bar{\psi}\exp\left[i\epsilon^a(x)\frac{\sigma^a}{2}\right]\gamma^\mu\exp\left[-i\epsilon^b(x)\frac{\sigma^b}{2}\right]\frac{\sigma^c}{2}\partial_\mu\epsilon^c(x)\psi+\\
&+\bar{\psi}\exp\left[i\epsilon^a(x)\frac{\sigma^a}{2}\right]i\gamma^\mu\exp\left[-i\epsilon^b(x)\frac{\sigma^b}{2}\right]\partial_\mu\psi\\
&= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\sigma^a}{2}\psi\partial_\mu\epsilon^a(x)
\end{aligned}$$

Como podemos observar, a segunda parcela da expressão acima não permite que o termo $\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ seja invariante. No entanto, a invariância é conseguida substituindo-se a derivada ∂_μ pela seguinte expressão:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{2}A^a_\mu\sigma^a \tag{7.2}$$

[4]Introduzimos sistemas desse tipo analizando um próton e um nêutron.

onde g é uma constante de acoplamento.

A exigência de que o operador dado por (7.2) seja uma derivada covariante implica que o campo A_μ^a deva se transformar de tal maneira que satisfaça a seguinte equação:

$$(D_\mu \psi)' = S(x) D_\mu \psi \tag{7.3}$$

onde

$$S(x) = \exp\left[-i\epsilon^a(x)\frac{\sigma^a}{2}\right] \tag{7.4}$$

A partir das expressões dadas em (7.2) e (7.3) podemos então encontrar uma expressão para a transformação do campo de calibre A_μ^a. Trabalhando-se o lado esquerdo da equação (7.3) temos que:

$$(D_\mu \psi)' = D_\mu{}' \psi'$$

$$= \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}A_\mu^a{}'\sigma^a\right) S(x)\psi$$

$$= \partial_\mu S(x)\psi + S(x)\partial_\mu\psi - i\frac{g}{2}A_\mu^a{}'\sigma^a S(x)\psi$$

$$= S(x)\left(\partial_\mu + S^{-1}(x)\partial_\mu S(x) - i\frac{g}{2}A_\mu^a{}' S^{-1}(x)\sigma^a S(x)\right)\psi \tag{7.5}$$

Já o lado direito da mesma equação resulta em:

$$S(x) D_\mu \psi = S(x)\left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}A_\mu^a\sigma^a\right)\psi \tag{7.6}$$

Comparando as expressões (7.5) e (7.6) temos que:

$$(D_\mu \psi)' = S(x) D_\mu \psi$$

$$S(x)\left(\partial_\mu + S^{-1}(x)\partial_\mu S(x) - i\frac{g}{2}A_\mu^a{}' S^{-1}(x)\sigma^a S(x)\right)\psi =$$

$$= S(x)\left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}A_\mu^a\sigma^a\right)\psi$$

logo,

$$S^{-1}(x)\partial_\mu S(x) - i\frac{g}{2}A_\mu^a{}'S^{-1}(x)\sigma^a S(x) = -i\frac{g}{2}A_\mu^a\sigma^a$$

e, portanto:

$$\frac{1}{2}A_\mu^a{}'\sigma^a = \frac{1}{2}S(x)A_\mu^a\sigma^a S^{-1}(x) - \frac{i}{g}\partial_\mu S(x)S^{-1}(x) \tag{7.7}$$

Consideremos agora a forma infinitesimal de $S(x)$ que é dada por:

$$S(x) = 1 - \frac{i}{2}\epsilon^a(x)\sigma^a \tag{7.8}$$

Substituindo a expressão (7.8) na (7.7) temos que:

$$\frac{1}{2}A_\mu^a{}'\sigma^a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i}{2}\epsilon^a(x)\sigma^a\right)A_\mu^b\sigma^b\left(1 + \frac{i}{2}\epsilon^c(x)\sigma^c\right) -$$

$$-\frac{i}{g}\partial_\mu\left(1 - \frac{i}{2}\epsilon^a(x)\sigma^a\right)\left(1 + \frac{i}{2}\epsilon^b(x)\sigma^b\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i}{2}\epsilon^a(x)\sigma^a\right)A_\mu^b\sigma^b\left(1 + \frac{i}{2}\epsilon^c(x)\sigma^c\right) - \frac{1}{2g}\partial_\mu\epsilon^a(x)\sigma^a\left(1 + \frac{i}{2}\epsilon^b(x)\sigma^b\right)$$

$$= \frac{1}{2}A_\mu^b\sigma^b + \frac{i}{4}A_\mu^b\sigma^b\epsilon^c(x)\sigma^c - \frac{i}{4}\epsilon^a(x)\sigma^a A_\mu^b\sigma^b + \frac{1}{8}\epsilon^a(x)\sigma^a A_\mu^b\sigma^b\epsilon^c(x)\sigma^c -$$

$$-\frac{1}{2g}\partial_\mu\epsilon^a(x)\sigma^a - \frac{i}{4g}\partial_\mu\epsilon^a(x)\sigma^a\epsilon^b(x)\sigma^b$$

$$= \frac{1}{2}A_\mu^a\sigma^a - \frac{i}{4g}\partial_\mu\epsilon^a(x)\epsilon^b(x)\sigma^a\sigma^b - \frac{1}{2g}\partial_\mu\epsilon^a(x)\sigma^a +$$

$$+\frac{i}{4}A_\mu^a\epsilon^b(x)\left[\sigma^a,\sigma^b\right] + \frac{1}{8}A_\mu^b\epsilon^b(x)\epsilon^c(x)\sigma^b\sigma^a\sigma^c$$

As matrizes σ^a são as matrizes de Pauli e, portanto devem satisfazer a seguinte algebra de Lie:

$$\left[\frac{\sigma^a}{2},\frac{\sigma^b}{2}\right] = i\varepsilon^{abc}\frac{\sigma^c}{2} \tag{7.9}$$

Devemos nos atentar ainda ao fato de $\epsilon^a(x)$ ser uma quantidade infinitesimal, e portanto podemos desprezar termos de segunda ordem ou maior. Sendo assim temos que:

$$\frac{1}{2}A_\mu^a{}'\sigma^a = \frac{1}{2}A_\mu^a\sigma^a - \frac{1}{2g}\partial_\mu\epsilon^a(x)\sigma^a + \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\epsilon^b(x)A_\mu^c\sigma^a$$

e então:

$$A_\mu^a{}' = A_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon^a(x) + \varepsilon^{abc}\epsilon^b(x)A_\mu^c \tag{7.10}$$

Esse é portanto o formato para a transformação do campo de calibre A_μ^a, obtida apenas pela exigência de que a nova derivada D_μ que substitui a derivada ∂_μ seja invariante. Em termos da nova derivada D_μ a lagrangeana será escrita como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{7.11}$$

Devemos agora introduzir um termo cinético referente à dinâmica do campo A_μ^a. Esse termo deverá ser um invariante de calibre e invariante de Lorentz. A fim de determinar tal termo consideremos a seguinte expressão:

$$[D_\mu,D_\nu]\,\psi = \left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}A_\mu^a\sigma^a\right)\left(\partial_\nu - i\frac{g}{2}A_\nu^a\sigma^a\right)\psi -$$

$$-\left(\partial_\nu - i\frac{g}{2}A_\nu^a\sigma^a\right)\left(\partial_\mu - i\frac{g}{2}A_\mu^a\sigma^a\right)\psi$$

$$= \partial_\mu\partial_\nu\psi - i\frac{g}{2}\partial_\mu\left(A_\nu^a\sigma^a\psi\right) - i\frac{g}{2}A_\mu^a\sigma^a\partial_\nu\psi - \frac{g^2}{4}A_\mu^aA_\nu^b\sigma^a\sigma^b\psi -$$

$$-\partial_\nu\partial_\mu\psi + i\frac{g}{2}\partial_\nu\left(A_\mu^a\sigma^a\psi\right) + i\frac{g}{2}A_\nu^a\sigma^a\partial_\mu\psi + \frac{g^2}{4}A_\nu^aA_\mu^b\sigma^a\sigma^b\psi$$

$$= -i\frac{g}{2}\partial_\mu A_\nu^a\sigma^a\psi - i\frac{g}{2}A_\mu^a\sigma^a\partial_\nu\psi - \frac{g^2}{4}A_\mu^aA_\nu^b\sigma^a\sigma^b\psi + \frac{g^2}{4}A_\nu^aA_\mu^b\sigma^a\sigma^b$$

$$= -i\frac{g}{2}\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)\sigma^a\psi - \frac{g^2}{4}A_\mu^aA_\nu^b\left[\sigma^a,\sigma^b\right]\psi$$

$$= -i\frac{g}{2}\left(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a\right)\sigma^a\psi - i\frac{g^2}{2}\varepsilon^{abc}A_\mu^bA_\nu^c\sigma^a\psi$$

Sendo assim podemos escrever:

$$[D_\mu, D_\nu] = -i\frac{g}{2}F^a_{\mu\nu}\sigma^a \tag{7.12}$$

onde:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\varepsilon^{abc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{7.13}$$

Isso nos sugere procurar nosso termo na seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{a\mu\nu} \tag{7.14}$$

Devemos agora mostrar que o tensor $F^a_{\mu\nu}$ deixa a lagrangeana dada em (7.12) invariante. Para que isso seja feito devemos considerar sua variação que é dada por:

$$\delta F^a_{\mu\nu} = \varepsilon^{abc}\epsilon^b(x)F^c_{\mu\nu} \tag{7.15}$$

Utilizando-se do formato de $F^a_{\mu\nu}$ dado pela expressão (7.13) e de sua variação dada pela expressão (7.15) podemos enfim mostrar a invariância de calibre da lagrangeana (7.14). De fato temos que:

$$\delta\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_{YM}{}' - \mathcal{L}_{YM}$$

$$= -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}{}'F_{a\mu\nu}{}' + \frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{a\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(F^{a\mu\nu} + \delta F^{a\mu\nu}\right)\left(F_{a\mu\nu} + \delta F_{a\mu\nu}\right) + \frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{a\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{2}F^{a\mu\nu}\delta F_{a\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{2}F^{a\mu\nu}\varepsilon^{abc}\epsilon^b(x)F^c_{\mu\nu}$$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon^{abc}F^{a\mu\nu}F^c_{\mu\nu}\epsilon^b(x) = 0$$

Dessa forma a lagrangeana mais geral possível para nossa teoria, que agora é invariante de calibre, fica escrita como:

$$\mathcal{L}_{YM} = \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{a\mu\nu} \tag{7.16}$$

8 Construção de uma teoria de calibre geral

Consideremos a lagrangeana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi,\partial_\mu \phi)$, a qual é invariante sob um grupo de Lie de transformações globais. Dessa forma, se S é uma matriz de representação desse grupo temos que:

$$\phi' = S\phi \tag{8.1}$$

que são as transformações para os campos. Agora suponhamos que $S = S(x)$, ou seja, as transformações se tornam locais. Dessa forma temos que:

$$\phi' = S(x)\phi \tag{8.2}$$

Devido à dependência das transformações S com relação às coordenadas espaço-temporais, possíveis termos envolvendo a derivada dos campos não permitirão que a lagrangeana se mantenha invariante. Para que esse problema seja contornado devemos introduzir uma derivada covariante, que em substituição à derivada ordinária, garanta a invariância da lagrangeana. A derivada covariante terá a seguinte forma:

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \tag{8.3}$$

onde A_μ é o campo de calibre. O campo A_μ depende da representação da algebra de Lie do grupo, ou seja:

$$A_\mu = A^a_\mu T^a \tag{8.4}$$

onde T^a são os geradores da algebra e satisfazem a seguinte relação:

$$\left[T^a,T^b\right] = if^{abc}T^c \tag{8.5}$$

A exigência de que o operador dado por (8.3) seja uma derivada covariante implica que o campo A^a_μ deva se transformar de tal maneira que satisfaça a seguinte equação:

$$(D_\mu \phi)' = S(x) D_\mu \phi$$

$$= S(x)\left(\partial_\mu + igA_\mu\right)\phi \tag{8.6}$$

Por outro lado temos que:

$$(D_\mu \phi)' = D_\mu{}' \phi'$$

$$= (\partial_\mu + igA_\mu{}') \, S(x)\phi$$

$$= \partial_\mu S(x)\phi + S(x)\partial_\mu \phi + igA_\mu{}' S(x)\phi$$

$$= S(x) \left[\partial_\mu + S^{-1}(x)\partial_\mu S(x) + igS^{-1}(x)A_\mu{}' S(x)\right] \phi \tag{8.7}$$

Comparando as expressões (8.6) e (8.7) temos que:

$$S(x) \left(\partial_\mu + igA_\mu\right) \phi =$$

$$= S(x) \left[\partial_\mu + S^{-1}(x)\partial_\mu S(x) + igS^{-1}(x)A_\mu{}' S(x)\right] \phi$$

$$igA_\mu = S^{-1}(x)\partial_\mu S(x) + igS^{-1}(x)A_\mu{}' S(x)$$

e então:

$$A_\mu{}^{`} = S(x)A_\mu S^{-1}(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu S(x)S^{-1}(x) \tag{8.8}$$

Consideremos agora uma transformação infinitesimal de $S(x)$ dada por:

$$S(x) = 1 + ig\epsilon^a(x)T^a \tag{8.9}$$

Substituindo a expressão (8.9) na (8.8) e considerando-se a equação (8.4), temos que:

$$A_\mu^a{}' T^a = \left(1 + ig\epsilon^a(x)T^a\right) A_\mu^b T^b \left(1 - ig\epsilon^c(x)T^c\right) +$$

$$+\frac{i}{g}\partial_\mu \left(1 + ig\epsilon^a(x)T^a\right)\left(1 - ig\epsilon^b(x)T^b\right)$$

$$= A_\mu^a T^a - igA_\mu^a T^a \epsilon^b(x)T^b + ig\epsilon^a(x)T^a A_\mu^b T^b +$$

$$+g^2\epsilon^a(x)T^aA^b_\mu T^b\epsilon^c(x)T^c - \partial_\mu\epsilon^a(x)T^a + ig\partial_\mu\epsilon^a(x)T^a\epsilon^b(x)T^b$$

$$= A^a_\mu T^a - igA^a_\mu\epsilon^b(x)\left[T^a,T^b\right] - \partial_\mu\epsilon^a(x)T^a$$

Considerando a equação (8.5) temos que:

$$A^a_\mu{}'T^a = A^a_\mu T^a + gA^a_\mu\epsilon^b(x)\varepsilon^{abc}T^c - \partial_\mu\epsilon^a(x)T^a$$

$$= A^a_\mu T^a + gf^{abc}A^b_\mu\epsilon^c(x)T^a - \partial_\mu\epsilon^a(x)T^a$$

e portanto:

$$A^a_\mu{}' = A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu\epsilon^c(x) - \partial_\mu\epsilon^a(x) \tag{8.10}$$

que é a lei de transformação para o campo de calibre (campo de Yang-Mills).

Devemos agora introduzir um termo cinético $\mathcal{L}_A$ referente à dinâmica do campo A^a_μ que deverá ser um invariante de calibre e Lorentz. Para isso consideremos a seguinte expressão:

$$[D_\mu,D_\nu]\,\phi = (\partial_\mu + igA_\mu)(\partial_\nu + igA_\nu)\,\phi -$$

$$-(\partial_\nu + igA_\nu)(\partial_\mu + igA_\mu)\,\phi$$

$$= \partial_\mu\partial_\nu\phi + ig\partial_\mu(A_\nu\phi) + igA_\mu\partial_\nu\phi - g^2A_\mu A_\nu\phi -$$

$$-\partial_\nu\partial_\mu\phi - ig\partial_\nu(A_\mu\phi) - igA_\nu\partial_\mu\phi + g^2A_\nu A_\mu\phi$$

$$= ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\,\phi - g^2\left[A_\mu,A_\nu\right]\phi$$

$$= ig\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right)T^a\phi - g^2A^a_\nu A^b_\mu\left[T^a,T^b\right]\phi$$

$$= ig\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu\right)T^a\phi - ig^2f^{abc}A^a_\nu A^b_\mu T^c\phi$$

$$= ig\left[\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + igf^{abc}A^b_\nu A^c_\mu\right]T^a\phi$$

e portanto:

$$[D_\mu,D_\nu]\,\phi = igF_a^{\mu\nu}T^a \tag{8.11}$$

onde:

$$F_a^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + igf^{abc}A_\nu^b A_\mu^c \tag{8.12}$$

e cuja variação é dada por[5]:

$$\delta F_a^{\mu\nu} = -gf^{abc}\epsilon^b(x)F_{\mu\nu}^c \tag{8.13}$$

Uma expressão para nosso termo cinético que seja um invariante de Lorentz e de calibre é dada por:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \tag{8.14}$$

Como vimos, esse termo é um invariante de Lorentz, falta mostrar que ele é também um invariante de calibre. Isso será feito no anexo 4. Dessa forma a lagrangeana mais geral possível para nossa teoria, que agora é invariante de calibre, fica escrita como:

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}(\phi,D_\mu\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \tag{8.15}$$

[5]A demonstração dessa equação encontra-se no anexo 2

9 Formalismo simplético

Consideremos um sistema físico descrito no espaço de fase por um conjunto de 2n variáveis canônicas dadas por (q_i,p_i), onde $i = 1, \cdots ,n$. Como bem sabemos, essas variáveis devem satisfazer os parênteses de Poisson, chamados fundamentais, que são dados por:

$$\{q_i,p_j\} = \delta_{ij}$$

$$\{q_i,q_j\} = \{p_i,p_j\} = 0 \tag{9.1}$$

Nossas variáveis canônicas dadas por (q_i,p_i), podem ser reescritas numa outra notação, chamada simplética. Nessa notação, o conjunto de coordenadas e momentos que descrevem nosso sistema será denotado por ξ^α de tal forma que:

$$\xi_i = q_i$$

$$\xi_{n+i} = p_i \tag{9.2}$$

ou seja, os n primeiros valores dizem respeito às coordenadas e os n últimos aos momentos. Na notação simplética a equação (9.1) fica escrita da seguinte forma:

$$\{\xi_\alpha,\xi_\beta\} = \varepsilon^{\alpha\beta} \tag{9.3}$$

A quantidade $\varepsilon^{\alpha\beta}$ é o elemento da seguinte matriz:

$$\left(\varepsilon^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

onde $\mathbb{I}$ é a matriz identidade e 0 é a matriz nula, ambas de ordem $n \times n$.

A quantização de teorias deve ser feita respeitando-se a uma condição importante dos sistemas: ele apresenta vínculos ou não? Para o caso de sistemas sem vínculos, a quantização é realizada considerando-se os parênteses de Poisson da teoria. Chamada de quantização canônica ela se apoia na seguinte prescrição:

$$\{\text{Parênteses de Poisson}\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar}\,[\text{comutador}] \tag{9.5}$$

Já no caso de sistemas vinculados, a prescrição anterior não é válida. Para tais sistemas devemos considerar seus parênteses de Dirac, que levam em conta os vínculos da teoria[6]. De uma forma geral a estrutura simplética de um sistema com vínculos deve ser dada por:

$$\{\xi_\alpha,\xi_\beta\} = f^{\alpha\beta} \tag{9.6}$$

onde $f^{\alpha\beta}$ é um tensor antissimétrico não singular. O seu inverso é denominado de tensor simplético, e é através dele que obtemos os parênteses de Dirac como mostraremos mais adiante.

9.1 O método de Faddeev-Jackiw (caso sem vínculos)

O método simplético é um método essencialmente lagrangeano. Sua execução se dá pela utilização de lagrangeanas de primeira ordem. Será sempre este nosso ponto de partida. Sendo assim, consideremos um sistema descrito pela seguinte lagrangeana de primeira ordem:

$$\mathcal{L} = M_\alpha(\xi)\dot{\xi}^\alpha - V(\xi) \tag{9.7}$$

Note que estamos fazendo uso da notação simplética. Utilizando-se o princípio de Hamilton, obtemos as equações de movimento para o sistema que são dadas por:

$$f_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\beta = \frac{\partial V}{\partial \xi^\beta} \tag{9.8}$$

onde

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial M_\alpha}{\partial \xi^\beta} - \frac{\partial M_\beta}{\partial \xi^\alpha} \tag{9.9}$$

No caso de sistemas que não apresentam vínculos, a matriz $f_{\alpha\beta}$ é não singular, e podemos dessa forma resolver a equação (9.9) para as velocidades, ou seja,

[6]Para maiores detalhes sobre parênteses de Dirac ou quantização de sistemas vinculados via método de Dirac veja (4) por exemplo.

$$\dot{\xi}^{\beta} = f^{\alpha\beta}\frac{\partial V}{\partial \xi^{\alpha}} \tag{9.10}$$

A matriz $f_{\alpha\beta}$ é chamada de tensor simplético. É a partir do seu inverso que obtemos os parênteses de Dirac, que por sua vez dão origem aos comutadores quânticos.

9.2 O método de Faddeev-Jackiw-Barcelos Neto-Wotzasek (caso com vínculos)

No caso de sistemas vinculados, a matriz $f_{\alpha\beta}$ que aparece na equação (9.9) passa a ser singular. Esse fato implica na impossibilidade de resolvermos essa mesma equação com respeito às velocidades e, portanto, não podemos associar a quantidade $f_{\alpha\beta}$ ao tensor simplético. Podemos, no entanto, contornar esse problema: os vínculos da teoria devem ser incorporados à parte cinética da lagrangeana de primeira ordem via multiplicadores de Lagrange. Obtemos então uma nova matriz $f_{\alpha\beta}$, se ela for não singular então a identificamos como tensor simplético da teoria, caso contrário devemos repetir o procedimento até encontrar uma matriz nao singular que será o tensor simplético.

Suponhamos que estamos trabalhando com uma teoria com vínculos. Sendo assim, a quantidade $f_{\alpha\beta}$ é singular e não podemos identificá-la como tensor simplético. Vamos então renomear essa quantidade que passará a ser expressa por $f^{(0)}_{\alpha\beta}$ (o índice superior diz respeito à iteração de número zero). Dizer que $f^{(0)}_{\alpha\beta}$ é singular pode ser traduzida na seguinte expressão:

$$f^{(0)}_{mn}v^{(0)}_{m} = 0 \tag{9.11}$$

onde $v^{(0)}_{m}$ são os modos zero da matriz $f^{(0)}_{mn}$, com $m = 1, \cdots, M$. Temos portanto M modos zero. Substituindo a equação (9.11) na (9.10), temos que:

$$\bar{v_m}^{(0)}\frac{\partial V}{\partial \xi^{m}} = 0 \tag{9.12}$$

Nesse momento existem duas situações possíveis. A primeira delas ocorre quando a equação (9.12) é identicamente nula. Esse caso corresponde a uma teoria de calibre, onde não são gerados novos vínculos e uma fixação de calibre deverá ser feita. A segunda situação acontece quando a equação (9.12) gera novos vínculos. Esse é o caso em que devemos utilizar o metodo simplético que estamos discutindo.

Consideremos então que a equação (9.12) seja um vínculo que chamaremos de $\Omega_m^{(0)}$. Esse vínculo deve ser introduzido na parte cinética da lagrangeana via multiplicadores de Lagrange. Fazendo isso teremos uma nova lagrangeana:

$$\mathcal{L} = M_\alpha(\xi)\dot{\xi}^\alpha + \Omega_m^{(0)}\dot{\lambda_m}^{(0)} - V(\xi) \tag{9.13}$$

10 Obtenção de teorias de Yang Mills via formalismo simpético

Com o intuito de apresentar a metodologia do formalismo de obtenção de teorias não abelianas em teoria de campos, consideremos primeiramente a teoria eletromagnética livre em quatro dimensões.

Como bem sabemos, essa teoria tem suporte no espaço-tempo com métrica dada por $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ e $g_{\mu\nu} = 0$ sempre que $\mu \neq \nu$. Descrita em termos de campos A_μ, essa teoria tem lagrangeana dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{10.1}$$

Devemos comentar ainda dois fatos: o primeiro deles é que a teoria eletromagnética livre está associada à simetria U(1), como pudemos observar na seção "eletromagnetismo como teoria de calibre"; o segundo deles diz respeito aos campos A_μ que são abelianos. Feitas as devidas considerações e comentários podemos então começar nosso método.

Como primeira etapa do método, devemos modificar o campo A_μ da seguinte forma:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^a. \tag{10.2}$$

A partir desse momento os campos A_μ^a passarão a ser representantes de uma nova teoria e por esse motivo se faz necessária a modificação indicada na equação (10.2). Aqui o índice **a** está associado ao gupo de simetria que desejamos introduzir na teoria.

Devemos ainda introduzir um tensor $G_{\mu\nu}^a$ em substituição ao tesor $F_{\mu\nu}$, ou seja,

$$F_{\mu\nu} \rightarrow G_{\mu\nu}^a. \tag{10.3}$$

Sendo assim, a lagrangeana que era escrita segundo a expressão (10.1) passa a ser dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \tag{10.4}$$

A quantidade expressa por $G^a_{\mu\nu}$ será na verdade uma extensão de $F_{\mu\nu}$. Se reduzirmos o novo grupo de simetria (que nesse caso é o SU(2)) ao grupo original U(1), então o tensor $G^a_{\mu\nu}$ se reduzirá ao $F_{\mu\nu}$, ou seja,

$$G^a_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu}. \tag{10.5}$$

Esse fato nos permite introduzir um parâmetro de acoplamento g de modo que possamos escrever $G^a_{\mu\nu}$ da segunte forma:

$$G^a_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu} + g\tilde{F}^a_{\mu\nu}. \tag{10.6}$$

Esse será portanto o formato do tensor $G^a_{\mu\nu}$ que deverá ser determinado adiante. Isso será feito na segunda etapa do método.

Devemos nos atentar ainda a um detalhe: os novos campos A^a_μ são não-abelianos e portanto devem satisfazer a álgebra não-abeliana:

$$[A^a_\mu, A^b_\nu] = g\Sigma^{ab}_{\mu\nu}\delta(x-y). \tag{10.7}$$

As quantidades $\tilde{F}^a_{\mu\nu}$ e $\Sigma^{ab}_{\mu\nu}$, que aparecem respectivamente nas expressões (10.6) e (10.7), são tensores antissimétricos que dependem dos campos A_μ, ou seja,

$$\tilde{F}^a_{\mu\nu} = \tilde{F}^a_{\mu\nu}\left(A^b_\xi\right).$$

$$\Sigma^{ab}_{\mu\nu} = \Sigma^{ab}_{\mu\nu}\left(A^b_\xi\right). \tag{10.8}$$

Terminamos aqui a primeira etapa do método.

A segunda etapa do método consiste na determinação do tensor $G^a_{\mu\nu}$ mencionado anteriormente. Para que isso seja feito aplicaremos o método simplético discutido no capítulo anterior. Façamos isso.

Como primeiro passo, devemos escrever a lagrangeana do sistema que é dada pela equação (10.4) em notação de primeira ordem. Para isso notemos que:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a$$

$$= -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu} + g\tilde{F}^a_{\mu\nu}\right)\left(F^{\mu\nu}_a + g\tilde{F}^{\mu\nu}_a\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a + 2gF^a_{\mu\nu}\tilde{F^{\mu\nu}_a} + g^2\tilde{F^{\mu\nu}_a}\tilde{F^a_{\mu\nu}}\right). \tag{10.9}$$

Devemos, nesse momento, considerar os momentos canônicos conjugados aos campos A^a_μ que são dados por:

$$\pi^\mu_a = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{A}^a_\mu} \tag{10.10}$$

Portanto, utilizando-se do formato da lagrangeana em (10.9) podemos encontrar os momentos que serão dados por:

$$\pi^o_b = 0. \tag{10.11}$$

$$\pi^j_b = -\partial^0 A^j_b + \partial^j A^0_b - g\tilde{F^{0j}_b}. \tag{10.12}$$

Substituindo os momentos dados acima na lagrangeana, temos que:

$$\mathcal{L} = -\partial_i\pi^a_i A^a_0 - \frac{1}{2}\pi^a_i\pi^a_i - \pi^a_i\dot{A}^a_i - g\pi^a_i\tilde{F}^a_{0i} -$$

$$-\frac{1}{4}\left(F^a_{ij}F^{ij}_a + 2gF^a_{ij}\tilde{F^{ij}_a} + g^2\tilde{F^{\mu\nu}_a}\tilde{F^a_{\mu\nu}}\right), \tag{10.13}$$

que é a lagrangeana do sistema em notação de primeira ordem.

Nese momento as variáveis simpléticas são dadas por $\xi^{\alpha(0)} = (A^a_i, \pi^a_i, A^a_0)$. Com o auxílio da equação (9.8) podemos identificar os termos $M^{a\,(0)}_m$ que serão usados na determinação do tensor $f^{(0)}$. Esses termos são dados por:

$$M^{a(0)A}_j = -\pi^a_i.$$

$$M^{a(0)\pi}_j = 0.$$

$$M^{a(0)A}_0 = 0. \tag{10.14}$$

Utilizando-se da equação (9.9) podemos então calcular os elementos da matriz $f^{(0)}$. Depois podemos facilmente determinar o formato da matriz pré-simplética que será dada por:

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta\pi_i^a(x)}{\delta A_j^b(y)} + \frac{\delta\pi_j^b(y)}{\delta A_i^a(x)} & -\delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) & 0 \\ \delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.15}$$

Devemos notar que $\det f^{(0)} = 0$, ou seja, ela é singular. Por esse motivo não podemos identificar a matriz dada acima com a matriz simplética. Devemos portanto dar continuidade ao processo. Não é difícil perceber que a matriz $f^{(0)}$ apresenta um modo-zero:

$$\nu^\alpha = (0{,}0{,}1)\,. \tag{10.16}$$

Contraindo esse modo-zero com o gradiente do potencial, temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \nu^\alpha \frac{\delta V(x)}{\delta \xi^\alpha(x)} \\ &= -\partial_i \pi_i^a - g\frac{\delta \tilde{F}_{0i}^b}{\delta A_0^a}\pi_i^b \\ &= \left(\delta^{ab}\partial^i - g\frac{\delta \tilde{F}_{0i}^b}{\delta A_0^a}\right)\pi_i^b \\ &= D^{abi}\pi_i^b = \Omega^a, \end{aligned} \tag{10.17}$$

onde:

$$D^{abi} = \delta^{ab}\partial^i - g\frac{\delta \tilde{F}_{0i}^b}{\delta A_0^a}. \tag{10.18}$$

Como podemos observar, a equação (10.16) constitui um vínculo e, portanto, deve ser introduzido no setor cinético da lagrangeana através de um multiplicador de Lagrange. A lagrangeana será então escrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &-\pi_i^a \partial_0 A_i^a - \frac{1}{2}\pi_i^a\pi_i^a + \Omega^a\dot{\beta}^a - \\ &-\frac{1}{4}\left(F_{ij}^a F_a^{ij} + 2gF_{ij}^a \tilde{F_a^{ij}} + g^2 \tilde{F_a^{\mu\nu}}\tilde{F_{\mu\nu}^a}\right). \end{aligned} \tag{10.19}$$

As novas variáveis simpléticas são dadas por $\xi^\alpha = (A_i^a, \pi_i^a, \beta^a)$. Com isso, os termos $M_m^{a(1)}$ são dados por:

$$M_j^{a(1)A} = -\pi_i^a.$$

$$M_j^{a(1)\pi} = 0.$$

$$M^{a(1)\beta} = \Omega^a. \tag{10.20}$$

Sendo assim, o novo tensor pré-simplético é dado por:

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\delta\pi_j^b(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta\pi_i^a(x)}{\delta A_j^b(y)} & -\delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) & \frac{\delta\Omega^b(y)}{\delta A_i^a(x)} \\ \delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) & 0 & \left(\delta^{ab}\partial_i^y + g\frac{\delta\tilde{F}_{0i}^a(y)}{\delta A_0^b(y)}\right)\delta(x-y) \\ -\frac{\delta\Omega^a(x)}{\delta A_i^b(y)} & -\left(\delta^{ba}\partial_j^x + g\frac{\delta\tilde{F}_{0j}^b(x)}{\delta A_0^a(x)}\right)\delta(x-y) & 0 \end{pmatrix} \tag{10.21}$$

Como desejamos que nossa teoria seja uma teoria de calibre, a matriz em (10.21) deve ser singular. Para que isso aconteça devemos escolher um modo-zero tal que sua contração com a matriz pré-simplética seja igual a zero. Escolheremos o seguinte modo-zero:

$$\nu^\alpha = \left(\delta^{ad}\partial_i^x - gf^{adc}A_i^c(x), -\frac{\delta\Omega^d(x)}{\delta A_i^a(x)}, -\delta^{ad}\right). \tag{10.22}$$

Contraindo esse modo-zero com a matriz pré-simplética temos que:

$$0 = \int dx \left[\left(\delta^{ad}\partial_i^x - gf^{adc}A_i^c(x)\right)\left(\frac{\delta\pi_j^b(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta\pi_i^a(x)}{\delta A_j^b(y)}\right) - \right.$$
$$\left. \frac{\delta\Omega^d(x)}{\delta A_i^a(x)}\delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) + \delta^{ad}\frac{\delta\Omega^a(x)}{\delta A_j^b(y)}\right]. \tag{10.23}$$

$$0 = \int dx \left[-\left(\delta^{ad}\partial_i^x - gf^{adc}A_i^c(x)\right)\delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) + \right.$$
$$\left. +\delta^{ad}\left(\delta^{ba}\partial_j^x + g\frac{\delta\tilde{F}_{0j}^b(x)}{\delta A_0^a(x)}\right)\delta(x-y)\right]. \tag{10.24}$$

$$0 = \int dx \left[\left(\delta^{ad}\partial_i^x - gf^{adc}A_i^c(x)\right) \frac{\delta\Omega^b(y)}{\delta A_i^a(x)} - \right.$$

$$\left. \frac{\delta\Omega^d(x)}{\delta A_i^a(x)} \left(\delta^{ab}\partial_i^y + g\frac{\delta\tilde{F}_{0i}^a(y)}{\delta A_0^b(y)}\right) \delta(x-y) \right]. \tag{10.25}$$

As equações (10.23) e (10.25) são identicamente nulas, não trazendo novas informações para nosso sistema. Os cálculos que verificam esse fato estão expostos no anexo 3. Da equação (10.24) temos que:

$$\frac{\delta\tilde{F}_{0i}^a(x)}{\delta A_0^x(y)} = -f^{bac}A_i^c(x)$$

$$\tilde{F}_{0i}^a(x) = -f^{bac}A_0^a(x)A_i^c(x), \tag{10.26}$$

e então:

$$G_{oi}^a = F_{oi}^a - f^{abc}A_0^bA_i^c. \tag{10.27}$$

Como a teoria deve ter invariância de Lorentz além da invariância de calibre, então o tensor $G_{\mu\nu}^a$ tem a seguinte forma:

$$G_{\mu\nu}^a = F_{\mu\nu}^a - f^{abc}A_\mu^bA_\nu^c. \tag{10.28}$$

11 Da teoria eletromagnética de Maxwell $U(1)$ para uma teoria de calibre $SU(2) \otimes U(1)$

Como vimos anteriormente a teoria eletromagnética de Maxwell U(1) é descrita pela seguinte lagrangeana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{11.1}$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{11.2}$$

Essa teoria tem invariância de calibre se o campo A_μ se transforma da seguinte maneira:

$$A'_\nu = A_\mu - \frac{1}{g_A}\partial_\mu \epsilon(x), \tag{11.3}$$

onde $\epsilon(x)$ é uma função escalar real e g_A é um parâmetro. Como desejamos construir uma teoria de calibre com simetria $SU(2)\otimes U(1)$, devemos adicionar à lagrangeana em (11.1) um termo do tipo:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a, \tag{11.4}$$

em que **a** faz referência ao grupo SU(2). A quantidade dada por $G^a_{\mu\nu}$ é um tensor que deverá ser determinado mais adiante. Assim como foi feito no capítulo anterior, vamos procurar $G^a_{\mu\nu}$ na seguinte forma:

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu + g_B \tilde{W}^a_{\mu\nu}, \tag{11.5}$$

em que g_B é um parâmetro. Os campos B^a_μ devem satisfazer a uma álgebra não abeliana:

$$\left[B^a_\mu, B^a_\nu\right] = g_B \Sigma^{ab}_{\mu\nu}\delta(x-y). \tag{11.6}$$

As quantidades $\tilde{W}^a_{\mu\nu}$ e $\Sigma^{ab}_{\mu\nu}$ são tensores antissimétricos que dependem dos campos B^a_ν, ou seja,

$$\tilde{W}^a_{\mu\nu} = \tilde{W}^a_{\mu\nu}\left(B^c_\alpha\right).$$

$$\Sigma^{ab}_{\mu\nu} = \Sigma^{ab}_{\mu\nu}\left(B^c_\alpha\right). \tag{11.7}$$

Sendo assim a lagrangeana do sistema será escrita como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu}_a. \tag{11.8}$$

Devemos agora determinar a forma do tensor $G^a_{\mu\nu}$. O primeiro passo para que isso seja feito, consiste em escrever a lagrangeana dada pela equação (11.8) em notação de primeira ordem. Para isso devemos considerar os momentos canônicos conjugados aos campos A_μ e B^a_μ que são dados por[7]:

$$\pi_0 = 0. \tag{11.9}$$

$$\pi_i = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0. \tag{11.10}$$

$$\pi^a_0 = 0. \tag{11.11}$$

$$\pi^a_i = -\partial_0 B^a_i + \partial_i B^a_0 - g_B \tilde{W}^a_{0i}. \tag{11.12}$$

Em termos dos momentos dados acima, a lagrangeana em (11.8) fica reescrita como:

$$\mathcal{L} = -\partial_i \pi_i A_0 - \frac{1}{2}\pi_i \pi_i - \pi_i \dot{A}_i - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} -$$

$$-\partial_i \pi^a_i B^a_0 - \frac{1}{2}\pi^a_i \pi^a_i - \pi^a_i \dot{B}^a_i - g\pi^a_i \tilde{W}^a_{0i} -$$

$$-\frac{1}{4}\left(W^a_{ij}W^{ij}_a + 2gW^a_{ij}\tilde{W^{ij}_a} + g^2\tilde{W^{\mu\nu}_a}\tilde{W^a_{\mu\nu}}\right), \tag{11.13}$$

que é a lagrangeana do sistema em notação de primeira ordem.

[7]As quantidades π_μ e π^a_μ são os momentos canônicos referentes aos respectivos campos A_μ e B^a_μ.

Nesse momento, as variáveis simpléticas são dadas por $\xi^{\alpha} = (A_i, \pi_i, A_0, B_i^a, \pi_i^a, B_0^a)$. Podemos então identificar os termos $M_m^{(0)}$ e $M_m^{a(0)}$ que são dados por:

$$M_i^{(0)A} = -\pi_i.$$

$$M_i^{(0)\pi} = 0.$$

$$M_0^{(0)A} = 0.$$

$$M_i^{a(0)B} = -\pi_i^a.$$

$$M_i^{a(0)\pi} = 0.$$

$$M_0^{a(0)B} = 0. \tag{11.14}$$

Com o auxílio dos termos indicados na equação (11.14) podemos calcular os elementos do tensor pré-simplético $f^{(0)}$ que será dado por:

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{(0)} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}^{(0)} \end{pmatrix}, \tag{11.15}$$

onde $\mathcal{A}^{(0)}$ e $\mathcal{B}^{(0)}$ são matrizes de ordem 3 dadas por:

$$\mathcal{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_{ij}\delta(x-y) \\ 0 & \delta_{ij}\delta(x-y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.16}$$

$$\mathcal{B}^{(0)} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta\pi_i^a(x)}{\delta B_j^b(y)} + \frac{\delta\pi_j^b(y)}{\delta B_i^a(x)} & -\delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) & 0 \\ \delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.17}$$

Note que a matriz $f^{(0)}$ é singular, e por esse motivo não podemos identificá-la como tensor simplético. Para essa matriz podemos identificar dois modos zero que são dados por:

$$\nu^{\alpha} = (0,0,1,0,0,0)\,. \tag{11.18}$$

$$v^{\alpha} = (0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}1)\,. \tag{11.19}$$

A contração desses modos zero com o gradiente do potencial resulta nas seguintes equações[8]:

$$\omega = \partial^i \pi_i = 0. \tag{11.20}$$

$$\Omega^a = D^{abi}\pi_i^b = 0, \tag{11.21}$$

onde:

$$D^{abi} = \delta^{ab}\partial^i + g_B \frac{\delta \tilde{W}^{b0i}}{\delta B_0^a}. \tag{11.22}$$

As equações (11.21) e (11.22) constituem vínculos e, portanto, devem ser levados a lagrangeana através de multiplicadores de Lagrange. A lagrangeana será então escrita como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\pi_i\pi_i - \pi_i\dot{A}_i - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} -$$

$$-\frac{1}{2}\pi_i^a\pi_i^a - \pi_i^a\dot{B}_i^a + \omega\dot{\beta} + \Omega^a\dot{\beta}^a -$$

$$-\frac{1}{4}\left(W_{ij}^a W_a^{ij} + 2gW_{ij}^a \tilde{W_a^{ij}} + g^2\tilde{W_a^{\mu\nu}}\tilde{W_{\mu\nu}^a}\right). \tag{11.23}$$

As novas variáveis simpléticas são dadas por $\xi^{\alpha} = (A_i, \pi_i, \beta, B_i^a, \pi_i^a, \beta^a)$. Com isso, os termos $M_m^{(1)}$ e $M_m^{a(1)}$ são dados por:

$$M_i^{(0)A} = -\pi_i.$$

$$M_i^{(0)\pi} = 0.$$

$$M_0^{(0)A} = \omega.$$

$$M_i^{a(0)B} = -\pi_i^a.$$

[8] A primrira delas foi obtida utilizando-se o modo zero ν^{α} e a segunda o modo zero v^{α}.

$$M_i^{a(0)\pi} = 0.$$

$$M_0^{a(0)B} = \Omega^a. \tag{11.24}$$

Sendo assim, o novo tensor pré-simplético é dado por:

$$f^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{(1)} & 0 \\ 0 & \mathcal{B}^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{11.25}$$

onde:

$$\mathcal{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij}\delta(x-y) & 0 \\ \delta_{ij}\delta(x-y) & 0 & -\partial_i^y\delta(x-y) \\ 0 & \partial_j^x\delta(x-y) & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.26}$$

$$\mathcal{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} \delta(x-y)\frac{\delta\pi_j^b(y)}{\delta B_i^a(x)} - \frac{\delta\pi_i^a(x)}{\delta B_j^b(y)} & -\delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) & \frac{\delta\Omega^b(y)}{\delta B_i^a(x)} \\ \delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) & 0 & -\left(\delta^{ab}\partial_i^y + g\frac{\delta\tilde{F}_{0i}^a(y)}{\delta B_0^b(y)}\right)\delta(x-y) \\ -\frac{\delta\Omega^a(x)}{\delta B_i^b(y)} & \left(\delta^{ba}\partial_i^x + g\frac{\delta\tilde{F}_{0i}^b(x)}{\delta B_0^a(x)}\right)\delta(x-y) & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.27}$$

Como desejamos que nossa teoria seja uma teoria de calibre, a matriz em (10.24) deve ser singular. Para isso escolheremos os seguintes modo-zero:

$$v_1 = \left(-\partial_i,0,1,0,0,0\right). \tag{11.28}$$

$$v_2 = \left(0,0,0,\delta^{ad}\partial_i^x - gf^{adc}B_i^c(x), -\frac{\delta\Omega^d(x)}{\delta B_i^a(x)}, -\delta^{ad}\right). \tag{11.29}$$

Como podemos observar, o modo zero v_1 não fornece novos vínculos quando contraído com a matriz pre simplética. O mesmo ocorrerá com v_2 se a seguinte condição for satisfeita:

$$\frac{\delta\tilde{W}_{0i}^a(x)}{\delta B_0^x(y)} = -f^{bac}B_i^c(x),$$

e portanto:

$$\tilde{W}^a_{0i}(x) = -f^{bac} B^a_0(x) B^c_i(x). \tag{11.30}$$

Sendo assim, o tensor $G^a_{\mu\nu}$ que procuramos passa a ser dado por:

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu B^a_\nu - \partial_\nu B^a_\mu - f^{bac} B^a_0(x) B^c_i(x). \tag{11.31}$$

Como podems observar, a contração do modo zero v_2 com o tensor présimplético em (11.27) gera equações análogas às equações (10.23), (10.24) e (10.25), e por esse motivo resolvemos ocultá-las. O processo é exatamente o mesmo e as equações obtidas também.

12 Conclusao e perspectivas futuras

Apresentamos uma formulação que nos permite estender a simetria de calibre da teoria, utilizando para isso o formalismo simplético. Partindo-se do eletromagnetismo, que apresenta simetria U(1), chegamos à teoria de Yang-Mills, que apresenta simetria SU(2). O mesmo foi feito para obter a teoria $SU(2) \otimes U(1)$. O método mostrou-se bastante consistente verificando resultados já existentes.

A teoria de Yang-Mills foi desenvolvida segundo dois métodos: O método de obtenção de teorias de calibre segundo introdução de campos auxiliares via derivadas covariantes; e o método simplético desenvolvido nesse trabalho. Isso nos permite comparar resultados e verificar a validade do método simplético.

Como próximo passo do nosso trabalho desejamos obter a teoria SU(3), também via formalismo simplético.

13 Bibliografia

[1] E.M.C. Abreu, A.C.R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, R.C.N. Silva, C. Wotzasek, Obtaining nom-Abelian field theories via the Faddeev-Jackiw symplectic formalism, Physics Letters A 2010.

[2] Jefferson G. Filgueiras, Elementos de Teoria de Grupos e Teorias de Calibre, ICE/UFJF/MONOGRAFIA/2007

[3] J. C. Barata, Notas de física matemática, http//denebola.if.usp.br/ jbarata/ notas$_d e_a ula$.

[4] José Maria Filardo Bassalo e Mauro Sérgio Dorsa Cattani, Teoria de Grupos, Livraria da Física 2008.

[5] Nivaldo A. Lemos, Mecânica Analítica, Livraria da física 2005.

[6] Barcelos Neto e C. Wotzasek, Faddeev-Jackiw Quantization and Constraints, IF/UFRJ, Int. J. Mod. Physics Letters A , 1991.

[7] Barcelos Neto, Quantização Simplética com Vínculos, IF/UFRJ/MONOGRAFIA/M92/01.

[8] Barcelos Neto e C. Wotzasek, Sympletic Quantization of Constrained Systems, IF/UFRJ-15/91 , Mod. Physics Letters A.

[9] P. A. M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Sience, Yeshiva Univ. New York, 1964.

[10] L. Faddeev, R. Jackiw, Physics Rev. Letters A 7 (1992) 1737.

[11] E. M. c. Abreu, A. C. R. Mendes, W. Oliveira, F. I. Takakura, L. M. V. Xavier, Mod. Physics Letters A 23 (2008) 829.

[12] A. V. Popov, Nucl. Phys. B 836 (2010) 136.

[13] C. Godinho, Int. J. Mod. Physics Letters A 26 (2008) 4361.

[14] E. V. Correa Silva, G. A. Monerat, G. Oliveira Neto, C. Neves, L. G. Ferreira Filho, Phys. Rev. D 80 (2009) 047302.

[15] C. Yang, R. L. Mills, Phys. Rev. 96 (1954) 191.

14 Anexo 1

Demonstração da equação (7.15)

Considerando a transformação para o campo de calibre A_μ^a dada por (7.10) mostraremos que a variação do tensor $F_{\mu\nu}^a$ é dada pela equação (7.15). De fato temos que:

$$F_{\mu\nu}^a{}' = \partial_\mu A_\nu^a{}' - \partial_\nu A_\mu^a{}' + g\varepsilon^{abc} A_\mu^b{}' A_\nu^c{}'$$

$$= \partial_\mu \left(A_\nu^a - \frac{1}{g}\partial_\nu \epsilon^a(x) + \varepsilon^{abc}\epsilon^b(x) A_\nu^c \right) -$$

$$-\partial_\nu \left(A_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^a(x) + \varepsilon^{abc}\epsilon^b(x) A_\mu^c \right) +$$

$$+g\varepsilon^{abc} \left(A_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu \epsilon^a(x) + \varepsilon^{abc}\epsilon^b(x) A_\mu^c \right) \left(A_\nu^a - \frac{1}{g}\partial_\nu \epsilon^a(x) + \varepsilon^{abc}\epsilon^b(x) A_\nu^c \right)$$

$$= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \varepsilon^{abc}\epsilon^b(x) \left(\partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c \right) +$$

$$+g\varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c + g\varepsilon^{abc}\varepsilon^{cde}\epsilon^d(x) \left(A_\mu^b A_\nu^e - A_\nu^b A_\mu^e \right)$$

$$= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \varepsilon^{abc}\epsilon^b(x) \left(\partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c \right) +$$

$$+g\varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c + g\varepsilon^{abc}\epsilon^b(x)\varepsilon^{cde} A_\mu^d A_\nu^e$$

$$= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c +$$

$$+\varepsilon^{abc}\epsilon^b(x) \left(\partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c + g\varepsilon^{cde} A_\mu^d A_\nu^e \right)$$

$$= F_{\mu\nu}^a + \varepsilon^{abc}\epsilon^b(x) F_{\mu\nu}^c$$

e portanto:

$$\delta F_{\mu\nu}^a = \varepsilon^{abc}\epsilon^b(x) F_{\mu\nu}^c \tag{14.1}$$

15 Anexo 2

Demonstração da equação (8.13)

Considerando a transformação para o campo de calibre A^a_μ dada por (8.10) mostraremos que a variação do tensor $F^a_{\mu\nu}$ é dada pela equação (8.13). De fato temos que:

$$F^{\mu\nu\,\prime}_a = \partial_\mu A^{a\,\prime}_\nu - \partial_\nu A^{a\,\prime}_\mu + igf^{abc}A^{b\,\prime}_\nu A^{c\,\prime}_\mu$$

$$= \partial_\mu \left(A^a_\nu + gf^{abc}A^b_\nu\epsilon^c(x) - \partial_\nu\epsilon^a(x)\right) - \partial_\nu \left(A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu\epsilon^c(x) - \partial_\mu\epsilon^a(x)\right) +$$

$$+igf^{abc}\left(A^b_\mu + gf^{bde}A^d_\mu\epsilon^e(x) - \partial_\mu\epsilon^b(x)\right)\left(A^c_\nu + gf^{cfh}A^f_\nu\epsilon^h(x) - \partial_\nu\epsilon^c(x)\right)$$

$$= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\mu\partial_\nu\epsilon^a(x) + gf^{abc}\partial_\mu\left(A^b_\nu\epsilon^c(x)\right) -$$

$$-\partial_\nu A^a_\mu + \partial_\nu\partial_\mu\epsilon^a(x) - gf^{abc}\partial_\nu\left(A^b_\mu\epsilon^c(x)\right) -$$

$$-gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu + gf^{abc}A^b_\mu\partial_\nu\epsilon^c(x) - g^2f^{abc}f^{cde}A^b_\mu A^d_\nu\epsilon^e(x) +$$

$$+gf^{abc}\partial_\mu\epsilon^a(x)A^c_\nu - gf^{abc}\partial_\mu\epsilon^b(x)\partial_\nu\epsilon^c(x) +$$

$$+g^2f^{abc}f^{cde}\partial_\mu\epsilon^a(x)A^d_\nu\epsilon^e(x) - g^2f^{abc}f^{bde}A^d_\mu\epsilon^e(x)A^c_\nu +$$

$$+g^2f^{abc}f^{cde}A^d_\mu\epsilon^e(x)\partial_\nu\epsilon^c(x) - g^3f^{abc}f^{cde}f^{cfh}A^d_\mu\epsilon^e(x)A^f_\mu\epsilon^h(x)$$

$$= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}\partial_\mu A^b_\nu\epsilon^c(x) - gf^{abc}\partial_\nu A^b_\mu\epsilon^c(x) -$$

$$-gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu - g^2f^{abc}f^{cde}A^b_\mu A^d_\nu\epsilon^e(x) - g^2f^{abc}f^{bde}A^d_\mu\epsilon^e(x)A^c_\nu$$

$$= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}\partial_\mu A^b_\nu\epsilon^c(x) - gf^{abc}\partial_\nu A^b_\mu\epsilon^c(x) -$$

$$-gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu + g^2f^{abc}f^{cde}\epsilon^b(x)\left(A^d_\mu A^e_\nu - A^d_\nu A^e_\mu\right)$$

$$= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} \partial_\mu A^b_\nu \epsilon^c(x) - g f^{abc} \partial_\nu A^b_\mu \epsilon^c(x) -$$

$$- g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu + g^2 f^{abc} f^{cde} \epsilon^b(x) A^d_\mu A^e_\nu$$

$$= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

$$+ g f^{abc} \epsilon^c(x) \left(\partial_\mu A^b_\nu - \partial_\nu A^b_\mu - g f^{bde} A^d_\mu A^e_\nu \right)$$

$$= F^a_{\mu\nu} + g f^{abc} \epsilon^c(x) F^b_{\mu\nu}$$

$$= F^a_{\mu\nu} - g f^{abc} \epsilon^b(x) F^c_{\mu\nu}$$

e portanto:

$$\delta F^{\mu\nu}_a = -g f^{abc} \epsilon^b(x) F^c_{\mu\nu}$$

Demonstração da equação (8.14)

Utilizando-se da expressão para a variação do tensor $F^a_{\mu\nu}$ dada pela equação (8.13) mostraremos que a lagrangiana dada por (8.14) é um invariante de calibre. De fato temos que:

$$\delta \mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_{YM}{}' - \mathcal{L}_{YM}$$
$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu a}{}' F^{\mu\nu a}{}' + \frac{1}{4} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a}$$

$$= -\frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu a} + \delta F_{\mu\nu a} \right) \left(F^{\mu\nu a} + \delta F^{\mu\nu a} \right) + \frac{1}{4} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a}$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu a} \delta F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu a} \delta F_{\mu\nu a} -$$

$$- \frac{1}{4} \delta F_{\mu\nu a} \delta F^{\mu\nu a} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu a}$$

$$= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu a} \delta F^{\mu\nu a}$$

$$= \frac{g}{2} f^{abc} \epsilon^b(x) F^{\mu\nu a} F^c_{\mu\nu} = 0$$

16 Anexo 3

Demonstraçao das equações (10.11) e (10.12)

Utilizando-se das equações (10.9) e (10.10) mostraremos que os momentos canônicos conjugados aos campos A_i^a são realmente dados por (10.11) e (10.12). De fato temos que:

$$\pi_b^o = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_0 A_0^b\right)}$$

$$= \frac{\delta}{\delta\left(\partial_0 A_0^b\right)}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2}gF_{\mu\nu}^a \tilde{F_a^{\mu\nu}} - \frac{1}{4}g^2 \tilde{F_a^{\mu\nu}}\tilde{F_{\mu\nu}^a}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}F_a^{\mu\nu}\frac{\delta F_{\mu\nu}^a}{\delta\left(\partial_0 A_0^b\right)} - \frac{1}{2}g\tilde{F_a^{\mu\nu}}\frac{\delta F_{\mu\nu}^a}{\delta\left(\partial_0 A_0^b\right)} = 0$$

$$\pi_b^j = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\left(\partial_0 A_j^b\right)}$$

$$= \frac{\delta}{\delta\left(\partial_0 A_j^b\right)}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2}gF_{\mu\nu}^a \tilde{F_a^{\mu\nu}} - \frac{1}{4}g^2 \tilde{F_a^{\mu\nu}}\tilde{F_{\mu\nu}^a}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}F_a^{\mu\nu}\frac{\delta F_{\mu\nu}^a}{\delta\left(\partial_0 A_j^b\right)} - \frac{1}{2}g\tilde{F_a^{\mu\nu}}\frac{\delta F_{\mu\nu}^a}{\delta\left(\partial_0 A_j^b\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(F_a^{\mu\nu} + g\tilde{F_a^{\mu\nu}}\right)\frac{\delta F_{\mu\nu}^a}{\delta\left(\partial_0 A_j^b\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(F_a^{0i} + g\tilde{F_a^{0i}}\right)\frac{\delta F_{0i}^a}{\delta\left(\partial_0 A_j^b\right)} - \frac{1}{2}\left(F_a^{i0} + g\tilde{F_a^{i0}}\right)\frac{\delta F_{i0}^a}{\delta\left(\partial_0 A_j^b\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(F_a^{0i} + g\tilde{F_a^{0i}}\right)\delta_{ij}\delta_{ab} + \frac{1}{2}\left(F_a^{i0} + g\tilde{F_a^{i0}}\right)\delta_{ij}\delta_{ab}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(F_b^{0j} + g\tilde{F_b^{0j}}\right) - \frac{1}{2}\left(F_b^{0j} + g\tilde{F_b^{0j}}\right)$$

$$= -F_b^{0j} - g\tilde{F_b^{0j}}$$

$$= -\partial^0 A_b^j + \partial^j A_b^0 - g\tilde{F_b^{0j}}$$

Demonstraçao da equação (10.13)

Substituindo os momentos canônicos dados por (10.11) e (10.12) na lagrangiana em (10.9) mostraremos que sua forma passa a ser dada por (10.13). De fato temos que:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a + 2gF^a_{\mu\nu}\tilde{F^{\mu\nu}_a} + g^2\tilde{F^{\mu\nu}_a}\tilde{F^a_{\mu\nu}}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(F^a_{0i}F^{0i}_a + F^a_{i0}F^{i0}_a + F^a_{ij}F^{ij}_a\right) -$$

$$-\frac{1}{2}g\left(F^a_{0i}\tilde{F^{0i}_a} + F^a_{i0}\tilde{F^{i0}_a} + F^a_{ij}\tilde{F^{ij}_a}\right) - \frac{1}{4}g^2\tilde{F^{\mu\nu}_a}\tilde{F^a_{\mu\nu}}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(2F^a_{0i}F^{0i}_a + F^a_{ij}F^{ij}_a\right) -$$

$$-\frac{1}{2}g\left(2F^a_{0i}\tilde{F^{0i}_a} + F^a_{ij}\tilde{F^{ij}_a}\right) - \frac{1}{4}g^2\tilde{F^{\mu\nu}_a}\tilde{F^a_{\mu\nu}}$$

$$= -\frac{1}{2}F^a_{0i}F^{0i}_a - \frac{1}{4}F^a_{ij}F^{ij}_a -$$

$$-gF^a_{0i}\tilde{F^{0i}_a} - \frac{1}{2}gF^a_{ij}\tilde{F^{ij}_a} - \frac{1}{4}g^2\tilde{F^{\mu\nu}_a}\tilde{F^a_{\mu\nu}}$$

$$= -\frac{1}{2}F^a_{0i}\left(F^{0i}_a + g\tilde{F^{0i}_a}\right) - \frac{1}{2}gF^a_{0i}\tilde{F^{0i}_a} -$$

$$-\frac{1}{4}\left(F^a_{ij}F^{ij}_a + 2gF^a_{ij}\tilde{F^{ij}_a} + g^2\tilde{F^a_{\mu\nu}}\tilde{F^{\mu\nu}_a}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}F^a_{0i}\pi^i_a - \frac{1}{2}gF^a_{0i}\tilde{F^{0i}_a} -$$

$$-\frac{1}{4}\left(F^a_{ij}F^{ij}_a + 2gF^a_{ij}\tilde{F^{ij}_a} + g^2\tilde{F^a_{\mu\nu}}\tilde{F^{\mu\nu}_a}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\pi^a_i - g\tilde{F^a_{0i}}\right)\pi^i_a - \frac{1}{2}g\left(-\pi^a_i - g\tilde{F^a_{0i}}\right)\tilde{F^{0i}_a} -$$

$$-\frac{1}{4}\left(F^a_{ij}F^{ij}_a + 2gF^a_{ij}\tilde{F^{ij}_a} + g^2\tilde{F^a_{\mu\nu}}\tilde{F^{\mu\nu}_a}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\pi^a_i\pi^i_a + \frac{1}{2}g^2\tilde{F^a_{0i}}\tilde{F^{0i}_a} -$$

$$-\frac{1}{4}\left(F_{ij}^{a}F_{a}^{ij}+2gF_{ij}^{a}\tilde{F_{a}^{ij}}+g^{2}\tilde{F_{\mu\nu}^{a}}\tilde{F_{a}^{\mu\nu}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\pi_{i}^{a}\pi_{a}^{i}-\frac{1}{4}\left(F_{ij}^{a}F_{a}^{ij}+2gF_{ij}^{a}\tilde{F_{a}^{ij}}+g^{2}\tilde{F_{ij}^{a}}\tilde{F_{a}^{ij}}\right)$$

$$=-\pi_{i}^{a}\pi_{a}^{i}+\frac{1}{2}\pi_{i}^{a}\pi_{a}^{i}-$$

$$-\frac{1}{4}\left(F_{ij}^{a}F_{a}^{ij}+2gF_{ij}^{a}\tilde{F_{a}^{ij}}+g^{2}\tilde{F_{ij}^{a}}\tilde{F_{a}^{ij}}\right)$$

$$=-\pi_{i}^{a}\left(-F_{a}^{0i}-g\tilde{F_{a}^{0i}}\right)+\frac{1}{2}\pi_{i}^{a}\pi_{a}^{i}-$$

$$-\frac{1}{4}\left(F_{ij}^{a}F_{a}^{ij}+2gF_{ij}^{a}\tilde{F_{a}^{ij}}+g^{2}\tilde{F_{ij}^{a}}\tilde{F_{a}^{ij}}\right)$$

$$=\pi_{i}^{a}F_{a}^{0i}+g\pi_{i}^{a}\tilde{F_{a}^{0i}}+\frac{1}{2}\pi_{i}^{a}\pi_{a}^{i}-$$

$$-\frac{1}{4}\left(F_{ij}^{a}F_{a}^{ij}+2gF_{ij}^{a}\tilde{F_{a}^{ij}}+g^{2}\tilde{F_{ij}^{a}}\tilde{F_{a}^{ij}}\right)$$

$$=\pi_{i}^{a}\left(\partial^{0}A_{a}^{i}-\partial^{i}A_{a}^{0}\right)+g\pi_{i}^{a}\tilde{F_{a}^{0i}}+\frac{1}{2}\pi_{i}^{a}\pi_{a}^{i}-$$

$$-\frac{1}{4}\left(F_{ij}^{a}F_{a}^{ij}+2gF_{ij}^{a}\tilde{F_{a}^{ij}}+g^{2}\tilde{F_{ij}^{a}}\tilde{F_{a}^{ij}}\right)$$

$$=\pi_{i}^{a}\partial^{0}A_{a}^{i}-\pi_{i}^{a}\partial^{i}A_{a}^{0}+g\pi_{i}^{a}\tilde{F_{a}^{0i}}+\frac{1}{2}\pi_{i}^{a}\pi_{a}^{i}-$$

$$-\frac{1}{4}\left(F_{ij}^{a}F_{a}^{ij}+2gF_{ij}^{a}\tilde{F_{a}^{ij}}+g^{2}\tilde{F_{ij}^{a}}\tilde{F_{a}^{ij}}\right)$$

$$=\pi_{i}^{a}\dot{A}_{a}^{i}+\partial^{i}\pi_{i}^{a}A_{a}^{0}+g\pi_{i}^{a}\tilde{F_{a}^{0i}}+\frac{1}{2}\pi_{i}^{a}\pi_{a}^{i}-$$

$$-\frac{1}{4}\left(F_{ij}^{a}F_{a}^{ij}+2gF_{ij}^{a}\tilde{F_{a}^{ij}}+g^{2}\tilde{F_{ij}^{a}}\tilde{F_{a}^{ij}}\right)$$

$$=-\pi_{i}^{a}\dot{A}_{i}^{a}-\partial_{i}\pi_{i}^{a}A_{a}^{0}-g\pi_{i}^{a}\tilde{F_{0i}^{a}}-\frac{1}{2}\pi_{i}^{a}\pi_{i}^{a}-$$

$$-\frac{1}{4}\left(F_{ij}^{a}F_{a}^{ij}+2gF_{ij}^{a}\tilde{F_{a}^{ij}}+g^{2}\tilde{F_{ij}^{a}}\tilde{F_{a}^{ij}}\right)$$

Demonstraçao da equação (10.15)

Utilizando-se das expressões para os termos $M_i^{a(0)}$, determinaremos a forma para os elementos da matriz $f^{(0)}$. Para que isso seja feito consideremos:

$$M_j^{b(0)A} = -\pi_i^a$$

$$M_j^{b(0)\pi} = 0$$

$$M^{b(0)\beta} = 0$$

Sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{ab(0)A} &= \frac{\delta M_j^{b(0)A}(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta M_i^{a(0)A}(x)}{\delta A_j^b(y)} \\ &= \frac{\delta \pi_j^b(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta \pi_i^a(x)}{\delta A_j^b(y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{ij}^{ab(0)A\pi} &= \frac{\delta M_j^{b(0)\pi}(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta M_i^{a(0)A}(x)}{\delta \pi_j^b(y)} \\ &= -\frac{\delta \pi_i^a(x)}{\delta \pi_j^b(y)} = -\delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) \end{aligned}$$

Como a matriz $f_{\mu\lambda}^{ab(0)}$ é antissimétrica temos que:

$$f_{ij}^{ab(0)\pi A} = \delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y)$$

$$f_{0i}^{ab(0)A} = 0$$

$$f_{0i}^{ab(0)A\pi} = 0$$

As demais componentes são todas nulas. De fato temos que:

$$f_{i0}^{ab(0)A} = \frac{\delta M_0^{b(0)A}(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta M_i^{a(0)A}(x)}{\delta A_0^b(y)} = 0$$

$$f_{i0}^{ab(0)\pi A} = \frac{\delta M_0^{b(0)A}(y)}{\delta \pi_i^a(x)} - \frac{\delta M_i^{a(0)\pi}(x)}{\delta A_0^b(y)} = 0$$

$$f_{ij}^{ab(0)\pi} = \frac{\delta M_j^{b(0)\pi}(y)}{\delta \pi_i^a(x)} - \frac{\delta M_i^{a(0)\pi}(x)}{\delta \pi_j^b(y)} = 0$$

$$f_{00}^{ab(0)A} = \frac{\delta M_0^{b(0)A}(y)}{\delta A_0^a(x)} - \frac{\delta M_0^{a(0)A}(x)}{\delta A_0^b(y)} = 0$$

Demonstraçao da equação (10.21)

Utilizando-se das expressões para os termos $M_i^{a(1)}$, determinaremos a forma para os elementos da matriz $f^{(1)}$. Para que isso seja feito consideremos:

$$M_j^{b(1)A} = -\pi_i^a$$

$$M_j^{b(1)\pi} = 0$$

$$M^{b(1)\beta} = \Omega^a$$

Sendo assim, temos que:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{ab(1)A} &= \frac{\delta M_j^{b(1)A}(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta M_i^{a(1)A}(x)}{\delta A_j^b(y)} \\ &= \frac{\delta \pi_j^b(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta \pi_i^a(x)}{\delta A_j^b(y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{ij}^{ab(1)A\pi} &= \frac{\delta M_j^{b(1)\pi}(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta M_i^{a(1)A}(x)}{\delta \pi_j^b(y)} \\ &= -\frac{\delta \pi_i^a(x)}{\delta \pi_j^b(y)} \\ &= -\delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_i^{ab(1)A\beta} &= \frac{\delta M^{b(1)\beta}(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta M_i^{a(1)A}(x)}{\delta \beta^b(y)} \\ &= \frac{\delta \Omega^b(y)}{\delta A_i^a(x)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_i^{ab(1)\pi\beta} &= \frac{\delta M^{b(1)\beta}(y)}{\delta\pi_i^a(x)} - \frac{\delta M_i^{a(1)\pi\beta}(x)}{\delta\beta^b(y)} \\
&= \frac{\delta\Omega^b(y)}{\delta\pi_i^a(x)} \\
&= \frac{\delta\left(\delta^{ab}\partial^i\pi_i^b(y) - g\frac{\delta\tilde{F}_{0i}^b(y)}{\delta A_0^a(y)}\pi_i^b(y)\right)}{\delta\pi_i^a(x)} \\
&= \delta^{cb}\partial^i\frac{\delta\pi_i^b(y)}{\delta\pi_i^a(x)} - g\frac{\delta\tilde{F}_{0i}^b(y)}{\delta A_0^c(y)}\frac{\delta\pi_i^b(y)}{\delta\pi_i^a(x)} \\
&= -\left(\delta^{ab}\partial_i^y + g\frac{\delta\tilde{F}_{0i}^a(y)}{\delta A_0^b(y)}\right)\delta(x-y)
\end{aligned}
$$

Como a matriz $f^{(1)}$ é antissimétrica temos que:

$$f_{ij}^{ab(1)\pi A} = \delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y)$$

$$f_i^{ab(1)\beta A} = -\frac{\delta\Omega^a(x)}{\delta A_i^b(y)}$$

$$f_i^{ab(1)\beta\pi} = \left(\delta^{ba}\partial_i^x + g\frac{\delta\tilde{F}_{0i}^b(x)}{\delta A_0^a(x)}\right)\delta(x-y)$$

As demais componentes são todas nulas. De fato temos que:

$$f_{ij}^{ab(1)\pi} = \frac{\delta M_j^{b(1)\pi}(y)}{\delta\pi_i^a(x)} - \frac{\delta M_i^{a(1)\pi}(x)}{\delta\pi_j^b(y)} = 0$$

$$f^{ab(1)\beta} = \frac{\delta M^{b(1)\beta}(y)}{\delta\beta^a(x)} - \frac{\delta M^{a(1)\beta}(x)}{\delta\beta^b(y)} = 0$$

çao da equação (10.23)

$$
\begin{aligned}
0 = \int dx \Bigg[&\left(\delta^{ad}\partial_i^x - gf^{adc}A_i^c(x)\right)\left(\frac{\delta\pi_j^b(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta\pi_i^a(x)}{\delta A_j^b(y)}\right) \\
&\frac{\delta\Omega^d(x)}{\delta A_i^a(x)}\delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) + \delta^{ad}\frac{\delta\Omega^a(x)}{\delta A_i^b(y)}\Bigg]
\end{aligned}
$$

Consideremos a seguinte equação:

$$\frac{\delta\Omega^a(x)}{\delta A_i^b(y)} = gf^{abc}\pi_i^c(y)\delta(x-y)$$

e então:

$$0 = \int dx \left[\left(\delta^{ad}\partial_i^x - gf^{adc}A_i^c(x)\right) \left(\frac{\delta\pi_j^b(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta\pi_i^a(x)}{\delta A_j^b(y)} \right) \right.$$

$$\left. -gf^{dac}\pi_i^c(y)\delta(x-y)\delta_{ij}\delta^{ab}\delta(x-y) + g\delta^{ad}f^{abc}\pi_i^c(y)\delta(x-y) \right]$$

$$0 = \int dx \left(\delta^{ad}\partial_i^x - gf^{adc}A_i^c(x)\right) \left(\frac{\delta\pi_j^b(y)}{\delta A_i^a(x)} - \frac{\delta\pi_i^a(x)}{\delta A_j^b(y)} \right)$$

Consideremos a seguinte equação:

$$\frac{\delta\pi_j^b(y)}{\delta A_i^a(x)} = -\delta_{ij}\delta^{ab}\partial_0\delta(x-y) - g\frac{\delta\tilde{F_{0j}^b}}{\delta A_i^a(x)}$$

e tambem:

$$\frac{\delta\tilde{F_{0j}^b}}{\delta A_i^a(x)} = -f^{bca}A_0^c(y)\delta_{ij}\delta(x-y)$$

e então:

$$0 = \int dx \left[\delta^{ad}\partial_i^x - gf^{adc}A_i^c(x)\right) \left(-\delta_{ij}\delta^{ab}\partial_0\delta(x-y) + \right.$$

$$\left. +gf^{bea}A_0^e(y)\delta_{ij}\delta(x-y) + \delta_{ij}\delta^{ab}\partial_0\delta(x-y) - gf^{aeb}A_0^e(y)\delta_{ij}\delta(x-y) \right]$$

$$0 = \int dx \left(\delta^{ad}\partial_i^x - gf^{adc}A_i^c(x)\right) \left(f^{bea} - f^{aeb}\right) A_0^e(y)\delta(x-y)$$

Considerando que $f^{abd} = -f^{dab}$ verificamos a igualdade acima.

Demonstraçao da equação (10.25)

$$0 = \int dx \left[\left(\delta^{ad}\partial_i^x - gf^{adc}A_i^c(x)\right) \frac{\delta\Omega^b(y)}{\delta A_i^a(x)} - \right.$$

$$-\frac{\delta\Omega^d(x)}{\delta A_i^a(x)}\left(\delta^{ab}\partial_i^y+g\frac{\delta\tilde{F}_{0i}^a(y)}{\delta A_0^b(y)}\right)\delta(x-y)\Bigg]$$

$$0=\int dx\left[\left(\delta^{ad}\partial_i^x-gf^{adc}A_i^c(x)\right)gf^{abe}\pi_i^e(y)\delta(x-y)-\right.$$

$$\left.-gf^{dac}\pi_i^c(x)\left(\delta^{ab}\partial_i^y-gf^{abe}A_i^e(y)\right)\delta(x-y)\right]$$

$$0=g\int dx\left[f^{bdc}\partial_i^x\pi_i^c(x)\delta(x-y)-gf^{adc}f^{bae}A_i^c(x)\pi_i^e(y)\delta(x-y)-\right.$$

$$\left.-f^{dbc}\pi_i^c(x)\partial_i^y\delta(x-y)-gf^{abe}f^{dac}\pi_i^c(x)A_i^e(y)\delta(x-y)\right]$$

$$0=gf^{bdc}\partial_i^y\pi_i^c(y)-g^2f^{adc}f^{bae}A_i^c(y)\pi_i^e(y)-$$

$$-g\int dx\left[f^{dbc}\pi_i^c(x)\partial_i^y\delta(x-y)-gf^{abe}f^{dac}\pi_i^c(y)A_i^e(y)\delta(x-y)\right]$$

$$0=gf^{bdc}\partial_i^y\pi_i^c(y)-g^2f^{adc}f^{bae}A_i^c(y)\pi_i^e(y)-$$

$$-gf^{dbc}\partial_i^y\pi_i^c(y)+g^2f^{abe}f^{dac}\pi_i^c(y)A_i^e(y)$$

$$0=gf^{bdc}\partial_i^y\pi_i^c(y)+g^2\left(-f^{bda}f^{ace}-f^{bca}f^{aed}\right)A_i^c(y)\pi_i^e(y)-$$

$$-gf^{dbc}\partial_i^y\pi_i^c(y)-g^2\left(-f^{dba}f^{adc}-f^{dea}f^{acb}\right)\pi_i^c(y)A_i^e(y)$$

$$0=-gf^{bda}\left(-\partial_i^y\pi_i^a(y)+g^2F^{bda}f^{ace}A_i^c(y)\pi_i^e(y)\right)-$$

$$-g^2f^{bca}f^{aed}\pi_i^e(y)A_i^c(y)+$$

$$+gf^{dba}\left(-\partial_i^y\pi_i^a(y)+g^2f^{dba}f^{aec}\pi_i^c(y)A_i^e(y)\right)+$$

$$+g^2f^{dea}f^{acb}\pi_i^c(y)A_i^e(y)$$

$$0 = -gf^{bda}\Omega^a(y) + gf^{dba}\Omega^a(y) -$$

$$-g^2 f^{bca} f^{aed} \pi_i^e(y) A_i^c(y) +$$

$$+g^2 f^{dea} f^{acb} \pi_i^c(y) A_i^e(y)$$

$$0 = g^2 \left(f^{bca} f^{aed} - f^{dca} f^{aeb} \right) \pi_i^e(y) A_i^c(y)$$