Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Eduardo Huerto Caqui

Multiplicidade de soluções para um problema elíptico semilinear

Juiz de Fora

2015

Eduardo Huerto Caqui

Multiplicidade de soluções para um problema elíptico semilinear

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Análise, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Fábio Rodrigues Pereira

Coorientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Caqui, Eduardo Huerto.
Multiplicidade de soluções para um problema elíptico semilinear / Eduardo Huerto Caqui. – 2015.
93 f. : il.

Orientador: Fábio Rodrigues Pereira
Coorientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.

1.Equações diferenciais. 2.Expoente crítico. 3.Problema semilinear I. Pereira, Fábio Rodrigues, orient. II. Faria, Luiz Fernando de Oliveira, coorient. III. Título.

Eduardo Huerto Caqui

Multiplicidade de soluções para um problema elíptico semilinear

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Análise, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 14 de agosto de 2015

BANCA EXAMINADORA

Professor Dr. Fábio Rodrigues Pereira - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Luiz Fernando de Oliveira Faria Luiz Fernando de Oliveira Faria - Coorientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Anderson Luís Albuquerque Araújo
Universidade Federal de Viçosa

AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares em especial para minha mae Pelagia Caqui Mallqui.

Ao meu orientador, professor Fábio Rodrigues Pereira, pela atenção e dedicação com que me orientou.

Ao meu coorientador, professor Luiz Fernando de Oliveira Faria.

À coordenação do Mestrado em Matemática da UFJF juntamente com todos os professores do programa.

À professora Flaviana Andréa Ribeiro por me incentivar a continuar os estudos.

Aos professores Olímpio Hiroshi Miyagaki e Anderson Luís Albuquerque Araújo por terem aceito o convite para participar da minha Banca.

Aos meus amigos de mestrado, pelas proveitosas discussões e pela ótima companhia.

À CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual este trabalho não seria possível.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a existência de soluções para o problema semilinear elíptico.

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda |u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $N \geq 3$, $b > 0$, $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, $u^+ = \max\{u, 0\}$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, $k \geq 1$, e $\lambda_j \in \sigma(-\Delta)$. Consideramos dois casos, a saber,

(i) $2 < p < 2^*$ (subcrítico),

(ii) $p = 2^*$ (crítico),

usando métodos variacionais, mostramos a existência de pelo menos três soluções. As duas primeiras foram obtidas via o Teorema do Passo da Montanha e a terceira via o Teorema de Enlace.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Expoente crítico. Problema semilinear.

ABSTRACT

In this work, we study the existence of solutions for the semilinear elliptic problem

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda |u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{p-1} \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ is a bounded smooth domain, $N \geq 3$, $b > 0$, $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, $u^+ = \max\{u, 0\}$, $a \in \mathbb{R}$, $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, $k \geq 1$, and $\lambda_j \in \sigma(-\Delta)$. We consider two cases, namely,

(i) $2 < p < 2^*$ (subcritical),

(ii) $p = 2^*$ (critical),

using variational methods, we show the existence of at least three solutions. The first two were obtained via the mountain pass theorem and the third via the linking Theorem.

Key-words: Differential equations. Critical exponent. Semilinear problem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	subconjunto aberto e limitado.
$\partial\Omega$	fronteira de Ω.
$\overline{\Omega}$	é o fecho de Ω.
A^c	o complementar do conjunto A.
$med\,(A)$	é a medida de Lebesgue de um subconjunto A de $\mathbb{R}^N$
$B_R(x_0)$	Bola de radio R centrada no ponto x_0.
∇u	$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.
Δu	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
$supp\, f$	suporte da função f.
$D^\alpha u$	$\dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}} u\,, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
$C(\Omega)$	espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas em Ω.
$C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ contínuas em $\overline{\Omega}$.
$\Vert.\Vert_0$	norma definida em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
$C^1(\Omega, \mathbb{R})$	espaço de todas as funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em Ω.
$C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	espaço de todas as funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em $\overline{\Omega}$.
$\Vert.\Vert_{C^1}$	norma definida em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$.
$C_0^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$	espaço de todas as funções $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que possuem derivadas contínuas em $\overline{\Omega}$ com suporte compacto.
$C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R})$	espaço das funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
L^∞	espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ onde $\sup_{x\in\Omega} \lvert u(x)\rvert < \infty$ com norma

$$\Vert u\Vert_\infty = \inf\{C > 0 : \lvert u(x)\rvert \le C \text{ quase sempre em } \Omega\}.$$

$W^{k,p}(\Omega)$ espaços de Sobolev (veja Apêndice A.10).

$H^k(\Omega)$ espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$.

H_0^1 fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito ao espaço $H^1(\Omega)$ com norma dada por

$$\|u\|_{H^1} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

A norma considerada em $H_0^1(\Omega)$ é dada por $\|u\| = \left[\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$.

L^p espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ com norma L^p finita

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty.$$

$U \hookrightarrow V$ imersão contínua entre os espaços U e V.

$p^* = \dfrac{pN}{N-p}$ expoente crítico de Sobolev com respeito à imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.

E^* espaço dual topológico de E.

$\langle .,. \rangle_E$ produto interno definido em E.

$\to$ convergência forte.

$\rightharpoonup$ convergência fraca.

q.t.p. quase todo ponto (a menos de um conjunto de medida de Lebesgue nula).

$u^+ = max\{u, 0\}$ parte positiva de u.

$u^- = max\{-u, 0\}$ parte negativa de u.

$f = O(g)$ quando $x \to x_0$, significa que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$, $\forall\ x$ suficientemente próximo de x_0.

$f = o(g)$ quando $x \to x_0$, significa que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Essa dissertação tem como objetivo expor o trabalho de F. O. de Paiva e A. E. Presoto [16], o qual será estudado ao longo deste trabalho. Estudamos a possibilidade de existência de solução para o problema semilinear elíptico.

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda|u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{p-1} \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $N \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, λ é um parâmetro posistivo, $1 < q < 2 < p \leq 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$.

No caso em que a potência p é subcrítica, isto é, $2 < p < 2^*$, a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ é compacta, assim, é possível mostrar que o funcional associado ao problema (1.1) satisfaz a condição de Palais-Smale em todos os níveis. Por outro lado, no caso em que a potência p é crítica ($p = 2^*$), a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ não é compacta, e assim, este "problema" é transferido para o funcional. Isto gera uma grande dificuldade em mostrar a existência de solução não-nula. Os argumentos aqui utilizados para o caso crítico são adaptações da técnica desenvolvida por Brezis-Niremberg [5], no qual é mostrado que o funcional satisfaz Palais Smale abaixo de um certo nível.

Mostraremos também que em ambas os casos (crítico e subcrítico), o problema (1.1) possui três soluções. As ferramentas Variacionais serão o teorema do Passo da Montanha e o Teorema de Linking.

Em 1994, A. Ambrozetti, H. Brezis e G. Cerami [1] consideraram o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u^q + u^p\,, \quad \text{em } \Omega, \\ u > 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde eles mostraram a existência de um valor $\Lambda > 0$ tal que existem pelo menos duas soluções positivas para $\lambda \in (0, \Lambda)$, pelo menos uma para $\lambda = \Lambda$ e nenhuma solução positiva para $\lambda > \Lambda$. Após o surgimento deste trabalho, tem havido a preocupação crescente sobre o estudo de multiplicidade de soluções para o problema elíptico semilinear do tipo:

$$-\Delta u = \mu|u|^{q-2}u + g(u) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Quando g é assimétrica e assintoticamente linear este problema foi considerado em [8, 12, 15, 23]. Aqui assimétrica significa que g satisfaz uma condição tipo Ambrosetti-Prodi, isto é, $g_- = \lim_{t\to-\infty} \dfrac{g(t)}{t} < \lambda_k < g_+ = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{g(t)}{t}$. Quando g é assimétrica e superlinear em $+\infty$, $g_+ = \infty$, este problema foi abordado em [8, 15, 20]. Em [8] foi considerado um problema com condição de fronteira do tipo Neumann e em [20] os autores estudaram um problema envolvendo o operador p-laplaciano. Em [15], foi assumido que $\dfrac{g(t)}{t}$ cruza um autovalor do laplaciano quando t varia de 0 à $-\infty$, isto é, $g'(0) < \lambda_k < g_-$. Hipóteses similares também aparecem em [23]. Hipóteses que envolvem o primeiro autovalor, como $g'(0), g_- \leq \lambda_1$, foram considerados em [8, 12, 20]. Sabe-se que o cruzamento de autovalores, em particular, o primeiro, está relacionada com a existência e multiplicidade de soluções de tais problemas. Neste trabalho nota-se que a não linearidade $g(t) = at + b(t^+)^{p+1}$, com $a > \lambda_1$, não está incluído em nenhum dos trabalhos anteriores. Além disso, problemas semelhantes com $\mu = 0$ foram estudados em [21] para problemas de Dirichlet, e em [2, 24] para problemas Neumann. Nosso problema (1.1) também está intimamente relacionado com a classe de problemas superlineares do tipo Ambrosetti-Prodi:

$$-\Delta u = au + (u^+)^p + f(u) \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{com } f \in L^2.$$

Por exemplo no caso em que $a = \lambda_1$, este problema tem uma solução, se $\|f\|_{L^2}$ é suficientemente pequeno (ver [17]). Em 1986, B. Ruf e P. N. Srikanth [26] estudaram o problema superlinear com o expoente subcrítico :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + (u^+)^p + f(u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $1 < p < 2^* - 1$ se $N \geq 3, h \in L^s(\Omega)$ com $s > N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Usando a decomposição $f = t\varphi_1 + f_1$ com $\displaystyle\int_\Omega f_1\varphi_1 = 0$ e a hipótese de que $\lambda > \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, Ruf e Srikanth mostraram a existência de uma constante $T = T(f_1)$, tal que para $t > T$, o problema (1.3) possui pelo menos duas soluções. Outros resultados e variações para o problema acima podem ser encontrados em [9, 10, 11, 13, 25]. A principal motivação para o caso crítico do problema (1.1) é o trabalho pioneiro de Brezis-Nirenberg [5], onde o seguinte problema crítico foi considerado :

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

onde $\lambda < \lambda_1$. Eles notaram que o problema tinha uma quebra da compacidade no valor $\dfrac{S^{\frac{N}{2}}}{N}$, de modo que, eles construíram níveis minimax para o funcional energia associado ao problema (1.4). Tais ideias permearam muitos trabalhos posteriores, dentro os quais o trabalho de Capozzi, Fortunato e Palmieri [7] que basicamente estudaram o problema acima, com λ entre dois autovalores. Eles demostraram que o problema acima tem uma solução não trivial para todo $\lambda > 0$ quando $N \geq 5$ e quando λ não é autovalor do laplaciano quando $N = 4$.

Iniciamos o Capítulo 2 com resultados que serão usados nos demais capítulos. No Capítulo 3 estudamos o problema (1.1) para o caso subcrítico, onde fizemos uso da técnica do Teorema do Passo da Montanha para obter uma solução negativa e uma positiva. Além disso, usamos o teorema de Linking para obter uma terceira solução. No Capítulo 4 abordamos o problema (1.1) para o caso crítico, onde novamente usamos os mesmos teoremas, com a compacidade satisfeita abaixo de certo nível, para obter três soluções.

2 RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, demonstraremos resultados que serão utilizados para o problema Elíptico Semilinear com condição de fronteira de Dirichlet envolvendo o expoente subcrítico, quanto para o crítico, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda |u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domíno limitado com fronteira regular, $N \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2 < p \leq 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$.

As soluções fracas do problema (2.1) correspondem aos pontos críticos do funcional $I_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u^+)^p dx.$$

Antes de iniciarmos o primeiro resultado, precisaremos de algumas notações que serão utilizadas ao longo do trabalho. Denotamos os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_j \cdots$, e por φ_j as autofunções correspondentes. As normas definidas em $H_0^1(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$ são denotadas por $\|.\|$ e $|.|_p$ respectivamente.

2.1 REGULARIDADE DO FUNCIONAL

Começamos mostrando que este funcional I_λ é de classe $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por

$$\langle I_\lambda'(u), h\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla h dx + \lambda\int_\Omega |u|^{q-2}uh dx - a\int_\Omega uh dx - b\int_\Omega (u^+)^{p-1}h dx, \ \forall\, u, h \in H_0^1. \tag{2.2}$$

Lema 2.1 *O funcional I_λ é de classe $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ e sua derivada é dada por (2.2).*

Demonstração: Tomamos $I_1, I_2, I_3 : H_0^1 \to \mathbb{R}$, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I_1(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \\ I_2(u) &= \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 dx, \\ I_3(u) &= \frac{1}{\gamma}\int_\Omega |u|^\gamma dx, \quad \text{para } 1 < \gamma \leq 2^*, \end{aligned}$$

e iremos provar que I_1, I_2, I_3 são de classe $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$.

Afirmação 1) I_1 é de classe $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$.

De fato, primeiro vamos mostrar que I_1 é Gateaux diferenciável. Para isto, iremos encontrar $\langle I_1'(u), h\rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle I_1'(u), h\rangle =& \lim_{t\to 0} \frac{I_1(u+th) - I_1(u)}{t}\\
=& \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\|u+th\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2}{t}\\
=& \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\|u\|^2}{2} + t\langle u, h\rangle_{H_0^1} + \frac{t^2\|h\|}{2} - \frac{\|u\|^2}{2}\right)\\
=& \langle u, h\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \nabla h dx.
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada de Gateux existe em u com $\langle I_1'(u), h\rangle = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla h dx$. Agora mostraremos que I_1' é contínua, seja $u_n \to u$ em H_0^1. Queremos mostrar que $I_1'(u_n) \to I_1'(u)$ em $(H_0^1)^*$. Para todo $h \in H_0^1$ com $\|h\| \le 1$, vejamos que

$$\begin{aligned}
|\langle I_1'(u_n) - I_1'(u), h\rangle| &= |\langle I_1'(u_n)h\rangle - \langle I_1'(u)h\rangle|\\
&= |\langle u_n, h\rangle_{H_0^1} - \langle u, h\rangle_{H_0^1}|\\
&= |\langle u_n - u, h\rangle_{H_0^1}|\\
&\le \|u_n - u\|\|h\| \le \|u_n - u\|.
\end{aligned}$$

Isto implica que $|\langle I_1'(u_n) - I_1'(u), h\rangle| \le \|u_n - u\|$ para todo $h \in H_0^1$ com $\|h\| \le 1$, por conseguinte

$$\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{(H_0^1)^*} = \sup_{\|h\|\le 1} |\langle I_1'(u_n) - I_1'(u), h\rangle| \le \|u_n - u\|.$$

Pela hipótese, segue-se $\|I_1'(u_n) - I_1'(u)\|_{(H_0^1)^*} \to 0$, quando $n \to \infty$, isto é, $I_1'(u_n) \to I_1'(u)$ quando $n \to \infty$. Deste modo, concluímos que I_1' é contínuo e com o resultado (ver Apêndice, Teorema A.3), $I_1 \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$.

Afirmação 2) I_2 é de classe $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$.

De fato, primeiro vamos mostrar que I_2 é Gateaux diferenciável. Para isto iremos encontrar $\langle I_2'(u), h\rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle I_2'(u), h\rangle =& \lim_{t\to 0} \frac{I_2(u+th) - I_2(u)}{t}\\
=& \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{a}{2}|u+th|_2^2 - \frac{a}{2}|u|_2^2\right)\\
=& a\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{|u|_2^2}{2} + t\langle u, h\rangle_{L^2} + \frac{t^2|h|_2}{2} - \frac{|u|_2^2}{2}\right)\\
=& a\langle u, h\rangle_{L^2} = a\int_\Omega uh dx.
\end{aligned}$$

Portanto, a derivada de Gateux existe em u com $\langle I_2'(u), v\rangle = a\int_\Omega uhdx$. Agora mostraremos que I_2' é contínua. Assim, seja $u_n \to u$ em H_0^1, queremos mostrar que $I_2'(u_n) \to I_2'(u)$ em $(H_0^1)^*$. Para todo $h \in H_0^1$ com $\|h\| \leq 1$, obtemos

$$
\begin{aligned}
|\langle I_2'(u_n) - I_2'(u), h\rangle| &= |\langle I_2'(u_n), h\rangle - \langle I_2'(u), h\rangle| \\
&= a|\langle u_n, h\rangle_{L^2(\Omega)} - \langle u, h\rangle_{L^2(\Omega)}| \\
&= a|\langle u_n - u, h\rangle_{L^2}| \\
&\leq a|u_n - u|_2 |h|_2 \leq ac_1c_2\|u_n - u\|\|h\|,
\end{aligned}
$$

onde na última desigualdade usamos a desigualdade de Poincaré (ver Apêndice, Teorema A.23), isto é, existem $c_1, c_2 > 0$ tais que $|u_n - u|_2 \leq c_1\|u_n - u\|$ e $|h|_2 \leq c_2\|h\|$ Assim, podemos deduzir que $|\langle I_1'(u_n) - I_1'(u), v\rangle| \leq ac_1c_2\|u_n - u\|$ para todo $h \in H_0^1$ com $\|h\| \leq 1$, por conseguinte

$$
\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{(H_0^1)^*} = \sup_{\|h\|\leq 1} |\langle I_2'(u_n) - I_2'(u), h\rangle| \leq ac_1c_2\|u_n - u\|.
$$

Pela hipótese segue-se $\|I_2'(u_n) - I_2'(u)\|_{(H_0^1)^*} \to 0$, quando $n \to \infty$, isto é, $I_2'(u_n) \to I_2'(u)$, quando $n \to \infty$. Deste modo, concluímos que I_2' é contínuo e com o resultado (ver Apêndice, Teorema A.3), $I_2 \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$.

Afirmação 3) I_3 é de classe $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$.

De fato, primeiro vamos mostrar que I_3 é Gateaux diferenciável. Para isto iremos encontrar $\langle I_3'(u), h\rangle$. Consideremos a seguinte função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \frac{1}{\gamma}|u + sth|^\gamma$ onde $t \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < |t| < 1$ e $u, h \in H_0^1$. Evidentemente, f é diferenciável em $(0,1)$ e além disso:

(i) $f(1) = \frac{1}{\gamma}|u + th|^\gamma$,

(ii) $f(0) = \frac{1}{\gamma}|u|^\gamma$,

(iii) $f'(s) = |u + sth|^{\gamma-2}(u + sth)th$.

Logo, pelo Teorema do valor Médio, existe $\delta \in (0,1)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(\delta)(1-0)$ substituindo os items (i), (ii), (iii) se segue $\frac{1}{\gamma}|u + th|^\gamma - \frac{1}{\gamma}|u|^\gamma = |u + \delta th|^{\gamma-2}(u + \delta th)th$. Dividindo a igualdade acima por t onde $0 < |t| < 1$, tem-se

$$
\frac{1}{\gamma}\left(\frac{|u + th|^\gamma - |u|^\gamma}{t}\right) = |u + \delta th|^{\gamma-2}(u + \delta th)h.
$$

Assim, podemos obter

$$
\lim_{t\to 0} \frac{1}{\gamma}\left(\frac{|u + th|^\gamma - |u|^\gamma}{t}\right) = |u|^{\gamma-2}uh. \tag{2.3}
$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\gamma}\left(\frac{|u+th|^\gamma-|u|^\gamma}{t}\right)\right| &= |u+\delta th|^{\gamma-1}|h|\\ &\le (|u|+|\delta||t||h|)^{\gamma-1}|h|\\ &\le (|u|+|h|)^{\gamma-1}|h|.\end{aligned}$$

Agora, mostraremos que $(|u|+|h|)^{\gamma-1}|h| \in L^1$, isto é, $\int_\Omega (|u|+|h|)^{\gamma-1}|h|dx < \infty$.

Para isso pelo Teorema A.17 (ver Apêndice), podemos observar que $H_0^1 \hookrightarrow L^\gamma$ para $\gamma \in (1, 2^*]$. Logo para $u, h \in H_0^1$ podemos deduzir $u, h \in L^\gamma$ e $|u|+|h| \in L^\gamma$. Assim, $(|u|+|h|)^{\gamma-1} \in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $\dfrac{\gamma}{\gamma-1}$ e γ em $(|u|+|h|)^{\gamma-1}|h|$, obtemos

$$\int_\Omega (|u|+|h|)^{\gamma-1}|h|dx \le \left(\int_\Omega |(|u|+|h|)^{\gamma-1}|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(\int_\Omega |h|^\gamma dx\right) < \infty.$$

Note que a última desigualdade segue-se do fato que $(|u|+|h|)^{\gamma-1} \in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ e $h \in L^\gamma$. Assim, segue do Teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver Apêndice, Teorema A.20) que

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{1}{\gamma}\left(\frac{|u+th|^\gamma-|u|^\gamma}{t}\right)dx = \int_\Omega \lim_{t\to 0}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{|u+th|^\gamma-|u|^\gamma}{t}\right)dx = \int_\Omega |u|^{\gamma-2}uhdx,$$

onde a última igualdade resulta de (2.3). Então daí, obtemos

$$\langle I_3'(u), h\rangle = \lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{1}{\gamma}\left(\frac{|u+th|^\gamma-|u|^\gamma}{t}\right)dx = \int_\Omega |u|^{\gamma-2}uhdx,$$

e consequentemente, existe a derivada de Gateaux em u, com

$$\langle I_3'(u), h\rangle = \int_\Omega |u|^{\gamma-2}uhdx.$$

Agora mostraremos que I_3' é contínua. Seja $u_n \to u$ em H_0^1. Queremos mostrar que $I_3'(u_n) \to I_3'(u)$ em $(H_0^1)^*$, pelo Teorema A.17 (ver Apêndice) segue que $u_n \to u$ em L^γ, uma vez que $\gamma \in (1, 2^*]$. Logo, pelo Teorema A.4 (ver Apêndice), existe uma subsequência, ainda denotada por (u_n) e existe $g \in L^\gamma$ tal que

$$u_n \to u, \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ e, } |u_n| \le g, \text{ q.t.p em } \Omega. \tag{2.4}$$

Para todo $h \in H_0^1$ com $\|h\| \le 1$, temos

$$\begin{aligned}|\langle I_3'(u_n) - I_3'(u), h\rangle| &= \left|\int_\Omega |u_n|^{\gamma-2}u_nhdx - \int_\Omega |u|^{\gamma-2}uhdx\right|\\ &= \left|\int_\Omega (|u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u)hdx\right|\\ &\le \int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u||h|dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\langle I_3'(u_n) - I_3'(u), h\rangle| \le \int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u||h|dx. \tag{2.5}$$

Por (2.4), temos $u_n \to u$, q.t.p. em Ω, então

$$||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u||h| \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{2.6}$$

e observamos que

$$\begin{aligned}
(||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}})^{\frac{2^*}{\gamma}} &= ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{2^*}{\gamma-1}} \\
&\le (|u_n|^{\gamma-2}|u_n| + |u|^{\gamma-2}|u|)^{\frac{2^*}{\gamma-1}} \\
&\le 2^{\frac{2^*}{\gamma-1}}(|u_n|^{2^*} + |u|^{2^*}) \\
&\le 2^{\frac{2^*}{\gamma-1}}(g^{2^*} + |u|^{2^*}),
\end{aligned}$$

onde, a desigualdade acima segue-se de (2.4). Daí obtemos

$$\begin{aligned}
(||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}})^{\frac{2^*}{\gamma}} &\le 2^{\frac{2^*}{\gamma-1}}(g^{2^*} + |u|^{2^*}) \\
||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} &\le 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(g^{2^*} + |u|^{2^*})^{\frac{\gamma}{2^*}}.
\end{aligned}$$

Como $(g^{2^*} + |u|^{2^*})^{\frac{\gamma}{2^*}} \le 2^{\frac{\gamma}{2^*}}(g^\gamma + |u|^\gamma)$, então

$$||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \le M(g^\gamma + |u|^\gamma), \tag{2.7}$$

onde $M = 2^{\frac{\gamma}{\gamma-1}+\frac{\gamma}{2^*}}$ é uma constante positiva. Logo, do fato que $g, u \in L^\gamma$, podemos concluir $||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u| \in L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$. Lembre-se também que pelo Teorema A.17 (ver Apêndice), podemos observar que $H_0^1 \hookrightarrow L^\gamma$ para $\gamma \in (1, 2^*]$, logo para $h \in H_0^1$ podemos deduzir $h \in L^\gamma$. Agora, usando a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{\gamma}{\gamma-1}$ e γ em $||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u||h|$, obtemos

$$\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u||h|dx \le \left(\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \left(\int_\Omega |h|^\gamma dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Note que existe $C > 0$ tal que $\left(\int_\Omega |h|^\gamma dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} \le C\|h\|$ para todo $h \in H_0^1$, pois isto decorre de $H_0^1 \hookrightarrow L^\gamma$, consequentemente, como $\|h\| \le 1$ segue-se

$$\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u||h|dx \le C\left(\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \tag{2.8}$$

Resulta de (2.5) e (2.8) que

$$|\langle I_3'(u_n) - I_3'(u), h\rangle| \le C\left(\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}dx\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \tag{2.9}$$

Observe que, por (2.6) e (2.7) onde $M(g^\gamma + |u|^\gamma) \in L^\gamma$ podemos aplicar o Teorema da Convergência dominada de Lebesgue (ver Apêndice, Teorema A.20), isto é,

$$\int_\Omega ||u_n|^{\gamma-2}u_n - |u|^{\gamma-2}u|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \to 0.$$

Concluímos que por (2.9)

$$I_3'(u_n) \to I_3'(u), \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto, I_3' é contínuo, logo $I_3 \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ (ver Apêndice, Teorema A.3).

Finalmente pelas afirmações 1), 2), 3) segue-se $I_\lambda \in C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ e

$$\langle I_\lambda'(u), h\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla h dx + \lambda \int_\Omega |u|^{q-2} uh dx - a\int_\Omega uh dx - b\int_\Omega (u^+)^{p-1} h dx, \ \forall u, h \in H_0^1.$$

□

2.2 SOBRE COMPACIDADE

No seguinte lema mostraremos que cada sequência $(P.S.)$ de I_λ (isto é, uma sequência $(u_n) \subset H_0^1$ que satisfaz $|I_\lambda(u_n)| \leqslant M$ para alguma constante real positiva M e $I_\lambda'(u_n) \to 0$ no dual de H_0^1 quando $n \to \infty$) é limitada.

Lema 2.2 *Sejam $\lambda_1 < a$, $2 < p \leq 2^*$ e $\lambda > 0$, então cada sequência $(P.S.)$ de I_λ é limitada.*

Demonstração: Por hipótese $(u_n) \subset H_0^1$ satisfaz as condições abaixo

$$|I_\lambda(u_n)| = \left| \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega u_n^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx \right| \leq M, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} |\langle I_\lambda'(u_n), h\rangle| &= \left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla h dx + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n h dx - a\int_\Omega u_n h dx - b\int_\Omega (u_n^+)^{p-1} h dx \right| \\ &\leq \epsilon_n \|h\|, \text{ para todo } h \in H_0^1, \text{ onde } \epsilon_n \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.11}$$

De (2.10), (2.11) e $|I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n), u_n\rangle| \leq |I_\lambda(u_n)| + |\frac{1}{2}\langle I'(u_n), u_n\rangle|$ (desigualdade triangular), obtemos

$$\begin{aligned} M + \epsilon_n\|u_n\| &\geq |I_\lambda(u_n) - \frac{1}{2}\langle I'(u_n), u_n\rangle| \\ &= \Bigg| \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega u_n^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \lambda\int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n^2 dx - a\int_\Omega u_n^2 dx - b\int_\Omega (u_n^+)^{p-1} u_n dx \right) \Bigg|. \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} M + \epsilon_n\|u_n\| &\geq \left| \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q dx + \frac{b}{2}\int_\Omega (u_n^+)^{p-1} u_n dx \right| \\ &= \left| \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q dx + \frac{b}{2}\int_\Omega (u_n^+)^{p-1}(u_n^+ - u_n^-) dx \right| \\ &= \left| \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q dx + \frac{b}{2}\int_\Omega (u_n^+)^p dx \right|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$M + \epsilon_n \|u_n\| \geq \left| \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\lambda}{2} \right) \int_\Omega |u_n|^q dx + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{p} \right) \int_\Omega (u_n^+)^p dx \right|.$$

Como $\lambda > 0$, $b > 0$ e $1 < q < 2 < p$, segue que

$$M + \epsilon_n \|u_n\| \geq \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{p} \right) \int_\Omega (u_n^+)^p dx,$$

pela hipótese $p > 2$ e $b > 0$ e multiplicando por $\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{p} \right)^{-1} > 0$ em ambos os lados, obtemos

$$M \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{p} \right)^{-1} + \epsilon_n \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{p} \right)^{-1} \|u_n\| \geq \int_\Omega (u_n^+)^p dx.$$

Sem perda de generalidade, podemos considerar M em vez de $M \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{p} \right)^{-1}$ e ϵ_n em vez de $\epsilon_n \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{p} \right)^{-1}$, logo

$$M + \epsilon_n \|u_n\| \geq \int_\Omega (u_n^+)^p dx. \tag{2.12}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\langle I'_\lambda(u_n), u_n^- \rangle| &= \left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla u_n^- dx + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n u_n^- dx - a \int_\Omega u_n u_n^- dx - b \int_\Omega (u_n^+)^{p-1} u_n^- dx \right| \\ &= \left| \int_\Omega \nabla (u_n^+ - u_n^-) \nabla u_n^- dx + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} (u_n^+ - u_n^-) u_n^- dx \right. \\ &\left. -a \int_\Omega (u_n^+ - u_n^-) u_n^- dx - b \int_\Omega (u_n^+)^{p-2} u_n^+ u_n^- dx \right|. \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} |\langle I'_\lambda(u_n), u_n^- \rangle| &= \left| - \int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} (u_n^-)^2 dx + a \int_\Omega (u_n^-)^2 dx \right| \\ &= \left| - \int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 dx - \lambda \int_\Omega (u_n^+ + u_n^-)^{q-2} (u_n^-)^{q-2} (u_n^-)^{4-q} dx + a \int_\Omega (u_n^-)^2 dx \right| \\ &= \left| - \int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 dx - \lambda \int_\Omega ((u_n^+ + u_n^-) u_n^-)^{q-2} (u_n^-)^{4-q} dx + a \int_\Omega (u_n^-)^2 dx \right|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\langle I'_\lambda(u_n), u_n^- \rangle| &= \left| - \int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 dx - \lambda \int_\Omega (u_n^-)^q dx + a \int_\Omega (u_n^-)^2 dx \right| \\ &= \left| \int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 dx + \lambda \int_\Omega (u_n^-)^q dx - a \int_\Omega (u_n^-)^2 dx \right| \\ &= \left| \|u_n^-\|^2 + \lambda |u_n^-|_q^q - a |u_n^-|_2^2 \right|. \end{aligned}$$

Daí concluímos que

$$|\langle I'_\lambda(u_n), u_n^- \rangle| = |\|u_n^-\|^2 + \lambda |u_n^-|_q^q - a |u_n^-|_2^2|.$$

Usando este fato, por (2.11), obtemos que

$$\epsilon_n\|u_n^-\| \geq |\|u_n^-\|^2 + \lambda|u_n^-|_q^q - a|u_n^-|_2^2| = |\langle I_\lambda'(u_n), u_n^-\rangle|. \tag{2.13}$$

Note que (2.10) implica que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega u_n^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx \leq M. \tag{2.14}$$

Como $|u_n| \geq u_n^- \geq 0$, então $\frac{\lambda}{2}\left(\int_\Omega |u_n|^q dx - \int_\Omega (u_n^-)^q dx\right) \geq 0$ e pela estimativa (2.14), obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |u_n|^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx \leq \frac{\lambda}{2}\left(\int_\Omega |u_n|^q dx - \int_\Omega (u_n^-)^q dx\right) + M.$$

Portanto, obtemos a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx \leq \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u_n^-)^q dx + \frac{a}{2}\int_\Omega |u_n|^2 dx + M.$$

Como $|\nabla u_n| = \nabla u_n^+ + \nabla u_n^-$ e $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n^+|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n^-|^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p \\
&\leq \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u_n^-)^q dx + \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^-)^2 dx + \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2 dx + M,
\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n^+|^2 dx - \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx \\
&\leq \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{1}{2}\left(\|u_n^-\|^2 + \lambda|u_n^-|_q^q - a|u_n^-|_2^2\right) + M.
\end{aligned}$$

Pela igualdade (2.13) decorre

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n^+|^2 dx - \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx \\
&\qquad\qquad \leq \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_n|^q dx - \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u_n|^q dx + \frac{1}{2}|\langle I_\lambda'(u_n), u_n^-\rangle| + M.
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{q}\right)\int_\Omega |u_n|^q dx + \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2 dx + \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx + \frac{1}{2}|\langle I_\lambda'(u_n), u_n^-\rangle| + M.$$

Como $\lambda > 0$ e $1 < q < 2$, então $\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{q} < 0$, donde

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq \frac{a}{2}\int_\Omega (u_n^+)^2 dx + \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx + \frac{1}{2}|\langle I_\lambda'(u_n), u_n^-\rangle| + M.$$

Como $p > 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ é aberto e limitado, temos $L^p \hookrightarrow L^2$. Assim, existe $T > 0$ tal que $\int_\Omega (u_n^+)^2 dx \leq T^2 \left(\int_\Omega (u_n^+)^p dx\right)^{\frac{2}{p}}$. Agora pelo Lema A.28 (ver Apêndice), temos que $T^2 \left(\int_\Omega (u_n^+)^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \leq \left(\frac{p-2}{p}\right)(T^2)^{\frac{p}{p-2}} + \frac{2}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx$, então

$$\int_\Omega (u_n^+)^2 dx \leq \left(\frac{p-2}{p}\right)(T^2)^{\frac{p}{p-2}} + \frac{2}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx.$$

Daí

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq \frac{a}{2}\left(\frac{p-2}{p}\right)(T^2)^{\frac{p}{p-2}} + \frac{a}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx + \frac{b}{p}\int_\Omega (u_n^+)^p dx + \frac{1}{2}|\langle I'_\lambda(u_n), u_n^-\rangle| + M.$$

Sem perda da generalidade consideremos M em vez de $\frac{a}{2}\left(\frac{p-2}{p}\right)(T^2)^{\frac{p}{p-2}} + M$, logo

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq \left(\frac{a+b}{p}\right)\int_\Omega (u_n^+)^p dx + \frac{1}{2}|\langle I'_\lambda(u_n), u_n^-\rangle| + M.$$

Portanto, segue que :

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq C\int_\Omega (u_n^+)^p dx + \frac{1}{2}|\langle I'_\lambda(u_n), u_n^-\rangle| + M, \text{ onde } C \text{ é uma constante positiva.}$$

Agora, substuindo (2.12) e (2.13) na desigualdade acima, obtemos:

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq C(M + \epsilon_n\|u_n\|) + \frac{1}{2}\epsilon_n\|u_n^-\| + M. \tag{2.15}$$

Como ϵ_n é limitada, existe uma constante positiva K tal que $C\epsilon_n < K$ e $\frac{1}{2}\epsilon_n < K$. Além disso, sem perda da generalidade consideremos M em vez de $CM + M$.
Deste modo, de (2.15) decorre

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq K\|u_n\| + K\|u_n^-\| + M. \tag{2.16}$$

Mostraremos que (u_n) é limitada em H_0^1.

Antes disso, primeiro mostraremos que (u_n^+) é limitada em H_0^1.

De fato, suponha por absurdo que $\|u_n^+\| \to \infty$. Por (2.16) e pela desigualdade triangular $\|u_n\| = \|u_n^+ - u_n^-\| \leq \|u_n^+\| + \|u_n^-\|$, segue que

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq K(\|u_n^+\| + \|u_n^-\|) + K\|u_n^-\| + M.$$

Assim,

$$\|u_n^+\|\left(\frac{1}{2}\|u_n^+\| - K\right) \leq 2K\|u_n^-\| + M.$$

Isto significa que como $\|u_n^+\| \to \infty$ quando $n \to \infty$, então

$$\|u_n^-\| \to \infty \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.17}$$

Além disso, como $\|u_n\|^2 = \|u_n^+\|^2 + \|u_n^-\|^2$ podemos deduzir que

$$\|u_n\| \to \infty \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.18}$$

Agora, defina $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$. Como (v_n) é limitada em H_0^1, então existe uma subsequência (v_{n_j}) de (v_n) e $v \in H_0^1$ tais que $v_{n_j} \rightharpoonup v$ em H_0^1 e $v_{n_j} \to v$ q.t.p em Ω.

Sem perda de generalidade, podemos trocar (v_{n_j}) por (v_n), donde $v_n \rightharpoonup v$ em H_0^1 e $v_n \to v,$ q.t.p. em Ω.

Pelo teorema de Rellich Kondrachov (ver Apêndice, Teorema A.18), $v_n \to v$ em L^r, $1 \leq r < 2^*$ e $v_n \to v,$ q.t.p em Ω.

Por outro lado, segue de (2.16) e novamente pela desigualdade triangular $\|u_n\| = \|u_n^+ - u_n^-\| \leq \|u_n^+\| + \|u_n^-\|$, que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 &\leq K\|u_n\| + K\|u_n^-\| + M \\ &\leq K(\|u_n^+\| + \|u_n^-\|) + K\|u_n^-\| + M.\end{aligned}$$

Isto implica que

$$\frac{1}{2}\|u_n^+\|^2 \leq K\|u_n^+\| + 2K\|u_n^-\| + M.$$

Dividindo ambos os lados por $\|u_n^+\|^2$, segue

$$\frac{1}{2} \leq \frac{K}{\|u_n^+\|} + \frac{2K\|u_n^-\|}{\|u_n^+\|^2} + \frac{M}{\|u_n^+\|^2}. \tag{2.19}$$

Como $\|u_n^+\| \to \infty$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{K}{\|u_n^+\|} + \dfrac{M}{\|u_n^+\|^2} < \dfrac{1}{4},\ \forall\, n \geq n_0$. Assim, por (2.19), $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{2K\|u_n^-\|}{\|u_n^+\|^2} + \dfrac{1}{4}$, $\forall\, n \geq n_0$ e consequentemente

$$\frac{1}{8K} \leq \frac{\|u_n^-\|}{\|u_n^+\|^2},\ \forall\, n \geq n_0.$$

Tomando $\delta = \dfrac{1}{8K}$, observanos que

$$\|u_n^-\| \geq \delta\|u_n^+\|^2,\ \forall\, n \geq n_0. \tag{2.20}$$

Desse modo, elevando ambos os lados ao quadrado, segue que

$$\|u_n^-\|^2 \geq \delta^2\|u_n^+\|^4,\ \forall\, n \geq n_0.$$

Usando algumas manipulações algébricas, obtemos

$$(\|u_n^-\|^2 + \|u_n^+\|^2)^{\frac{1}{2}} \geq (\|u_n^+\|^2 + \delta^2\|u_n^+\|^4)^{\frac{1}{2}},\ \forall\, n \geq n_0.$$

Portanto, segue que $\dfrac{\|u_n^+\|}{(\|u_n^+\|^2+\delta^2\|u_n^+\|^4)^{\frac{1}{2}}} \geq \dfrac{\|u_n^+\|}{\|u_n\|}$, $\forall\, n \geq n_0$, ou seja

$$\frac{\|u_n^+\|}{(\|u_n^+\|^2+\delta^2\|u_n^+\|^4)^{\frac{1}{2}}} \geq \|v_n^+\| \geq 0,\ \forall\, n \geq n_0. \tag{2.21}$$

Como $0 \leq \dfrac{\|u_n^+\|}{(\|u_n^+\|^2+\delta^2\|u_n^+\|^4)^{\frac{1}{2}}} \leq \dfrac{1}{\delta\|u_n^+\|}$ e $\|u_n^+\| \to +\infty,$ então

$$\frac{\|u_n^+\|}{(\|u_n^+\|^2+\delta^2\|u_n^+\|^4)^{\frac{1}{2}}} \to 0,\ \text{quando } n \to \infty.$$

Assim, por (2.21), $v_n^+ \to 0$ em H_0^1, quando $n \to \infty$ e segue da desigualdade de Poincaré (consultar Apêndice, Teorema A.23), que

$$v_n^+ \to 0 \text{ em } L^2,\ \text{quando } n \to \infty. \tag{2.22}$$

Lembrando que $v_n \to v$ em L^2 e $v_n^+ = \max\{0, v_n\} = \dfrac{v_n + |v_n|}{2}$, então $v_n^+ \to v^+$ em L^2. Portanto decorre de (2.22) que, $v^+ = 0$ e como $v = v^+ - v^-$, segue que

$$v \leq 0. \tag{2.23}$$

Além disso, como $v_n^- = \dfrac{u_n^-}{\|u_n\|} = \dfrac{u_n^-}{(\|u_n^+\|^2+\|u_n^-\|^2)^{\frac{1}{2}}}$, obtemos

$$\|v_n^-\| = \frac{\|u_n^-\|}{(\|u_n^+\|^2+\|u_n^-\|^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\|u_n^-\|}{(\|u_n^-\|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Assim, podemos concluir que

$$\|v_n^-\| \leq 1. \tag{2.24}$$

Por (2.20), temos para $n \geq n_0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|u_n^-\| \geq \delta\|u_n^+\|^2.$$

Assim, somando $\delta\|u_n^-\|^2$ a ambos os lados obtemos,

$$(\|u_n^-\| + \delta\|u_n^-\|^2)^{\frac{1}{2}} \geq [\delta(\|u_n^+\|^2+\|u_n^-\|^2)]^{\frac{1}{2}}.$$

Por conseguinte

$$\frac{\|u_n^-\|}{(\|u_n^+\|^2+\|u_n^-\|^2))^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{\delta^{\frac{1}{2}}\|u_n^-\|}{(\|u_n^-\|+\delta\|u_n^-\|^2))^{\frac{1}{2}}}.$$

Logo, nós concluímos que

$$\|v_n^-\| \geq \frac{\delta^{\frac{1}{2}}\|u_n^-\|}{(\|u_n^-\|+\delta\|u_n^-\|^2))^{\frac{1}{2}}}.$$

Portanto, por (2.24), vale a seguinte estimativa para $\|v_n^-\|$:

$$1 \geq \|v_n^-\| \geq \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{\left(\dfrac{1}{\|u_n^-\|}+\delta\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Usando a estimativa acima, podemos deduzir de (2.17) que

$$\|v_n^-\| \to 1, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.25}$$

Por outro lado pela desigualdade obtida em (2.13), segue que

$$\epsilon_n \frac{1}{\|u_n^-\|} \geq \left| 1 + \lambda \frac{|u_n^-|_q^q}{\|u_n^-\|^2} - a\frac{|u_n^-|_2^2}{\|u_n^-\|^2} \right|.$$

Como $\epsilon_n \to 0$, (2.17) concluímos que

$$-\frac{\lambda |u_n^-|_q^q}{\|u_n^-\|^2} + \frac{a|u_n^-|_2^2}{\|u_n^-\|^2} \to 1, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.26}$$

Note agora que podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda |u_n^-|_q^q}{\|u_n^-\|^2} + \frac{a|u_n^-|_2^2}{\|u_n^-\|^2} &= -\frac{\lambda \|u_n\|^2}{\|u_n^-\|^2}\frac{|u_n^-|_q^q}{\|u_n\|^2} + \frac{a\|u_n\|^2}{\|u_n^-\|^2}\frac{|u_n^-|_2^2}{\|u_n\|^2} \\ &= -\frac{\lambda}{\|v_n^-\|^2}\frac{|u_n^-|_q^q}{\|u_n\|^2} + \frac{a}{\|v_n^-\|^2}|v_n^-|_2^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$-\frac{\lambda |u_n^-|_q^q}{\|u_n^-\|^2} + \frac{a|u_n^-|_2^2}{\|u_n^-\|^2} = \frac{1}{\|v_n^-\|^2}\left(-\lambda \frac{|u_n^-|_q^q}{\|u_n\|^2} + a|v_n^-|_2^2 \right). \tag{2.27}$$

Assim, como $v_n \to v$ em L^r para todo $1 \leq r < 2^*$ e $1 < q < 2$, então $v_n \to v$ em L^q. Logo, a sequência (v_n) é limitada em L^q e portanto (v_n^-) é limitada em L^q. Como $\|u_n\| \to \infty$, usando a limitação de (v_n^-) temos que

$$-\lambda \frac{|u_n^-|_q^q}{\|u_n\|^2} = \frac{-\lambda}{\|u_n\|^{2-q}} |v_n^-|_q^q \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Então, por (2.25), (2.26) e (2.27), podemos concluir que

$$a|v_n^-|_2^2 \to 1, \text{ quando } n \to \infty,$$

e assim,

$$|v_n^-|_2 \to \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}, \text{ quando } n \to \infty.$$

Além disso, como $|v_n|_2 = (|v_n^+|_2^2 + |v_n^-|_2^2)^{\frac{1}{2}}$, por (2.22), $|v_n|_2 \to \dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$, quando $n \to \infty$.

Agora, lembrando que como $v_n \to v$ em L^2, então $|v|_2 = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$, isto é,

$$v \neq 0. \tag{2.28}$$

Agora, tomando $h = \varphi_1$ em (2.11) obtemos,

$$\left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n \varphi_1 dx - a\int_\Omega u_n \varphi_1 dx - b\int_\Omega (u_n^+)^{p-1} \varphi_1 dx \right| \leq \epsilon_n \|\varphi_1\|.$$

Portanto, podemos reescrever a expressão acima da seguinte forma

$$\left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi_1 dx + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}}\int_\Omega \frac{|u_n|^{q-2}}{\|u_n\|^{q-2}} u_n\varphi_1 dx - a\int_\Omega u_n\varphi_1 dx - b\int_\Omega (u_n^+)^{p-1}\varphi_1 dx\right| \le \epsilon_n\|\varphi_1\|.$$

Dividindo ambos os lados por $\|u_n\|$ e lembrando que $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, resulta que

$$\left|\int_\Omega \nabla v_n \nabla \varphi_1 dx + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}}\int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n\varphi_1 dx - a\int_\Omega v_n\varphi_1 dx - \frac{b}{\|u_n\|}\int_\Omega (u_n^+)^{p-1}\varphi_1 dx\right| \le \frac{\epsilon_n\|\varphi_1\|}{\|u_n\|}.$$

Como φ_1 é autofunção associada ao autovalor λ_1, vemos que

$$\left|(\lambda_1 - a)\int_\Omega v_n\varphi_1 dx + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}}\int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n\varphi_1 dx - \frac{b}{\|u_n\|}\int_\Omega (u_n^+)^{p-1}\varphi_1 dx\right| \le \frac{\epsilon_n\|\varphi_1\|}{\|u_n\|}.$$

Usando o fato que $\epsilon_n \to 0$ e $\dfrac{1}{\|u_n\|} \to 0$, quando $n \to \infty$, temos

$$(\lambda_1 - a)\int_\Omega v_n\varphi_1 dx + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}}\int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n\varphi_1 dx - \frac{b}{\|u_n\|}\int_\Omega (u_n^+)^{p-1}\varphi_1 dx \to 0, \text{ quando } n \to \infty \tag{2.29}$$

Vamos mostrar que os dois últimos termos do limite acima tendem a zero, quando n tende ao infinito.

Afirmação 1) $\dfrac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}}\displaystyle\int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n\varphi_1 dx \to 0$, quando $n \to \infty$.

De fato, basta provar que $\displaystyle\int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n\varphi_1$ é limitada. Note que $\left|\displaystyle\int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n\varphi_1 dx\right| = \left|\displaystyle\int_{\overline{\Omega}} |v_n|^{q-2} v_n\varphi_1 dx\right| \le \displaystyle\int_{\overline{\Omega}} |\, v_n|^{q-1}|\varphi_1| dx.$

Além disso, como φ_1 é regular e $\overline{\Omega}$ é compacto, temos que existe $M > 0$ tal que $|\varphi_1(x)| \le M \ \forall\ x \in \overline{\Omega}$. Deste modo,

$$\left|\int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n\varphi_1 dx\right| = \left|\int_{\overline{\Omega}} |v_n|^{q-2} v_n\varphi_1 dx\right| \le M\int_{\overline{\Omega}} |v_n|^{q-1} dx.$$

Agora usando a desigualdade de Hölder (consultar, Apêndice Teorema A.19) na última integral, isto é, $\displaystyle\int_{\overline{\Omega}} |v_n|^{q-1} dx \le ||v_n|^{q-1}|_{\frac{1}{q-1}}.|1|_{\frac{1}{2-q}}$, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n\varphi_1 dx\right| &\le M||v_n|^{q-1}|_{\frac{1}{q-1}}|1|_{\frac{1}{2-q}} \\ &= M\left(\int_{\overline{\Omega}} |v_n| dx\right)^{q-1}[\text{med}(\overline{\Omega})]^{2-q}.\end{aligned}$$

Assim, a prova da afirmação segue-se de $v_n \to v$ em L^1 e $\overline{\Omega}$ é compacto.

Afirmação 2) $\dfrac{-b}{\|u_n\|}\displaystyle\int_\Omega (u_n^+)^{p-1}\varphi_1 dx \to 0$ quando $n \to \infty$.

De fato, de forma similar ao procedimento da afirmação 1), podemos obter que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{-b}{\|u_n\|}\int_\Omega (u_n^+)^{p-1}\varphi_1 dx\right| &= \left|\frac{-b}{\|u_n\|}\int_{\overline{\Omega}} (u_n^+)^{p-1}\varphi_1 dx\right| \\
&\leq \frac{b}{\|u_n\|}\int_{\overline{\Omega}} (u_n^+)^{p-1}\varphi_1 dx \\
&\leq \frac{Mb}{\|u_n\|}\int_{\overline{\Omega}} (u_n^+)^{p-1} dx.
\end{aligned}$$

Donde

$$\left|\frac{-b}{\|u_n\|}\int_\Omega (u_n^+)^{p-1}\varphi_1 dx\right| \leq \frac{Mb}{\|u_n\|}\int_{\overline{\Omega}} (u_n^+)^{p-1} dx. \tag{2.30}$$

Por outro lado, decorre de (2.12) que

$$\frac{1}{\|u_n\|^{\frac{p}{p-1}}}\int_{\overline{\Omega}} (u^+)^p dx \leq \frac{M}{\|u_n\|^{\frac{p}{p-1}}} + \frac{\epsilon_n\|u_n\|}{\|u_n\|^{\frac{p}{p-1}}}.$$

Logo, obtemos

$$\int_{\overline{\Omega}} \left[\frac{(u^+)^{p-1}}{\|u_n\|}\right]^{\frac{p}{p-1}} dx \leq \frac{M}{\|u_n\|^{\frac{p}{p-1}}} + \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Lembrando que $p > 2$ e $\|u_n\| \to \infty$ pois, por (2.18), se conclui que $\dfrac{(u_n^+)^{p-1}}{\|u_n\|} \to 0$ em $L^{\frac{p}{p-1}}$ quando $n \to \infty$. Daí, como $1 < \dfrac{p}{p-1}$ e $\overline{\Omega}$ é um domínio limitado, então $L^{\frac{p}{p-1}} \hookrightarrow L^1$, isto é, $\dfrac{(u_n^+)^{p-1}}{\|u_n\|} \to 0$ em L^1, quando $n \to \infty$. e isto é equivalente a dezir que

$$\frac{1}{\|u_n\|}\int_{\overline{\Omega}} (u_n^+)^{p-1} dx \to 0, \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Agora, como em (2.30), M e b são constantes positivas, podemos concluir que

$$\frac{-b}{\|u_n\|}\int_\Omega (u_n^+)^{p-1}\varphi_1 dx \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Agora, mostraremos que o limite fraco v da sequência (v_n) é nulo.

De fato, por (2.29), pelas afirmações 1), 2) e como $v_n \to v$ em L^2, podemos deduzir que

$$(\lambda_1 - a)\int_\Omega v\varphi_1 dx = 0.$$

Pela hipótese $\lambda_1 < a$, segue que $\int_\Omega (-v)\varphi_1 dx = 0$. Assim, $-v\varphi_1 = 0$ q.t.p em Ω pois, por (2.23), $-v \geq 0$.

Usando o fato que $\varphi_1 > 0$ é autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1, obtemos $v = 0$ q.t.p. em Ω, o que é um absurdo, pois por (2.28), $v \neq 0$. Portanto (u_n^+) é, de fato, limitada.

Voltando ao nosso objetivo, agora mostraremos que a sucessão (u_n) é limitada em H_0^1. Suponha por absurdo que $\|u_n\| \to \infty$, Como $H_0^1 \hookrightarrow L^p$ para $2 < p \leq 2^*$, existe $k > 0$ tal que $|u_n^+|_p \leq k\|u_n^+\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $|u_n^+|_p \leq Ck$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois como foi provado acima (u_n^+) é limitada em H_0^1. Isto significa que $\int_\Omega (u_n^+)^p dx < \infty$, portanto

$$\frac{1}{\|u_n\|}\int_\Omega (u_n^+)^p dx \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.31}$$

Por outro lado, tomando $h = v_n$ em (2.11), obtemos

$$\left|\int_\Omega \nabla u_n \nabla v_n dx + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n v_n dx - a\int_\Omega u_n v_n dx - b\int_\Omega (u_n^+)^{p-1} v_n dx\right| \leq \epsilon_n.$$

Pela definição de $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, dividindo a desigualdade acima por $\|u_n\|$, segue que

$$\left|\frac{\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx}{\|u_n\|^2} + \frac{\lambda}{\|u_n\|}\int_\Omega |u_n|^{q-2}\frac{u_n^2}{\|u_n\|}dx - a\int_\Omega \frac{u_n^2}{\|u_n\|^2}dx - \frac{b}{\|u_n\|^2}\int_\Omega (u_n^+)^p dx\right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|}.$$

Assim,

$$\left|1 + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}}\int_\Omega \frac{|u_n|^q}{\|u_n\|^q}dx - a\int_\Omega v_n^2 dx - \frac{b}{\|u_n\|^2}\int_\Omega (u_n^+)^p dx\right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|},$$

e consequentemente

$$\left|1 + \frac{\lambda}{\|u_n\|^{2-q}}|v_n|_q^q - a|v_n|_2^2 - \frac{b}{\|u_n\|^2}\int_\Omega (u_n^+)^p dx\right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|}.$$

Sabemos que (v_n) é limitada em L^q para $1 < q < 2$ e $\|u_n\| \to \infty$, quando $n \to \infty$, assim por (2.31) e pela estimativa acima, decorre que

$$a|v_n|_2^2 \to 1, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.32}$$

Agora, lembrando que $v_n \to v$ em L^r, para todo $1 \leq r < 2^*$; em particular, $v_n \to v$ em L^2, usando (2.32), obtemos que

$$v \neq 0. \tag{2.33}$$

Note que em (2.28), mostramos também que $v \neq 0$, mas neste caso estamos com hipóteses distintas do caso em que provamos que $v \neq 0$ em (2.33).

Mostraremos agora que $v \leq 0$.

De fato, como $v_n^+ = \dfrac{u_n^+}{\|u_n\|}$ e (u_n^+) é limitada em H_0^1, podemos afirmar que $v_n^+ \to 0$ em H_0^1, quando $n \to \infty$ e segue da desigualade de Poincaré (consultar Apêndice, Teorema A.23) que $v_n^+ \to 0$ em L^2, quando $n \to \infty$. Da desigualdade $v_n = v_n^+ - v_n^- \leq v_n^+$ resulta que

$$v \leq 0. \tag{2.34}$$

Por outro lado, o resultado obtido em (2.11) nos dá que cada $h \in H_0^1$ verifica a estimativa

$$\left| \int_\Omega \nabla u_n \nabla h dx + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n h dx - a \int_\Omega u_n h dx - b \int_\Omega (u_n^+)^{p-1} h dx \right| \leq \epsilon_n \|h\|.$$

Dividindo esta desigualdade por $\|u_n\|$ segue que

$$\left| \int_\Omega \frac{\nabla u_n}{\|u_n\|} \nabla h dx + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} \frac{u_n}{\|u_n\|} h dx - a \int_\Omega \frac{u_n}{\|u_n\|} h dx - b \int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p-1}}{\|u_n\|} h dx \right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|} \|h\|.$$

Agora, usando a definição de $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, obtemos

$$\left| \int_\Omega \nabla v_n \nabla h dx + \frac{\lambda}{\|u\|^{2-q}} \int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n h dx - a \int_\Omega v_n h dx - b \int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p-1}}{\|u_n\|} h dx \right| \leq \frac{\epsilon_n}{\|u_n\|} \|h\|. \tag{2.35}$$

Repetindo os mesmos argumentos feitos nas afirmações 1) e 2), temos $\dfrac{\lambda}{\|u\|^{2-q}} \displaystyle\int_\Omega |v_n|^{q-2} v_n h dx \to 0$ e $b \displaystyle\int_\Omega \frac{(u_n^+)^{p-1}}{\|u_n\|} h dx \to 0$ quando $n \to \infty$, para todo $h \in H_0^1$. Portanto, por (2.35)

$$\int_\Omega \nabla v \nabla h dx = a \int_\Omega v h dx, \text{ para todo } h \in H_0^1.$$

Agora, tomando $h = \varphi_1$, integrando por partes e usando que φ_1 é autofunção associada ao autovalor λ_1, obtemos

$$(\lambda_1 - a) \int v \varphi_1 dx = 0.$$

Pela hipótese, $\lambda_1 < a$ e por (2.34), conclui-se $-v\varphi_1 = 0$ q.t.p. em Ω. Assim usando o fato que $\varphi_1 > 0$ em Ω, podemos deduzir que $v = 0$ q.t.p. em Ω, o que é um absurdo, pois por (2.33) $v \neq 0$. Portanto a sequência (u_n) é limitada.

□

O próximo resultado pode ser encontrado em [6].

Proposição 2.1 *Seja $\Phi : H_0^1 \to \mathbb{R}$ um funcional definida por*

$$\Phi(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega G(x, u) dx,$$

onde $G(x, s) = \displaystyle\int_0^s g(t, s) dt$ e g satisfaça a condição de crescimento $|g(x, s)| \leq C(1 + |s|^\sigma)$, para algum $\sigma \leq p^* - 1$ e alguma constante C. Seja $u_0 \in H_0^1$ um mínimo local de Φ na topologia C^1, isto é, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + w)$, $\forall \ \|w\|_{C^1} \leq \epsilon_0$. Então u_0 é um mínimo local de Φ na topologia H_0^1, isto é, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + w)$, $\forall \ \|w\|_{H_0^1} \leq \epsilon_1$.

2.3 ESTUDO DA PARTE POSITIVA DO FUNCIONAL

Nesta seção, definiremos a parte positiva do funcional I_λ para encontrarmos soluções positivas para o problema envolvendo o expoente subcrítico, como também, para o problema crítico.

Considere o funcional:

$$I_\lambda^+ : H_0^1 \to \mathbb{R}$$
$$I_\lambda^+(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega (u^+)^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega (u^+)^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u^+)^p dx.$$

Pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, o funcional I_λ^+ é de classe $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ e

$$\langle (I_\lambda^+)'(u), h\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla h dx + \lambda \int_\Omega |u^+|^{q-1} h dx - a\int_\Omega u^+ h dx - b\int_\Omega (u^+)^{p-1} h dx, \ \forall\, u, h \in H_0^1.$$

Note que, encontrar um ponto crítico para o funcional I_λ^+ equivale a encontrar uma função $u \in H_0^1$ que satisfaz a equação:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \lambda \int_\Omega (u^+)^{q-1}\varphi dx - a\int_\Omega u^+ \varphi dx - b\int_\Omega (u^+)^{p-1}\varphi dx = 0, \ \forall\, \varphi \in H_0^1,$$

ou seja, a obter uma solução fraca para a equação :

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda |u^+|^{q-1} + au^+ + b(u^+)^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.36}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $N \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2 < p \leq 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Se u é um ponto crítico de I_λ^+, então $\langle (I_\lambda^+)'(u), h\rangle = 0$, $\forall\, h \in H_0^1$, em particular para $h = u^-$, assim

$$0 = \langle (I_\lambda^+)'(u), u^-\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla (u^-) dx = -\int_\Omega \nabla(u^-)\nabla(u^-) dx = -\|u^-\|$$

e consequentemente, $u^- = 0$. Portanto, o ponto crítico u de I_λ^+ satisfaz $u = u^+ \geq 0$, ou seja, é uma função positiva de H_0^1.

Lema 2.3 *Sejam $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ e $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, então a solução trivial $u = 0$ é um minimizador local para I_λ^+, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Pela Proposição 2.1, basta mostrar que $u = 0$ é um mínimo local de I_λ^+ na topologia C^1. Seja $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$, assim,

$$I_\lambda^+(u) \geq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |u^+|^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega |u^+|^p dx. \tag{2.37}$$

Usando $\|u\|_{C^1} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_0$, $\forall\, u \in C^1(\overline{\Omega})$, onde $\|u\|_0 = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$, $\forall\, u \in C(\overline{\Omega})$, como $0 \leq u^+ \leq |u| \leq \|u\|_{C^1}$ e $1 < q < 2 < p \leq 2^*$ resulta que $(u^+)^{2-q} \leq \|u\|_{C^1}^{2-q}$ e consequentemente

$$\int_\Omega |u^+|^2 dx \leq \|u\|_{C^1}^{2-q}\int_\Omega |u^+|^q dx.$$

Desta última desigualdade e do fato que $a > 0$, podemos concluir que

$$-\frac{a}{2}\int_\Omega (u^+)^2 dx \geq -\frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q}\int_\Omega |u^+|^q dx. \tag{2.38}$$

Analogamente, obtemos

$$-\frac{b}{p}\int_\Omega (u^+)^p dx \geq -\frac{b}{p}\|u\|_{C^1}^{p-q}\int_\Omega |u^+|^q dx. \tag{2.39}$$

De (2.37), (2.38) e (2.39), segue-se

$$\begin{aligned} I_\lambda^+(u) &\geq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^+|^q dx - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q}\int_\Omega |u^+|^q dx - \frac{b}{p}\|u\|_{C^1}^{p-q}\int_\Omega |u^+|^q dx \\ &= \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} - \frac{b}{p}\|u\|_{C^1}^{p-q}\right)\int_\Omega |u^+|^q dx \end{aligned}$$

e portanto,

$$I_\lambda^+(u) \geq \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} - \frac{b}{p}\|u\|_{C^1}^{p-q}\right)\int_\Omega |u^+|^q dx. \tag{2.40}$$

Agora, seja $R = \min\left\{\left(\frac{2\lambda}{q(a+b)}\right)^{\frac{1}{2-q}}, \left(\frac{p\lambda}{q(a+b)}\right)^{\frac{1}{p-q}}\right\}$.

Se $\|u\|_{C^1} < R$, então $\|u\|_{C^1} < \left(\frac{2\lambda}{q(a+b)}\right)^{\frac{1}{2-q}}$ e $\|u\|_{C^1} < \left(\frac{p\lambda}{q(a+b)}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ e consequentemente

$$\frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} < \frac{a\lambda}{q(a+b)} \quad \text{e} \quad \frac{b}{p}\|u\|_{C^1}^{p-q} < \frac{b\lambda}{q(a+b)}.$$

Somando estas útimas desigualdades, temos $\frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} + \frac{b}{p}\|u\|_{C^1}^{p-q} < \frac{\lambda}{q}$, ou seja :

$$\frac{\lambda}{q} - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} - \frac{b}{p}\|u\|_{C^1}^{p-q} > 0,\ \forall\ \|u\|_{C^1} < R. \tag{2.41}$$

Finalmente (2.40) e (2.41) implicam que

$$I_\lambda^+(u) \geq 0 = I_\lambda^+(0),\ \forall\ \|u\|_{C^1} < R$$

e assim, concluímos que $u = 0$ é um mínimo local de I_λ^+ na topologia C^1.

□

O seguinte lema será utilizado para provar uma das condições geométricas exigidas pelo Teorema do Passo da Montanha.

Lema 2.4 *Sejam $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, e $b > 0$, então existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$I_\lambda^+(t_0\varphi_1) < 0,$$

para todo λ em um conjunto limitado.

Demonstração: Para $t > 0$, segue que :

$$\begin{aligned} I_\lambda^+(t\varphi_1) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(t\varphi_1)|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega [(t\varphi_1)^+]^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega [(t\varphi_1)^+]^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega ((t\varphi_1)^+)^p dx \\ &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 dx + \frac{t^q\lambda}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx - \frac{at^2}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx - \frac{bt^p}{p}\int_\Omega \varphi_1^p dx. \end{aligned}$$

Lembrando que φ_1 é a autofunção positiva associado ao λ_1, obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda^+(t\varphi_1) &= \frac{\lambda_1 t^2}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx + \frac{t^q\lambda}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx - \frac{at^2}{2}\int_\Omega t\varphi_1^2 dx - \frac{bt^p}{p}\int_\Omega \varphi_1^p dx \\ &= \frac{t^2}{2}(\lambda_1 - a)\int_\Omega \varphi_1^2 dx + \frac{t^q\lambda}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx - \frac{bt^p}{p}\int_\Omega \varphi_1^p dx. \end{aligned}$$

Como $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, concluímos que :

$$I_\lambda^+(t\varphi_1) \leq \frac{t^q\lambda}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx - \frac{bt^p}{p}\int_\Omega \varphi_1^p dx. \tag{2.42}$$

Agora, segue dos fatos $t > 0$, $1 < q < 2 < p$, $b > 0$ e $\varphi_1 > 0$ em Ω que

$$\frac{qb}{p} t^{p-q} \frac{\displaystyle\int_\Omega \varphi_1^p dx}{\displaystyle\int_\Omega \varphi_1^q dx} > 0.$$

Logo, se $\lambda \in \left(0, \dfrac{qb}{p} t^{p-q} \dfrac{\displaystyle\int_\Omega \varphi_1^p dx}{\displaystyle\int_\Omega \varphi_1^q dx}\right)$, nós temos que $\dfrac{t^q\lambda}{q}\displaystyle\int_\Omega \varphi_1^q dx - \dfrac{bt^p}{p}\int_\Omega \varphi_1^p dx < 0$.
Desta última desigualdade e por (2.42), segue

$$I_\lambda^+(t\varphi_1) < 0 \text{ para todo } t > 0.$$

Como $t > 0$ é arbitrário, podemos escolher um $t_0 > 0$ tal que

$$I_\lambda^+(t_0\varphi_1) < 0, \ \forall\, \lambda \in \left(0, \frac{qb}{p} t_0^{p-q} \frac{\displaystyle\int_\Omega \varphi_1^p dx}{\displaystyle\int_\Omega \varphi_1^q dx}\right).$$

$\square$

2.4 ESTUDO DA PARTE NEGATIVA DO FUNCIONAL

Nesta seção, definiremos a parte negativa do funcional I_λ com o objetivo de encontrar soluções negativas para o problema (2.1). A técnica aqui não depende da criticalidade da não linearidade.
Assim, considere o funcional dado por :

$$I_\lambda^- : H_0^1 \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda^-(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega (u^-)^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega (u^-)^2 dx.$$

Analogamente ao que fizemos anteriormente, segue que I_λ^- é de classe $C^1(H_0^1, \mathbb{R})$ e

$$\langle (I_\lambda^-)'(u), h\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla h dx + \lambda \int_\Omega |u^-|^{q-1} h dx - a\int_\Omega u^- h dx, \ \forall\, u, h \in H_0^1.$$

Lembremos que encontrar um ponto crítico para o funcional I_λ^- equivale a encontrar uma função $u \in H_0^1$ que satisfaz a equação :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \lambda \int_\Omega (u^-)^{q-1}\varphi dx - a\int_\Omega u^-\varphi dx = 0, \ \forall\, \varphi \in H_0^1,$$

ou seja, é obter uma solução fraca para a equação :

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda |u^-|^{q-1} + a u^- & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.43}$$

onde, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $N \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2 < p \leq 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$.
Assim, se u é um ponto crítico de I_λ^-, então $\langle (I_\lambda^-)'(u), h\rangle = 0, \ \forall\, h \in H_0^1$.
Tomando $h = u^+$, temos

$$0 = \langle (I_\lambda^-)'(u), u^+\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla (u^+) = \int_\Omega \nabla(u^+)\nabla(u^+) = \|u^+\| \quad \text{e}$$

consequentemente $u^+ = 0$.
Portanto, um ponto crítico u de I_λ^- satisfaz $u = -u^- \leq 0$.

Lema 2.5 *Sejam $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ e $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, então a solução trivial $u = 0$ é um minimizador local para I_λ^-, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Analogamente ao Lema 2.3, basta mostrar que $u = 0$ é um mínimo local de I_λ^- na topologia C^1, pois será também um mínimo local na topologia H_0^1. (ver Proposição 2.1).
Seja então $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$, assim

$$\begin{aligned} I_\lambda^-(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega (u^-)^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega (u^-)^2 dx \\ &\geq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |u^-|^2 dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$I_\lambda^-(u) \geq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |u^-|^2 dx. \tag{2.44}$$

Como $0 \leq u^- \leq |u| \leq \|u\|_{C^1}$ e $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, resulta

$$(u^-)^{2-q} \leq \|u\|_{C^1}^{2-q}.$$

Portanto, segue que

$$|u^-|^2 \leq \|u\|_{C^1}^{2-q}|u^-|^q.$$

Usando a última desigualdade e o fato que $a > 0$ podemos concluir que

$$-\frac{a}{2}\int_\Omega |u^-|^2 dx \geq -\frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q}\int_\Omega |u^-|^q dx. \tag{2.45}$$

Agora, de (2.44) e (2.45), obtemos

$$I_\lambda^-(u) \geq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u^-|^q dx - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q}\int_\Omega |u^-|^q dx$$

Portanto, segue que

$$I_\lambda^-(u) \geq \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q}\right)\int_\Omega |u^-|^q dx. \tag{2.46}$$

Agora seja $R = \left(\frac{2\lambda}{aq}\right)^{\frac{1}{2-q}}$, assim se $\|u\|_{C^1} < R$, então $\frac{\lambda}{q} - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} > 0$ e segue a seguinte afirmação:

$$\frac{\lambda}{q} - \frac{a}{2}\|u\|_{C^1}^{2-q} > 0, \ \forall \ \|u\|_{C^1} < R. \tag{2.47}$$

Finalmente, (2.46), (2.47) implicam que

$$I_\lambda^-(u) \geq 0 = I_\lambda^-(0), \ \forall \ \|u\|_{C^1} < R,$$

provando assim, que $u = 0$ é um mínimo local de I_λ^- na topologia C^1.

□

Agora, mostraremos um resultado análogo ao Lema 2.4 que também será utilizado para mostrar que o funcional I_λ^- satisfaz a segunda condição da geometria do Teorema do Passo da Montanha.

Lema 2.6 *Sejam $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ e $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, então existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$I_\lambda^-(-t_0\varphi_1) < 0,$$

para todo λ em um conjunto limitado.

Demonstração: Para $t > 0$, nós temos:

$$\begin{aligned} I_\lambda^-(-t\varphi_1) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(-t\varphi_1)|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega [(-t\varphi_1)^-]^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega [(-t\varphi_1)^-]^2. \\ &= \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_1|^2 dx + \frac{t^q\lambda}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx - \frac{at^2}{2}\int_\Omega (\varphi_1)^2 dx. \end{aligned}$$

Lembrando que φ_1 é a autofunção positiva associada ao λ_1, obtemos:

$$\begin{aligned} I_\lambda^-(-t\varphi_1) &= \frac{\lambda_1 t^2}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx + \frac{t^q\lambda}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx - \frac{at^2}{2}\int_\Omega (\varphi_1)^2 dx \\ &= \frac{t^2}{2}(\lambda_1 - a)\int_\Omega \varphi_1^2 dx + \frac{t^q\lambda}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$I_\lambda^-(-t\varphi_1) = \frac{t^2}{2}(\lambda_1 - a)|\varphi_1|_2^2 + \frac{t^q\lambda}{q}|\varphi_1|_q^q. \tag{2.48}$$

Pelas condições $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, $1 < q < 2 < p$ e $\varphi_1 > 0$ em Ω, podemos deduzir que

$$\frac{\frac{t^{2-q}}{2}q(a-\lambda_1)|\varphi_1|_2^2}{|\varphi_1|_q^q} > 0.$$

Em conclusão, se $\lambda \in \left(0, \frac{\frac{t^{2-q}}{2}q(a-\lambda_1)|\varphi_1|_2^2}{|\varphi_1|_q^q}\right)$, nota-se que $\frac{t^2}{2}(\lambda_1 - a)|\varphi_1|_2^2 + \frac{t^q\lambda}{q}|\varphi_1|_q^q < 0$ e consequentemente, por (2.48), temos

$$I_\lambda^-(-t\varphi_1) < 0, \text{ para } t > 0.$$

Como $t > 0$ é arbitrário, podemos escolher um $t_0 > 0$ tal que

$$I_\lambda^-(-t_0\varphi_1) < 0, \ \forall\, \lambda \in \left(0, \frac{\frac{t_0^{2-q}}{2}q(a-\lambda_1)|\varphi_1|_2^2}{|\varphi_1|_q^q}\right),$$

finalizando a prova do lema.

□

2.5 A DECOMPOSIÇÃO DO ESPAÇO H_0^1

Nesta seção, faremos uma escolha de uma decomposição do espaço H_0^1 que será utilizada tanto no caso subcrítico, quanto no caso crítico.

Assim, tomando $k \in \mathbb{N}$ fixo seja $E = H_0^1 = V_k \oplus W_k$, onde $V_k =< \varphi_1, \ldots, \varphi_k >$ é o espaço gerado pelas autofunções correspondentes aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, e $W_k = V_k^\perp$. Apesar da decomposição acima ser natural, tal decomposição torna-se difícil o trabalho de estimar o funcional I_λ aplicado em termos como $u+v$, com $u \in V_k$ e $v \in W_k$, principalmente quando necessitamos provar as condições Geométricas do Teorema do Passo da Montanha Generalizado (Linking) no caso em que o problema envolve o expoente crítico.

Assim, utilizaremos uma "nova" decomposição do espaço H_0^1 (ver [19]), para isso, necessitamos definir alguns conceitos como segue :

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $0 \in \Omega$, e tome $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de forma que $B_{\frac{2}{m}} \subset \Omega$, onde B_r denota a bola de raio r com centro na origem.

Consideramos também as funções

$$\xi_m : \Omega \to \mathbb{R}$$

definidas por

$$\xi_m = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \in B_{\frac{1}{m}} \\ m|x| - 1, & \text{se} \quad x \in A_m = B_{\frac{2}{m}} \backslash B_{\frac{1}{m}} \\ 1, & \text{se} \quad x \in \Omega \backslash B_{\frac{2}{m}}. \end{cases}$$

Definimos então, as seguintes autofunções aproximadas

$$\varphi_i^m = \xi_m \varphi_i, \quad \text{para } i = 1, \ldots, k$$

e o espaço gerado por elas, isto é, $V_k^m =< \xi_m\varphi_1, \cdots, \xi_m\varphi_k >$. Além disso, defina $W_k^m = (V_k^m)^{\perp}$ e $\varphi_{k+1}^m = \eta\varphi_{k+1}$, onde $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{m}}, \mathbb{R})$ é uma função cut-off tal que $0 \leq \eta \leq 1$ em $\mathbb{R}^N$, $\eta = 1$ em $B_{\frac{1}{2m}}$ e $\eta = 0$ em $\mathbb{R}^N - B_{\frac{1}{m}}$.

O que foi feito acima, foi criar "buracos" nas autofunções $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ obtendo aproximações cujos suportes se separam do suporte da função φ_{k+1}^m.

De fato, note que para cada $u \in V_k^m$,

$$supp\, u \cap supp\, \varphi_{k+1}^m = \phi; \ \forall\, u \in V_k^m. \tag{2.49}$$

Este fato é facilmente deduzido, notando que $supp\, u \subseteq supp\ \xi_m$ e como $supp\ \varphi_{k+1}^m = supp\ (\eta\varphi_{k+1}) \subseteq supp\ \eta \cap supp\ \varphi_{k+1}$, isto implica que $supp\ \varphi_{k+1}^m \subseteq supp\ \eta$, temos que (2.49) é satisfeita, notando que $supp\ \xi_m \cap supp\ \eta = \phi$.

A demonstraçao do próximo Lema pode ser feita seguindo passos inteiramente análogos áqueles encontrados em [19]. O Lema nos garante que podemos decompor o espaço $E = H_0^1$ da seguinte forma

$$H_0^1 = V_k^m \oplus W_k \ \text{ para } m \text{ suficientemente grande.}$$

Lema 2.7 *Se $m \to \infty$, temos $\varphi_i^m \to \varphi_i$ em H_0^1, para $i = 1, \ldots k$ Além disso temos*

$$\max_{\{u \in V_k^m \,/\, \int_\Omega u^2 dx = 1\}} \|u\|^2 \leq \lambda_k + C_k m^{2-N}.$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} \|\varphi_i^m - \varphi_i\|^2 &= \int_\Omega |\nabla(\varphi_i^m - \varphi_i)|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\nabla(\xi_m\varphi_i - \varphi_i)|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\xi_m \nabla\varphi_i + \varphi_i \nabla\xi_m - \nabla\varphi_i|^2 dx \\ &= \int_\Omega |\varphi_i \nabla\xi_m + (\xi_m - 1)\nabla\varphi_i|^2 dx. \end{aligned}$$

Logo

$$\|\varphi_i^m - \varphi_i\|^2 = \int_\Omega |\varphi_i|^2|\nabla\xi_m|^2 dx + 2\int_\Omega \varphi_i(\xi_m - 1)\nabla\xi_m\nabla\varphi_i dx + \int_\Omega (\xi_m - 1)^2|\nabla\varphi_i|^2 dx$$

Agora pela definição de ξ_m, obtemos que

$$\|\varphi_i^m - \varphi_i\|^2 = \int_{A_m} |\varphi_i|^2|\nabla\xi_m|^2 dx + 2\int_{A_m} \varphi_i(\xi_m - 1)\nabla\xi_m\nabla\varphi_i dx + \int_{B_{\frac{2}{m}}} (\xi_m - 1)^2|\nabla\varphi_i|^2 dx$$

Portanto,

$$\|\varphi_i^m - \varphi_i\|^2 \leq \int_{A_m} |\varphi_i|^2|\nabla\xi_m|^2 dx + 2\int_{A_m} |\varphi_i||\xi_m - 1||\nabla\xi_m||\nabla\varphi_i| dx + \int_{B_{\frac{2}{m}}} (\xi_m - 1)^2|\nabla\varphi_i|^2 dx. \tag{2.50}$$

Mostraremos que cada integral do lado direito tende a zero quando $m \to \infty$.

1) Primeiro vamos mostrar que $\displaystyle\int_{A_m} |\varphi_i|^2|\nabla\xi_m|^2 dx \to 0.$ quando $m \to \infty$.

De fato, em A_m temos que $|\nabla\xi_m| = m$ e como φ_i é contínua em $\overline{B}_{\frac{2}{m}}$, φ_i é limitada em $\overline{B}_{\frac{2}{m}}$, assim

$$\begin{aligned}
\int_{A_m} |\varphi_i|^2|\nabla\xi_m|^2 dx &\leq C_1 m^2 \int_{A_m} 1 dx \\
&= C_1 m^2 med(A_m) \\
&= C_1 m^2 \left(vol\ B_{\frac{2}{m}} - vol\ B_{\frac{1}{m}}\right) \\
&= C_1 m^2 \left(C\left(\frac{2}{m}\right)^N - C\left(\frac{1}{m}\right)^N\right) \\
&\leq C_1 m^2 C\left(\frac{2}{m}\right)^N \\
&= \frac{C_2 2^N}{m^{N-2}} \qquad \text{onde } C_2 = C_1 C.
\end{aligned}$$

Note da última igualdade que, como $N > 2$ obtemos que

$$\int_{A_m} |\varphi_i|^2|\nabla\xi_m|^2 dx \to 0 \text{ quando } m \to \infty.$$

2) Da mesma forma, mostraremos que $\displaystyle\int_{A_m} \varphi_i(\xi_m - 1)\nabla\xi_m\nabla\varphi_i dx \to 0$ quando $m \to \infty$.

De fato, como em A_m temos $|\nabla\xi_m| = m$ e $|\xi_m(x) - 1| \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{A_m} |\varphi_i||\xi_m - 1||\nabla\xi_m||\nabla\varphi_i| dx &\leq m\int_{A_m} |\varphi_i||\nabla\varphi_i| dx \\
&\leq mC\int_{A_m} 1 dx \\
&= mC med(A_m) \\
&= mC\left(\frac{2}{m}\right)^N \\
&= \frac{C2^N}{m^{N-1}}.
\end{aligned}$$

Portanto, o mesmo raciocínio usada na afirmação anterior, garante que

$$\int_{A_m} \varphi_i(\xi_m - 1)\nabla\xi_m \nabla\varphi_i dx \to 0.$$

3) Finalmente, vamos mostrar que $\int_{B_{\frac{2}{m}}} (\xi_m - 1)^2 |\nabla\varphi_i|^2 dx \to 0.$

De fato, como $(\xi_m - 1)^2 \leq 1$ e $|\nabla\varphi_i|$ é limitada em $\overline{B}_{\frac{2}{m}}$ temos que

$$\int_{B_{\frac{2}{m}}} (\xi_m - 1)^2 |\nabla\varphi_i|^2 dx \leq C \int_{\overline{B}_{\frac{2}{m}}} 1dx = Cvol\ \overline{B}_{\frac{2}{m}} = C_1 \left(\frac{2}{m}\right)^N = \frac{2^N C_1}{m^N} \to 0.$$

Logo, substituindo 1), 2) e 3) em (2.50) obtemos que $\|\varphi_i^m - \varphi_i\|^2 \to 0$, isto é,

$$\varphi_i^m \to \varphi_i \text{ em } H_0^1 \text{ quando } m \to \infty.$$

Agora, mostraremos que $\max\limits_{\{u \in V_k^m \,/\, \int_\Omega u^2 dx = 1\}} \|u\|^2 \leq \lambda_k + C_k m^{2-N}$.

Para cada $v \in \{u \in V_k \,/\, \int_\Omega u^2 dx = 1\}$ seja $a_m := |v_m|_2^{-1}$. Primeiro provamos que

$$1 \leq a_m(v) \leq 1 + C\|v\|_\infty^2 m^{-n}; \text{ onde } C \text{ é uma constante positiva,}$$

isto segue de

$$1 = \int_\Omega a_m^2(v) v_m^2 = a_m^2(v)(1 - \int_{B_{\frac{2}{m}}} v^2 + \int_{A_m} \xi_m^2 v^2) \quad \text{e}$$

$$a_m^2(v)(1 - C\|v\|_\infty^2 m^{-n}) \leq a_m^2(v)(1 - \int_{B_{\frac{2}{m}}} v^2 + \int_{A_m} \xi_m^2 v^2) \leq a_m^2(v).$$

Agora, seja $\overline{u}_m \in \{u \in V_k^m / \int_\Omega u^2 dx = 1\}$ tal que $\max\limits_{\{u \in V_k^m / \int_\Omega u^2 dx = 1\}} \|u\|^2 = \|\overline{u}_m\|^2$. Então

$$\overline{u}_m = a_m(\overline{u}) \sum_{i=1}^k \overline{\alpha}_i \varphi_i^m = a_m(\overline{u}) \xi_m \sum_{i=1}^k \overline{\alpha}_i \varphi_i = a_m(\overline{u}) \xi_m \overline{u},$$

e consequentemente, argumentando como em (2.50),

$$\begin{aligned}
\|\overline{u}_m\|^2 &= a_m^2(\overline{u}) \int_\Omega |\nabla(\xi_m \overline{u})|^2 \\
&\leq (1 + C\|\overline{u}\|_\infty^2 m^{-n}) \int_\Omega |\overline{u}\nabla\xi_m + \xi_m \nabla\overline{u}|^2 dx \\
&\leq (1 + C\|\overline{u}\|_\infty^2 m^{-n})(C\|\overline{u}\|_\infty^2 m^{2-n} + C\|\nabla\overline{u}\|_\infty \|\overline{u}\|_\infty m^{1-n} + \|\overline{u}\|^2) \\
&\leq C\|\overline{u}\|_\infty^2 m^{2-n} + C\|\nabla\overline{u}\|_\infty \|\overline{u}\|_\infty m^{1-n} + \lambda_k \\
&\leq C_k m^{2-n} + \lambda_k.
\end{aligned}$$

□

Uma consequência deste resultado é a seguinte decomposição do espaço H_0^1.

Corolário 2.1 *Para m suficientemente grande temos, $V_k^m \oplus W_k = H_0^1$.*

Demonstração: Pelo Lema 2.7, temos que $\varphi_i^m \to \varphi_i$ em H_0^1 para $i = 1 \ldots, k$ e assim $P(\varphi_i^m) \to P(\varphi_i) = \varphi_i$ quando $m \to \infty$, onde $P : H_0^1 \to V_k$ é a projeção de H_0^1 sobre V_k. Dessa maneira, obtemos que $P(V_k^m) \subseteq P(H_0^1) = V_k$ e então basta mostrar que, para m suficientemente grande, obtemos $P(V_k^m) = V_k$. Para isto, basta provar que $\{P(\varphi_i^m)\}_{i=1}^k$ é um conjunto linearmente independente quando m é grande.

Suponhamos que isto não ocorre, ou seja, que existe $(\alpha_1^m, \ldots, \alpha_k^m) \neq (0, \ldots, 0)$ tal que

$$\alpha_1^m P(\varphi_1^m) + \ldots + \alpha_k^m P(\varphi_k^m) = 0.$$

Normalizando $(\alpha_1^m, \ldots, \alpha_k^m) \neq (0, \ldots, 0)$, podemos supor que $(\alpha_1^m)^2 + \ldots + (\alpha_k^m)^2 = 1$ e assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, obtemos que existe uma subsequência $(\alpha_1^{m_j}, \ldots, \alpha_k^{m_j})$ convergente para $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Logo,

$$0 = \alpha_1^{m_j} P(\varphi_1^{m_j}) + \ldots + \alpha_k^{m_j} P(\varphi_k^{m_j}) \to \alpha_1 P(\varphi_1) + \ldots + \alpha_k P(\varphi_k) = \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_k\varphi_k,$$

quando $m \to \infty$, isto é, $\alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_k\varphi_k = 0$ com $\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_k^2 = 1$, contradizendo o fato que $\{\varphi_i\}_{i=1}^k$ é uma base de V_k. Portanto, obtemos que $P(V_k^m) = V_k$ e assim, $V_k^m \oplus W_k = H_0^1$.

$\square$

A próxima proposição será útil para estimarmos o funcional I_λ aplicado em termos do tipo $u + v$, com $u \in V_k^m$ e $v \in W_k$.

Proposição 2.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ uma função contínua tal que $f(0) = 0$. Se $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis tais que $med(supp\, u \cap supp\, v) = 0$, então*

$$\int_\Omega f(u + v)dx = \int_\Omega f(u)dx + \int_\Omega f(v)dx.$$

Demonstração: Como f é contínua e u, v são mensuráveis, então $f(u), f(v)$ e $f(u + v)$ também são mensuráveis. Considerando

$$A = supp\, u \cap supp\, v \quad \text{e} \quad B = \Omega \setminus (supp\, u \cup supp\, v)$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(u + v)dx = &\int_{supp\, u \setminus A} f(u + v)dx + \int_A f(u + v)dx \\ &+ \int_{supp\, v \setminus A} f(u + v)dx + \int_B f(u + v)dx. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Como $v = 0$ em $supp\, u \setminus A$ e $med(A) = 0$,

$$\int_{supp\, u \setminus A} f(u + v)dx = \int_{supp\, u \setminus A} f(u + 0)dx = \int_{supp\, u} f(u)dx = \int_\Omega f(u)dx,$$

pois, $f(u) = f(0) = 0$ em $(supp\, u)^c$. De forma análoga,

$$\int_{supp\, v \setminus A} f(u + v)dx = \int_\Omega f(v)dx.$$

Além disso, como $med(A) = 0$ segue que

$$\int_A f(u+v)dx = 0$$

e também, como $u = v = 0$ em B, obtemos que

$$\int_B f(u+v)dx = \int_B f(0)dx = 0.$$

Portanto, substituindo em (2.57) concluímos que

$$\int_\Omega f(u+v) = \int_\Omega f(u) + \int_\Omega f(v).$$

$\square$

A proposta deste capítulo é provar os resultados que são válidos para não-linearidade envolvendo o expoente subcrítico ou crítico, assim, os próximos dois lemas serão usados nos próximos capítulos para mostrar as condições geométricas do Teorema de Linking.

O próximo resultado pode ser encontrado em [28]

Teorema 2.1 (Teorema de Linking) *: Seja E um espaço de banach com $E = V \oplus W$, onde V é um espaço de dimensão finita suponha que $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$.*
Seja $B_r = \{x \in E; \|x\| < r\}$. Suponha que Φ satisfaz $(P.S.)$ e

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi\Big|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha$ e

(b) existem $e \in (\partial B_1) \cap W$, $0 < \beta < \alpha$ e uma constante real $R > \rho$ tal que $\Phi\Big|_{\partial Q} < \beta$ onde $Q = (B_R \cap V) \oplus (0, Re)$.
Então Φ possui um valor crítico $C \geq \alpha$ caracterizado por $C = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in Q} \Phi(\gamma(u))$

$$\textit{onde } \Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, E) \ ; \ \gamma = I_d \ \textit{ em } \partial Q\}.$$

Lema 2.8 *Seja $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então, existem β, $\rho > 0$ tais que $I_\lambda(u) \geq \beta$ sempre que $u \in W_k$ e $\|u\| = \rho$.*

Demonstração: Seja $u \in W_k = V_k^\perp = \{v \in H_0^1 \ / \ \langle \varphi_i, v\rangle_{L^2} = 0, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, k\}$.

Lembrando que $\lambda > 0$ e $q > 0$, tem-se

$$I_\lambda(u) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{a}{2}\int_\Omega u^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega |u^+|^p dx. \tag{2.52}$$

Agora, pela definição de $\lambda_{k+1} = \inf_{u \in W_k} \dfrac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx}$, obtemos

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{\|u\|^2}{|u|_2^2}.$$

Logo, usando a desigualdade anterior e o fato que $a > 0$, segue que

$$-\frac{a}{2}\int_\Omega u^2dx \geq -\frac{a}{2\lambda_{k+1}}\|u\|^2. \tag{2.53}$$

Agora, como $|u| \geq u^+$, então $|u|^p \geq (u^+)^p$, e consequentemente,

$$-\frac{b}{p}\int_\Omega (u^+)^p dx \geq -\frac{b}{p}\int_\Omega |u|^p dx. \tag{2.54}$$

Por outro lado, como $H_0^1 \hookrightarrow L^p$, para todo $p \in [2, 2^*]$, existe $C > 0$ tal que $|u|_p \leq C\|u\|$. Logo,

$$-\frac{b}{p}\int_\Omega |u|^p dx \geq -\frac{bC^p}{p}\|u\|^p. \tag{2.55}$$

Assim, por (2.60) e (2.61), obtemos

$$-\frac{b}{p}\int_\Omega (u^+)^p dx \geq -\frac{bC^p}{p}\|u\|^p. \tag{2.56}$$

Substituindo (2.59), (2.62) em (2.58), obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{a}{2\lambda_{k+1}}\|u\|^2 - \frac{bC^p}{p}\|u\|^p \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{2\lambda_{k+1}}\right)\|u\|^2 - \frac{bC^p}{p}\|u\|^p. \end{aligned}$$

Agora, como $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ e definindo $A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{2\lambda_{k+1}} > 0$ e $B = \dfrac{bC^p}{p} > 0$, segue que

$$I_\lambda(u) \geq A\|u\|^2 - B\|u\|^p.$$

Portanto,

$$I_\lambda(u) \geq \|u\|^2(A - B\|u\|^{p-2}).$$

Assim, se $\|u\| = \rho$ é suficientemente pequeno $\left(0 < \rho < \left(\dfrac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p-2}}\right)$, temos que

$$I_\lambda(u) \geq \rho^2(A - B\rho^{p-2}) = \beta > 0.$$

Portanto, acabamos de mostrar que existem $0 < \rho < \left(\dfrac{A}{B}\right)^{\frac{1}{p-2}}$ e $\beta = \rho^2(A - B\rho^{p-2})$ tais que $I_\lambda(u) \geq \beta$ sempre que $u \in W_k$ e $\|u\| = \rho$.

$\square$

Lema 2.9 *Seja $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então, dado $\lambda_0 > 0$, existem $m_0 \in \mathbb{N}$ e $R > \rho$, tais que*

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx,$$

sempre que $u \in \partial Q_m$, onde $Q_m = (B_R \cap V_k^m) \oplus [0, R\varphi_{k+1}^m]$, com $m \geq m_0$ e $\lambda \leq \lambda_0$. (onde ∂Q_m é a fronteira de Q_m em relação ao subespaço $V_k^m \oplus < \varphi_{k+1}^m >$).

Demonstração: Para todo $r \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} I_\lambda(r\varphi_{k+1}^m) &= \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_{k+1}^m|^2 dx + \frac{\lambda r^q}{q}\int_\Omega |\varphi_{k+1}^m|^q dx - \frac{ar^2}{2}\int_\Omega (\varphi_{k+1}^m)^2 dx - \frac{r^p b^p}{p}\int_\Omega \left[(\varphi_{k+1}^m)^+\right]^p dx \\ &\leq \frac{r^2}{2}\int_\Omega |\nabla\varphi_{k+1}^m|^2 dx + \frac{\lambda r^q}{q}\int_\Omega |\varphi_{k+1}^m|^q dx - \frac{r^p b^p}{p}\int_\Omega \left[(\varphi_{k+1}^m)^+\right]^p dx. \end{aligned}$$

Assim, para $0 < \lambda \leq \lambda_0$, a desigualdade acima, garante que

$$I_\lambda(r\varphi_{k+1}^m) \leq \frac{r^2}{2}\|\varphi_{k+1}^m\|^2 + \frac{\lambda_0 r^q}{q}|\varphi_{k+1}^m|_q^q - \frac{r^p b^p}{p}|(\varphi_{k+1}^m)^+|_p^p. \tag{2.57}$$

Como $\varphi_{k+1}^m \to \varphi_{k+1}$ em H_0^1 quando $m \to \infty$ e notando que valem as imersões $H_0^1 \hookrightarrow L^p$, $\forall\, p \in [2, 2^*]$, $L^p \hookrightarrow L^q$ e $L^p \hookrightarrow L^2$, pois $1 < q < 2 < p \leq 2^*$ e Ω é domínio limitado, concluímos por (2.63) que

$$\lim_{m\to\infty} I_\lambda(r\varphi_{k+1}^m) \leq \frac{r^2}{2}\|\varphi_{k+1}\|^2 + \frac{\lambda_0 r^q}{q}|\varphi_{k+1}|_q^q - \frac{r^p b^p}{p}|(\varphi_{k+1})^+|_p^p, \text{ onde } 0 < \lambda \leq \lambda_0.$$

Como $1 < q < 2 < p \leq 2^*$, segue que a soma à dereita da desigualdade acima, se escreve como um polinômio de grau p, isto é, $P(r) = Ar^2 + Br^q - Cr^p$ onde $A > 0$, $B > 0$ e $C > 0$, consequentemente existe $R_1 > \rho$, suficientemente grande e $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_\lambda(R\varphi_{k+1}^m) \leq 0, \text{ para todo } m \geq m_1, R \geq R_1 \text{ e } 0 < \lambda \leq \lambda_0. \tag{2.58}$$

Além disso, existe $m_0 \geq m_1$ e $\beta > 0$ tal que

$$I_\lambda(r\varphi_{k+1}^m) \leq \beta, \text{ para todo } m \geq m_0, r \geq 0 \text{ e } 0 < \lambda \leq \lambda_0. \tag{2.59}$$

Sabemos que $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, seja $a_k < a$ tal que $\lambda_k < a_k < \lambda_{k+1}$.
Logo, como $N > 2$ considere m suficientemente grande tal que $\dfrac{C_k}{m^{N-2}} < a_k - \lambda_k$, onde $C_k > 0$ foi obtido no Lema 2.7. Assim,

$$\lambda_k + C_k m^{2-N} < a_k < a. \tag{2.60}$$

Agora, para $v \in V_k^m$, utilizando a estimativa do lema 2.7, obtemos que

$\left|\dfrac{v}{|v|_2}\right|^2 \leq \lambda_k + C_k m^{2-N}$ e consequentemente por (2.66), segue que

$$\left\|\frac{v}{|v|_2}\right\|^2 < a_k.$$

Portanto, obtemos a seguinte estimativa

$$-\frac{a}{2a_k}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx > -\frac{a}{2}\int_\Omega v^2 dx. \tag{2.61}$$

Assim, por (2.67), temos que para cada $v \in V_k^m$,

$$I_\lambda(v) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a_k}\right)\|v\|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |v|^q dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (v^+)^p dx. \tag{2.62}$$

Como $a > a_k$, temos que $1 - \dfrac{a}{a_k} < 0$ e consequentemente podemos tomar $R \geq R_1$ suficientemente grande tal que para $\|v\| = R$, obtemos $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a}{a_k}\right)\|v\|^2 \leq -\beta$, isto é,

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a_k}\right)\|v\|^2 \leq -\beta, \text{ para todo } v \in \partial(B_R \cap V_k^m) \text{ e } R \geq R_1. \tag{2.63}$$

Sejam $R \geq R_1$, $m \geq m_0$, $0 < \lambda \leq \lambda_0$. e denotamos a fronteira de Q_m por $\partial Q_m = \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_i$, onde

(1) $\Gamma_1 = \overline{B_R} \cap V_k^m$,

(2) $\Gamma_2 = \{v \in H_0^1 : v = u + R\varphi_{k+1}^m, u \in B_R(0) \cap V_k^m\}$,

(3) $\Gamma_3 = \{v \in H_0^1 : v = u + r\varphi_{k+1}^m, u \in V_{k+1}^m, \|u\| = R, 0 \leq r \leq R\}$.

Mostraremos que em cada Γ_i, temos $I_\lambda\Big|_{\Gamma_i} \leq \dfrac{\lambda}{q}\displaystyle\int_\Omega |u|^q$, onde $i = 1, 2, 3$.

Caso (1): Seja $u \in \Gamma_1 \subset V_k^m$. Logo, por (2.68), seque que

$$I_\lambda(u) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a_k}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u^+)^p dx.$$

E pelas condições $a_k < a$, $b > 0$ e $p > 0$, podemos concluir que

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx, \ \forall\, u \in \Gamma_1 \subset V_k^m. \tag{2.64}$$

Caso (2): Seja $v \in \Gamma_2$. Assim, temos $v = u + R\varphi_{k+1}^m$, onde $u \in B_R(0) \cap V_k^m$. Lembrando que, por (2.49), temos que $supp\, u \cap supp\, \varphi_{k+1}^m = \phi$, $\forall\, u \in V_k^m$, pela Proposição 2.2 decorre que

$$I_\lambda(u + R\varphi_{k+1}^m) = I_\lambda(u) + I_\lambda(R\varphi_{k+1}^m).$$

Agora, por (2.70), podemos obter

$$I_\lambda(u + R\varphi_{k+1}^m) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx + I_\lambda(R\varphi_{k+1}^m),$$

desde que $m \geq m_0 \geq m_1$ e $R \geq R_1$. Assim, por (2.64) segue que

$$I_\lambda(u + R\varphi_{k+1}^m) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx = \frac{\lambda}{q}\int_{supp\, u} |u|^q dx.$$

Novamente usando que $supp\, u \cap supp\, \varphi_{k+1}^m = \phi$, concluímos que

$$\frac{\lambda}{q}\int_{supp\, u} |u|^q dx = \frac{\lambda}{q}\int_{supp\, u} |u + R\varphi_{k+1}^m|^q dx \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u + R\varphi_{k+1}^m|^q dx,$$

e portanto,

$$I_\lambda(v) \leq \frac{\lambda}{q} \int_\Omega |v|^q dx, \ \forall \ v \in \Gamma_2.$$

Caso (3): Seja $v \in \Gamma_3$, temos que existe $u \in \partial(B_R \cap V_k^m)$ e $r \in [0, R]$ tais que $v = u + r\varphi_{k+1}^m$. Novamente como $supp\, u \cap supp\, \varphi_{k+1}^m = \phi$, $\forall \ u \in V_k^m$, a Proposição 2.2 garante que

$$I_\lambda(u + r\varphi_{k+1}^m) = I_\lambda(u) + I_\lambda(r\varphi_{k+1}^m). \tag{2.65}$$

Como $p > 0$ e $b > 0$, por (2.68) segue que

$$I_\lambda(u) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a_k}\right)\|u\|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx.$$

Agora, como $u \in \partial(B_R \cap V_k^m)$, por (2.69), temos

$$I_\lambda(u) \leq -\beta + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx.$$

Usando a estimativa (2.65),

$$I_\lambda(u) + I_\lambda(r\varphi_{k+1}^m) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx. \tag{2.66}$$

Finalmente por (2.71) e (2.72), obtemos

$$I_\lambda(u + r\varphi_{k+1}^m) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx = \frac{\lambda}{q}\int_{supp\, u} |u|^q dx. \tag{2.67}$$

Estimando a última integral acima, por (2.49), obtemos

$$\frac{\lambda}{q}\int_{supp\, u} |u|^q dx = \frac{\lambda}{q}\int_{supp\, u} |u + R\varphi_{k+1}^m|^q dx \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u + R\varphi_{k+1}^m|^q dx.$$

Logo, por (2.73) concluímos que

$$I_\lambda(v) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |v|^q dx, \ \forall \ v \in \Gamma_3$$

$\square$

3 MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO O EXPOENTE SUBCRÍTICO

Neste capítulo, estudaremos um resultado de multiplicidade de soluções para o seguinte problema elíptico semilinear com condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda |u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{p-1} \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $N \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Lembramos que as soluções fracas do problema (3.1) correspondem aos pontos críticos do funcional $I_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u^+)^p dx.$$

O principal resultado desse capítulo é :

Teorema 3.1 *Sejam $N \geq 3$ e $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Se $2 < p < 2^*$, então para λ suficientemente pequeno, o problema (3.1) possui pelo menos três soluções não triviais.*

A prova desse Teorema será dividida em 2 seções:

Na primeira seção do capítulo, usamos o Teorema do Passo da Montanha para obter pelo menos duas soluções, uma positiva e uma negativa. Na segunda seção do capítulo, uma terceira solução não nula é obtida via Teorema de Linking ou Teorema do passo da Montanha generalizado.

No seguinte resultado mostraremos que, no caso subcrítico, o funcional I_λ satisfaz a condição Palais-Smale (ou condição($P.S.$)) em todos os níveis para todo $\lambda > 0$.

Lema 3.1 *Se $2 < p < 2^*$, então o funcional I_λ satisfaz a condição Palais-Smale (ou condição(P.S.)) em todos os níveis, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração: Denotamos

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - J_\lambda(u),$$

onde $J_\lambda(u) = -\dfrac{\lambda}{q}\displaystyle\int_\Omega |u|^q dx + \dfrac{a}{2}\displaystyle\int_\Omega |u|^2 dx + \dfrac{b}{p}\displaystyle\int_\Omega (u^+)^p dx$. Sabemos que

$\langle I'_\lambda(u), h\rangle = \langle u, h\rangle_{H_0^1} - \langle J'_\lambda(u), h\rangle,\ \forall u, h \in H_0^1$, onde,

$$\langle J'(u), h\rangle = -\lambda\int_\Omega |u|^{q-2}uh dx + a\int_\Omega uh dx + b\int_\Omega (u^+)^{p-1}h dx.$$

Seja $(u_n) \subset H_0^1$ uma sequência $(P.S.)$, isto é, (u_n) é uma sequência tal que $|I_\lambda(u_n)| \leq M$, para alguma constante $M > 0$ e $I'_\lambda(u_n) \to 0$ em $(H_0^1)^*$, pelo Lema 2.1, a sequência (u_n) é limitada em H_0^1, logo existe uma subsequência ainda denotada por $(u_n) \subset H_0^1$ e $u \in H_0^1$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em H_0^1.

Assim, segue do teorema de Rellich-Kondrachov (consultar Apêndice, Observação 1 do Teorema A.18) que $u_n \to u$ em L^r, para $1 \leq r < 2^*$ e $u_n \to u$, q.t.p em Ω.

Prosseguindo com um argumento análogo ao feito anteriormente (ver Afirmação 3 do Capítulo 2, onde mostramos que I'_3 é contínua), podemos concluir que $J'_\lambda(u_n) \to J'_\lambda(u)$. Agora, como

$$\begin{aligned}\langle I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u), u_n - u\rangle + \langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u\rangle \\ = \langle u_n, u_n\rangle_{H_0^1} - 2\langle u, u_n\rangle_{H_0^1} + \langle u, u\rangle_{H_0^1} = \|u_n - u\|^2,\end{aligned}$$

segue do Teorema A.5 item (iv) (ver Apêndice) que

$$\langle I'_\lambda(u_n) - I'_\lambda(u), u_n - u\rangle + \langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u\rangle \to 0,$$

e consequentemente $u_n \to u$ em H_0^1, o que prova a afirmação.

□

3.1 SOLUÇÕES VIA O TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA

Proposição 3.1 *Sejam $N \geq 3$, $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Então :*

(i) O problema (3.1) possui pelo menos uma solução positiva, para todo λ obtido no Lema 2.4.

(ii) O problema (3.1) possui pelo menos uma solução negativa, para todo λ obtido no Lema 2.6.

Demonstração:

Prova do item (i): Note que toda solução positiva para o problema (3.1) satisfaz a equação :

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda|u^+|^{q-1} + au^+ + b(u^+)^{p-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $N \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$.
Agora, como na Seção 2.3, encontrar uma solução para o problema (3.2) é equivalente a encontrar um ponto crítico do funcional

$$I_\lambda^+ : H_0^1 \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda^+(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega (u^+)^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega (u^+)^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u^+)^p dx.$$

Observemos que, pelo Lema 3.1, segue que no caso subcrítico ($2 < p < 2^*$) o funcional I_λ^+ satisfaz a condição Palais Smale (ou condição $(P.S)$) em todos os níveis, para todo $\lambda > 0$.

Além disso, como $I_\lambda^+(0) = 0$, então basta provar as seguintes condições geométricas:

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I_\lambda^+\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$ e

(b) existe um elemento $e \in H_0^1\backslash\overline{B_\rho}$ tal que $I_\lambda^+(e) < 0$.

Prova do item (a): Lembrando que pelo Lema 2.3 temos que existe $R > 0$ tal que

$$I_\lambda^+(u) > 0, \ \forall \ 0 < \|u\| \leq R. \tag{3.3}$$

Note que por (3.3) e pelo Teorema A.27, item (i) do Apêndice, podemos obter que existe $0 < \rho < R$, tal que

$$0 = I_\lambda^+(0) < \inf\{I_\lambda^+(u) \ : \ \|u\| = \rho\}.$$

Tomando $\alpha = \dfrac{1}{2}\inf\{I_\lambda^+(u) \ : \ \|u\| = \rho\}$, obtemos que $\alpha < \inf\{I_\lambda^+(u) \ : \ \|u\| = \rho\}$. Portanto, existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\alpha < I_\lambda^+(u)$, $\forall \ \|u\| = \rho$, provando assim, o item (a).

Prova do item (b): Pelo Lema 2.4, temos que existe $e = t_0\varphi_1 \in H_0^1$ com $t_0 > 0$ tal que $I_\lambda^+(e) < 0 = I_\lambda^+(0)$, para todo $\lambda > 0$ obtido no Lema 2.4. Note que por (3.3) e $0 < \rho < R$ podemos deduzir que $\|e\| > \rho$, isto é, $e \in H_0^1\backslash\overline{B_\rho}$.

Assim, existe $e \in H_0^1\backslash\overline{B_\rho}$ tal que $I_\lambda^+(e) < 0$. Isto prova o item (b).
Logo, pelo teorema do Passo da Montanha, I_λ^+ possui um valor crítico $C_\lambda^+ \geq \alpha$, com

$$C_\lambda^+ = \inf_{g\in\Gamma^+}\max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^+(u),$$

onde $\Gamma^+ = \{g \in C([0,1], H_0^1) \ ; \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = t_0\varphi_1\}$.

Prova do item (ii): Observemos que toda solução negativa para o problema (3.1) satisfaz a equação:

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda|u^-|^{q-1} + au^- \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado suave, $N \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2 < p < 2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$.

Novamente pela Seção 2.4, encontrar uma solução para o problema (3.4) é equivalente a encontrar um ponto crítico do funcional

$$I_\lambda^- : H_0^1 \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda^-(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega (u^-)^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega (u^-)^2 dx.$$

Mostraremos que I_λ^- também satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. Analogamente ao que fizemos no item (i), segue do Lema 3.1, que no caso subcrítico $(2 < p < 2^*)$ o funcional I_λ^- satisfaz a condição de compacidade $(P.S)$ em todos os níveis, para todo $\lambda > 0$. Como $I_\lambda^-(0) = 0$, mostraremos então que o funcional satisfaz a geometria do Teorema do passo da Montanha.

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I_\lambda^-\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$ e

(b) existe um $e \in H_0^1 \backslash \overline{B}_\rho$ tal que $I_\lambda^-(e) < 0$.

Prova do item (a): Usando o Lema 2.5 temos que existe $R > 0$ tal que

$$I_\lambda^-(u) > 0, \ \forall\ 0 < \|u\| \leq R. \tag{3.5}$$

Note que por (3.5) e pelo Teorema A.27, item (i) do Apêndice, podemos encontrar $0 < \rho < R$, tal que

$$0 = I_\lambda^-(0) < \inf\{I_\lambda^-(u) \ : \ \|u\| = \rho\}.$$

Tomando $\alpha = \dfrac{1}{2}\inf\{I_\lambda^-(u) \ : \ \|u\| = \rho\}$, segue que $\alpha < \inf\{I_\lambda^-(u) \ : \ \|u\| = \rho\}$ assim existem $\rho, \alpha > 0$ tal que $\alpha < I_\lambda^-(u)$, $\forall\ \|u\| = \rho$.

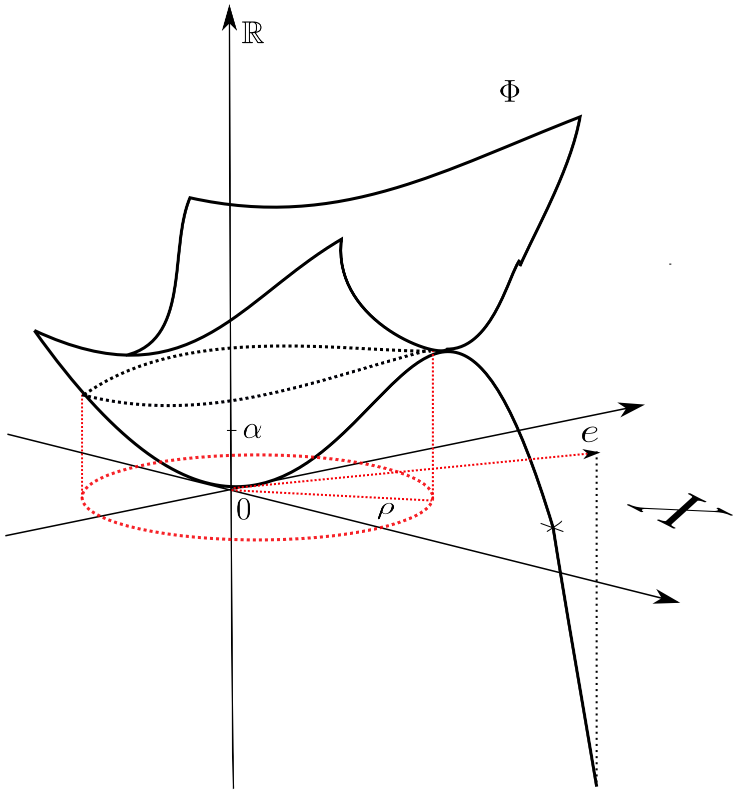
Prova do item (b): Pelo Lema 2.6, temos que existe $e = -t_0\varphi_1 \in H_0^1$ tal que $I_\lambda^-(e) < 0 = I_\lambda^-(0)$, para todo $\lambda > 0$ obtido no Lema 2.6. Logo por (3.5), segue que $\|e\| > R$ e como $\rho < R$, obtemos que $\|e\| > \rho$. Assim, existe $e \in H_0^1 \backslash \overline{B_\rho}$ tal que $I_\lambda^-(e) < 0$, isto conclui a prova do item (b).

Logo, pelo Teorema do Passo da Montanha, I_λ^- possui um valor crítico $C_\lambda^- \geq \alpha$, com

$$C_\lambda^- = \inf_{g \in \Gamma^-} \max_{u \in g([0,1])} I_\lambda^-(u),$$

onde $\Gamma^- = \{g \in C([0,1], H_0^1) \ ; \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = -t_0\varphi_1\}$. $\square$

Figura 1 – A geometria do passo da Montanha



Fonte: Eduardo Huerto

3.2 SOLUÇÃO VIA O TEOREMA DE LINKING

A ferramenta variacional dessa seção que utilizaremos é o teorema de Linking. O lema abaixo será útil para controlar os níveis mini-max das soluções positiva e negativa e assim, obter uma terceira solução.

Lema 3.2 *Seja $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, então*

$$C_\lambda^+ \leq \frac{\lambda t_1^q}{q}|\varphi_1|_q^q \quad e \quad C_\lambda^- \leq \frac{\lambda t_2^q}{q}|\varphi_1|_q^q.$$

onde, t_1 e t_2 foram obtidos nos Lemas 2.4 e 2.6 respectivamente.

Demonstração: Definimos $g_0 : [0,1] \to H_0^1$ dado por

$$g_0(t) = t(t_1\varphi_1), \text{ onde } t_1 \text{ foi obtido no Lema 2.4.}$$

Segue que $g_0 \in \Gamma^+$ e

$$I_\lambda^+(g_0(t)) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(tt_1\varphi_1)|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |(tt_1\varphi_1)^+|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |(tt_1\varphi_1)^+|^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega ((tt_1\varphi_1)^+)^p dx.$$

Como φ_1 é a autofunção positiva associado ao autovalor λ_1, temos

$$\begin{aligned} I_\lambda^+(g_0(t)) &= \frac{(tt_1)^2\lambda_1}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx + \frac{\lambda(tt_1)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx - \frac{a(tt_1)^2}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx - \frac{b(tt_1)^p}{p}\int_\Omega \varphi_1^p dx \\ &= \frac{(tt_1)^2(\lambda_1 - a)}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx + \frac{\lambda(tt_1)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx - \frac{b(tt_1)^p}{p}\int_\Omega \varphi_1^p dx. \end{aligned}$$

Pelas condições $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, $b > 0$, $t_1 > 0$ e $0 \leq t \leq 1$ resulta que

$$I_\lambda^+(g_0(t)) \leq \frac{\lambda(tt_1)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx \leq \frac{\lambda t_1^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx.$$

Isto mostra que

$$I_\lambda^+(g_0(t)) \leq \frac{\lambda t_1^q}{q}|\varphi_1|_q^q, \text{ para todo } 0 \leq t \leq 1.$$

Como conseqüência da estimativa acima, concluímos

$$\max_{u \in g_0([0,1])} I_\lambda^+(u) = \max_{t\in[0,1]} I_\lambda^+(g_0(t)) \leq \frac{\lambda t_1^q}{q}|\varphi_1|_q^q.$$

Agora como

$$\inf_{g\in\Gamma^+}\max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^+(u) \leq \max_{u\in g_0([0,1])} I_\lambda^+(u) = \max_{t\in[0,1]} I_\lambda^+(g_0(t)),$$

obtemos

$$\inf_{g\in\Gamma^+}\max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^+(u) \leq \frac{\lambda t_1^q}{q}|\varphi_1|_q^q,$$

isto é,

$$0 < C_\lambda^+ \leq \frac{\lambda t_1^q}{q} |\varphi_1|_q^q.$$

Deste modo, deduzimos que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, temos que $C_\lambda^+ > 0$ é suficientemente pequeno.

Agora mostraremos a outra desigualdade. Defina a seguinte função

$$g_0 : [0,1] \to H_0^1$$

$$g_0(t) = -t(t_2\varphi_1), \text{ onde } t_2 \text{ foi obtido no Lema 2.6}$$

Note que $g_0 \in \Gamma^-$. Além disso,

$$I_\lambda^-(g_0(t)) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(-tt_2\varphi_1)|^2 + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |(-tt_2\varphi_1)^-|^q - \frac{a}{2}\int_\Omega |(-tt_2\varphi_1)^-|^2$$

e lembrando que φ_1 é autofunção positiva associado ao autovalor λ_1, temos

$$\begin{aligned} I_\lambda^-(g_0(t)) &= \frac{(tt_2)^2\lambda_1}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx + \frac{\lambda(tt_2)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx - \frac{a(tt_2)^2}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx. \\ &= \frac{(tt_2)^2(\lambda_1 - a)}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx + \frac{\lambda(tt_2)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx. \end{aligned}$$

Como $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, $t_2 > 0$ e $0 \leq t \leq 1$, resulta que

$$I_\lambda^-(g_2(t)) \leq \frac{\lambda(tt_2)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q \leq \frac{\lambda t_2^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q.$$

Logo,

$$I_\lambda^-(g_0(t)) \leq \frac{\lambda t_2^q}{q}|\varphi_1|_q^q, \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Prosseguindo da mesma maneira como foi feito anteriormente, pode-se obter

$$0 < C_\lambda^- \leq \frac{\lambda t_2^q}{q}|\varphi_1|_q^q.$$

Observe que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, temos que $C_\lambda^- > 0$ é suficientemente pequeno.

□

Proposição 3.2 *Sejam $N \geq 3$ e $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Então para λ suficientemente pequeno, o problema (3.1) possui pelo menos uma solução não trivial.*

Demonstração : Lembrando que as soluções fracas do problema (3.1) correspondem aos pontos críticos do funcional de classe C^1 (ver capítulo 2)

$$I_\lambda : H_0^1 \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{b}{p}\int_\Omega (u^+)^p dx,$$

mostraremos que o funcional I_λ satisfaz as condições do Teorema de Linking, ou seja, I_λ satisfaz a condição Palais Smale (ou condição $(P.S)$), o espaço H_0^1 é Banach e pode ser decomposto na forma $H_0^1 = V \oplus W$, onde V é um espaço de dimensão finita e o funcional I_λ satisfaz

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I_\lambda\Big|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha$ e

(b) existe um elemento $e \in (\partial B_1) \cap W$, existe uma constante real $R > \rho$ e $\beta > 0$ tais que $I_\lambda\Big|_{\partial Q} < \beta < \alpha$ onde $Q = (B_R \cap V) \oplus (0, Re)$.

Assim, o Teorema garante que I_λ possui um valor crítico $C \geq \alpha$ caracterizado por

$$C = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in Q} I_\lambda(\gamma(u))$$

$$\text{onde } \Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, E) \;\; ; \;\; \gamma = I_d \text{ em } \partial Q\}.$$

Sabemos que H_0^1 é um espaço de Banach e que pelo Corolário 2.1 do Capítulo 2, o espaço H_0^1 se decompõe na forma $H_0^1 = V_k^m \oplus W_k$, para m suficientemente grande, onde V_k^m é um espaço de dimensão finita.

Além disso, pelo Lema 3.1, temos que no caso subcrítico $(2 < p < 2^*)$, o funcional I_λ satisfaz a condição Palais Smale em todos os níveis, para todo $\lambda > 0$. Assim, provaremos que o funcional I_λ satisfaz a geometria do Teorema de Linking, ou seja, as condições (a) e (b) informadas acima.

Prova do item(a): Resulta diretamente do Lema 2.8 do Capítulo 2.

Prova do item(b): Sem perda da generalidade, podemos supor que $\|\varphi_{k+1}^m\| = 1$, onde φ_{k+1}^m foi definida na Seção 2.5 do Capítulo 2, logo pelo Lema 2.9 do mesmo Capítulo, segue que, dado $\epsilon > 0$, existem $m_0 \in \mathbb{N}$ e $R > \rho$ tais que,

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx,$$

sempre que $u \in \partial Q_m$, onde $Q_m = (B_R \cap V_k^m) \oplus (0, R\varphi_{k+1}^m), m \geq m_0$ e $\lambda \leq \epsilon$. Logo

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\epsilon}{q}\int_\Omega |u|^q dx, \; \forall \, \epsilon > 0, \tag{3.6}$$

para $u \in \partial Q_m$, onde $Q_m = (B_R \cap V_k^m) \oplus (0, R\varphi_{k+1}^m), \; m \geq m_0$.

Note que as normas $|.|_q$ e $\|.\|$ sao equivalentes no espaço $V_k^m \oplus < \varphi_{k+1}^m >$ de dimensão finita, então existe $K_0 > 0$ tal que $|u|_q \leq K_0\|u\|, \; \forall \, u \in \partial Q_m$.
Agora, como Q_m é limitada em H_0^1, obtemos que ∂Q_m é limitada em H_0^1 e consequentemente existe $K_1 > 0$ tal que

$$|u|_q^q \leq K_1, \; \forall \, u \in \partial Q_m. \tag{3.7}$$

Portanto, como ϵ é arbitrário, por (3.6) e (3.7), obtemos que existe $\beta > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) < \beta < \alpha,$$

para todo $u \in \partial Q_m$ onde $Q_m = (B_R \cap V_k^m) \oplus (0, R\varphi_{k+1}^m),\ m \geq m_0$.
Assim, podemos concluir que para λ suficientemente pequeno, existe $\varphi_{k+1}^m \in B_1 \cap W_k$ e $R > \rho$ tais que

$$I_\lambda(u) < \beta < \alpha,$$

sempre que $u \in \partial Q_m$, onde $Q_m = (B_R \cap V_k^m) \oplus (0, R\varphi_{k+1}^m),\ m \geq m_0$.

Então, para λ suficientemente pequeno, pelo Teorema de Linking (ver Apêndice, Teorema C.8), I_λ possui um valor crítico $C_\lambda \geq \alpha$ caracterizado por

$$C_\lambda = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in Q_m)} I_\lambda(h(u)),$$

$$\text{onde } \ \Gamma = \{h \in C(\overline{Q}_m, H_0^1) \ \ ; \ \ h = I_d \ \text{ em } \ \partial Q_m\}.$$

Isto é, existe $u_c \in H_0^1$ solução fraca de (3.1) tal que $0 < \alpha \leq I_\lambda(u_c)$. Note que u_c é não nula, pois $I_\lambda(0) = 0$.

$\square$

Prova do teorema 3.1:

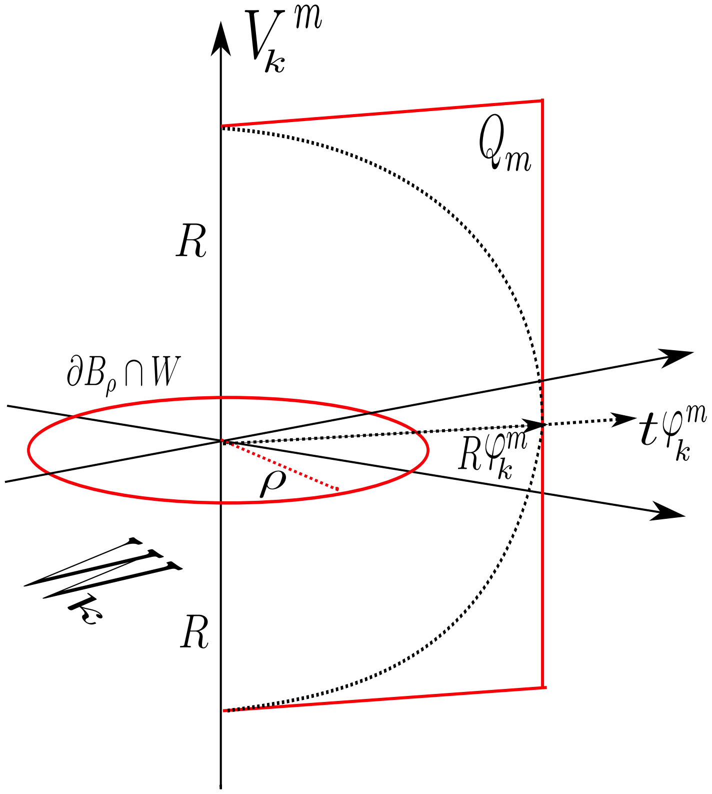
Basta mostrar que u_c é distinto dos pontos críticos encontrados para os funcionais I_λ^+ e I_λ^-.

De fato, dado o nível α obtido na geometria de Linking, pelo lema 3.2, podemos tomar λ suficientemente pequeno tal que $C_\lambda^+, C_\lambda^- < \alpha$, então $C_\lambda^+ \,, C_\lambda^- < \alpha \leq C_\lambda$.

Portanto para λ suficientemente pequeno, o problema (3.1) possui pelo menos três soluções não trivias.

$\square$

Figura 2 – A geometria do Teorema de Linking



Fonte: Eduardo Huerto

4 MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA UM PROBLEMA ENVOLVENDO O EXPOENTE CRÍTICO

Neste capítulo, mostraremos um resultado de existência de soluções para o seguinte problema elíptico semilinear crítico com condição de fronteira de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda |u|^{q-2}u + au + b(u^+)^{2^*-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $N \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $1 < q < 2$, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$. Assim, considere o funcional de Euler-Lagrange

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx.$$

Note que, pontos críticos de I_λ são soluções fracas para o problema (4.1). O principal resultado desse capítulo é:

Teorema 4.1 *Sejam $N \geq 4$ e $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então para λ suficientemente pequeno, o problema (4.1) possui pelo menos três soluções não triviais.*

A demonstração desse teorema será dividida em 2 partes: Como no capítulo anterior, na primeira seção, usaremos o Teorema do Passo da Montanha para obter pelo menos duas soluções para o problema (4.1), uma positiva e uma negativa.

Para isso, usaremos os funcionais I_λ^+, I_λ^- definidos nas Seções 2.3 e 2.4, para obtermos tais soluções.

Na segunda seção deste capítulo, usaremos o Teorema de Linking para encontrar uma terceira solução não nula.

Apesar do roteiro deste capítulo possuir a mesma estrutura do capítulo anterior (caso subcrítico), a maior dificultade aqui é que o funcional I_λ definido acima, não satisfaz a condição $(P.S)$ em todos os níveis, devido a falta de compacidade da imersão de H_0^1 em L^{2^*}. Este problema é resolvido utilizando a técnica desenvolvida por Brézis-Nirenberg [5], mostrando que a compacidade ocorre abaixo de um certo nível que será obtido no próximo lema desse capítulo.

Assim, seja

$$S = \inf\left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{(\int_\Omega |u|^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}}} \ ; \ u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0 \right\}.$$

S é a melhor constante de Sobolev da imersão $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$ e atingida pela familia de funções $U_\epsilon(x) = \dfrac{[N(N-2)\epsilon^2]^{\frac{N-2}{4}}}{[\epsilon^2 + |x|^2]^{\frac{N-2}{2}}}$, onde $\epsilon > 0$ e $\|U_\epsilon\| = |U_\epsilon|_{2^*}^{2^*} = S^{\frac{N}{2}}$; para todo $\epsilon > 0$

(ver [28]). Suponha, sem perda de generalidade, que $0 \in \Omega$. Defina também

$$U_\epsilon^m = \eta U_\epsilon \text{ onde } \eta \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{m}}, \mathbb{R}) \text{ e } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } B_{\frac{1}{m}} \subset \Omega.$$

Lema 4.1 *Seja $\lambda_1 < a$, então I_λ satisfaz a condição Palais Smale para todo nível*

$$C < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}, \textit{ para cada } \lambda > 0.$$

Demostração: Seja $(u_n) \subset H_0^1$ uma sequência que satisfaça $I_\lambda(u_n) \to C$ e $|\langle I'(u_n), h\rangle| \leq \epsilon_n \|h\|$, $\forall\, h \in H_0^1$ com $\epsilon_n \to 0$, quando $n \to \infty$.

Pelo Lema 2.2, temos que (u_n) é limitada em H_0^1, assim, existe uma subsequência, ainda denotada por (u_n) e existe $u \in H_0^1$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em H_0^1. Logo, pelo teorema de Rellich Kondrachov (ver Apêndice, Teorema A.18 observação 1), como $H_0^1 \overset{c}{\hookrightarrow} L^r$ para $1 \leq r < 2^*$, podemos deduzir que $u_n \to u$ em L^r, $\forall\, 1 \leq r < 2^*$ e $u_n \to u$ q.t.p. em Ω. Vê-se facilmente que como $1 < q < 2 < 2^*$, então

$$u_n \to u \text{ em } L^q \text{ e } u_n \to u \text{ em } L^2. \tag{4.2}$$

Pela desigualdade de Sobolev, Gagliardo, Nirenberg (ver apêndice, teorema A.21), segue-se que existe uma constante $K = K(2, N) > 0$ tal que $|u_n^+|_{2^*} \leq K|\nabla u_n^+|_2 = K\|u_n^+\|$. Como $\|u_n^+\| \leq \|u_n\|$, pois $u_n = u_n^+ - u_n^-$, então

$$|u_n^+|_{2^*} \leq K\|u_n\|.$$

Assim, lembrando que (u_n) é limitada em H_0^1, segue que

$$(u_n^+) \text{ é limitada em } L^{2^*}. \tag{4.3}$$

Por outro lado, pela hipótese $\langle I_\lambda'(u_n), v\rangle \to 0,$ quando $n \to \infty$, $\forall\, v \in H_0^1$, temos que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx + \lambda \int_\Omega |u_n|^{q-2} u_n v dx - a \int_\Omega u_n v dx - b \int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1} v dx \to 0, \quad \forall\, v \in H_0^1, \tag{4.4}$$

quando $n \to \infty$.

Agora vamos calcular o limite de cada parcela e mostrar que u é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda |u|^{q-2} u + au + b(u^+)^{p-1}, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

De fato, note que como $u_n \rightharpoonup u$ em H_0^1 e $u_n \to u$ em L^2, quando $n \to \infty$, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \text{ e } \int_\Omega u_n v dx \to \int_\Omega u v dx; \ \forall\, v \in H_0^1. \tag{4.5}$$

Observe que, como $u_n \to u$ em L^q, segue pelo Teorema A.4 (ver Apêndice), que existe uma subsequência de (u_n) ainda denotada por (u_n) e $h \in L^q$ tal que $|u_n| \leq h,$ q.t.p em Ω, então para cada $v \in H_0^1$ decorre que

$$||u_n|^{q-2}u_n v| = |u_n|^{q-1}|v| \leq h^{q-1}|v|, \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Agora, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega |h^{q-1}|v||dx \leq \left(\int_\Omega |h|^q dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_\Omega |v|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

onde a última desigualdade segue do fato que $h \in L^q$ e $H_0^1 \hookrightarrow L^q$. Portanto,

$$h^{q-1}|v| \in L^1, \ \forall\, v \in H_0^1.$$

Também podemos concluir de $u_n \to u$ q.t.p em Ω que $|u_n|^{q-2}u_n v \to |u|^{q-2}uv$ q.t.p em Ω. Logo, o Teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver Apêndice, Teorema A.20) garante que

$$\int_\Omega |u_n|^{q-2}u_n v dx \to \int_\Omega |u|^{q-2}uv dx. \tag{4.6}$$

Finalmente, por (4.3), a sequência $((u_n^+)^{2^*-1})$ é limitada em $L^{\frac{2^*}{2^*-1}}$. Notando também que $(u_n^+)^{2^*-1} \to (u^+)^{2^*-1}$ q.t.p em Ω, pelo lema Brézis-Lieb (ver Apêndice, Lema A.24) obtemos que

$$(u_n^+)^{2^*-1} \rightharpoonup (u^+)^{2^*-1}, \text{ em } L^{\frac{2^*}{2^*-1}},$$

ou seja,

$$\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1} v dx \to \int_\Omega (u^+)^{2^*-1} v dx, \quad \forall\, v \in L^{2^*},$$

em particular

$$\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1} v dx \to \int_\Omega (u^+)^{2^*-1} v dx, \quad \forall\, v \in H_0^1. \tag{4.7}$$

Substituindo (4.5), (4.6) e (4.7) em (4.4), obtemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \lambda \int_\Omega |u|^{q-2}uv dx - a\int_\Omega uv dx - b\int_\Omega (u^+)^{2^*-1} v dx = 0, \ \forall\, v \in H_0^1.$$

Isto mostra a nossa afirmção.

Tomando $v = u$, na igualdade acima, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \lambda \int_\Omega |u|^q dx - a\int_\Omega u^2 dx - b\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx = 0,$$

isto é,

$$\langle I_\lambda'(u), u\rangle = 0. \tag{4.8}$$

Assim, por (4.8), vemos que

$$I_\lambda(u) = I_\lambda(u) - \frac{1}{2}\langle I_\lambda'(u), u\rangle.$$

Por outro lado, temos que

$$I_\lambda(u) - \frac{1}{2}\langle I'_\lambda(u), u\rangle = \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\lambda}{2}\right)|u|_q^q + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{2^*}\right)|u^+|_{2^*}^{2^*}, \text{ onde } 1 < q < 2 < 2^*, b > 0.$$

Portanto,

$$I_\lambda(u) = \left(\frac{\lambda}{q} - \frac{\lambda}{2}\right)|u|_q^q + \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{2^*}\right)|u^+|_{2^*}^{2^*} \geq 0. \tag{4.9}$$

Como sabíamos que $u_n \to u$ em L^r, $1 \leq r < 2^*$, segue que $u_n^+ \to u^+$ em L^r, $1 \leq r < 2^*$, daí resulta que (u_n^+) é limitada em L^r, onde $1 \leq r < 2^*$. Lembrando por (4.3) que (u_n^+) é limitada em L^{2^*}, temos que

$$(u_n^+) \text{ é uma sequência limitada em } L^r, \text{ onde } 1 \leq r \leq 2^*.$$

Além disso, como $u_n \to u$, q.t.p em Ω, então $u_n^+ \to u^+$, q.t.p em Ω. Logo pelo lema Brézis-Lieb (ver Apêndice, Lema A.26 considerando a função contínua $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $j(x) = (x^+)^p$), observemos que

$$\lim_{n\to\infty}(|u_n^+|_p^p - |(u - u_n)^+|_p^p) = |u^+|_p^p, \text{ para } 1 \leq p \leq 2^*.$$

Denotando $v_n = u_n - u$, usando $p = 2^*$ na equação acima, segue que,

$$\lim_{n\to\infty}(|u^+|_{2^*}^{2^*} - |u_n^+|_{2^*}^{2^*} + |v_n^+|_{2^*}^{2^*}) = 0. \tag{4.10}$$

Novamente lembrando de (4.3) que (u_n^+) é limitada em L^{2^*}, existe $M > 0$ tal que $|u_n^+|_{2^*} \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo a sequência $(|u_n^+|_{2^*}^{2^*})$ de numeros reais é limitada, então ao passar a uma subsequência se necessário novamente, temos que

$$\text{existe } \lim_{n\to\infty} |u_n^+|_{2^*}^{2^*}. \tag{4.11}$$

De (4.10) e (4.11), tem-se

$$\lim_{n\to\infty}(|u^+|_{2^*}^{2^*} + |v_n^+|_{2^*}^{2^*}) = \lim_{n\to\infty} |u_n^+|_{2^*}^{2^*}. \tag{4.12}$$

Note que, por (4.2), temos que $v_n \to 0$ em L^2 e assim,

$$\lim_{n\to\infty}(|v_n|_2^2 + |u|_2^2) = |u|_2^2 \text{ e } \lim_{n\to\infty} |u_n|_2^2 = |u|_2^2.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty}(|v_n|_2^2 + |u|_2^2) = \lim_{n\to\infty} |u_n|_2^2. \tag{4.13}$$

De modo análogo, por (4.2), $v_n \to 0$ em L^q e consequentemente

$$\lim_{n\to\infty}(|u|_q^q + |v_n|_q^q) = \lim_{n\to\infty} |u_n|_q^q. \tag{4.14}$$

Lembrando que $u_n \rightharpoonup u$ em H_0^1, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla u_n \nabla u dx = \int_\Omega \nabla u \nabla u dx = \|u\|^2. \tag{4.15}$$

Novamente, como (u_n) é limitada em H_0^1, então existe $M > 0$ tal que $\|u_n\| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste modo, a sequência $(\|u_n\|)$ dos números reais é limitada e portanto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que

$$\text{existe } \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2. \tag{4.16}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) + I_\lambda(v_n) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{q}|u|_q^q - \frac{a}{2}|u|_2^2 - \frac{b}{2^*}|u^+|_{2^*}^{2^*} + \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{\lambda}{q}|v_n|_q^q - \frac{a}{2}|v_n|_2^2 - \frac{b}{2^*}|v_n^+|_{2^*}^{2^*}. \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{q}|u|_q^q - \frac{a}{2}|u|_2^2 - \frac{b}{2^*}|u^+|_{2^*}^{2^*} + \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega \nabla u_n \nabla u dx \\ &+ \frac{\lambda}{q}|v_n|_q^q - \frac{a}{2}|v_n|_2^2 - \frac{b}{2^*}|v_n^+|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned}$$

Isto mostra que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) + I_\lambda(v_n) &= \|u\|^2 - \int_\Omega \nabla u_n \nabla u + \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{\lambda}{q}(|u|_q^q + |v_n|_q^q) - \frac{a}{2}(|u|_2^2 + |v_n|_2^2) \\ &- \frac{b}{2^*}(|u^+|_{2^*}^{2^*} + |v_n^+|_{2^*}^{2^*}). \end{aligned}$$

Portanto, por (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) e (4.16), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}(I_\lambda(u) + I_\lambda(v_n)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{q}(|u|_q^q + |v_n|_q^q) - \lim_{n\to\infty} \frac{a}{2}(|u|_2^2 + |v_n|_2^2) \\ &- \lim_{n\to\infty} \frac{b}{2^*}(|u^+|_{2^*}^{2^*} + |v_n^+|_{2^*}^{2^*}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{q}|u_n|_q^q - \lim_{n\to\infty} \frac{a}{2}|u_n|_2^2 - \lim_{n\to\infty} \frac{b}{2^*}|u_n^+|_{2^*}^{2^*} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\|u_n\|^2 + \frac{\lambda}{q}|u_n|_q^q - \frac{a}{2}|u_n|_2^2 - \frac{b}{2^*}|u_n^+|_{2^*}^{2^*} \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n). \end{aligned}$$

Agora, lembrando que (u_n) é uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = C$, concluímos

$$\lim_{n\to\infty}(I_\lambda(u) + I_\lambda(v_n)) = C. \tag{4.17}$$

Note também que, por (4.12), (4.13), (4.14) e (4.16), podemos deduzir que existem os seguintes limites $\lim_{n\to\infty} |v_n^+|_{2^*}^{2^*} = \lim_{n\to\infty}(|u_n^+|_{2^*}^{2^*} - |u^+|_{2^*}^{2^*})$, $\lim_{n\to\infty} |v_n|_2^2 = \lim_{n\to\infty}(|u_n|_2^2 - |u|_2^2)$, $\lim_{n\to\infty} |v_n|_q^q = \lim_{n\to\infty}(|u_n|_q^q - |u|_q^q)$ e $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2$.

Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\|v_n\|^2+\lambda|v_n|_q^q-a|v_n|_2^2-b|v_n^+|_{2^*}^{2^*}) &= \lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2+\lambda\lim_{n\to\infty}|v_n|_q^q-a\lim_{n\to\infty}|v_n|_2^2\\ &-b\lim_{n\to\infty}|v_n^+|_{2^*}^{2^*}\\ &=\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2+\lambda\lim_{n\to\infty}(|u_n|_q^q-|u|_q^q)\\ &-a\lim_{n\to\infty}(|u_n|_2^2-|u|_2^2)-b\lim_{n\to\infty}(|u_n^+|_{2^*}^{2^*}-|u^+|_{2^*}^{2^*})\\ &=\lim_{n\to\infty}\{\|v_n\|^2+\lambda(|u_n|_q^q-|u|_q^q)\\ &-a(|u_n|_2^2-|u|_2^2)-b(|u_n^+|_{2^*}^{2^*}-|u^+|_{2^*}^{2^*})\}\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\|v_n\|^2+\lambda|v_n|_q^q-a|v_n|_2^2-b|v_n^+|_{2^*}^{2^*}) &= \lim_{n\to\infty}\{\|v_n\|^2+\lambda(|u_n|_q^q-|u|_q^q)\\ &-a(|u_n|_2^2-|u|_2^2)-b(|u_n|_{2^*}^{2^*}-|u^+|_{2^*}^{2^*})\}.\end{aligned}$$

Agora, como $v_n = u_n - u$ e

$$\|v_n\|^2=\|u_n\|^2+\|u\|^2-2\int_\Omega \nabla u_n\nabla u dx,$$

concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\|v_n\|^2+\lambda|v_n|_q^q-a|v_n|_2^2-b|v_n^+|_{2^*}^{2^*}) &= \lim_{n\to\infty}(\|u_n\|^2+\|u\|^2-2\int_\Omega\nabla u_n\nabla u dx\\ &+\lambda|u_n|_q^q-\lambda|u|_q^q-a|u_n|_2^2+a|u|_2^2-b|u_n|_{2^*}^{2^*}+b|u^+|_{2^*}^{2^*})\\ &=\lim_{n\to\infty}\{(\|u_n\|^2+\lambda|u_n|_q^q-a|u_n|_2^2-b|u_n|_{2^*}^{2^*})\\ &-2\int_\Omega\nabla u_n\nabla u dx+2\|u\|^2\\ &-(\|u\|^2+\lambda|u|_q^q-a|u|_2^2-b|u^+|_{2^*}^{2^*})\}.\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a expressão da derivada do funcional (para $v = u_n$ e $v = u$),

$$\langle I'_\lambda(u_n),u_n\rangle=\|u_n\|^2+\lambda|u_n|_q^q-a|u_n|_2^2-b|u_n|_{2^*}^{2^*}\ \text{ e}$$

$$\langle I'_\lambda(u),u\rangle)=\|u\|^2+\lambda|u|_q^q-a|u|_2^2-b|u^+|_{2^*}^{2^*},$$

resultando que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\|v_n\|^2+\lambda|v_n|_q^q-a|v_n|_2^2-b|v_n^+|_{2^*}^{2^*}) &= \lim_{n\to\infty}(\langle I'_\lambda(u_n),u_n\rangle-2\int_\Omega\nabla u_n\nabla u dx+2\|u\|^2\\ &-\langle I'_\lambda(u),u\rangle).\end{aligned}$$

Sabemos, por (4.8), que $\langle I'_\lambda(u),u\rangle=0$, em consequência, vale a equação

$$\lim_{n\to\infty}(\|v_n\|^2+\lambda|v_n|_q^q-a|v_n|_2^2-b|v_n^+|_{2^*}^{2^*})=\lim_{n\to\infty}(\langle I'_\lambda(u_n),u_n\rangle-2\int_\Omega\nabla u_n\nabla u+2\|u\|^2).$$

Agora, como $I'_\lambda(u_n) \to 0$ em $(H_0^1)^*$ temos que $\langle I'_\lambda(u_n), u_n\rangle \to 0$ e usando o fato que $u_n \rightharpoonup u$ em H_0^1, segue que

$$\lim_{n\to\infty}(\|v_n\|^2 + \lambda|v_n|_q^q - a|v_n|_2^2 - b|v_n^+|_{2^*}^{2^*}) = 0.$$

Portanto, por (4.2), temos que $v_n \to 0$ em L^q e $v_n \to 0$ em L^2, assim, segue do limite acima que

$$\lim_{n\to\infty}(\|v_n\|^2 - b|v_n^+|_{2^*}^{2^*}) = 0. \tag{4.18}$$

Note que, por (4.12), existe $\lim\limits_{n\to\infty} |v_n^+|_{2^*}^{2^*}$, então por (4.18), existe $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n\|^2$.

Denotamos por

$$d = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2.$$

Note que $d \geq 0$, assim, podemos ter duas situações

$$d > 0 \ \text{ ou } \ d = 0.$$

Inicialmente vamos supor $d > 0$, ou seja (v_n) não converge a zero em H_0^1.

Por (4.18), como $b > 0$, resulta que $\lim_{n\to\infty} |v_n^+|_{2^*}^{2^*} = db^{-1}$, isto mostra que

$$\lim_{n\to\infty} |v_n^+|_{2^*}^2 = (db^{-1})^{\frac{2}{2^*}}. \tag{4.19}$$

Como $S = \inf\left\{ \dfrac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{(\displaystyle\int_\Omega |u|^{2^*} dx)^{\frac{2}{2^*}}} \ ; \ u \in H_0^1(\Omega),\ u \neq 0 \right\}$, então $\|v_n^+\|^2 \geq S|v_n^+|_{2^*}^2$, e como $v_n = v_n^+ - v_n^-$ obtemos $\|v_n\|^2 \geq S|v_n^+|_{2^*}^2$.

Passando ao limite esta última desigualdade, por (4.19), vemos que

$$d \geq S(db^{-1})^{\frac{2}{2^*}}.$$

Logo, como $d > 0$, segue que $d^{1-\frac{2}{2^*}} \geq S.b^{\frac{-2}{2^*}}$ e consequentemente

$$\frac{d}{N} \geq \frac{S^{\frac{N}{2}} b^{\frac{2-N}{2}}}{N}. \tag{4.20}$$

Notando de (4.9), $I_\lambda(u) \geq 0$, segue que $I_\lambda(u) + I_\lambda(v_n) \geq I_\lambda(v_n)$ e portanto,

$$\lim_{n\to\infty}(I_\lambda(u) + I_\lambda(v_n)) \geq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \frac{\lambda}{q}|v_n|_q^q - \frac{a}{2}|v_n|_2^2 - \frac{b}{2^*}|v_n^+|_{2^*}^{2^*}\right).$$

Como $v_n \to 0$ em L^q e $v_n \to 0$ em L^2 (por (4.2)) e $\lim\limits_{n\to\infty}(I_\lambda(u) + I_\lambda(v_n)) = C$ (por (4.17)), temos que

$$C \geq \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2 - \frac{b}{2^*}\lim_{n\to\infty}|v_n^+|_{2^*}^{2^*},$$

ou seja,

$$C \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) d.$$

Por outro lado, $\frac{1}{N} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}$, assim, podemos reescrever a estimativa acima, na forma

$$C \geq \frac{d}{N}. \tag{4.21}$$

Assim, por (4.20), (4.21) e pela hipótese do lema, obtemos que

$$\frac{S^{\frac{N}{2}} b^{\frac{2-N}{2}}}{N} \leq \frac{d}{N} \leq C < \frac{S^{\frac{N}{2}} b^{\frac{2-N}{2}}}{N},$$

isto é uma **contradição,** portanto podemos concluir que $d = 0$. Finalmente como $d = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2$, então $\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = 0$, isto é, $v_n = u_n - u$ converge a zero em H_0^1 e consequentemente (u_n) converge a u em H_0^1. Assim, temos que existe uma subsequência de (u_n) tal que converge em H_0^1.

□

4.1 SOLUÇÕES VIA O TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA

Proposição 4.1 *Sejam $N \geq 3$, $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Então :*

(i) O problema (4.1) possui pelo menos uma solução positiva, para todo λ suficientemente pequeno.

(ii) O problema (4.1) possui pelo menos uma solução negativa, para todo λ obtido no Lema 2.6.

Demonstração:

Prova do item (ii): Observamos que a prova do item (ii) é idêntica à que fizemos na Proposição 3.1 item (ii), devido ao fato de que a existência da solução negativa não depende da não-linearidade da equação diferencial (4.1) ser subcrítica ou crítica.

Portanto I_λ^- possui um valor crítico $C_\lambda^- \geq \alpha$, com $C_\lambda^- = \inf_{g\in\Gamma^-} \max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^-(u)$ onde, $\Gamma^- = \{g \in C([0,1], H_0^1) \ ; \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = -t_0\varphi_1\}$, e consequentemente (4.1) possui uma solução negativa. Além disso,

$$0 < C_\lambda^- \leq \frac{\lambda t_2^q}{q} |\varphi_1|_q^q \ \text{ e } \ C_\lambda^- \to 0^+, \ \text{ se } \lambda \to 0. \text{(ver Lema 3.2)} \tag{4.22}$$

Prova do item (i): Começamos notando que uma solução positiva para o problema (4.1) satisfaz a equação (no sentido fraco):

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda |u^+|^{q-1} + au^+ + b(u^+)^{2^*-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.23}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $N \geq 3$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, $1 < q < 2$ e $u^+ = \max\{u, 0\}$.

Nessa seção, vamos argumentar como no caso subcrítico (Seção 2.3) e encontrar uma solução fraca para o problema (4.23), ou seja, um ponto crítico para o funcional

$$I_\lambda^+ : H_0^1 \to \mathbb{R}$$

$$I_\lambda^+(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega (u^+)^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega (u^+)^2 dx - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx.$$

Nosso objetivo é mostrar que I_λ^+ satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha, como $I_\lambda^+(0) = 0$, então começamos por provar as seguintes condições geométricas:

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I_\lambda^+\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$ e

(b) existe um elemento $e \in H_0^1 \backslash \overline{B}_\rho$ tal que $I_\lambda^+(e) < 0$.

Prova do item(a): Pelo Lema 2.3 temos que existe $R > 0$ tal que

$$I_\lambda^+(u) > 0, \ \forall\, 0 < \|u\| \leq R. \tag{4.24}$$

Note que usando o Teorema A.27 item (i) do Apêndice e (4.24), segue que existe $0 < \rho < R$, tal que

$$0 = I_\lambda^+(0) < \inf\{I_\lambda^+(u) \ : \ \|u\| = \rho\}.$$

Tomando $\alpha = \dfrac{1}{2}\inf\{I_\lambda^+(u) \ : \ \|u\| = \rho\}$, obtemos que

$$\alpha < \inf\{I_\lambda^+(u) \ : \ \|u\| = \rho\}, \ \forall\, \|u\| = \rho.$$

Assim, existem $\rho, \alpha > 0$ tal que $\alpha < I_\lambda^+(u)$, $\forall\, \|u\| = \rho$.

Prova do item(b): Pelo Lema 2.4 temos que existe $e = t_0\varphi_1 \in H_0^1$ tal que $I_\lambda^+(e) < 0 = I_\lambda^+(0)$ para todo $\lambda > 0$ obtido no Lema 2.4. Logo por (4.24) e $\rho < R$, podemos obter $\|e\| > \rho$, isto é, $e \in H_0^1 \backslash \overline{B_\rho}$. Assim, existe $e \in H_0^1 \backslash \overline{B_\rho}$ tal que $I_\lambda^+(e) < 0$. Isto prova o item (b).

Agora, mostraremos que o funcional I_λ^+ satisfaz a condição $(P.S)$ no nível C_λ^+ definido por

$$C_\lambda^+ = \inf_{g \in \Gamma^+} \max_{u \in g([0,1])} I_\lambda^+(u),$$

onde $\Gamma^+ = \{g \in C([0,1], H_0^1) \ ; \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = t_0\varphi_1\}$ e t_0 foi obtido no Lema 2.3. Inicialmente note que

$$\max_{t \in [0,1]} I_\lambda^+(g(t)) \geq I_\lambda^+(g(0)) = I_\lambda^+(0) = 0, \ \forall\, g \in \Gamma^+.$$

Logo,

$$\max_{t\in[0,1]} I_\lambda^+(g(t)) \geq 0, \quad \forall g \in \Gamma^+$$

e consequentemente,

$$0 \leq \inf_{g\in\Gamma^+} \max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^+(u) = C_\lambda^+ < \infty.$$

Seguindo os mesmos passos feitos no Lema 4.1, obtemos que I_λ^+ satisfaz a condição Palais Smale no nível $C < \dfrac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}$, para todo $\lambda > 0$.

Agora mostraremos que $C_\lambda^+ < \dfrac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}$, para $0 < \lambda < \dfrac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}} q}{N t_0^q |\varphi_1|_q^q}$.

De fato, defina $g_0 : [0,1] \to H_0^1$ dado por $g_0(t) = t(t_0\varphi_1)$.

Segue que $g_0 \in \Gamma^+$ e além disso,

$$I_\lambda^+(g_0(t)) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(tt_0\varphi_1)|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |(tt_0\varphi_1)^+|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |(tt_0\varphi_1)^+|^2 dx - \frac{b}{2^*}\int_\Omega \left[(tt_0\varphi_1)^+\right]^{2^*} dx.$$

Como φ_1 é a autofunção positiva associado ao autovalor λ_1, temos

$$\begin{aligned} I_\lambda^+(g_0(t)) &= \frac{(tt_0)^2\lambda_1}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx + \frac{\lambda(tt_0)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx - \frac{a(tt_0)^2}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx - \frac{b(tt_0)^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \varphi_1^{2^*} dx \\ &= \frac{(tt_0)^2(\lambda_1 - a)}{2}\int_\Omega \varphi_1^2 dx + \frac{\lambda(tt_0)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx - \frac{b(tt_0)^{2^*}}{2^*}\int_\Omega \varphi_1^{2^*} dx. \end{aligned}$$

As condições $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$, $b > 0$, $t_0 > 0$ e $0 \leq t \leq 1$ resultam que

$$I_\lambda^+(g_0(t)) \leq \frac{\lambda(tt_0)^q}{q}\int_\Omega \varphi_1^q dx.$$

Isto mostra que

$$I_\lambda^+(g_0(t)) \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}|\varphi_1|_q^q, \text{ para todo } 0 \leq t \leq 1.$$

Como conseqüência da estimativa acima, concluímos

$$\max_{u\in g_0([0,1])} I_\lambda^+(u) = \max_{t\in[0,1]} I_\lambda^+(g_0(t)) \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}|\varphi_1|_q^q.$$

Agora, observando que

$$\inf_{g\in\Gamma^+} \max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^+(u) \leq \max_{u\in g_0([0,1])} I_\lambda^+(u) = \max_{t\in[0,1]} I_\lambda^+(g_0(t)),$$

obtemos

$$\inf_{g\in\Gamma^+} \max_{u\in g([0,1])} I_\lambda^+(u) \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}|\varphi_1|_q^q,$$

isto é,

$$0 \leq C_\lambda^+ \leq \frac{\lambda t_0^q}{q}|\varphi_1|_q^q. \tag{4.25}$$

Segue-se de $0 < \lambda < \dfrac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}} q}{N t_0^q |\varphi_1|_q^q}$, que $\dfrac{\lambda t_0^q}{q}|\varphi_1|_q^q < \dfrac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}$ e consequentemente decorre de (4.25) que $C_\lambda^+ < \dfrac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}$.

Portanto, concluímos que para $0 < \lambda < \dfrac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}} q}{N t_0^q |\varphi_1|_q^q}$, I_λ^+ satisfaz a condição Palais Smale em todos os níveis C_λ^+.

Finalmente, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o Teorema de Passo da Montanha garante que existe $u \neq 0$ em H_0^1 tal que $I_\lambda^+(u) = C_\lambda^+$ e $(I_\lambda^+)'(u) = 0$, isto é, u é um ponto crítico de I_λ^+ e portanto, uma solução positiva para (4.1).

□

4.2 SOLUÇÃO VIA O TEOREMA DE LINKING

Proposição 4.2 *Sejam $N \geq 4$ e $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Então para λ suficientemente pequeno, o problema (4.1) possui pelo menos uma solução não trivial.*

Demonstração : Vamos obter uma função $u \in H_0^1$ que seja um ponto crítico para o funcional

$$I_\lambda : H_0^1 \to \mathbb{R}$$
$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx - \frac{a}{2}\int_\Omega |u|^2 dx - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*} dx.$$

Para isso, utilizaremos o teorema de Linking com a condição $(P.S)_C$ (ver Apêndice Teorema C.8) com $C < \dfrac{S^{\frac{N}{2}} b^{\frac{2-N}{2}}}{N}$, onde S é a melhor constante de Sobolev da imerção $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$.

Para garantirmos a existência desse ponto crítico (não nulo) para o funcional I_λ usaremos os Lemas 2.8 e 2.9 do Capítulo 2, seção 2.5 que garantem que o funcional I_λ satisfaz a geometria exigida pelo teorema de Linking. Finalmente, o Lema 4.4 garante que I_λ satisfaz a condição $(P.S)_{C_\lambda}$, com

$$C_\lambda = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in Q_m^\epsilon} I_\lambda(h(u)) < \frac{S^{\frac{N}{2}} b^{\frac{2-N}{2}}}{N} \quad \text{onde } \Gamma = \{h \in C(Q_m^\epsilon, H_0^1)\ ;\ h = id \text{ em } \partial Q_m^\epsilon\}.$$

Continuaremos a utilizar as mesmas notações da Seção 2.5, isto é, $V_k^m \oplus W_k = H_0^1$, onde $W_k = V_k^\perp$, $V_k =< \varphi_1, \ldots, \varphi_k >$, $V_k^m =< \xi_m\varphi_1, \cdots, \xi_m\varphi_k >$.
Além disso, as estimativas seguintes são verificadas

$$\|u\|^2 \leq \lambda_k |u|_2^2 \,, \forall u \in V_k^m \quad \text{e} \quad \|u\|^2 \geq \lambda_{k+1}|u|_2^2 \,, \forall u \in W_k. \tag{4.26}$$

O lema que enunciaremos abaixo, é um resultado bastante conhecido na literatura matemática, portanto, não iremos demostrá-lo, mas será utilizado na prova do Lema 4.4.

Lema 4.2 *(ver [28]) quando* $\epsilon \to 0^+$ *obtemos:*

(1) $\|U_\epsilon^m\|^2 = S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^{N-2})$,

(2) $|U_\epsilon^m|_{2^*}^{2^*} = S^{\frac{N}{2}} + O(\epsilon^N)$,

(3) $|U_\epsilon^m|_2^2 \geq \begin{cases} d\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2), & se\ N = 4 \\ d\epsilon^2 + O(\epsilon^{N-2}), & se\ N \geq 5 \end{cases}$ *, onde* $d > 0$ *é constante.*

Lema 4.3 *Sejam* $A > 0$ *e* $B > 0$ *constantes positivas, então*

$$\max_{t\geq 0}\left(\frac{At^2}{2} - \frac{Bt^{2^*}}{2^*}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{A}{B^{\frac{2}{2^*}}}\right)^{\frac{N}{2}}.$$

Demonstração: Defina a função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \dfrac{At^2}{2} - \dfrac{Bt^{2^*}}{2^*}$. O ponto crítico $t_0 = \left(\dfrac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2^*-2}}$ é ponto de máximo global para f e o valor máximo de f é

$$f(t_0) = \frac{1}{N}\left(\frac{A}{B^{\frac{2}{2^*}}}\right)^{\frac{N}{2}}.$$

□

Nosso objetivo é obter uma esfera $S_\rho = \partial B_\rho \cap W_k$ e um retângulo $Q_m^\epsilon = (B_R \cap V_k^m) \oplus ([0, RU_\epsilon^m])$, onde $U_\epsilon^m = \eta U_\epsilon$ com $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{m}}, \mathbb{R})$ tais que:

(i) $I_\lambda\Big|_{S_\rho} \geq \alpha > 0$,

(ii) $I_\lambda\Big|_{\partial Q_m^\epsilon} < \beta < \alpha; \quad 0 < \rho < R$,

(iii) $\sup\limits_{u\in Q_m^\epsilon} I_\lambda(u) < \dfrac{S^{\frac{N}{2}} b^{\frac{2-N}{2}}}{N}$.

Demonstração da Geometria de Linking

Prova do item (i): Pelo Lema 2.8, existe $\alpha > 0$ e $\rho > 0$ tal que $I_\lambda\Big|_{S_\rho} \geq \alpha$, provando assim, o item (i) da geometria de Linking.

Prova do item (ii): Para cada $m \in \mathbb{N}$, sem perda da generalidade podemos supor que $\|U_\epsilon^m\| = 1$.

Substituindo U_ϵ^m por φ_{k+1}^m no Lema 2.9, para $\delta > 0$ existem $m_0 \in \mathbb{N}$ e $R > \rho$ tais que,

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\lambda}{q}\int_\Omega |u|^q dx,$$

sempre que $u \in \partial Q_m^\epsilon$, onde $Q_m^\epsilon = (B_R \cap V_k^m) \oplus (0, RU_\epsilon^m), m \geq m_0$ e $\lambda \leq \delta$.

Logo, temos que

$$I_\lambda(u) \leq \frac{\delta}{q}\int_\Omega |u|^q dx, \ \forall\ \delta > 0, \tag{4.27}$$

para $u \in \partial Q_m^\epsilon$, onde $Q_m^\epsilon = (B_R \cap V_k^m) \oplus (0, RU_\epsilon^m)$, $m \geq m_0$.

Como as normas $|.|_q$ e $\|.\|$ no espaço de dimensão finita $V_k^m \oplus < U_\epsilon^m >$ são normas equivalentes, então existe $K_0 > 0$ tal que $|u|_q \leq K_0\|u\|$, $\forall\ u \in \partial Q_m^\epsilon$ e portanto, como Q_m^ϵ é limitada em H_0^1, existe $K_1 > 0$ tal que

$$|u|_q^q \leq K_1, \ \forall\ u \in \partial Q_m^\epsilon. \tag{4.28}$$

Portanto, por (4.27) e (4.28), obtemos que existe $\beta > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) < \beta < \alpha,$$

para todo $u \in \partial Q_m^\epsilon$ onde $Q_m^\epsilon = (B_R \cap V_k^m) \oplus (0, RU_\epsilon^m)$, $m \geq m_0$.

Lema 4.4 *Se $N \geq 4$ e $\lambda_k < a < \lambda_{k+1}$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então existem $m_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$ e $\epsilon_0 > 0$ tais que*

$$\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N},$$

para todo $m \geq m_0$, $0 < \lambda < \lambda_0$ e $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Demonstração: Temos que $I_\lambda(u) = J(u) + \dfrac{\lambda}{q}|u|_q^q$, onde

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{a}{2}|u|_2^2 - \frac{b}{2^*}|u^+|_{2^*}^{2^*}.$$

Afirmação: Mostremos primeiro que é suficiente provar que para $N \geq 4$ existem $m_0 \in \mathbb{N}$ e $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} J(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N} \ \text{ para } m \geq m_0 \text{ e } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

De fato, suponha que para $N \geq 4$ existem $m_0 \in \mathbb{N}$ e $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} J(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N} \ \text{ para } m \geq m_0 \text{ e } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Então

$$\frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N} - \sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} J(u) > 0, \ \text{ para todo } m \geq m_0 \text{ e } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Portanto, existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\frac{\lambda}{q}\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} |u|_q^q < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N} - \sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} J(u), \ \text{ para todo } m \geq m_0,\ 0 < \epsilon < \epsilon_0 \ \text{ e } \ 0 < \lambda < \lambda_0,$$

isto é,

$$\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(u) \leq \sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} J(u) + \frac{\lambda}{q}\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} |u|_q^q < \frac{b^{\frac{2-N}{2}}S^{\frac{N}{2}}}{N},\ m\geq m_0,\ 0<\epsilon<\epsilon_0 \ \text{ e } \ 0<\lambda<\lambda_0,$$

o que prova a nossa afirmação.

Então iniciamos a prova do lema mostrando que para $N\geq 4$ existem $m_0\in\mathbb{N}$ e $\epsilon_0>0$ tal que

$$\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} J(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}}S^{\frac{N}{2}}}{N} \quad \text{para } m\geq m_0 \text{ e } 0<\epsilon<\epsilon_0.$$

Seja $u = v + tU_\epsilon^m \in \overline{Q_m^\epsilon}$, com $t\geq 0$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} J(tU_\epsilon^m) &= \frac{t^2}{2}\|U_\epsilon^m\|^2 - \frac{at^2}{2}|U_\epsilon^m|_2^2 - \frac{bt^{2^*}}{2^*}|U_\epsilon^m|_{2^*}^{2^*} \\ &= \frac{(\|U_\epsilon^m\|^2 - a|U_\epsilon^m|_2^2)t^2}{2} - \frac{b|U_\epsilon^m|_{2^*}^{2^*}t^{2^*}}{2^*}. \end{aligned}$$

Usando o Lema 4.3 com $A=\|U_\epsilon^m\|^2 - a|U_\epsilon^m|_2^2>0$ (ver 4.26) e $B=b|U_\epsilon^m|_{2^*}^{2^*}$ obtemos

$$\max_{t\geq 0} J(tU_\epsilon^m) = \frac{b^{\frac{2-N}{2}}}{N}\left(\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a|U_\epsilon^m|_2^2}{|U_\epsilon^m|_{2^*}^2}\right)^{\frac{N}{2}}. \tag{4.29}$$

Agora, como $\lambda_k<a<\lambda_{k+1}$, existe $\delta>0$ tal que $\lambda_k<\delta<a$. Logo $\delta-\lambda_k>0$ e consequentemente pode-se obter $m_0>0$ suficientemente grande tal que $\dfrac{C_k}{m_0^{N-2}}<\delta-\lambda_k$ onde, C_{km} foi obtido no Lema 2.7.

Portanto,

$$\lambda_k + C_k m_0^{2-N} < \delta < a. \tag{4.30}$$

Assim, para todo $m\geq m_0$, tem-se $\dfrac{C_k}{m_0^{N-2}} \geq \dfrac{C_k}{m^{N-2}}$, logo podemos deduzir que para $v\in V_k^m\setminus\{0\}$ obtemos que

$$\lambda_k + C_k m_0^{2-N} \geq \lambda_k + C_k m^{2-N} \geq \max_{\{u\in V_k^m/\int_\Omega u^2dx=1\}} \|u\|^2 \geq \left\|\frac{v}{|v|_2}\right\|^2,$$

onde a segunda desigualdade segue do Lema 2.7.

Além disso, a estimativa acima nos garante que

$$\lambda_k + C_k m_0^{2-N} \geq \left\|\frac{v}{|v|_2}\right\|^2. \tag{4.31}$$

Logo, por (4.30) e (4.31), segue-se que

$$\frac{\delta|v|_2^2}{2} \geq \frac{\|v\|^2}{2};\ \text{ para todo } v\in V_k^m \ \text{ e } \ m\geq m_0 \tag{4.32}$$

Assim, por (4.32), para todo $m\geq m_0$, $b>0$ e $v\in V_k^m\cap B_R$, temos

$$J(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{a}{2}|v|_2^2 - b\frac{1}{2^*}|v^+|_{2^*}^{2^*} \leq \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{a}{2}|v|_2^2 \leq \frac{\delta}{2}|v|_2^2 - \frac{a}{2}|v|_2^2 = \frac{|v|_2^2}{2}(\delta - a).$$

Portanto, como $\delta < a$, concluímos que

$$J(v) < 0;\ \forall\, v \in V_k^m \cap B_R \ \text{ e } \ m \geq m_0 \tag{4.33}$$

Utilizando ideias análogas às que fizemos no capítulo anterior, temos

$$supp\ u \cap supp\ \varphi_{k+1}^m = \phi,\ \forall\, u \in V_k^m.$$

Logo pela Proposição 2.2 do capítulo 2, para $u = v + tU_\epsilon^m \in (B_R \cap V_k^m) \oplus [0, RU_\epsilon^m]$ obtemos que

$$J(u) = J(v) + J(tU_\epsilon^m). \tag{4.34}$$

Agora por (4.29), (4.33) e (4.34) podemos deduzir que

$$J(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}}}{N}\left(\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a|U_\epsilon^m|_2^2}{|U_\epsilon^m|_{2^*}^2}\right)^{\frac{N}{2}},\ \forall\, u \in (B_R \cap V_k^m) \oplus [0, RU_\epsilon^m] \ \text{ com } m \geq m_0.$$

Portanto,

$$\sup_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} J(u) \leq \frac{b^{\frac{2-N}{2}}}{N}\left(\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a|U_\epsilon^m|_2^2}{|U_\epsilon^m|_{2^*}^2}\right)^{\frac{N}{2}} \quad \text{com } m \geq m_0 \tag{4.35}$$

Para estimar a desigualdade (4.35) usaremos o Lema 4.2, portanto dividiremos a prova em dois casos :

Caso (1): Se $N = 4$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a|U_\epsilon^m|_2^2}{|U_\epsilon^m|_{2^*}^2} &= \frac{S^2 - ad\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2)}{(S^2 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{S^2(1 - a\frac{d}{S^2}\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2))}{(S^2(1 + \frac{O(\epsilon^4)}{S^2}))^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{S(1 - a\widehat{d}\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2))}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{onde } \widehat{d} = \frac{d}{S^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a|U_\epsilon^m|_2^2}{|U_\epsilon^m|_{2^*}^2} \leq S\left[\frac{1}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} - \frac{a\widehat{d}\epsilon^2|ln\epsilon|}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} + \frac{O(\epsilon^2)}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}}\right]. \tag{4.36}$$

Note agora que, como $\dfrac{\frac{O(\epsilon^2)}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}}}{\epsilon^2} = \dfrac{O(\epsilon^2)}{\epsilon^2}\dfrac{1}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}}$ é limitado, para ϵ suficientemente pequeno,

$$\frac{O(\epsilon^2)}{(1 + O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} = O(\epsilon^2). \tag{4.37}$$

Também observe que $\dfrac{1}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} \to 1^-$, quando $\epsilon \to 0$, então podemos obter para ϵ suficientemente pequeno de forma que $\dfrac{1}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} \geq \dfrac{1}{2}$.
Logo,

$$-\frac{a\widehat{d}\epsilon^2|ln\epsilon|}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} \leq -\frac{a\widehat{d}\epsilon^2|ln\epsilon|}{2} = -a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon|, \text{ onde } \widetilde{d} = \frac{\widehat{d}}{2}. \tag{4.38}$$

Finalmente, definindo a função $f(t) = \dfrac{1}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$, pelo Teorema do valor Médio, obtemos que

$$\frac{1}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{2}(1+\theta)^{\frac{-3}{2}}O(\epsilon^4), \text{ onde } \theta \in (0, O(\epsilon^4)).$$

Assim,

$$\frac{1}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} = 1 - O(\epsilon^4). \tag{4.39}$$

Agora, subtituindo (4.37), (4.38) e (4.39) em (4.36) segue que

$$\begin{aligned}\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a|U_\epsilon^m|_2^2}{|U_\epsilon^m|_{2^*}^2} &\leq S\left[\frac{1}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} - \frac{a\widehat{d}\epsilon^2|ln\epsilon|}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}} + \frac{O(\epsilon^2)}{(1+O(\epsilon^4))^{\frac{1}{2}}}\right] \\ &\leq S\left[1 - O(\epsilon^4) - a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2)\right] \text{ e}\end{aligned}$$

então

$$\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a|U_\epsilon^m|_2^2}{|U_\epsilon^m|_{2^*}^2} \leq S(1 - a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2)) = S\left(1 - a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon| + \frac{\epsilon^2 O(\epsilon^2)}{\epsilon^2}\right).$$

Agora, como $\dfrac{O(\epsilon^2)}{\epsilon^2}$ é limitada e $a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon| \to \infty$, quando $\epsilon \to 0$, podemos deduzir que para ϵ suficientemente pequeno que, $-a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2) < 0$, assim, concluímos que,

$$\frac{\|U_\epsilon^m\|^2 - a|U_\epsilon^m|_2^2}{|U_\epsilon^m|_{2^*}^2} \leq S\left[1 - a\widetilde{d}\epsilon^2|ln\epsilon| + O(\epsilon^2)\right] < S, \text{ onde } \epsilon \approx 0.$$

Logo, para $N = 4$, segue de (4.35) que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ e $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} J(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}}S^{\frac{N}{2}}}{N} \text{ para } m \geq m_0 \text{ e } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Caso (2): Se $N \geq 5$ A demonstração para este caso, segue de forma análoga a que fizemos acima.

□

Observação 1 *Agora estamos aptos a mostrar que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o funcional I_λ satisfaz a condição Palais-Smale no nível*

$$C_\lambda = \inf_{h\in\Gamma}\sup_{u\in\overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(h(u)), \text{ onde } \Gamma = \{h \in C(\overline{Q_m^\epsilon}, H_0^1) \; ; \; h = id \text{ em } \partial Q_m^\epsilon\}.$$

De fato, o Lema 4.4 garante que existem $m_0 \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 > 0$ e $\epsilon_0 > 0$ tais que

$$\sup_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}, \text{ para todo } m \geq m_0,\ 0 < \lambda < \lambda_0 \text{ e } 0 < \epsilon < \epsilon_0.$$

Assim, para m_0, λ_0 e ϵ_0 dadas acima,

$$\inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(h(u)) \leq \sup_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(u) < \frac{b^{\frac{2-N}{2}} S^{\frac{N}{2}}}{N}.$$

Portanto, pelo Lema 4.1 para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno I_λ satisfaz a condição Palais Smale $(P.S)_{C_\lambda}$, onde $C_\lambda = \inf\limits_{h \in \Gamma} \sup\limits_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(h(u))$.

Logo, tomando $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, pelo teorema de Linking com a condição $(P.S)_C$ (ver Apêndice, Teorema C.8) obtemos que $C_\lambda = \inf\limits_{h \in \Gamma} \sup\limits_{u \in \overline{Q_m^\epsilon}} I_\lambda(h(u))$ é um valor crítico do funcional I_λ com $C_\lambda \geq \alpha$, isto é, existe $u_c \in H_0^1$ solução fraca de (4.1) tal que $0 < \alpha \leq I_\lambda(u_c)$. Logo u_c é não nula, pois $I_\lambda(0) = 0$.

Prova do Teorema 4.1:

Agora mostraremos que u_c é distinto dos demais pontos críticos encontrados para os funcionais I_λ^+ e I_λ^-.

De fato, segue de (4.22) e (4.25), que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, obtemos que $0 < C_\lambda^+, C_\lambda^- < \alpha \leq C_\lambda$. Portanto, para $\lambda > 0$ suficientemente pequeno, o problema (4.1) possui pelo menos três soluções não triviais.

$\square$

REFERÊNCIAS

[1] AMBROSETTI, A. ; BREZIS, H. ; CERAMI, G. *Combined effects of concave and convex nonlinear in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (1994) 519-543.

[2] ARCOYA, D. ; VILLEGAS, S. *Nontrivial solutions for a Neumann problem with a nonlinear term asymptotically linear at $-\infty$ and superlinear at $+\infty$*, Math.Z. 219 (1995) 499-513.

[3] BIEZUNER, R. J.*Autovalores do Laplaciano. Notas de aula do curso Tópicos em Análise*, UFMG, Brasil, (2006).

[4] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations.* Springer-NewYork. Math, 2010.

[5] BREZIS, H. ; NIRENBERG, L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-477.

[6] BREZIS, H. ; NIRENBERG, L. *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci., Paris I 317 (1993) 465-472.

[7] CAPOZZI, A. ; FORTUNATO, D. ; PALMIERI, G. *An existence result for nonlinear elliptic problems involving critical Sobolev exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 2 (1985) 463-470.

[8] CHABROWSKI, J. ; YANG, J. *On the Neumann problem with combined nonlinearities*, Ann. Polon. Math. 85 (2005) 239-250.

[9] CALANCHI, M. ; RUF, B. *Elliptic equations with one-sided critical growth*, Electron. J. Differential Equations 89 (2002) 21 (electronic).

[10] CALANCHI, M. ; RUF, B. ; ZHANG, Z. *Elliptic equations in R^2 with one-sided exponential growth*, Commun. Contemp. Math. 6 (2004) 947-971.

[11] CUESTA, M. ; DE FIGUEIRIDO, D.G. ; SRIKANTH, P.N. *On a resonant-superlinear elliptic problem*, Calc. Var. Partial Differential Equations 17 (2003) 221-233.

[12] CHANG, X. *Multiplicity of solutions for semilinear elliptic problems with combined nonlinearities*, Commun. Contemp. Math. 13 (2011) 389-405.

[13] DE MORAIS FILHO, D.C. ; PEREIRA, F.R. *Critical Ambrosetti-Prodi type problems for systems of elliptic equations*, Nonlinear Anal. 68 (2008) 194-207.

[14] DE FIGUEIREDO, D. G.*Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours.* Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81, Springer-Verlag, 1989.

[15] DE PAIVA, F.O. ; MASSA, E. *Multiple solutions for some elliptic equations with a nonlinearity concave at the origin*, Nonlinear Anal. 66 (2007) 2940-2946.

[16] DE PAIVA, F.O. ; PRESOTO, A. *Semilinear elliptic problem with asymmetric nonlinearities* J. Math. Anal. Appl. 409 (2014) 254-262.

[17] DE FIGUEREIDO, D.G. ; YANG, J. *Critical superlinear Ambrosetti-Prodi problems*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 14 (1999) 59-80.

[18] FOLLAND G.*Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, John Wiley & Sons, New York, 1999.

[19] GAZZOLA, F. ; RUF, B. *Lower-order perturbations of critical growth nonlinearities in semilinear elliptic equations*, Adv. Differential Equations 2 (1997) 555-572.

[20] MONTREANU, D. ; MONTREANU, V.V. ; PAPAGEORGIOU, N.S. *p-Laplacian equations with concave terms and asymmetric perturbations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 141 (2011) 171-192.

[21] MONTREANU, D. ; MONTREANU, V.V. ; PAPAGEORGIOU, N.S. *Multiple solutions for Dirichlet problems are superlinear at* $+\infty$ *and (sup-)linear at* $-\infty$, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 13 (2009) 341-358.

[22] MITROVIÂC, D. *Fundamentals of Applied Functional Analysis.* England: Logman,1998.

[23] PERERA, K. *Multiplicity results for some elliptical problems with concave nonlinearities*, J. Differential Equations 140 (1997) 133-141.

[24] PAPAGEORGIOU, N.S. ; SMYRLIS, G. *A multiplicity theorem for Neumann problems with asymmetric nonlinearities*, Ann. Mat. Pura Appl. 189 (2010) 253-272.

[25] RIBEIRO, B. *The Ambrosetti-Prodi problem for gradient elliptic systems with critical homogeneous nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl. 363 (2010) 606-617.

[26] RUF, B. ; SRIKANTH, P.N. *Multiplicity results for superlinear elliptic problems with partial interference with the spectrum*, J. Math. Anal. Appl. 118 (1986) 15-23

[27] RABINOWITZ, P.H. *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics 65, American Matematical Society, 1986.

[28] WILLEM, M. *Minimax Theorems, in: Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*, vol. 24, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1996.

[29] WILLEM, M. *Analyse Harmonique Réelle*, Hermann, Paris, 1995.

[30] http://anhngq.wordpress.com/tag/brezis-lieb-lemma/, página consultada 15/05/2015.

APÊNDICE A – Resultados Gerais

A finalidade dessa seção é apresentar as definições da diferencial de Gateaux e Frechet e alguns resultados. Além disso, as noções de derivada fraca, espaços de Sobolev e algumas de suas propriedades. também serão apresentadas sem o rigor que estes conceitos merecem, mas indicaremos na bibliografia, onde o leitor poderá recorrer caso desejar.

Definição A.1 *Seja $F : U \subset V \to \mathbb{R}$ uma função, onde U é um aberto em $V \subset \mathbb{R}^N$. O limite*

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t}$$

se existir, será chamado derivada de Gateaux de F em u_0 na direção $h \in V$ e será denotada por $\langle F'(u_0), h\rangle$.

Definição A.2 *Diz-se que F é diferenciável em u_0 no sentido de Frechet ou Frechet diferenciável em u_0 se existir uma aplicação linear contínua $L : V \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(u_0 + h) - F(u_0) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Teorema A.3 *Seja $\phi : E \to \mathbb{R}$ onde E é um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado X. Se ϕ possui uma derivada de Gateaux contínua em E, então $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Ver [28] cap.1.

Teorema A.4 *Seja (u_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \to u$. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e existe $h \in L^p(\Omega)$ tais que*

(i) $u_{n_k} \to u$, *q.t.p. em* Ω,

(ii) $|u_{n_k}| \leq h$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *e q.t.p em* Ω.

Demonstração: Ver [4] Teo. 4.9, pg. 94.

Teorema A.5 *Seja E um espaço vetorial normado e $(x_n) \subset E$ uma sequência, então valem as seguintes afirmações :*

(i) $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$ *para todo* $f \in E^*$;

(ii) Se $x_n \to x$, *então* $x_n \rightharpoonup x$;

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$, *então* (x_n) *é limitada e além disso* $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$;

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ *e* $f_n \to f$ *em* E^* *(isto é* $\|f_n - f\|_{E^*} \to 0$*), então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$*.*

Demonstração: Ver [4] Prop. 3.13, pg. 63.

Definição A.6 *Dizemos que um comjunto* A *está compactamente contido em* Ω*, e denotamos por* $A \subset\subset \Omega$ *se* $A \subset \bar{A} \subset \Omega$ *e* $\bar{A}$ *é compacto como subconjunto de* $\mathbb{R}^N$*.*

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto não-vazio e $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ uma função.

Definição A.7 *O conjunto* $\overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ *é chamado **Suporte** da função* f*. Denotamos este conjunto por supp* f*.*

Definição A.8 *Representemos por* $C_0^\infty(\Omega)$ *o conjunto das funções* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*, cujas derivadas parciais de todas as ordens são contínuas e cujo suporte é um conjunto compacto contido em* Ω*.*

Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ *um subconjunto não vazio. A função definida por*

$$1_K(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in K \\ \\ 0 & se \quad x \notin K \end{cases}$$

é chamada a função caracteristica de K

Definição A.9 *Seja* $1 \leq p \leq \infty$*. Uma função* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *pertence a* $L^p_{loc}(\Omega)$ *se* $f1_K \in L^p(\Omega)$*, para todo compacto* $K \subset \Omega$*. Seja um vetor* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$*, onde* α_i *é um inteiro não negativo. Então* α *é chamado um multi-índice de ordem* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$*. Dado um multi-índice* α *definimos*

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição A.10 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto,* α *um multi-indice e* $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$*. Dizemos que* g *é a* α*-ésima derivada fraca de* f *em* Ω *e escrevemos* $D^\alpha f = g$*, se*

$$\int_\Omega f(x).D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x).\phi dx, \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição A.11 *Seja* k *um inteiro não negativo e* $1 \leq p \leq \infty$*. Definimos o espaço de Sobolev* $W^{k,p}(\Omega)$*, como o espaço das funções* $v \in L^p(\Omega)$ *tais que qualquer derivada fraca de* v*, até a ordem* k*, é uma função do* $L^p(\Omega)$*. Isto é,*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega),\ \textit{para todo multi-índice}\ \alpha\ \textit{com}\ |\alpha| \leq k\}.$$

Definição A.12 *Nota-se que para cada p tal que $1 \leq p \leq \infty$,*

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega). \tag{A.1}$$

Além disso, para cada p, $W^{k_1,p} \subset W^{k_2,p}$ se $k_1 \geq k_2$. Para $1 \leq p \leq \infty$, temos que $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach munido da norma $||.||_{W^{k,p}} : W^{k,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que é dada por

$$||v||_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} |||D^\alpha v||_{L^p}^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha v|^p \right)^{1/p}, \qquad se\ 1 \leq p < \infty. \tag{A.2}$$

Uma norma equivalente de (A.2) para $W^{k,p}(\Omega)$ é

$$||v||_{W^{k,p}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v||_{L^p}.$$

Em particular, para $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{k,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, para cada k não negativo, munido do produto interno:

$$\langle u, v \rangle_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}, \quad \forall\, u, v \in W^{k,2}(\Omega).$$

Usualmente denota-se H^k o espaço $W^{k,2}(\Omega)$, assim de (A.1) temos $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Definição A.13 *Sejam $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dizemos que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge para u em $W^{k,p}(\Omega)$, denotado por $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$, se*

$$\lim_{n \to \infty} ||u_n - u||_{W^{k,p}} = 0.$$

Definição A.14 *Definimos o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Analogamente, denotemos por $H_0^k(\Omega)$ o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^k(\Omega)$.*
Portanto, uma função $u \in W^{k,p}(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$.
O espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ interpreta-se como o conjunto das funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$. tais que

$$D^\alpha u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \text{ para todo } |\alpha| \leq k - 1$$

Notamos que, para cada k não negativo, $W_0^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma induzida de $W^{k,p}(\Omega)$. Também nota-se que, para $p = 2$, $H_0^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a norma induzida de $H^k(\Omega)$.

uma norma para $W_0^{k,p}(\Omega)$ equivalente à norma dada em (A.2) pode ser definido por

$$||u||_{W_0^{k,p}} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| = k} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}.$$

Como $H^k(\Omega)$ e $H_0^k(\Omega)$ são espaços de Hilbert então são espaços reflexivos.

Definição A.15 *(Imersão) Sejam U e V dois espaços normados. Dizemos que U está imerso no espaço V, e denotamos por $U \hookrightarrow V$, se satisfaz as seguintes condições :*

i. U é um subespaço de V.

ii. O operador identidade $I : U \to V$ definido por $Ix = x$, para todo $x \in U$, é contínuo.

Lembremos que se U e V são espaços normados. Dizemos que um operador linear $T : U \to V$ é compacto quando T é contínuo e T leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos, isto é, se $A \subseteq U$ é limitado então $\overline{T(A)} \subseteq V$ é compacto.

Já que I é linear, (ii) é quivalente a dizer que existe uma constante c tal que

$$\|Ix\|_V \leq c\|x\|_U, \quad \forall\, x \in U.$$

Se $U \hookrightarrow V$ e o operador identidade $I : U \to V$ na imersão é compacto, então dizemos que a imersão de U em V é compacta e a denotamos por $U \overset{c}{\hookrightarrow} V$.

Teorema A.16 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto de clase C^1 com fronteira limitada e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são contínuas:*

i. Se $1 \leq p < N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ onde $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.

ii. Se $p = N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $q \in [p, +\infty)$.

iii. Se $p > N$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [4].

Teorema A.17 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ é um domínio limitado com fronteira suave, então*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

$$\textit{com} \qquad 1 \leq q \leq 2^* = \begin{cases} \dfrac{2N}{N-2} & \textit{se} \quad N \geq 3; \\ \\ \infty & \textit{se} \quad N = 1, 2. \end{cases}$$

Demonstração: Ver [4].

Teorema A.18 (Rellich-Kondrachov) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado de classe $C^1(\Omega)$ e $N \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas.*

(i). Se $p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*[$, onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$.

(ii). Se $p = N$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$.

(iii). Se $p > N$*, então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Demonstração: Ver [4].

Observação 1: Notar que, se $p = 2$, então para (i) e (ii) do teorema acima, temos que

$$H^1(\Omega) = W^{1,2} \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega),$$

onde $q \in [1, p^*[$ com $p^* = \dfrac{2N}{N-2}$ se $N > p = 2$, e $q \in [1, +\infty[$ se $N = p = 2$.
Agora, como $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, então

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega).$$

De fato, seja o operador identidade $I : H_0^1(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Temos que mostrar que I é um operador compacto.
Com efeito: Seja $A \subset H_0^1(\Omega)$ limitado, então $\|u\|_{H_0^1} \leq k,\ \forall\, u \in A$. Como $u \in H_0^1(\Omega)$, então pela equivalência de normas, temos que $\|u\|_{H^1} \leq c\|u\|_{H_0^1} \leq ck$, $\forall\, u \in A$, assim A é limitado em $H^1(\Omega)$. Já que $H^1(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^q(\Omega)$, obtemos que $IA = A$ é relativamente compacto em $L^q(\Omega)$ o que implica que I é um operador compacto.
Em particular, se $q = 2$ temos,

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

Observação 2: Uma consequência importante da imersão compacta $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ é que se $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ e $\|u_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe uma subseqüência (u_{n_k}) de (u_n) e $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u_{n_k} \to u$ em $L^2(\Omega)$ e $u_{n_k} \to u,$ q.t.p. em Ω.

Teorema A.19 (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, com* $0 < p < \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Então*

$$fg \in L^1(\Omega) \ \text{e} \ \int_\Omega |fg|dx \leq |f|_p |g|_q.$$

Demonstração: Ver [4] Teo. 4.6, pag 92.

Teorema A.20 (Teorema da convergência dominada de Lebesgue) *Sejam* f_n *uma seqüência de funções em* $L^1(\Omega)$*, satisfazendo :*

(a) $f_n \to f$ *q.t.p. em* Ω;

(b) Existe $g \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Então $f \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx$$

Demonstração: Ver [4] Teo. 4.2, pag 90.

Teorema A.21 (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) *Seja* $1 \leq p < N$, *então* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$ *e existe uma constante* $C = C(p, N)$ *tal que*

$$|u|_{p^*} \leq C|\nabla u|_p, \ \forall \ u \in W^{1,p}(R^N).$$

Demonstração: Ver [4] Teo. 9.9, pag 270.

Colorário A.22 *No teorema acima pode-se trocar* Ω *(aberto qualquer) por* $\mathbb{R}^N$

Ver [4] pag 290, Observação 20.

Teorema A.23 (Desigualdade de Poincaré) *Seja* Ω *um domínio aberto e limitado de* $\mathbb{R}^N$ *e* $p \in [1, \infty]$. *Então existe uma constante* $C = C(p, \Omega) > 0$ *tal que*

$$|u|_p \leq C\|\nabla u\|_{W^{1,P}}, \ \forall \ u \in W_0^{1,p}(R^N).$$

Demonstração: Ver [22]

Lema A.24 (Brézis-Lieb, primeira versão) *Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^N$ *e seja* $(u_n) \subset L^p$, $1 < p < \infty$. *Se*

(a) (u_n) *é limitada em* $L^p(\Omega)$;

(b) $u_n \to u$ *q.t.p em* Ω.

Então

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Demonstração: Ver [29].

Lema A.25 (Brézis-Lieb, segunda versão) *Sejam* $1 \leq p < \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e* (f_n) *uma sequência limitada de funções em* $L^p(\Omega)$ *que converge em quase todo ponto para* f, *então*

$$f \in L^p(\Omega) \quad e \quad \lim_{n\to\infty}(|f_n|_p^p - |f - f_n|_p^p) = |f|_p^p.$$

Demonstração: Ver [28].

Lema A.26 (Brézis-Lieb, mais geral) *Sejam* $1 \leq p < \infty, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e* $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é uma função contínua com* $j(0) = 0$ *que satisfaz a seguinte hipotese: Para cada* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno, existem duas funções contínuas,* φ_ϵ *e* ψ_ϵ *não negativas tais que*

$$|j(a+b) - j(a)| \leq \epsilon\varphi_\epsilon(a) + \psi_\epsilon(b), \text{ para todo } a, b \in \mathbb{C}.$$

Seja $f_n = f + g_n$ *uma sequência de funções em* $L^p(\Omega)$ *tal que*

(a) $g_n \to 0$ *q.t.p em* Ω.

(b) $j(f) \in L^1$.

(c) $\int_\Omega \varphi_\epsilon(g_n(x))dx \leq C < \infty$, *para alguma constante* C, *independente de* ϵ *e* n.

(d) $\int_\Omega \psi_\epsilon(f(x))dx < \infty$, *para todo* $\epsilon > 0$.

Então $\lim_{n\to\infty} \int [j(f+g_n) - j(g_n) - j(f)]dx = 0$, *quando* $n \to \infty$

Demonstração: Ver [30].

Teorema A.27 (Sobre a natureza de mínimos locais) *Seja* $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *que satisfaz a condição de palais-Smale (P.S.). Suponha que* $u_0 \in X$ *é um mínimo local, isto é, existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $\Phi(u_0) \leq \Phi(u)$, $\forall\ \|u - u_0\| \leq \epsilon$. *Então para qualquer* $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ *se obtem ou*

(i) existe $0 < \alpha < \epsilon_0$, *tal que* $\Phi(u_0) < \inf\{\Phi(u) : \|u - u_0\| = \alpha\}$ *ou*

(ii) para cada, α *com* $0 < \alpha < \epsilon_0$, Φ *tem um mínimo local em um ponto* u_α *com* $\|u_\alpha - u_0\| = \alpha$ *e* $\Phi(u_\alpha) = \Phi(u_0)$.

Demonstração: Ver [14] Teo. 5.10, pg. 51.

Lema A.28 *Se* $a \geq 0$, $b \geq 0$ *e* $0 < \lambda < 1$, *então*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b,$$

com igualdade se e somente se $a = b$.

Demonstração: Ver [18] 6.1 Lema, pg. 182.

APÊNDICE B – Teoria do Grau

Neste apêndice nosso objetivo é definir o grau topológico de Brouwer num espaço de dimensão finita para qualquier função contínua, suas propriedades e comsequências. Isso será feito em 3 etapas :

(i) Para a função φ de classe C^1 e b valor regular de φ.

(ii) Para a função φ de classe C^2 e b valor singular de φ.

(iii) Para qualquer φ contínua.

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e limitado.
Para o espaço $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ (O espaço das funções k-vezes continuamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$) iremos considerar a seguinte norma :

$$\|\varphi\|_k = \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|D^j \varphi(x)\|.$$

Denotaremos o Jacobiano de φ no ponto $x_0 \in \Omega$ por $J_\varphi(x_0) = det\varphi'(x_0)$.
Dizemos que x_0 é ponto crítico de φ se $J_\varphi(x_0) = 0$, caso contrário dizemos que x_0 é ponto regular de φ.
Dado $b \in \mathbb{R}$ O ponto b é chamado valor singular de φ se for imagem de algum ponto crítico, caso contrário é chamado de valor regular.
Denotaremos po S_φ o conjunto dos pontos críticos de uma função φ, isto é,

$$S_\varphi = \{x \in \Omega \quad : \quad J_\varphi(x) = 0\}$$

Teorema B.1 (Teorema de Sard) *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$, φ uma função de clase $C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, então $\varphi(S_\varphi)$ tem medida nula.*

Observação: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto limitado, $\varphi \in C^1(\Omega)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se b é um valor regular de φ, então $\varphi^{-1}(b)$ é finito. Note que segue considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Definição B.2 *Sejam $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cap \varphi(S_\varphi)$. Definimos o grau topológico de φ em relacão a Ω no ponto b sendo o número inteiro :*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{x \in \varphi^1(b)} Sgn(J_\varphi(x)),$$

onde a função Sgn é a função sinal definida por:

$$Sgn(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t > 0 \\ -1, & se \quad t < 0 \end{cases}$$

Definição B.3 *Sejam $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \in \mathbb{R}^N$ tal que $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $b \in \varphi(S_\varphi)$. Considere C_b a componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$ que comtém b. Definimos o grau topológico de φ em Ω no ponto b, sendo*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, x), \ \forall x \in C_b \ \text{ e } x \notin \varphi(S_\varphi).$$

Definição B.4 (O grau topológico de uma função contínua) *Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N), b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Definimos o grau topológico de φ em Ω no ponto b, sendo*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \ \forall \ \psi \in U,$$

onde

$$U = \{\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \ ; \ \|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2}\} \ \text{ e }$$
$$r = dist(b, \varphi(\partial\Omega)) = \inf\{\|b - \varphi(x)\| \ ; \ x \in \partial\Omega\} > 0.$$

Propriedades Básicas

1.- Normalização :

Seja I a projeção canônica de $\overline{\Omega}$ em $\mathbb{R}^N$, isto é, $I(x) = x$, $x \in \overline{\Omega}$, então

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad b \in \Omega \\ 0, & \text{se} \quad b \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

2.- A propriedade aditiva :

Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$, disjuntos abertos, limitados em $\mathbb{R}^N$ e não-vazios com $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ e $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ contínua tal que $b \notin \varphi(\partial\Omega_i)$, $i = 1, 2$, então

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

3.-Invariância do Grau por Homotopia :

Se $H \in C([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin H([0,1] \times \partial\Omega)$, então

$$d(H(t,.), \Omega, b) = \text{constante}, \ \forall \ t \in [0,1],$$

isto é, O Grau topologico de $H(t,.)$ não depende de t.

4.-A propriedade de existência (Princípio de Kronecker) :

Seja $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.

Observação : Estas quatro propiedades do Grau topológico podem ser consideradas como axiomas da teoria de Grau topológico, no sentido de que todas as propriedades da teoria de Grau que se seguem, podem ser derivados a partir dessas.

5.-Continuidade :

Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança V de φ na topologia $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, tal que para toda $\psi \in V$ temos que

$$b \notin \psi(\partial\Omega) \text{ e } d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b).$$

6.-Dependência da fronteira :

Suponha que $\varphi = \psi$ em $\partial\Omega$ e que $\varphi, \psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, então

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \ \forall\, b \notin \varphi(\partial\Omega).$$

7.- Excisão :

Sejam $K \subset \Omega$ um subconjunto fechado de $\overline{\Omega}$ e $b \notin \varphi(K) \cup \varphi(\partial\Omega)$, então

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \backslash K, b).$$

8.-O Grau topológico é constante em componentes conexas :

Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, tem-se que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

9.-A formula do Producto do Grau :

Sejam $\varphi_i \in C(\overline{\Omega_i}, \mathbb{R}^N)$, onde Ω_i são abertos e limitados em $\mathbb{R}^N$ e $b_i \in \mathbb{R}^N \backslash \varphi_i(\partial\Omega_i)$, $\forall\, i = 1, 2$, então

$$d((\varphi_1, \varphi_2), \Omega_1 \times \Omega_2, (b_1, b_2)) = d(\varphi_1, \Omega_1, b_1) d(\varphi_2, \Omega_2, b_2).$$

APÊNDICE C – Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz e o Teorema de Linking

Neste apêndice iremos demonstrar o Teorema do passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz e o Teorema de Linking.

Definição C.1 *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $C \in \mathbb{R}$ é um valor crítico de Φ se existe $u \in X$ com $\Phi'(u) = 0$ e $\Phi(u) = C$, denotaremos por Φ^c o conjunto de todos os pontos em níveis menores ou iguais a c, isto é,*

$$\Phi^c = \{u \in X \ ; \ \Phi(u) \leq c\}.$$

Definição C.2 (Condição Palais-Smale (P.S.)) *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. O funcional Φ satisfaz a condição (PS) se qualquer sequência $(u_n) \subset X$ tal que*

$$|\Phi(u)| \leq constante \ e \ \Phi'(u_n) \to 0, \ \ em \ X^*$$

possui uma subsequência convergente.

Definição C.3 *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que o funcional Φ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível C em X e escrevemos $(P.S)_C$, onde $C \in \mathbb{R}$, se para toda sequência $(u_n) \subset X$ tal que $\Phi(u_n) \to C$ e $\Phi'(u_n) \to 0$, tem uma subsequência convergente.*

Lema C.4 (Lema de Deformação) *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfaz a condição Palais-Smale. Se $c \in \mathbb{R}$ não é um valor crítico de Φ, então para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que para qualquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$, tem-se:*

(1) $\eta(t, u) = u$ *se* $u \notin \Phi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\epsilon])$ *e*

(2) $\eta(1, \Phi^{c+\epsilon}) \subset \Phi^{c-\epsilon}$.

Ver [27], pg. 7.

Teorema C.5 (do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz) *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ satisfazendo a condição Palais- Smale. Suponha que $\Phi(0) = 0$ e*

(1) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $\Phi\Big|_{\partial B_\rho} > \alpha$ *e*

(2) existe um elemento $e \in X \backslash \overline{B_\rho}$ *tal que* $\Phi(e) < 0$.

Então, Φ possui um valor crítico $C \geq \alpha$ com

$$C = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} \Phi(u),$$

$$\textit{onde } \Gamma = \{g \in C([0,1], X) \ ; \ g(0) = 0 \ , \ g(1) = e\}.$$

Demostração: Primeiro vamos mostrar que $C = \inf\limits_{g\in\Gamma} \max\limits_{u\in g([0,1])} \Phi(u)$ está bem definido. Seja $g \in \Gamma$, como $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $g \in C([0,1], X)$, temos que $\Phi \circ g \in C([0,1], \mathbb{R})$. Como $\Phi \circ g$ é uma aplicação contínua no compacto $[0,1]$, $\Phi \circ g$ possui máximo em $[0,1]$, isto é, existe $\max\limits_{t\in[0,1]} (\Phi \circ g)(t) = \max\limits_{u\in g([0,1])} \Phi(u)$.

Definamos

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$f(t) = \|g(t)\|$$

Por (2), $e \in X\backslash\overline{B}_\rho$ assim $f(1) = \|g(1)\| = \|e\| > \rho$ e $f(0) = \|g(0)\| = \|0\| = 0 < \rho$. Logo, como $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ e $f(0) < \rho < f(1)$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $f(t_0) = \|g(t_0)\| = \rho$, ou seja, $g(t_0) \in \partial B_\rho$. Segue da hipótese (1) do teorema que $\Phi(g(t_0)) > \alpha$ e como $g \in \Gamma$ é arbitrario temos,

$$\Phi(g(t_0)) > \alpha, \ \forall \ g \in \Gamma.$$

Portanto $C = \inf\limits_{g\in\Gamma} \max\limits_{u\in g([0,1])} \Phi(u)$ está bem definido e $C \geq \alpha$.

Agora só falta mostrar que C é uma valor crítico para Φ. Suponha por absurdo que C não seja um valor crítico de Φ. Então pelo lema de deformação, dado $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2}(C - \alpha)$ existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que para qualquer $u \in X$ e $t \in [0,1]$ tem-se :

(1) $\eta(t, u) = u, \ \text{se } u \notin \Phi^{-1}([C - 2\varepsilon, C + 2\epsilon])$ e

(2) $\eta((1, \Phi^{C+\epsilon})) \subset \Phi^{C-\epsilon}$.

Como $C = \inf\limits_{g\in\Gamma} \max\limits_{u\in g([0,1])} \Phi(u)$, então existe uma $g \in \Gamma$ tal que $\max\limits_{t\in[0,1]} \Phi(g(t)) < C + \epsilon$.
Portanto $g(t) \in \Phi^{C+\epsilon}$, $\forall \ t \in [0,1]$.
Defina a aplicação contínua

$$f^* : [0,1] \to X \times X$$

$$f^*(t) = \eta(1, g(t))$$

Pela hipótese (2) e pela escolha de ϵ, temos $\Phi(e) < 0 = \Phi(0) < \alpha < C - 2\epsilon$.
Logo temos que $\Phi(e)$ e $\Phi(0)$ não pertencem a $[C - 2\epsilon, C + \epsilon]$, ou seja, 0 e e não pertenecem a $\Phi^{-1}([C - 2\epsilon, C + \epsilon])$.

Logo, por (1) temos que $f^*(0) = 0$ e $f^*(1) = e$, e portanto $f^* \in \Gamma$.
Por (2), segue que $f^*(t) = \eta(1, g(t)) \in \Phi^{C-\epsilon}$, $\forall\, t \in [0,1]$, isto é,

$$\max_{t\in[0,1]} \Phi(f^*(t)) \leq C - \epsilon.$$

Como $C \leq \max\limits_{t\in[0,1]} \Phi(f^*(t))$ então $C \leq C - \epsilon$, o que é um absurdo. Portanto C é um valor crítico para Φ. □

Teorema C.6 *Sejam X um espaço de Banach, $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$, $e \in X$ e $\rho > 0$ tais que $\|e\| > \rho$ e*

$$b = \inf_{\|u\|=\rho} \Phi(u) > \Phi(0) \geq \Phi(e).$$

Se Φ satisfaz $(P.S)_C$ com

$$C = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} \Phi(u),$$

$$\textit{onde}\ \ \Gamma = \{g \in C([0,1],X)\ \ ;\ \ g(0) = 0\ ,\ g(1) = e\},$$

então C é um valor crítico de Φ

Demostração: Ver [28] Teo. 2.10, pg. 42.

Teorema C.7 (Teorema de Linking) *Seja E um espaço de Banach com $E = V \oplus W$, onde V é um espaço de dimensão finita e suponha que $\Phi \in C^1(E,\mathbb{R})$ satisfaz (P.S) e*

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi\Big|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha$,

(b) existe um $e \in (\partial B_1) \cap W$ e uma constante real $R > \rho$ tal que $\Phi\Big|_{\partial Q} \leq 0$ onde $Q = (B_R \cap V) \oplus (0, Re)$.

Então Φ possui um valor crítico $C \geq \alpha$ caracterizado por $C = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \max\limits_{u\in\overline{Q}} \Phi(\gamma(u))$,

$$\textit{onde}\ \ \Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, E)\ \ ;\ \ \gamma = I_d\ \ \textit{em}\ \ \partial Q\}.$$

Demostração: Primeiro provaremos que $C = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \max\limits_{u\in\overline{Q}} \Phi(\gamma(u)) \geq \alpha$. Para cada $u \in \overline{Q}$ escrevemos $u = v + re$ onde $v \in \overline{B}_{\mathbb{R}} \cap V$ e $0 \leq r \leq R$. Denote por P a projeção de E sobre V, isto é, $P : E \longrightarrow V$, para cada $\gamma \in \Gamma$ defina a função contínua

$$\varphi : \overline{Q} \to V \times \mathbb{R},$$

dada por

$$\varphi(v,r) = (P \circ \gamma(v + re), \|(I - P) \circ \gamma(v + re)\|).$$

Se $u = v + re \in \partial Q$ e como $\gamma = I_d$ em ∂Q, temos

$$\varphi(v,r) = (v, \|re\|) = (v, r).$$

Portanto, $\varphi = I_d$ em ∂Q e em particular $\varphi(v, r) \neq (0, \rho)$, para cada $u \in \partial Q$. Logo,

$$(0, \rho) \notin \Phi(\partial Q).$$

Identificamos $V \times \mathbb{R}$ com $\mathbb{R}^N$ para algum $N \in \mathbb{N}$, obtemos que o Grau Brouwer $d(\Phi, Q, (\rho.0))$ está bem definido.
Logo, pelas propriedades de dependência da fronteira da teoria do Grau topológico e da Normalização, temos

$$d(\varphi, Q, (\rho, 0)) = d(I_d, Q, (\rho, 0)) = 1.$$

Então

$$d(\varphi, Q, (\rho, 0)) \neq 0.$$

Logo pela propriedade da existência (propriedade de Kronecker), existe $u_\gamma = v + re \in Q$ tal que $\varphi(v, r) = (0, \rho)$, isto é,

$$(P \circ \gamma(u_\gamma), \|(I - P) \circ \gamma(u_\gamma)\|) = (0, \rho).$$

Logo, como $P \circ \gamma(u_\gamma) = 0$, então $\gamma(u_\gamma) \in W$ e $\|\gamma(u_\gamma)\| = \rho$. Como γ é arbitrário, temos para cada $\gamma \in \Gamma$, existe $u_\gamma \in Q$ tal que $\gamma(u_\gamma) \in (\partial B_\rho) \cap W$. Logo, pela condição (a) da hipótese, obtemos a segunda desigualdade da abaixo

$$\max_{u \in \overline{Q}} \Phi(\gamma(u)) \geq \Phi(\gamma(u_\gamma)) \geq \alpha, \ \forall \, \gamma \in \Gamma.$$

Logo

$$C = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} \Phi(\gamma(u)) \geq \alpha.$$

Agora vamos a provar que $C = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{u \in \overline{Q}} \Phi(\gamma(u)) \geq \alpha$ é um valor crítico de Φ. Suponha por absurdo que C não seja valor crítico de Φ. Logo, pelo lema de deformação para $\epsilon = \dfrac{1}{2}\left(c - \dfrac{\alpha}{2}\right)$, existe $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$ tal que para qualquer $u \in E$ e $t \in [0, 1]$ obtemos

(i) $\eta(t, u) = u$ se $u \notin \Phi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\epsilon])$ e

(ii) $\eta((1, \Phi^{c+\epsilon})) \subset \Phi^{c-\epsilon}$.

Como $C = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{u \in \overline{Q}} \Phi(\gamma(u)) \geq \alpha$, então existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\max\limits_{u \in \overline{Q}} \Phi(\gamma(u)) < C + \epsilon$, ou seja,

$$\gamma(u) \in \Phi^{C+\epsilon}, \ \forall \, u \in \overline{Q}. \tag{C.1}$$

Defina a função contínua

$$h : \overline{Q} \to E$$

dada por

$$h(u) = \eta(1, \gamma(u)).$$

Como $\gamma\Big|_{\partial Q}$ = Identidade, então $h(u) = \eta(1,u),\ \forall\ u \in \partial Q$. Logo pela condição (b) da hipótese e pela escolha de ϵ, temos que

$$\Phi(u) \leq 0 < \frac{\alpha}{2} = C - 2\epsilon,\ \forall\ u \in \partial Q.$$

Logo $u \notin \Phi^{-1}([C-2\epsilon, C+2\epsilon])$, então por (i) temos que $h(u) = \eta(1,u) = u,\ \forall\ u \in \partial Q$, portanto $h \in \Gamma$. Por outro lado de (ii) e (C.1), temos que $h(u) = \eta(1,\gamma(u)) \in \Phi^{C-\epsilon},\ \forall\ u \in \overline{Q}$, ou seja,

$$\Phi(h(u)) \leq C - \epsilon,\ \forall u \in \overline{Q}.$$

Logo

$$\max_{u \in \overline{Q}} \Phi(h(u)) \leq C - \epsilon.$$

Como $h \in \Gamma$, btemos

$$C = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} \Phi(\gamma(u)) \leq \max_{u \in \overline{Q}} \Phi(h(u)) \leq C - \epsilon.$$

Então $C \leq C - \epsilon$, o que é um absurdo. Portanto C é um valor crítico para Φ.

$\square$

Teorema C.8 *Seja E um espaço de banach com $E = V \oplus W$, onde V é um espaço de dimensão finita, $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$, suponha que*

(a) existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $\Phi\Big|_{\partial B_\rho \cap W} \geq \alpha$ e

(b) existem $e \in (\partial B_1) \cap W$, $0 < \beta < \alpha$ e uma constante real $R > \rho$ tal que $\Phi\Big|_{\partial Q} < \beta$ onde $Q = (B_R \cap V) \oplus (0, Re)$.

Se Φ satisfaz $(P.S)_C$ com

$$C = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \overline{Q}} \Phi(\gamma(u)),$$

$$\textit{onde}\ \ \Gamma = \{\gamma \in C(\overline{Q}, E)\ \ ;\ \ \gamma = I_d\ \ \textit{em}\ \ \partial Q\}.$$

Então Φ possui um valor crítico $C \geq \alpha$

Demostração: Ver [28] Teo. 2.12, pg. 43.

APÊNDICE D – O Espectro do Laplaciano

Definição D.1 *Dizemos que $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca para o problema de autovalor do laplaciano com condição de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \textit{em } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega uv dx, \ \textit{para todo}\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Teorema D.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado. Então o problema de autovalor*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \textit{em } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

possui um número infinito enumerável de autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfazem

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_4 \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$$

tais que

$$\lambda_k \to \infty \quad \textit{quando} \ k \to \infty,$$

e autofunções $\{u_k\}$ que constituem um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$, isto é,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i,$$

para todo $v \in L^2(\Omega)$. Em particular

$$|v|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_{L^2}^2.$$

Demonstração: Consideramos o funcional

$$I : H_0^1(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

dado por

$$I(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2 dx} = \frac{\langle \nabla u, \nabla u \rangle_2^2}{\langle u, u \rangle_2^2} = \frac{|\nabla u|_2^2}{|u|_2^2}.$$

Claramente este funcional é limitado inferiormente, então existe

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} I(u).$$

Seja $\lambda_1 = \inf\limits_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} I(u)$. Mostraremos que existe $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega uv dx, \ \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

De fato, como $I(\alpha u) = I(u)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq 0$, pela definição de ínfimo, obtemos uma sequência $(u_k) \subset H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ com $|u_k|_2^2 = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$I(u_k) \to \lambda_1 \text{ quando } k \to \infty.$$

Logo, pela definição do funcional I, obtemos

$$|\nabla u_k|_2^2 \to \lambda_1 \text{ quando } k \to \infty. \tag{D.1}$$

Assim (u_k) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, logo existe uma subseqüência (u_{n_k}) de (u_k) que converge de forma fraca em $H_0^1(\Omega)$. Logo pelo teorema de Rellich Kondraknov ver apêndice Teorema A.18, isto é $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, segue que (u_{n_k}) converge de forma forte em $L^2(\Omega)$. Ou seja, existe $u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$(u_{n_k}) \to u \text{ em } L^2(\Omega), \text{ quando } k \to \infty. \tag{D.2}$$

Como para $k, l \in \mathbb{N}$, vale a identidade

$$|u_{n_k} - u_{n_l}|_2^2 + |u_{n_k} + u_{n_l}|_2^2 = 2|u_{n_k}|_2^2 + 2|u_{n_l}|_2^2.$$

Obtemos que,

$$|u_{n_k} + u_{n_l}|_2^2 \to 4 \text{ quando } k, l \to \infty. \tag{D.3}$$

Além disso, pela identidade

$$|\nabla(u_{n_k} - u_{n_l})|_2^2 + |\nabla(u_{n_k} + u_{n_l})|_2^2 = 2|\nabla(u_{n_k})|_2^2 + 2|\nabla(u_{n_l})|_2^2$$

e por

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} I(u) \leq \frac{|\nabla(u_{n_k} + u_{n_l})|_2^2}{|u_{n_k} + u_{n_l}|_2^2},$$

obtemos que

$$|\nabla(u_{n_k} - u_{n_l})|_2^2 \leq 2|\nabla(u_{n_k})|_2^2 + 2|\nabla(u_{n_l})|_2^2 - \lambda_1 |u_{n_k} + u_{n_l}|_2^2 \tag{D.4}$$

logo usando (D.1), (D.3) e (D.4), segue que

$$|\nabla(u_{n_k} - u_{n_l})|_2^2 \to 0 \text{ quando } k, l \to \infty,$$

isto é,

$$\|u_{n_k} - u_{n_l}\| \to 0 \text{ quando } k, l \to \infty.$$

Assim, a subseqüência (u_{n_k}) é de cauchy em $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Banach, existe $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_{n_k} \to w \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ quando } k \to \infty,$$

ou seja,

$$|\nabla(u_{n_k} - w)|_2 \to 0 \text{ quando } k \to \infty.$$

Portanto pela desigualdade de Poincaré,

$$|u_{n_k} - w|_2^2 \to 0 \text{ quando } k \to \infty,$$

isto é,

$$u_{n_k} \to w \text{ em } L^2(\Omega) \text{ quando } k \to \infty. \tag{D.5}$$

De (D.2) e (D.5), obtemos que $u = w$, portanto

$$u_{n_k} \to u \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ quando } k \to \infty.$$

Logo como $\|u_{n_k} - u\| = |\nabla u_{n_k} - \nabla u|_2$ e $||\nabla u_{n_k}|_2 - |\nabla u|_2| \leq |\nabla u_{n_k} - \nabla u|_2$, para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos que $|\nabla u_{n_k}|_2 \to |\nabla u|_2$ quando $k \to \infty$. Assim de (D.1) segue que

$$\lambda_1 = |\nabla u|_2.$$

Usando a desigualdade de Poincaré $\lambda_1 = |\nabla u|_2 \neq 0$, com $u = u_1$. Agora mostraremos que u é uma solução fraca de $-\Delta u = \lambda u$. Como u_1 é um mínimo para o funcional I, então para $v \in H_0^1(\Omega)$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} \frac{I(u_1 + tv) - I(u_1)}{t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{|\nabla(u_1 + tv)|_2^2}{|u_1 + tv|_2^2} - \dfrac{|\nabla u_1|_2^2}{|u_1|_2^2}}{t} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{|\nabla u_1|_2^2 + t^2|\nabla v|_2^2 + 2t\langle \nabla u_1, \nabla v\rangle_2}{|u_1|_2^2 + t^2|v|_2^2 + 2t\langle u_1, v\rangle_2} - \dfrac{|\nabla u_1|_2^2}{|u_1|_2^2}}{t}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2|\nabla v|_2^2|u_1|_2^2 + 2t\langle \nabla u_1, \nabla v\rangle_2|u_1|^2 - t^2|v|^2|\nabla u_1|_2^2 - 2t\langle u_1, v\rangle_2|\nabla u_1|_2^2}{t} \\ &= 2\langle \nabla u_1, \nabla v\rangle_2|u_1|_2^2 - 2\langle u_1, v\rangle_2|\nabla u_1|_2^2 \\ &= 2\langle \nabla u_1, \nabla v\rangle_2 - 2\langle u_1, v\rangle_2\lambda_1, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla u_1 \nabla v dx = \lambda_1 \int_\Omega u_1 v dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Agora suponha como hipótese de indução que obtivemos $(\lambda_1, u_1), \ldots, (\lambda_{j-1}, u_{j-1})$ satisfazendo, para todo $1 \leqslant i, k \leqslant j-1$

(i) $u_i \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$,

(ii) $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{j-1}$,

(iii) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u_i \nabla v dx = \lambda_1 \int_\Omega u_i v dx$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$,

(iv) $\langle u_i, u_k\rangle = \delta_{i,k}$.

Definimos

$$H_j = \{v \in W_0^{1,2}(\Omega) : \langle v, u_i\rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \text{ para } i = 1, 2\cdots, j-1\}.$$

H_j é o subespaço de Hilbert ortogonal ao subespaço de dimensão finita gerado pelas autofunções $u_1, u_2, \cdots, u_{j-1}$, isto é, $H_j =< u_1, u_2, \cdots, u_{j-1} >^{\perp}$.
Defina

$$\lambda_i = \inf_{u \in H_j} I(u).$$

Como $H_j \subset H_{j-1}$, então

$$\lambda_{j-i} \leq \lambda_j. \tag{D.6}$$

Pelo mesmo argumento anterior existe uma seqüência (u_n) de H_j com $|u_n|_2 = 1$ e $u_j \in H_0^1(\Omega)$ com $|u_j|_2 = 1$ tal que $u_n \to u_j$ em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, $\lambda_j = |\nabla u_j|_2^2$ e

$$\int_\Omega \nabla u_j \nabla v dx = \lambda_j \int_\Omega u_j v dx, \text{ para todo } v \in H_j. \tag{D.7}$$

Como H_j é um subespaço fechado de $H_0^1(\Omega)$, temos

$$u_j \in H_j. \tag{D.8}$$

Também temos que :

$$H_0^1(\Omega) = H_j \oplus H_j^{\perp},$$

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_j \oplus < u_1, u_2, \cdots, u_{j-1} > .$$

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$, então

$$v = w_1 + w_2, \text{ onde } w_1 \in H_j \text{ e } w_2 \in < u_1, u_2, \cdots, u_{j-1} >$$

Logo

$$\int_\Omega \nabla u_j \nabla v dx = \langle \nabla u_j, \nabla v\rangle_2 = \langle \nabla u_j, \nabla w_1\rangle_2 + \langle \nabla u_j, \nabla w_2\rangle_2.$$

Lembrando que $w_1 \in H_j$ obtemos por (D.7) que

$$\int_\Omega \nabla u_j \nabla v dx = \lambda_j \langle u_j, w_1\rangle_2 + \langle \nabla u_j, \nabla w_2\rangle_2. \tag{D.9}$$

Como para $i = 1, 2, \ldots, j-1$,

$$\langle \nabla u_j, \nabla u_i\rangle_2 = \int_\Omega \nabla u_j \nabla u_i dx$$

e por hipótese de indução (ii), temos

$$\langle \nabla u_j, \nabla u_i\rangle_2 = \lambda_i \int_\Omega u_i u_j dx.$$

Então pela hipótese de indução (iv),

$$\langle \nabla u_j, \nabla u_i \rangle_2 = 0.$$

Assim, como $w_2 \in < u_1, u_2, \cdots, u_{j-1} >$, segue que

$$\langle \nabla u_j, \nabla w_2 \rangle_2 = 0. \tag{D.10}$$

Por outro lado,

$$\lambda_j \int_\Omega u_j v dx = \lambda_j \langle u_j, v \rangle_2 = \lambda_j \langle u_j, w_1 \rangle_2 + \lambda_j \langle u_j, w_2 \rangle_2,$$

como $w_2 \in < u_1, u_2, \cdots, u_{j-1} >$, por (D.8) temos,

$$\lambda_j \int_\Omega u_j v dx = \lambda_j \langle u_j, w_1 \rangle dx. \tag{D.11}$$

Portanto por (D.9), (D.10) e (D.11) segue que

$$\int_\Omega \nabla u_j \nabla v dx = \lambda_j \int_\Omega u_j v dx, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega),$$

isto é,

$$u_j \text{ é uma solução fraca de } -\Delta u = \lambda u \text{ em } \Omega.$$

Mostraremos agora que

$$\lambda_j \to \infty \text{ quando } j \to \infty.$$

Suponha por absurdo que $\lambda_j \to \lambda_0$. Então, obtemos uma seqüência (u_j) de $H_0^1(\Omega)$ e autofunções associados aos autovalores λ_j tais que $|u_j|_2 = 1$ e $\lambda_j = |\nabla u_j|_2^2 \to \lambda_0$. Então (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, logo existe uma subseqüência (u_{n_j}) de (u_j) que converge de forma fraca em $H_0^1(\Omega)$. Logo pelo teorema de Rellich Kondraknov ver apêndice Teorema A.18, isto é $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, segue que

$$(u_{n_j}) \text{ converge forte em } L^2(\Omega).$$

Logo,

$$(u_{n_j}) \text{ é de cauchy em } L^2(\Omega). \tag{D.12}$$

Também, como (u_{n_j}) é ortonormal, para $k, l \in \mathbb{N}$, temos que

$$|u_{n_j} - u_{n_k}|_2^2 = 2.$$

Logo

$$|u_{n_j} - u_{n_k}|_2 = (2)^{\frac{1}{2}} \text{ e}$$

portanto (u_{n_j}) não é de cauchy em L^2 o que é um absurdo por (D.12).

Agora Mostraremos o resultado de expansão.

Para $v \in H_0^1(\Omega)$ e $i, k \in \mathbb{N}$ escreva $\alpha_i = \langle v, u_i \rangle_2$, $v_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$ e $w_k = v - v_k$. Logo, para $i \leq k$, e $\{u_j\}$ é ortonormal segue que

$$\begin{aligned}\langle w_k, u_i \rangle &= \langle v - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i, u_i \rangle \\ &= \langle v, u_i \rangle - \alpha_i \\ &= \alpha_i - \alpha_i = 0.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle w_k, u_i \rangle = 0, \ \forall i = 1, \ldots, k. \tag{D.13}$$

Como $\lambda_{k+1} = \inf_{u \in H_{k+1}} \frac{|\nabla u|_2^2}{|u|_2^2}$ e $H_{k+1} = \{v \in H_0^1(\Omega);\ \langle v, u_i \rangle_2 = 0,\ i = 1, \ldots, k\}$, por (D.13), temos

$$w_k \in H_{k+1}.$$

Logo,

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{|\nabla w_k|_2^2}{|w_k|_2^2} = \frac{\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_2}{\langle w_k, w_k \rangle_2}.$$

Então,

$$\langle w_k, w_k \rangle_2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_2. \tag{D.14}$$

Daí, como u_i é solução fraca para todo $i \leq k$, então

$$\langle \nabla u_i, \nabla w_k \rangle_2 = \lambda_i \langle w_k, u_i \rangle_2 = 0,$$

onde, a última igualdade segue de (D.13). Portanto, temos

$$\langle \nabla u_i, \nabla w_k \rangle_2 = 0. \tag{D.15}$$

Logo de (D.13), (D.15) e $v_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$, obtemos as identidades

$$\langle w_k, w_k \rangle_2 = \langle v, v \rangle_2 - \langle v_k, v_k \rangle_2,$$

$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_2 = \langle \nabla v, \nabla v \rangle_2 - \langle \nabla v_k, \nabla v_k \rangle_2.$$

Desta ultima identidade, segue que

$$\langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle_2 \leq \langle \nabla v, \nabla v \rangle_2. \tag{D.16}$$

Logo por (D.14) e (D.16), obtemos

$$\begin{aligned}|w_k|_2^2 &= \langle w_k, w_k \rangle_2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \langle \nabla w_k, \nabla w_k \rangle \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} \langle \nabla v, \nabla v \rangle_2.\end{aligned}$$

Então $w_k \to 0$ em $L^2(\Omega)$ quando $k \to 0$. Usando $w_k = v - v_k$, podemos obter $v_k \to v$ em $L^2(\Omega)$.

Logo $v = \lim_{k\to\infty} v_k + \lim_{k\to\infty} w_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$. Portanto $v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$, $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$. Agora, como

$$W_0^{1,2}(\Omega) \subseteq \langle u_1, u_2, \ldots \rangle \subseteq \overline{\langle u_1, u_2, \ldots \rangle}^{L^2(\Omega)} \subseteq L^2(\Omega),$$

podemos deduzir que

$$\overline{W_0^{1,2}(\Omega)}^{L^2(\Omega)} \subseteq \overline{\langle u_1, u_2, \ldots \rangle}^{L^2(\Omega)} \subseteq L^2(\Omega).$$

Lembrando que $\overline{H_0^1(\Omega)}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega)$, obtemos

$$\overline{\langle u_1, u_2, \ldots \rangle}^{L^2(\Omega)} = L^2(\Omega).$$

Segue que $\{u_j\}$ é um sistema ortonormal completo para $L^2(\Omega)$, isto é,

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i, \ \forall\, v \in L^2(\Omega).$$

Além disso, como $\alpha_i = \langle v, u_i \rangle_2$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_2^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^2 \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \\
&= \lim_{k\to\infty} \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \rangle_2,
\end{aligned}$$

onde, a última igualdade segue do fato que $\{u_i\}$ é ortonormal, em consequência temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_2^2 = \lim_{k\to\infty} \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \rangle_2.$$

Agora, pela continuidade do produto interno segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_2^2 = \langle \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i, \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \rangle_2 = \langle v, v \rangle_2.$$

Portanto,

$$|v|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle v, u_i \rangle_2^2.$$

□

Teorema D.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um aberto com fronteira de C^∞. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in H_0^1$ é uma solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & em \ \Omega, \\ u = 0 & sobre \ \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [3] Teo. 1.12, pg. 21.