Universidade Federal de Juiz de Fora
Mestrado Acadêmico em Matemática

André Desiderio Maldonado

Existência de solução homoclínica para Equações de Kolmogorov-Fischer estendida e Swift-Hohenberg com dependência não linear da derivada

Juiz de Fora
2012

André Desiderio Maldonado

Existência de solução homoclínica para Equações de Kolmogorov-Fischer estendida e Swift-Hohenberg com dependência não linear da derivada

Dissertação apresentada ao Mestrado Acadêmico em Matemática, área de concentracão: Equações Diferenciais, da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial para a obtenção do Grau Mestre

Orientador: Luiz Fernando de Oliveira Faria
Co-orientador: Grigori Chapiro

Juiz de Fora
2012

Maldonado, André Desiderio

Existência de solução homoclínica para Equações de Kolmogorov-Fischer estendida e Swift-Hohenberg com dependência não linear da derivada / André Desiderio Maldonado. -2012.
84 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

1. Matemática. 2. Equações Diferenciais. 3. Kolmogorov-Fischer estendido. 4. Swift-Hohenberg. 5. Métodos Variacionais. I. Título.

À minha mãe, que sempre me apoiou e me incentivou nos estudos.

`Até mesmo a maior das caminhadas começa com um primeiro Passo.`

Gandhi

AGRADECIMENTOS

Aos meus orientadores Luiz Fernando e Grigori por todo suporte, apoio e principalmente paciência. Gostaria de agradecer também ao professor Wilson Oliveira, meu orientador dos tempos em que cursava Física.

Aos meus professores acadêmicos tanto da graduação como do mestrado com atenção especial para Bernhard, Jens e José Luiz do Departamento de Física da UFJF; Fabio, Flaviana, Sergio e Olimpio do Departamento de Matemática da UFJF e André da Faculdade de Engenharia Elétrica. Me ensinaram lições importantes, que não se encontram em livros e que vou levar para o resto da vida.

À Aline, minha namorada e companheira, pela paciência e compreensão e principalmente por todo o amor que recebi.

À minha família como um todo, com atenção especial para os meus avós Marco e Célia por todo o amor que me dedicam, e ao meu Tio Marco pela atenção.

Aos meus amigos Paulo, Wilker, Raony, Alcides e Daniel, companheiros de república; à Rodrigo, Sebastião, Pedrosa, Alexandre e Tassio, companheiros de curso; Felipe, Nicolai, Gadelha e Raul, amigos de escola; juntamente com todos os outros colegas de mestrado.

A todos que me apoiaram nos últimos tempos com atenção especial para meus colegas de trabalho Nelson, Roney, Lonardo e Vitor.

À Universidade Federal de Juiz de Fora e ao Departamento de Matemática.

À FAPEMIG, CAPES e CNPq pelo suporte financeiro.

RESUMO

Neste trabalho estudamos o seguinte problema

$$(P)\begin{cases} u^{iv} + ku'' + \alpha(x)u = f(x,u,u'), \quad x \in \mathbb{R}, \\ \qquad\qquad\qquad u(x) \to 0, \quad \text{se} \quad |x| \to \infty \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções Hölder-contínuas. Além disso, assumimos as seguintes hipóteses sobre a função f

(f_1) : $f(x,t,\xi) = 0 \;\; \forall t < 0 \quad \text{e} \;\; \forall x, \xi \in \mathbb{R}$.

(f_2) : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x,t,\xi)}{t} = 0$ uniformemente.

(f_3) : Existe $q > 2$ tal que $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(x,t,\xi)}{t^{q-1}} = 0$ uniformemente.

(f_4) : Existe $\Theta > 2$ tal que

$$0 < \Theta F(x,t,\xi) \equiv \int_0^t f(x,s,\xi)ds \le tf(x,t,\xi) \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \forall t > 0. \tag{1}$$

(f_5) : Existem constantes positivas a_1 e a_2 tais que

$$F(x,t,\xi) \ge a_1 t^{\Theta} - a_2 \quad \forall (x,t,\xi) \in \mathbb{R}^3, \text{e} \;\; \forall t > 0. \tag{2}$$

(f_6) : A função $t \mapsto \frac{f(x,t,\xi)}{t}$ é crescente para todo $t > 0$.

Nossa abordagem será variacional, o que é dificultado pelo fato de f depender também da derivada da solução. Para contornar essa dificuldade, adaptamos argumentos de [4]. [5] e [9], que consistem resolver um problema variacional auxiliar através do Teorema do Passo da Montanha e obter solução para o problema original através de um método iterativo.

Palavras-chave: Kolmogorov-Fischer, Swift-Hohenberg, Métodos Variacionais

ABSTRACT

In this work we study the problem

$$(P)\begin{cases} u^{iv} + ku'' + \alpha(x)u = f(x,u,u'), & x \in \mathbb{R}, \\ \qquad\qquad u(x) \to 0, & \text{if} \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{3}$$

where $k \in \mathbb{R}$ is a constant, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ are Hölder-Continuous functions. Besides, we assume that the function f satisfies the following hypothesis

(f_1) : $f(x,t,\xi) = 0 \quad \forall t < 0 \quad \text{and} \ \forall x, \xi \in \mathbb{R}$.

(f_2) : $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x,t,\xi)}{t} = 0$ uniformly.

(f_3) : There exists $q > 2$ such that $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(x,t,\xi)}{t^{q-1}} = 0$ uniformly.

(f_4) : There exists $\Theta > 2$ such that

$$0 < \Theta F(x,t,\xi) \equiv \int_0^t f(x,s,\xi)ds \leq t f(x,t,\xi) \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \forall t > 0, \tag{4}$$

(f_5) : There exist positive constants a_1 e a_2 such that

$$F(x,t,\xi) \geq a_1 t^{\Theta} - a_2 \quad \forall (x,t,\xi) \in \mathbb{R}^3, \ \ \forall t > 0. \tag{5}$$

(f_6) : The function $t \mapsto \frac{f(x,t,\xi)}{t}$ is increasing for all $t > 0$.

The method used is variational, and it is challenged by the fact that f depends on the solution derivative. To overcome this problem, we use adapted arguments of [4]. [5] and [9], that consists in solve a auxiliary variational problem using the Montain Pass Theorem and recover the solute of the original problem using an iterative method.

Keywords: Kolmogorov-Fischer, Swift-Hohenberg, Variational Techniques

LISTA DE SÍMBOLOS

E^*	espaço dual de E
$\sigma(E,E^*)$	topologia fraca definida em E
$\to$	convergência forte
$\rightharpoonup$	convergência fraca
q.t.p.	quase todo ponto
$\mathbb{R}$	Conjunto dos Números Reais
$I \subset \mathbb{R}$	intervalo aberto
$B(x;r)$	Bola aberta de raio r e centro x no espaço normado E
	dada por $\{z \in E; \|z-x\|_E < r\}$
$S(x;r)$	Esfera de raio r e centro x no espaço normado E
	dada por $\{z \in E; \|z-x\|_E = r\}$
supp$f$	indica o suporte da função f
$L^p(I)$	espaço das funções Lebesgue-mensuráveis $u : I \to \mathbb{R}$
	com norma-L^p finita $\|u\|_p = \left(\int_I \|u\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$,$1 \leq p < \infty$
$L^\infty(I)$	espaço das funções Lebesgue-mensuráveis e essencialmente
	limitadas $u : I \to \mathbb{R}$ com norma-L^∞ $\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in I} \|u(x)\|$
$C^k(I)$	funções k vezes continuamente diferenciáveis em$I$
$C^k_0(I)$	conjunto das funções $C^k(I)$ com suporte compacto em I, $(k \geq 0)$
$C^\infty(I)$	$\bigcap_{k\geq 0} C^k(I)$
$W^{1,p}(I)$	Espaço de Sobolev com norma
	$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p})^{\frac{1}{p}}$
$W^{m,p}(I)$	Espaço de Sobolev definido indutivamente como
	$W^{m+1,p}(I) = \{u \in L^p(I); u' \in W^{m,p}(I)\}$
$H^m(I;\mathbb{R})$	Espaço de Sobolev $W^{m,2}(I)$ com produto interno
	$< u; v >_{H^m} = \int_I uvdx + \int_I u'v'dx + \int_I u''v''dx + \cdots + \int_I u^{(m)}v^{(m)}dx$
$\|x\|$	Valor absoluto de x ou medida de Lebesgue do conjunto x
$< u; v >_{k\alpha}$	Indica produto interno no espaço $H^2(\mathbb{R})$
	definido por $< u; v >_{k\alpha} = \int_{\mathbb{R}}(u''v'' - ku'v' + \alpha(x)uv)dx$
$\|u\|_{k\alpha}$	Norma induzida no espaço $H^2(\mathbb{R})$ pelo produto interno $< u; v >_{k\alpha}$

Sumário

Introdução

O estudo de equações elípticas envolvendo as derivadas da solução na parte não-linear tem despertado grande interesse nos últimos anos por modelarem diversos problemas na física, química e biologia.

Do ponto de vista matemático, o interesse por tais equações não é menor. A dificuldade em se obter estimativas *a priori*, bem como a falta de uma estrutura variacional, proporcionam um empecilho natural à aplicação imediata das principais técnicas utilizadas na busca por soluções em problemas elípticos. Essa gama de aplicações na física, química e biologia, bem como a dificuldade do ponto de vista matemático, nos impulsionaram a estudar problemas dessa natureza.

O Método Direto do Cálculo das Variações, ou seja o Método Variacional, consiste na obtenção de pontos críticos para um funcional associado de modo natural à equação diferencial. Essa ideia de tratar equações diferenciais através do estudo de um funcional associado, aparece em meados do século XIX, de modo explícito com Dirichlet e Riemann.

O estudo de equações da forma

$$u^{iv} + ku'' + \alpha(x)u = f \tag{6}$$

tem despertado interesse pois vários problemas físicos, biológicos e químicos são modelados por equações na forma da equação (6). Recentemente em [11], [13], [20] e [21] os autores pesquisaram por soluções homoclínicas. Já em [2] e [11] os autores procuram por soluções heteroclínicas. Finalmente, em [4], [7], [16] e [22] os autores procuram por soluções periódicas sendo que em [4] os autores estudam o problema com dependência da derivada.

A seguir, vamos fazer um pequeno histórico com os trabalhos serviram de motivação para este texto.

2004 - D.G. de Figueiredo, M. Girardi e M. Matzeu [5]

Neste trabalho, os autores estudam a seguinte família de problemas elípticos:

$$\begin{cases} -\triangle u = f(x,u,\triangledown u), & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

onde Ω é um domínio suave limitado de $\mathbb{R}^N$ e $N \geq 3$. Até então, os problemas acima eram estudados via Teoria do Grau. Problemas deste tipo são não variacionais pois, por dependerem do gradiente da solução, dificultam a obtenção de um funcional associado. Neste trabalho os autores inovaram aplicando métodos variacionais da seguinte forma. Para cada $w \in H_0^1(\Omega)$, associaram o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,\nabla w), & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

que não tem dependência do gradiente. Para resolver (8) o associaram ao funcional

$$I_1(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega F(x,u,w)dx \tag{9}$$

e, com algumas hipóteses sobre a função f e utilizando o Teorema do Passo da Montanha [1], conseguiram provar a existência de solução não nula para o problema (8). Para retomar ao problema (7) utilizaram o seguinte algoritmo:

1) Escolha $u_1 \in H_0^1(\Omega)\bigcap C^1(\bar{\Omega})$. 2) Defina u_{n+1} como solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} = f(x,u_{n+1},\nabla u_n), \quad \text{em } \ \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad u(x) = 0, \quad \text{se} \quad x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

Adicionando mais hipóteses sobre a função f, os autores provaram que a sequência obtida no algoritmo acima é de Cauchy a qual converge para a solução do problema (7).

2007 - Carriao, P.C. , Faria, L.F.O. e Miyagaki, O.H. [4]

Neste trabalho, os autores estudam a seguinte família de equações

$$u^{iv} + qu'' + \alpha(x)u = f(x,u,u',u''), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

onde $q \in \mathbb{R}$ é uma constante e f e α são funções contínuas. Note que no problema acima também há a dependência das derivadas da solução. Além disso, a busca é por soluções definidas em toda a reta real gerando perda de compacidade. Para contornar a primeira dificuldade, ou seja, a dependência das derivadas, foram adaptados os argumentos do artigo citado acima [5]. Para a falta de compacidade, foi utilizado o truncamento. Desta maneira, os autores provaram a existência de solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} u^{iv} + qu'' + \alpha(x)u = f(x,u,u',u''), \quad x \in (0,L), \\ \qquad\qquad u(0) = u(L) = u''(0) = u''(L) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

e, com algumas hipóteses sobre a função f, conseguiram estender periodicamente a solução, obtendo assim, uma solução em toda a reta real.

2008 - Figueiredo, G.M [9]

Neste trabalho o autor estuda a seguinte família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(u,|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad u(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{13}$$

onde $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-laplaciano e $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Note que o problema possui dependência do gradiente. Para contornar esta dificuldade o autor adaptou argumentos de [5], obtendo o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(u,|\nabla w|^{p-2}\nabla w), \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \quad u(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{14}$$

cujo funcional associado é

$$I_2 = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |u|^p)dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u,|\nabla w|^{p-2}\nabla w)dx. \tag{15}$$

Note que ainda há a perda da compacidade uma vez que o domínio é todo o $\mathbb{R}^N$. Para contornar essa dificuldade foram feitas hipóteses sobre o crescimento da função f e utilizada uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale [19]. Lembrando que um funcional I satisfaz PS_c (Palais-Smale) se toda sequência (un) tal que $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$ admite uma subsequência convergente. A perda de compacidade nos impede de garantir, ao menos diretamente, que o ponto crítico obtido pelo Teorema do Passo da Montanha é não nulo. Isso é contornado utilizando o Princípio da Compacidade de Lion [15]. Adaptando novamente os argumentos de [5] o autor consegue a existência de solução para o problema (13).

Nesta dissertação, nós adaptamos os argumentos de [5], [4] e [9] para estudar o seguinte problema

$$(P)\begin{cases} u^{iv} + ku'' + \alpha(x)u = f(x,u,u'), & x \in \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0, \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante e $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções Hölder-contínuas. Desta forma, embora este trabalho seja baseado, principalmente, nos três artigos anteriormente citados, podemos dizer que ele é novo em um certo sentido, uma vez que ele possui as suas particularidades que o diferenciam dos artigos citados.

0.1 O Problema Original

Neste trabalho provamos a existência de solução homoclínica[1] clássica para uma família de problemas de quarta ordem, a saber,

$$(P)\begin{cases} u^{iv} + ku'' + \alpha(x)u = f(x,u,u'), & x \in \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0, \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante e $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções Hölder-contínuas. A equação acima recebe o nome de Kolmogorov-Fischer estendida se a constante k é negativa. Caso contrário, recebe o nome de Swift-Hohenberg. Além disso, vamos assumir que a função f satisfaz as seguintes hipóteses

(f_1) : $f(x,t,\xi) = 0 \ \ \forall t < 0 \quad \text{e} \ \ \forall x, \xi \in \mathbb{R}$.

(f_2) : $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x,t,\xi)}{t} = 0$ uniformemente.

(f_3) : Existe $q > 2$ tal que $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(x,t,\xi)}{t^{q-1}} = 0$ uniformemente.

[1] Aqui solução homoclínica é uma solução $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to\infty}$ u(x) $= 0$.

(f_4) : Existe $\Theta > 2$ tal que

$$0 < \Theta F(x,t,\xi) \leq tf(x,t,\xi) \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \forall t > 0, \tag{16}$$

onde

$$F(x,t,\xi) = \int_0^t f(x,s,\xi)ds. \tag{17}$$

(f_5) : Existem constantes positivas a_1 e a_2 tais que

$$F(x,t,\xi) \geq a_1 t^{\Theta} - a_2 \quad \forall (x,t,\xi) \in \mathbb{R}^3, \text{e } \ \forall t > 0. \tag{18}$$

(f_6) : A função $t \mapsto \frac{f(x,t,\xi)}{t}$ é crescente para todo $t > 0$.

$(f_7) - a$: A função f satisfaz

$$|f(t,x_1,y) - f(t,x_2,y)| \leqslant L_1|x_1 - x_2|, \quad \forall (t,x_1,y),(t,x_2,y) \ \in \ \mathbb{R}^3 \tag{19}$$

com $|x_1|, |x_2| \in [0,\rho_1]$ e $|\xi| \leqslant \rho_2$.

$(f_7) - b$: A função f satisfaz

$$|f(t,x,y_1) - f(t,x,y_2)| \leqslant L_2|y_1 - y_2|, \quad \forall (t,x,y_1),(t,x,y_2) \ \in \ \mathbb{R}^3 \tag{20}$$

com $|x| \in [0,\rho_1]$ e $|y_1|, |y_2| \leqslant \rho_2$.

$(f_7) - c$: As constantes L_1 e L_2 obtidas nos itens acima satisfazem

$$L_1 + L_2 < \gamma \tag{21}$$

onde γ é a constante obtida no Lema 1.

Assumiremos também mais três hipóteses sobre a função α e a constante k para garantir uma equivalência de normas em $H^2(\mathbb{R})$. Mais precisamente, assumiremos que

α e k estão nas condições do Lema abaixo :

Lema 1. *Suponha que α e k satisfaçam as seguintes hipóteses*

1. *α é Holder contínua.*

2. *Existem constantes positivas $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < \alpha(x) < b \quad \forall x \in \mathbb{R}$.*

3. *$k \in (-\infty, 2\sqrt{a})$.*

Então, existem constantes positivas γ, η tais que

$$\gamma \|u\|_{H^2}^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}} (u''^2 - ku'^2 + \alpha(x)u^2)dx \leqslant \eta \|u\|_{H^2}^2 \quad \forall u \in H^2(\mathbb{R}). \tag{22}$$

Demonstração no Apêndice B.

O resultado principal deste trabalho é o seguinte

Teorema 1 (Resultado Principal)**.** *Assuma que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua satisfazendo as hipóteses $(f_1 - f_7)$. Assuma ainda que $k \in \mathbb{R}$ e $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estão nas condições do Lema 1. Então o problema*

$$(P) \begin{cases} u^{iv} + ku'' + \alpha(x)u = f(x,u,u'), & x \in \mathbb{R}, \\ \qquad\qquad u(x) \to 0, & \textit{quando} \quad |x| \to \infty, \end{cases}$$

possui ao menos uma solução homoclínica clássica não nula.

0.2 Técnica

Como no problema (P) a função f depende da derivada da solução, este não é um problema variacional. Para contornar essa dificuldade, adaptando argumentos de [4]. [5] and [9], vamos fixar $w \in H^2(\mathbb{R})$ e, para cada w fixado, vamos associar ao problema

(P) o seguinte problema aproximado

$$(P_w)\begin{cases} u^{iv} + ku'' + \alpha(x)u = f(x,u,w'), & x \in \mathbb{R}, \\ \qquad\qquad u(x) \to 0, & \text{quando} \quad |x| \to \infty. \end{cases}$$

Note que neste problema a função f não depende da derivada da solução. Logo, este problema é variacional e (ver Apêndice C) vamos associá-lo ao funcional $I_w \in C^1(H^2(\mathbb{R}); \mathbb{R})$ dado por

$$I_w(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (u''^2 - ku'^2 + \alpha(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}} F(x,u,w')dx \tag{23}$$

cujos pontos críticos $u \in H^2(\mathbb{R})$ satisfazem a seguinte equação

$$\int_{\mathbb{R}} (u''v'' - ku'v' + \alpha(x)uv)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x,u,w')v\, dx, \quad \forall v \in H^2(\mathbb{R}). \tag{24}$$

Como comentamos no Apêndice D, temos que se u é uma solução clássica de (P_w) então u deve satisfazer (24). Porém a recíproca não é necessariamente verdadeira, ou seja, talvez nem todas as funções u que satisfaçam (24) sejam soluções clássicas de (P_w). Em outras palavras, enfraquecemos o significado de solução.

Definição 1. *Vamos dizer que $u \in H^2(\mathbb{R})$ é uma solução fraca de (P_w) se u satisfaz a equação (24) para todo $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.*

Sendo assim, vamos começar a nossa busca por pontos críticos do funcional I_w. Nossa principal ferramenta será o seguinte Teorema

Teorema 2 (Passo da Montanha)**.** *Seja X um espaço vetorial real de Banach e seja $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Assuma ainda que existem $\rho, \beta > 0 \in \mathbb{R}$ tais que*

1. *$I(u) \geqslant \beta$ se $\|u\| = \rho$,*

2. *Existe $\gamma \in \xi$ com $\|\gamma\| > \rho$ tal que $I(\gamma) \leqslant 0$.*

Então existe $(u_n) \subset X$ *satisfazendo* $I(u_n) \to c$ *e* $I'(u_n) \to 0$ *onde*

$$c = \inf_{\lambda \in L} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} I(\lambda(t))$$

e

$$L = \{\lambda \in C([0,1];X); \lambda(0) = 0 \text{ e } \lambda(1) = \gamma\}.$$

0.3 O Problema Auxiliar

Para utilizarmos o Teorema 2, precisamos provar que o funcional I_w satisfaz as suas condições, também chamadas de "geometria do Passo da Montanha". Isso é feito no Capítulo 1, Lemas 2 e 3.

Ainda no Capítulo 1 vamos mostrar que a sequência (u_n), obtida no Teorema do Passo da Montanha, é limitada em $H^2(\mathbb{R})$ por uma constante independente de w. Dessa maneira, usando a reflexividade de $H^2(\mathbb{R})$, extrairemos uma subsequência a qual convergirá fracamente para uma solução fraca $u_w \in H^2(\mathbb{R})$ do problema (P_w).

0.4 Retomando o Problema Original

Considerando a sequência $(u_n) \in H^2(\mathbb{R})$ definida indutivamente por

- $u_1 \in H^2(\mathbb{R})$.
- u_{n+1} é a solução fraca do problema

$$(P_{u_n}) \begin{cases} u^{iv} + k'' + \alpha(x)u = f(x,u,u_n'), & x \in \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0, \quad \text{quando} & |x| \to \infty, \end{cases}$$

e utilizando as hipóteses (f_7), garantimos que a sequência (u_n) converge fortemente para $u \in H^2(\mathbb{R})$ que é solução fraca do problema (P).

0.5 Regularidade

Para resolver o problema (P), precisamos de uma solução clássica, isto é, uma função $u \in C^4(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{cases} u^{iv} + qu'' + \alpha(x)u = f(x,u,u'), & x \in \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0, \quad \text{quando} & |x| \to \infty. \end{cases}$$

No final do Capítulo 2, mostramos que a solução fraca encontrada é de fato uma solução clássica para o problema (P).

0.6 Exemplo

Nesta seção vamos mostrar a existência de função f para as hipóteses feitas. Considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,t,\xi) = \begin{cases} t^n[r(x)s(\xi) + \kappa_0], & \text{se } \ u \geq 0, \\ 0, & \text{se } \ u < 0. \end{cases} \tag{25}$$

Afirmamos que a função f acima satisfaz as hipóteses (f_1),(f_2),(f_3),(f_4),(f_5),(f_6) e (f_7), onde $n > 1$, r é uma função não negativa contínua e limitada, s é uma função limitada, positiva e $C^1(\mathbb{R})$ com $s'(0) = 0$ e $\kappa_0 > 0$. Vamos mostrar cada uma delas separadamente.

(f_1): Segue imediatamente da definição.

(f_2): Segue pelo fato de $n > 1$.

(f_3): Basta tomar $q > n + 1$.

(f_4): Tome $\Theta > n + 1$.

(f_5): Tome $a_1 = \kappa_0$ e $a_2 > 0$ qualquer.

(f_6): Segue pelo fato de ser $n > 1$ e as funções r e s serem não negativas.

(f_7) : Note que, dado $A > 0$, numa vizinhança limitada U suficientemente próxima da origem temos que f é lipschitziana na segunda e terceira variável pois $\frac{\partial f}{\partial t}$ e $\frac{\partial f}{\partial \xi}$ são limitadas em U e, como $\frac{\partial f}{\partial t}(x{,}0{,}\xi) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(x{,}t{,}0) = 0$, segue que as constantes de Lipschitz L_1 e L_2 satisfazem

$$L_1 + L_2 < A. \tag{26}$$

Capítulo 1

Resolvendo o Problema Auxiliar

Neste capítulo, provamos que o problema

$$(P_w)\begin{cases} u^{iv} + ku'' + \alpha(x)u = f(x,u,w'), & x \in \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0, \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty \end{cases}$$

possui ao menos uma solução fraca. Para isto, utilizamos principalmente uma versão do Teorema do Passo da Montanha, que nos garantirá a existência de uma sequência a qual provaremos convergir fracamente (a menos de subsequência) para a solução fraca u_w do Problema (P_w).

1.1 Geometria do Passo da Montanha

Nós queremos utilizar o Teorema do Passo da Montanha. Para isso, precisamos provar que o funcional I_w satisfaz as suas hipóteses, ou seja, que ele possui a chamada Geometria do Passo da Montanha. Isso é feito nos dois lemas seguintes.

Lema 2. *Seja $w \in H^2(\mathbb{R})$. Então existem ρ e β positivos e independentes de w tais que $I_w(u) > \beta > 0$ se $u \in S(0;\rho)$.*

Demonstração. Nós queremos obter uma estimativa inferior para o funcional I_w. Para esclarecer as ideias, vamos lembrar novamente a “estrutura” de I_w.

$$I_w(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (u''^2 - ku'^2 + \alpha(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}} F(x,u,w')dx. \tag{1.1}$$

A hipótese (f_2) nos diz que dado um $\epsilon > 0$ arbitrário, é possível obter $\delta > 0$ tal que se $0 < |t| < \delta$ então

$$\frac{f(x,t,\xi)}{t} < \epsilon \quad \forall\, (x,\xi) \;\in\; \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

ou seja,

$$f(x,t,\xi) < \epsilon|t| \quad \forall\, (x,\xi) \;\in\; \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Analogamente, a hipótese (f_3) nos garante a existência de $A > 0$ tal que se $|t| > A$ então

$$f(x,t,\xi) < \epsilon|t|^{q-1} \quad \forall\, (x,\xi) \;\in\; \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Como a função f se anula para $t \in (-\infty,0]$ basta considerar o caso em que $t \in [\delta,A]$. Porém, como f é contínua, segue pelo teorema de $Bolzano - Weierstrass$ que esta é limitada em $[\delta,A]$. Logo, para uma constante C_ϵ suficientemente grande, devemos ter

$$|f(x,t,\xi)| \leqslant \epsilon|t| + C_\epsilon|t|^{q-1}. \tag{1.2}$$

Além disso, temos por definição que

$$F(x,t,\xi) = \int_0^t f(x,s,\xi)ds.$$

Logo,

$$|F(x,u,\xi)| = |\int_0^u f(x,s,\xi)ds| \leqslant \int_0^u |f(x,s,\xi)|ds \leqslant \frac{1}{2}\epsilon|u|^2 + \frac{C_\epsilon}{q}|u|^q.$$

Substituindo em (1.1) obtemos

$$I_w(u) \geqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u''^2 - ku'^2 + \alpha(x)u^2)dx - \frac{1}{2}\epsilon\int_{\mathbb{R}}|u|^2dx - \frac{C_\epsilon}{q}\int_{\mathbb{R}}|u|^q dx. \tag{1.3}$$

Utilizando agora o Lema 1 obtemos

$$I_w(u) \geqslant \frac{\gamma}{2}\|u\|_{H^2}^2 - \frac{1}{2}\epsilon\int_{\mathbb{R}}|u|^2dx - \frac{C_\epsilon}{q}\int_{\mathbb{R}}|u|^q dx. \tag{1.4}$$

Vamos agora utilizar o seguinte resultado (ver Apêndice B):

Teorema 3 (Imersões de Sobolev)**.** *Existe uma constante C dependendo apenas de $|I|$ (medida de I) tal que*

$$\|u\|_{L_\infty} \leq C\|u\|_{W_{1,p}} \ \ \forall u \in W^{1,p}(I), \ \ \forall\, 1 \leq p \leq +\infty.$$

De outro modo, $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ é imersão contínua.

Além disso, se I é limitado então

1. *A imersão $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ é compacta para todo $1 < p \leq +\infty$.*

2. *A imersão $W^{1,p}(I) \subset L^q(I)$ é compacta para todo $1 \leq q < +\infty$.*

Como mostramos no Apêndice B, segue que a imersão $W^{1,p}(\mathbb{R}) \subset L^s(\mathbb{R})$ é contínua, para todo $s \geq p$. Além disso, temos $\|u\|_{W^{1,2}} \leqslant \|u\|_{H^2}$ $\forall\ u \ \in \ H^2(\mathbb{R})$. Logo, obtemos

$$I_w(u) \geqslant \frac{\gamma - \epsilon C_2}{2}\|u\|_{H^2}^2 - \frac{C_\epsilon C_q}{q}\|u\|_{H^2}^q. \tag{1.5}$$

Sendo assim, tomando $\epsilon < \gamma/C_2$, temos que $(\gamma - \epsilon C_2)/2$ é positivo e, como $q > 2$, o resultado segue tomando $u \in S(0;\rho)$ com ρ suficientemente pequeno de maneira que

$$\frac{(\gamma - \epsilon C_2)}{2}\rho^2 - \frac{(C_\epsilon C_q)}{q}\rho^q > 0. \tag{1.6}$$

□

Lema 3. *Seja $w \in H^2(\mathbb{R})$. Fixada $v_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset H^2(\mathbb{R})$ com $\|v_0\|_{H^2} = 1$, existe $T > 0$ independente de w tal que $I_w(tv_0) \leqslant 0$ se $t > T$.*

Demonstração. Seja $v_0 \in C_0^\infty \subset H^2(\mathbb{R})$ com $\|v_0\|_{H^2} = 1$ e seja $K > 0$ tal que *supp* $v_0 \subset [-K,K]$. A hipótese (f_5) aplicada em tv_0 nos dá

$$F(x,tv_0,\xi) \geqslant a_1|tv_0|^\Theta - a_2. \tag{1.7}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} F(x,tv_0,\xi)dx = \int_{-K}^{K} F(x,tv_0,\xi)dx \geqslant a_1|t|^\Theta \int_{\mathbb{R}} |v_0|^\Theta dx - a_2|\text{supp}(v_0)|. \tag{1.8}$$

Substituindo na equação do funcional obtemos

$$\begin{aligned}
I_w(tv_0) \quad &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}((tv_0)''^2 - k(tv_0)'^2 + \alpha(x)(tv_0)^2)dx - \int_{\mathbb{R}} F(x,tv_0,w')dx \\
&\leqslant \frac{\eta}{2}\|tv_0\|_{H^2}^2 - \int_{\mathbb{R}} F(x,tv_0,w')dx \\
&\leqslant \frac{\eta}{2}|t|^2\|v_0\|_{H^2}^2 - a_1|t|^\Theta\|v_0\|_{L^\Theta}^\Theta + a_2|\text{supp}(v_0)| \\
&\leqslant \frac{\eta}{2}|t|^2\|v_0\|_{H^2}^2 - a_1|t|^\Theta C_\Theta\|v_0\|_{H^2}^\Theta + a_2|\text{supp}(v_0)| \\
&= \frac{\eta}{2}|t|^2 - a_1|t|^\Theta C_\Theta + a_2|\text{supp}(v_0)|
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade utilizamos a imersão de Sobolev. Como $\Theta > 2$, o resultado segue tomando T suficientemente grande.

□

1.2 Aplicando o Teorema do Passo da Montanha

Agora estamos prontos para aplicar o seguinte teorema:

Teorema 4 (Passo da Montanha). *Seja $(X,\|\cdot\|)$ um espaço vetorial real de Banach e seja $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ com $I(0) = 0$. Assuma ainda que existem $\rho, \beta > 0 \in \mathbb{R}$ tais que*

1. *$I(u) \geqslant \beta$ se $\|u\| = \rho$.*

2. *Existe $\gamma \in X$ com $\|\gamma\| > \rho$ tal que $I(\gamma) \leqslant 0$.*

Então existe $(u_n) \subset X$ satisfazendo $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$ onde

$$c = \inf_{\lambda \in L} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} I(\lambda(t))$$

e

$$L = \{\lambda \in C([0,1]; X); \lambda(0) = 0 \text{ e } \lambda(1) = \gamma\}.$$

Para a demonstração deste resultado veja [19].

Para cada $w \in H^2(\mathbb{R})$ obtemos, aplicando o teorema, uma sequência $(u_n) \in H^2(\mathbb{R})$ tal que

$$I_w(u_n) \to c_w \quad \text{e} \tag{1.9}$$

$$I'_w(u_n) \to 0. \tag{1.10}$$

Vamos mostrar que a sequência (u_n) é limitada em $H^2(\mathbb{R})$. Para isto, observe que dado $\epsilon = 1 > 0$, é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ devemos ter

$$I_w(u_n) < c_w + 1 = C_w, \quad \text{ou seja,}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (u_n''^2 - k{u_n'}^2 + \alpha(x)u_n^2)dx < \int_{\mathbb{R}} F(x,u,w')dx + C_w. \tag{1.11}$$

Além disso, temos pela equação (1.10) que dado $\epsilon > 0$ devemos ter $|I'_w(u_n)u_n| < \epsilon\|u_n\|$,

ou seja,

$$
\begin{aligned}
& -\int_{\mathbb{R}}(u_n''u_n'' - ku_n'u_n' + \alpha(x)u_nu_n)dx + \int_{\mathbb{R}} f(x,u_n,w')u_ndx < \epsilon\|u_n\|_{H^2} \\
\Rightarrow \quad & \int_{\mathbb{R}} f(x,u_n,w')u_ndx < \epsilon\|u_n\|_{H^2} + \int_{\mathbb{R}}(u_n''u_n'' - ku_n'u_n' + \alpha(x)u_nu_n)dx. \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

A hipótese (f_5) nos dá $F(x,u_n,w') < \frac{1}{\Theta}f(x,u_n,w')u_n$. Logo, substituindo em (1.11) obtemos

$$
\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u_n''^2 - k{u_n'}^2 + \alpha(x)u_n^2)dx < \frac{1}{\Theta}\int_{\mathbb{R}} f(x,u_n,w')u_ndx + C_w. \qquad (1.13)
$$

Substituindo (1.12) na equação acima obtemos

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u_n''^2 - k{u_n'}^2 + \alpha(x)u_n^2)dx < \frac{1}{\Theta}[\epsilon\|u_n\|_{H^2} + \int_{\mathbb{R}}(u_n''u_n'' - ku_n'u_n' + \alpha(x)u_nu_n)dx] + C_w \\
\Rightarrow \quad & (\frac{1}{2} - \frac{1}{\Theta})\int_{\mathbb{R}}(u_n''^2 - k{u_n'}^2 + \alpha(x)u_n^2)dx < \frac{\epsilon}{\Theta}\|u_n\|_{H^2} + C_w \\
\Rightarrow \quad & (\frac{1}{2} - \frac{1}{\Theta})\gamma\|u_n\|_{H^2}^2 < \frac{\epsilon}{\Theta}\|u_n\|_{H^2} + C_w \qquad (1.14)
\end{aligned}
$$

onde na última desigualdade usamos o Lema (1).

Como $\Theta > 2$, temos que $(\frac{1}{2} - \frac{1}{\Theta}) > 0$ e, portanto, segue da equação (1.14) que a sequência (u_n) deve ser limitada em $H^2(\mathbb{R})$.

1.3 Obtendo solução para o Problema Auxiliar

Como o espaço $H^2(\mathbb{R})$ é reflexivo, temos que vale o seguinte teorema:

Teorema 5 (Kakutani)**.** *Seja $(X,\|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Então X é reflexivo se, e somente se, a bola*

$$
B[0;1] = \{x \in X; \|x\| \leqslant 1\}
$$

é compacta na topologia fraca $\sigma(X,X^*)$.

Para demonstração veja [3].

Um corolário imediato desse teorema é que toda bola fechada é fracamente compacta. Basta observar que a bola $B[a;r]$ é a imagem da funcão contínua $h : B[0;1] \longrightarrow B[a;r]$ dada por $h(x) = rx + a$.

Portanto a sequência (u_n) possui uma subsequência, denotada também por (u_n), que converge na topologia fraca $\sigma(H^2(\mathbb{R}),H^2(\mathbb{R})^*)$, ou seja, que converge fracamente para alguma $u_w \in H^2(\mathbb{R})$.

Nas próximas duas seções vamos mostrar que u_w, obtida acima, é solução fraca do problema (P_w).

1.3.1 Convergências Parte I

No que segue, $u_n \rightharpoonup u_w \in H^2(\mathbb{R})$.

Defina a seguinte função $<;>_{k\alpha}$: $H^2(\mathbb{R}) \times H^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$< u; v >_{k\alpha}= \int_{\mathbb{R}} (u''v'' - ku'v' + \alpha(x)uv)dx.$$

É imediato que a função acima é bilinear e simétrica. Note ainda que se $< u; u >_{k\alpha}= 0$, temos pelo Lema 1 que $0 \leqslant \gamma\|u\|^2_{H^2} \leqslant < u; u >_{k\alpha}= 0$, ou seja, $\|u\|_{H^2} = 0$ e consequentemente $u = 0$.

Resumindo, a função acima satisfaz

1. Bilinear;
2. Simétrica;
3. Positiva Definida.

Concluímos portanto que a função acima define um produto interno em $H^2(\mathbb{R})$ e denotaremos a norma induzida por $\|u\|_{k\alpha}$.

Seja agora $v \in H^2(\mathbb{R})$. Defina a função $\Phi : H^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(u) =< u; v >_{k\alpha}$. Temos que $\Phi \in (H^2(\mathbb{R}))^*$ e como $u_n \rightharpoonup u_w$ segue que $\Phi(u_n) \to \Phi(u_w)$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} (u_n''v'' - ku_n'v' + \alpha(x)u_n v)dx \to \int_{\mathbb{R}} (u_w''v'' - ku_w'v' + \alpha(x)u_w v)dx, \ \ \forall v \in H^2(\mathbb{R}). \quad (1.15)$$

1.3.2 Convergências Parte II

No que segue, $u_n \rightharpoonup u_w \in H^2(\mathbb{R})$. Nosso objetivo é mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,u_n,w')vdx \to \int_{\mathbb{R}} f(x,u_w,w')vdx \ \ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (1.16)$$

Utilizando novamente as imersões de Sobolev obtemos que

1. $u_n \to u_w$ em $L^s_{loc}(\mathbb{R})$ para todo $s \in [2, +\infty)$.

2. $u_n(x) \to u_w(x)$ pontualmente em $\mathbb{R}$.

Observe ainda que como a imersão $H^2(\mathbb{R}) \subset W^{1,2}(\mathbb{R}) \subset L_\infty(\mathbb{R})$ é contínua e a sequência (u_n)é limitada em $H^2(\mathbb{R})$, temos que (u_n) deve ser limitada em $L^\infty(\mathbb{R})$ e portanto existe K_0 tal que $\|u_n\|_\infty < K_0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Lembremos a equação (1.2)

$$|f(x,t,\xi)| \leqslant \epsilon|t| + C_\epsilon|t|^{q-1}.$$

Obtemos uma sequência

$$f_n := |f(x,u_n,w')| \leqslant \epsilon|u_n| + C_\epsilon|u_n|^{q-1} \quad (1.17)$$

tal que $(f_n) \in L^2(\mathbb{R})$ pois

$$|f_n|^2 \leq \epsilon|u_n|^2 + 2\epsilon C_\epsilon|u_n|^q + C_\epsilon|u_n|^{2(q-1)} \quad (1.18)$$

e $u_n \in L^s(\mathbb{R})$ com $s \in [2, +\infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note ainda que, como $\|u_n\|_\infty < K_0$, temos

$$f_n \leqslant \epsilon|u_n| + C_\epsilon|u_n|^{q-1} \leq \epsilon\|u_n\|_\infty + C_\epsilon\|u_n\|_\infty^{q-1} \leq \epsilon K_0 + C_\epsilon K_0^{q-1} =: K \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.19)$$

Tomando $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ arbitrário segue que

$$|f_n v| \leqslant K|v| \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.20)$$

Como $v \in L^1(\mathbb{R})$, utilizando o Teorema da Convergência Dominada (ver Apêndice B), obtemos que $f(x,u_w,w')v \in L^1(\mathbb{R})$ e

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,u_n,w')vdx = \int_{\mathbb{R}} f_n v dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x,u_w,w')v. \quad (1.21)$$

Como $C_0^\infty(\mathbb{R})$ é denso em $H^2(\mathbb{R})$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,u_n,w')vdx = \int_{\mathbb{R}} f_n v dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x,u_w,w')v. \quad \forall v \in H^2(\mathbb{R}). \quad (1.22)$$

1.3.3 u_w é solução fraca do Problema Auxiliar

Na Seção 1.3.1 mostramos que

$$\int_{\mathbb{R}} (u_n''v'' - ku_n'v' + \alpha(x)u_n v)dx \to \int_{\mathbb{R}} (u_w''v'' - ku_w'v' + \alpha(x)u_w v)dx \ \ \forall v \in H^2(\mathbb{R}).$$

Em particular, segue que

$$\int_{\mathbb{R}} (u_n''v'' - ku_n'v' + \alpha(x)u_n v)dx \to \int_{\mathbb{R}} (u_w''v'' - ku_w'v' + \alpha(x)u_w v)dx \ \ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (1.23)$$

Na seção 1.3.2 mostramos que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,u_n,w')vdx \to \int_{\mathbb{R}} f(x,u_w,w')vdx \ \ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Como

$$I'_w(u)v = \int_{\mathbb{R}} (u''v'' - ku'v' + \alpha(x)uv)dx - \int_{\mathbb{R}} f(x,u,w')vdx \ \ \forall\ v\ \in\ C_0^\infty(\mathbb{R}) \tag{1.24}$$

segue que $I'_w(u_n)v \to I'_w(u_w)v$. Por outro lado, como $I'_w(u_n)v \to 0$, pela equação (1.10), segue que $I'_w(u_w)v = 0$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} (u''_w v'' - ku'_w v' + \alpha(x)u_w v)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x,u_w,w')vdx \ \ \forall\ v\ \in\ C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{1.25}$$

Mostramos portanto que u_w é solução fraca do problema (P_w).

1.4 u_w é solução não nula do Problema Auxiliar

É imediato que a função nula é uma solução clássica (e consequentemente fraca) do problema (P_w) (inclusive do problema (P)). Neste trabalho nós estamos interessados em mostrar a existência de solução não nula. Nesta seção vamos garantir que a solução u_w do problema (P_w) obtida na Seção 1.3, é não nula para todo $w \in H^2(\mathbb{R})$.

Lema 4. *Seja (u_n) uma sequência limitada em $H^2(\mathbb{R})$. Se*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{y-R}^{y+R} |u_n|^2 dx \to 0. \tag{1.26}$$

para algum $R > 0$, então $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R})$ para todo $2 < s < +\infty$.

Demonstração. Pelas imersões de Sobolev temos que (u_n) é limitada em $L^s(\mathbb{R})$ com

$2 \leq s \leq +\infty$. Sendo assim, temos que se $t > 2$, então

$$\int_{y-R}^{y+R} |u_n|^t dx \leq \|u_n\|_{L^\infty}^{t-2} \int_{y-R}^{y+R} |u_n|^2 dx \tag{1.27}$$

ou seja,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{y-R}^{y+R} |u_n|^t dx \to 0. \tag{1.28}$$

Além disso, como $(u_n') \subset W^{1,2}(\mathbb{R})$ também é limitada, utilizando as imersões de Sobolev e a desigualdade de Hölder obtemos que

$$\int_{y-R}^{y+R} |u_n||u_n'|dx \leq K(\int_{y-R}^{y+R} |u_n|^2 dx)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.29}$$

ou seja,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{y-R}^{y+R} |u_n||u_n'|dx \to 0. \tag{1.30}$$

Seja agora $\alpha > 1$. Temos pelas imersões de Sobolev que

$$\int_{y-R}^{y+R} |u_n|^{2\alpha} dx \leq C \cdot [\int_{y-R}^{y+R} (|u_n|^2 + 2|u_n||u_n'|)dx]^\alpha \leq \xi_n^{\alpha-1} \int_{y-R}^{y+R} (|u_n|^2 + 2|u_n||u_n'|)dx \tag{1.31}$$

onde $(\xi_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência com $\lim \xi_n = 0$.

Cobrindo a reta com intervalos de raio R de maneira que cada ponto de $\mathbb{R}$ esteja em no máximo 2 intervalos, segue que

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n|^{2\alpha} dx \leq 2\xi_n^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}} (|u_n|^2 + 2|u_n||u_n'|)dx \leq K \cdot \xi_n^{\alpha-1}. \tag{1.32}$$

Segue que

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n|^{2\alpha} dx \to 0. \tag{1.33}$$

$\square$

Lema 5. *Seja $w \in H^2(\mathbb{R})$ e I_w o funcional associado ao problema (P_w). Suponha que $(u_n) \subset H^2(\mathbb{R})$ seja uma sequência limitada tal que $I_w(u_n) \to c \in \mathbb{R}$ e $I'_w(u_n) \to 0$.*

Se $u_n \rightharpoonup 0$, então somente uma das alternativas ocorre

i) $u_n \to 0$ em $H^2(\mathbb{R})$.

ii) Existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}$ e constantes R e β positivas tais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{y_n-R}^{y_n+R} |u_n|^2 dx \geq \beta > 0. \tag{1.34}$$

Demonstração. Suponha que não ocorra (ii). Assim, para todo $R > 0$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{y-R}^{y+R} |u_n|^2 dx = 0. \tag{1.35}$$

Como (u_n) é limitada em $H^2(\mathbb{R})$ segue pelo Lema 4 que $u_n \to 0$ em $L^s(\mathbb{R})$ para todo $s \in [2, +\infty)$.

Novamente pela equação (1.2) temos

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} f(x,u_n,w')u_n dx \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}} |u_n|^2 dx + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}} |u_n|^q dx. \tag{1.36}$$

Logo, como $I'_w(u_n) \to 0$, segue que

$$\|u_n\|_{q\alpha} \leq \int_{\mathbb{R}} f(x,u_n,w')u_n dx \quad + o_n(1) \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}} |u_n|^2 dx + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}} |u_n|^q dx + o_n(1). \tag{1.37}$$

Segue que $\|u_n\|_{q\alpha} \to 0$, ou seja, $u_n \to 0$ em $H^2(\mathbb{R})$ e a alternativa (i) ocorre. $\square$

Lema 6. *Seja $w \in H^2(\mathbb{R})$ e u_w a solução fraca do problema (P_w) encontrada na Seção 1.3. Então $\|u_w\| \neq 0$, isto é, u_w é não nula.*

Demonstração. Seja (u_n) a sequência obtida através do Teorema 2 que converge fracamente para a solução fraca $u_w \in H^2(\mathbb{R})$ do problema (P_w). Se $u_w \neq 0$ não há o que mostrar. Por outro lado, se $u_w = 0$ temos que não pode acontecer de $u_n \to 0$ em $H^2(\mathbb{R})$

pois caso contrário $c_w = I_w(u_w) = 0$ (ver equação (1.9)) o que é absurdo pois $c_w > 0$ pela geometria de I_w. Logo, pelo Lema 5 existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}$ e constantes positivas R e β tais que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{y_n-R}^{y_n+R} |u_n|^2 dx \geq \beta > 0. \tag{1.38}$$

Definindo $\xi_n = u_n(x+y_n)$ segue da invariância por translação de $\mathbb{R}$ que $(\xi_n) \subset H^2(\mathbb{R})$ e que (ξ_n) é limitada em $H^2(\mathbb{R})$. Logo, existe $\xi_w \in H^2(\mathbb{R})$ tal que $\xi_n \rightharpoonup \xi_w$. A invariância de $\mathbb{R}$ por translações nos dá que $I_w(\xi_n) = I_w(u_n)$ e $I'_w(\xi_n)v = I'_w(u_n)v$. Segue então que ξ_w é solução fraca do problema (P_w). Note ainda que

$$\int_{-R}^{R} |\xi_w|^2 dx = \liminf_{n\to\infty} \int_{-R}^{R} |\xi_n|^2 dx = \liminf_{n\to\infty} \int_{y_n-R}^{y_n+R} |u_n|^2 dx \geq \beta > 0, \tag{1.39}$$

onde na primeira igualdade utilizamos o fato de a imersão $H^2(\mathbb{R}) \subset L^2([-R,R];\mathbb{R})$ ser compacta.

Concluímos que ξ_w é uma solução fraca não nula do problema (P_w).

□

1.5 Estimativas *a priori*

Nesta seção nos dedicamos a obter estimativas para as soluções u_w, sendo que estas estimativas serão independentes de w. No que segue, $u_w \in H^2(\mathbb{R})$ é a solução fraca do problema (P_w) obtida na Seção 1.3.

Lema 7. *Seja $w \in H^2(\mathbb{R})$. Então existe $K_1 > 0 \in \mathbb{R}$, independente de w, tal que*

$$\|u_w\|_{H^2} \geqslant K_1$$

para toda solução u_w.

Demonstração. Por hipótese temos que u_w é solução fraca de (P_w). Sendo assim, deve satisfazer

$$\int_{\mathbb{R}} (u_w'' u_w'' - k u_w' u_w' + \alpha u_w u_w) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x,u_w,w') u_w dx. \tag{1.40}$$

Além disso, como já foi observado no Lema 2, dado $\epsilon > 0$ e para uma constante C_ϵ suficientemente grande devemos ter que

$$|f(x,t,\xi)| \leqslant \epsilon |t| + C_\epsilon |t|^{q-1}. \tag{1.41}$$

Logo, substituindo em (1.40) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} (u_w'' u_w'' - k u_w' u_w' + \alpha u_w u_w) dx \leqslant \epsilon \int_{\mathbb{R}} |u_w|^2 dx + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}} |u_w|^q dx. \tag{1.42}$$

Utilizando novamente a Imersão de Sobolev obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} (u_w'' u_w'' - k u_w' u_w' + \alpha u_w u_w) dx \leqslant \epsilon C_2 \|u_w\|_{H^2}^2 + C_\epsilon C_q \|u_w\|_{H^2}^q. \tag{1.43}$$

Finalmente, utilizando a equação (22) e reagrupando os termos, obtemos

$$\frac{\gamma - \epsilon C_2}{C_\epsilon C_q} \|u_w\|_{H^2}^2 \leqslant \|u_w\|_{H^2}^q. \tag{1.44}$$

Como $q > 2$, tomando ϵ pequeno de maneira que $\frac{\gamma - \epsilon C_2}{C_\epsilon C_q} > 0$, o resultado segue com

$$K_1 = \frac{\gamma - \epsilon C_2}{C_\epsilon C_q}^{\frac{1}{q-2}}. \tag{1.45}$$

□

Lema 8. *Seja $w \in H^2(\mathbb{R})$. Então existe $K_2 > 0 \in \mathbb{R}$, independente de w, tal que*

$$\|u_w\|_{H^2} \leqslant K_2$$

para toda solução u_w.

Demonstração. A hipótese (f_6) nos garante que a constante c_w obtida no Teorema 2 pode ser alternativamente caracterizada como (ver Apêndice F)

$$c_w = \inf_{v \in H^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \ \sup_{t \geqslant 0} I_w(tv). \tag{1.46}$$

Além disso, como já foi observado no Lema 3, pela hipótese (f_5) e tomando $v_0 \in H^2(\mathbb{R})$, com $\|v_0\|_{H^2} = 1$, temos que

$$I_w(tv_0) \leqslant \frac{\eta}{2}|t|^2 - a_1|t|^{\Theta} C_{\Theta} + a_2|\mathrm{supp}(v_0)|. \tag{1.47}$$

Logo, devemos ter

$$\sup_{t \geqslant 0} \ I_w(tv_0) \leqslant \ \sup_{t \geqslant 0} \ (\frac{\eta}{2}|t|^2 - a_1|t|^{\Theta} C_{\Theta} + a_2|\mathrm{supp}(v_0)|). \tag{1.48}$$

Como $c_w = \inf_{v \in H^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \ \sup_{t \geqslant 0} I_w(tv)$ segue que

$$c_w \leqslant \sup_{t \geqslant 0} \ I_w(tv_0) \leqslant \ \sup_{t \geqslant 0} \ (\frac{\eta}{2}|t|^2 - a_1|t|^{\Theta} C_{\Theta} + a_2|\mathrm{supp}(v_0)|) := \tilde{K}. \tag{1.49}$$

Note que como $\Theta > 2$, a constante $\tilde{K}$ está bem definida. Além disso, observe que $I_w(u_w) = c_w$ (ver Apêndice F). Logo, de maneira análoga a que fizemos na Seção 1.2 obtemos que

$$\gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{\Theta})\|u_w\|^2_{H^2} \leqslant I_w(u_w) - \frac{1}{\Theta} I'_w(u_w)u_w = c_w \leqslant \tilde{K} \tag{1.50}$$

e o resultado segue com

$$K_2 = [\frac{\bar{K}}{\gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{\Theta})}]^{\frac{1}{2}} \tag{1.51}$$

□

Note que utilizando o Lema 8 e as Imersões de Sobolev concluímos que existem constantes ρ_1 e ρ_2, independentes de w, tais que $\|u_w\|_{L^\infty} \leq \rho_1$ e $\|u'_w\|_{L^\infty} \leq \rho_2$ para toda solução $u_w \in H^2(\mathbb{R})$ do problema (P_w).

1.6 Regularidade

Nesta seção vamos mostrar que a solução fraca $u_w \in H^2(\mathbb{R})$ do problema (P_w) é de fato uma solução clássica, isto é, $u_w \in C^4(\mathbb{R})$ e satisfaz

$$u_w^{iv} + ku''_w + \alpha(x)u_w = f(x,u_w,w') \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.52}$$

com $\lim_{|x|\to+\infty} u_w = 0$. No que segue, $u_w \in H^2(\mathbb{R})$ é solução fraca de (P_w) onde $w \in H^2(\mathbb{R})$.

Afirmação 1. *A solução fraca $u_w \in H^2(\mathbb{R})$ do problema (P_w) é de classe C^4.*

Demonstração. Como $u_w \in H^2(\mathbb{R})$, segue que $u_w \in C^1(\mathbb{R})$ e, como u_w é solução fraca de (P_w), temos

$$\int_{\mathbb{R}} (u''_w v'' - ku'_w v' + \alpha(x)u_w v)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x,u_w,w')vdx \ \ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{1.53}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} (u''_w + ku_w)v''dx = \int_{\mathbb{R}} (f(x,u_w,w') - \alpha(x)u_w)vdx \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{1.54}$$

Como $(f(x,u_w,w') - \alpha(x)u_w) \in L^2(\mathbb{R}) \bigcap C(\mathbb{R})$, segue (ver Apêndice B) que

$$(u''_w + ku_w)'' = u_w^{iv} + ku''_w \in C(\mathbb{R}), \tag{1.55}$$

ou seja, $u_w \in C^4(\mathbb{R})$. $\square$

Teorema 6. *Suponha válidas as hipóteses* (f_1),(f_2),(f_3),(f_4),(f_5) *e* (f_6). *Então o problema* (P_w) *possui ao menos uma solução clássica* $u_w \in H^2(\mathbb{R}) \cap C^4(\mathbb{R})$ *não nula.*

Demonstração. Já provamos anteriormente que o problema (P_w) possui solução fraca não nula $u_w \in C^4(\mathbb{R})$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} (u_w''v'' - ku_w'v' + \alpha(x)u_w v)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x,u_w,w')vdx \ \ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} (u_w^{iv} + ku_w'' + \alpha(x)u_w)vdx = \int_{\mathbb{R}} f(x,u_w,w')vdx \ \ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{1.56}$$

Logo,

$$u_w^{iv} + ku_w'' + \alpha(x)u_w = f(x,u_w,w') \ \text{ q.t.p em } \ \mathbb{R} \tag{1.57}$$

e, como $u_w \in C^4(\mathbb{R})$, segue que

$$u_w^{iv} + ku_w'' + \alpha(x)u_w = f(x,u_w,w') \ \ \forall x \in \ \mathbb{R}. \tag{1.58}$$

Note ainda que, como $u_w \in H^2(\mathbb{R})$, segue que $\lim_{|x|\to+\infty} u_w(x) = 0$. Segue que u_w é solução clássica de (P_w).

□

Capítulo 2

Voltando ao Problema Original

No capítulo anterior, mostramos que o problema auxiliar (P_w) possui solução. Neste capítulo vamos mostrar que a partir de um método iterativo nas soluções u_w é possível obter uma solução $u \in H^2(\mathbb{R})$ para o problema original

$$(P)\begin{cases} u^{iv} + ku'' + \alpha(x)u = f(x,u,u'), & x \in \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0, \quad \text{se} \quad |x| \to \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

Seja $u_1 \in H^2(\mathbb{R})$. Definimos $u_2 \in H^2(\mathbb{R})$ como a solução do problema (P_{u_1}) e seguindo o processo obtemos uma sequência $(u_n) \in H^2(\mathbb{R})$ tal que u_{n+1} é solução para o problema (P_{u_n}).

2.1 Obtendo Solução para o problema original

Nesta parte, vamos mostrar que a sequência (u_n) obtida na acima converge em $H^2(\mathbb{R})$. Mais precisamente, vamos mostrar que (u_n) é uma sequência de Cauchy e como $H^2(\mathbb{R})$ é um espaço e Banach com a norma

$$\|u\|_{H^2} = [\int_{\mathbb{R}} (u''^2 + u'^2 + u^2)dx]^{\frac{1}{2}} \tag{2.2}$$

segue que existe $u \in H^2(\mathbb{R})$ solução de (P).

Como u_{n+1} é solução de (P_{u_n}) segue que

$$\int_{\mathbb{R}} [u''_{n+1}(u_{n+1}-u_n)'' - ku'_{n+1}(u_{n+1}-u_n)' + \alpha(x)u_{n+1}(u_{n+1}-u_n)]dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(x,u_{n+1},u'_n)(u_{n+1}-u_n)dx. \qquad (2.3)$$

Da mesma maneira, como u_n é solução de $(P_{u_{n-1}})$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}} [u''_n(u_{n+1}-u_n)'' - ku'_n(u_{n+1}-u_n)' + \alpha(x)u_n(u_{n+1}-u_n)]dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(x,u_n,u'_{n-1})(u_{n+1}-u_n)dx. \qquad (2.4)$$

Subtraindo uma equação da outra obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} [(u_{n+1}-u_n)''(u_{n+1}-u_n)'' - k(u_{n+1}-u_n)'(u_{n+1}-u_n)' +$$
$$+\alpha(x)(u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}-u_n)]dx = \int_{\mathbb{R}} [f(x,u_{n+1},u'_n) - f(x,u_n,u'_{n-1})](u_{n+1}-u_n)dx (2.5)$$

Note que, pelo Lema 1, a seguinte função

$$\|u\|^2_{k\alpha} = \int_{\mathbb{R}} u''^2 - ku'^2 + \alpha u^2 dx \qquad (2.6)$$

define uma norma em $H^2(\mathbb{R})$ equivalente a dada em (2.2).

Resumindo, obtivemos o seguinte

$$\|u_{n+1}-u_n\|^2_{k\alpha} = \int_{\mathbb{R}} [f(x,u_{n+1},u'_n) - f(x,u_n,u'_{n-1})](u_{n+1}-u_n)dx.$$

2.2 Convergência do Algoritmo

Nós estamos com a seguinte situação

$$\|u_{n+1}-u_n\|_{k\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}} [f(x,u_{n+1},u_n') - f(x,u_n,u_{n-1}')](u_{n+1}-u_n)dx. \tag{2.7}$$

Utilizaremos agora as hipóteses adicionais sobre f da seguinte maneira .

Temos que

$$\begin{aligned} f(x,u_{n+1},u_n') \quad - \quad & f(x,u_n,u_{n-1}') \leqslant |f(x,u_{n+1},u_n') - f(x,u_n,u_{n-1}')| \\ = \quad & |f(x,u_{n+1},u_n') - f(x,u_n,u_n') + f(x,u_n,u_n') - f(x,u_n,u_{n-1}')| \\ \leqslant \quad & |f(x,u_{n+1},u_n') - f(x,u_n,u_n')| + |f(x,u_n,u_n') - f(x,u_n,u_{n-1}')| \\ \leqslant \quad & L_1|u_{n+1}-u_n| + L_2|u_n' - u_{n-1}'|. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Substituindo em (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} \|u_{n+1}-u_n\|_{k\alpha}^2 &\leqslant L_1\|u_{n+1}-u_n\|_{L^2}^2 + L_2\int_{\mathbb{R}} |u_{n+1}-u_n||u_n'-u_{n-1}'|dx \\ &\leqslant L_1\|u_{n+1}-u_n\|_{L^2}^2 + L_2\|u_{n+1}-u_n\|_{L^2}\ \|u_n'-u_{n-1}'\|_{L^2} \\ &\leqslant L_1\|u_{n+1}-u_n\|_{H^2}^2 + L_2\|u_{n+1}-u_n\|_{H^2}\ \|u_n-u_{n-1}\|_{H^2}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Utilizando novamente o Lema 1 obtemos

$$\|u_{n+1}-u_n\|_{k\alpha}^2 \leqslant \frac{L_1}{\gamma}\|u_{n+1}-u_n\|_{k\alpha}^2 + \frac{L_2}{\gamma}\|u_{n+1}-u_n\|_{k\alpha}\|u_n-u_{n-1}\|_{k\alpha}. \tag{2.10}$$

Como $L_1+L_2<\gamma$ segue que

$$(1-\frac{L_1}{\gamma})\|u_{n+1}-u_n\|_{k\alpha}^2 \leqslant \frac{L_2}{\gamma}\|u_{n+1}-u_n\|_{k\alpha}\|u_n-u_{n-1}\|_{k\alpha} \tag{2.11}$$

ou seja,

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{k\alpha} \leqslant \frac{L_2}{\gamma - L_1}\|u_n - u_{n-1}\|_{k\alpha} \tag{2.12}$$

e, como $\frac{L_2}{\gamma - L_1} < 1$, segue que (u_n) é uma sequência de Cauchy e portanto converge fortemente para uma função $u \in H^2(\mathbb{R})$.

2.3 A função u é solução fraca

Nós já temos que $u \in H^2(\mathbb{R})$, e consequentemente, basta mostrar que u é solução fraca de (P).

Com efeito, fixando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ temos

$$\int_{\mathbb{R}} u_n''\varphi'' dx \to \int_{\mathbb{R}} u''\varphi'' dx \tag{2.13}$$

pois $u_n \to u$ em $H^2(\mathbb{R})$.

Pelo mesmo motivo temos

$$\int_{\mathbb{R}} u_n'\varphi' dx \to \int_{\mathbb{R}} u'\varphi' dx \quad \text{e} \tag{2.14}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha(x)u_n\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}} \alpha(x)udx\ \varphi. \tag{2.15}$$

Além disso, de maneira análoga à feita na Seção 1.3.2, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,u_{n+1},u_n')\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x,u,u')\varphi dx. \tag{2.16}$$

Com efeito, se $u_n \to u$ fortemente em $H^2(\mathbb{R})$ então, pelas imersões de Sobolev $u_n(x) \to u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $u_n'(x) \to u'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Como $|u_n|_{L^\infty} < K_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e existe $K \in \mathbb{R}$ positivo tal que $K_n < K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ pois (u_n) é limitada em $H^2(\mathbb{R})$ e a imersão $H^2(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ é contínua, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,u_{n+1},u_n')\varphi dx \to \int_{\mathbb{R}} f(x,u,u')\varphi dx. \tag{2.17}$$

Resumindo

$$\int_{\mathbb{R}} u''\varphi'' dx - k\int_{\mathbb{R}} u'\varphi' dx + \int_{\mathbb{R}} \alpha(x)u\varphi dx = \int_{\mathbb{R}} f(x,u,u')\varphi dx \ \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{2.18}$$

Ou seja, u é solução fraca de (P).

2.4 Regularidade de u

A regularidade pode ser feita de maneira inteiramente análoga ao que foi feito na Seção 1.6.

Capítulo 3

Evidências Numéricas.

Neste capítulo fazemos o estudo de um caso particular do problema (P), a saber

$$\begin{cases} u^{iv} + 15u'' + 100u = f(u,u') \\ u(x) \to 0 \quad \text{se} \quad |x| \to \infty \end{cases} \tag{3.1}$$

onde a função f é dada por

$$f(u,u') = \begin{cases} u^2(1 + e^{-u'^2}) & \text{se } u \geq 0, \\ 0 & \text{se } u < 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Como já observamos na Seção 0.6 a função f satisfaz as hipóteses $(f_1 - f_7)$. Note ainda que as condições do Lema 1 estão satisfeitas. Assim, estamos num caso particular do problema (P). Utilizamos o método de Diferenças Finitas Centradas para atacar o problema (3.1). Ao final, comparamos os resultados obtidos através de integração direta utilizando uma variação do método de Runge-Kutta.

3.1 Fórmulas de Diferenças Finitas Centradas

Como já mencionamos anteriormente, utilizamos o método das Diferenças Finitas Centradas. As formas utilizadas foram:

Derivada de Ordem 4

$$u(x)^{(iv)} = \frac{u(x-2h) - 4u(x-h) + 6u(x) - 4u(x+h) + u(x+2h)}{h^4} + o(h^2). \tag{3.3}$$

Derivada de Ordem 2

$$u(x)'' = \frac{u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)}{h^2} + o(h^2) \tag{3.4}$$

Derivada de Ordem 1

$$u(x)' = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + o(h^2) \tag{3.5}$$

As fórmulas acima são bem conhecidas e portanto dispensamos sua demonstração. Para maiores detalhes veja [17]

3.2 Descrição do Método

No Teorema 1 nós garantimos a existência de solução $u \in H^2(\mathbb{R})$ para o problema (P). Sendo assim, vamos assumir que $u'(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. A ideia central do método consiste em resolver o seguinte problema de contorno com condições de Dirichlet e Neumann homogêneas

$$\begin{cases} u^{iv} + 15u'' + 100u = f(u,u') & \text{em}[-K,K] \\ u(-K) = u(K) = 0, \quad u'(-K) = u'(K) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

onde K é um número real positivo.

Para resolver o problema (3.6) dividimos o intervalo $[-K,K]$ em N intervalos, obtendo assim $N+1$ pontos. Utilizamos a seguinte notação : $t_0 = -K$ e

$$t_{i+1} = t_i + h = -K + i * h,$$

onde $h = \frac{2K}{N}$. Para não carregar a notação, iremos denotar $u_i = u(t_i)$.

Agora vamos utilizar as fórmulas de diferenças finitas. Para isto analisar três casos.

Se $2 \leq i \leq N-2$, não há problemas com as fórmulas. Substituindo as equações (3.3), (3.4) e (3.5) em (3.6) temos

$$\frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{h^4} + 15(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}) + 100u_i = f(u_i, \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}) \tag{3.7}$$

e reagrupando os termos obtemos

$$Au_{i-2} + Bu_{i-1} + Cu_i + Du_{i+1} + Eu_{i+2} = h^4 f(u_i, \frac{ui+1 - u_{i-1}}{2h}) \quad 2 \leq i \leq N-2 \tag{3.8}$$

onde $A = E = 1$, $B = D = 15h^2 - 4$, e $C = 6 - 30h^2 + 100h^4$. Note que os valores u_0 e u_N são conhecidos. Temos assim $N-3$ equações e $N-1$ incógnitas. Vamos encontrar mais duas equações. Para isso utilizamos o método do ponto fantasma. Seja $t_g = t_0 - h$. A fórmula (3.5) nos dá

$$u'(-K) = \frac{u_1 - u_g}{2h} = 0 \quad \Rightarrow u_g = u_1. \tag{3.9}$$

Sendo assim, obtemos outra equação

$$(A + C)u_1 + Du_2 + Eu_3 = h^4 f(u_1, \frac{u_2}{2h}). \tag{3.10}$$

De maneira inteiramente análoga obtemos a última equação

$$Au_{N-3} + Bu_{N-2} + (C+E)u_{N-1} = h^4 f(u_{N-1}, \frac{-u_{N-2}}{2h}). \tag{3.11}$$

Temos então um sistema não linear de $N-1$ equações e $N-1$ incógnitas.

$$\begin{aligned}
&(A+C)u_1 + Du_2 + Eu_3 - h^4 f(u_1, \tfrac{u_2}{2h}) = 0\\
&Bu_1 + Cu_2 + Cu_3 + Eu_4 - h^4 f(u_1, \tfrac{u_3-u_1}{2h}) = 0\\
&\qquad\vdots\\
&Au_{i-2} + Bu_{i-1} + Cu_i + Du_{i+1} + Eu_{i+2} - h^4 f(u_i, \tfrac{ui+1-u_{i-1}}{2h}) = 0\\
&\qquad\vdots\\
&Au_{N-3} + Bu_{N-2} + (C+E)u_{N-1} - h^4 f(u_{N-1}, \tfrac{-u_{N-2}}{2h}) = 0.
\end{aligned}$$

Para resolver o sistema acima utilizamos o conhecido método de Newton. Para maiores detalhes veja [10].

Vamos fazer uma pequena descrição. Defina a função F dada por

$$F(u_1, \cdots, u_{N-1}) = (F_1(u_1, \cdots, u_{N-1}),\ \cdots\ , F_{N-1}(u_1, \cdots, u_{N-1})),$$

onde cada F_i é dada pela i-ésima equação do sistema obtido acima. Assim, para resolver o sistema, precisamos encontrar uma raiz da função F. O método de Newton consiste em dar um dado inicial x_0 que será corrigido até se obter a raiz . A correção se dá da seguinte forma:

a) z é a solução do sistema linear $J(F)\ z = -F$ onde $J(F)$ é o jacobiano da função F.

b) A aproximação nova passa a ser $x_1 = z + x$.

c) Agora fazemos um teste de tolerância. Se $\|F(x_1)\| < \epsilon$, onde ϵ é a margem de tolerância desejada, então x_1 é uma aproximação da raiz. Se não, repetimos novamente o algoritmo.

No nosso caso, utilizamos como dado inicial a seguinte função $u(x) = 60e^{-x^2}$ e a tolerância foi de $\epsilon = 10^{-4}$. Utilizamos este dado inicial devido ao decaimento rápido e suave e também pela simetria. O gráfico do dado inicial pode ser visto na Figura 3.1.

3.3 Resultados Numéricos

Nesta seção vamos expor os resultados numéricos obtidos.

Primeiramente consideramos $K = 10$ e utilizamos 501 pontos. Assim, $h = 0.04$. Em seguida, fizemos a simulação considerando $K = 50$ e 2501 pontos. Desta maneira, o tamanho do passo $h = 0.04$ se manteve o mesmo. Também fizemos a simulação considerando $K = 100$ e utilizando 5001 pontos mantendo novamente o valor do passo $h = 0.04$. Os gráficos obtidos podem ser vistos, respectivamente, nas Figuras 3.2, 3.3 e 3.4 no final do capítulo.

Para efeito de comparação, plotamos as três soluções juntas. Para a validação plotamos a solução numérica obtida através do método de diferenças finitas com
$K = 100$ e 5001 pontos juntamente com a solução obtida através de uma variação do método de Runge-Kutta utilizando o comando *ode45/Matlab*. Os gráficos obtidos podem ser vistos nas Figuras 3.5 e 3.6 respectivamente.

3.4 Conclusão

Nós realizamos simulações em várias escalas, a saber, fizemos simulação com 501 pontos entre $[-10,10]$ (veja Figura 3.2), 2501 pontos entre $[-50,50]$ (veja Figura 3.3) e com 5001 pontos entre $[-100,100]$ (veja Figura 3.4) mantendo o mesmo tamanho de passo $h = 0.04$. Observamos que o perfil da solução se manteve o mesmo. Portanto, temos fortes evidências de ter encontrado solução numérica para o problema (3.1).

Não foi possível validar o resultado com integração direta devido a erros numéricos.

Porém, como pode ser visto na Figura 3.6, a solução numérica obtida pelo método de Diferenças Finitas coincide com a solução obtida através do Runge-Kutta na proximidade da origem.

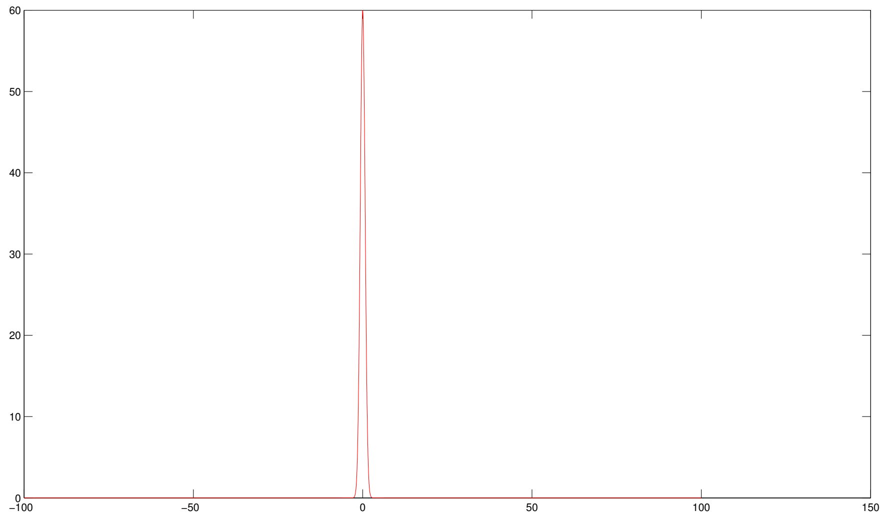

Figura 3.1: Dado inicial : $u(t) = 60e^{-t^2}$.

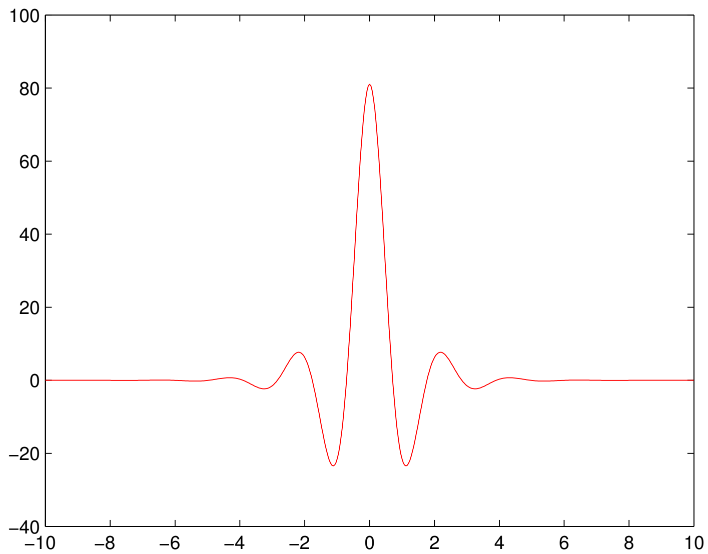

Figura 3.2: Aproximação numérica com $K = 10$, 501 pontos e $h = 0.04$.

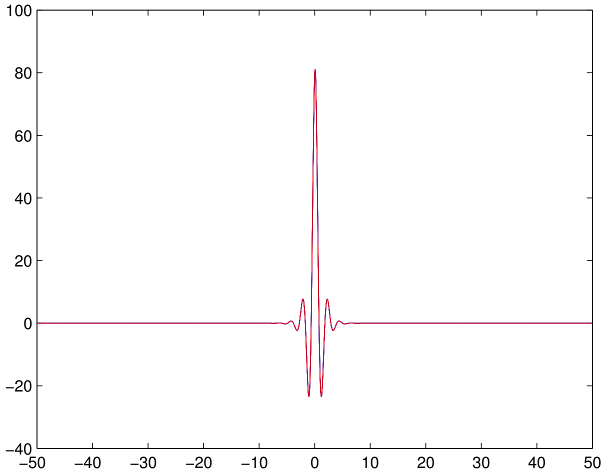

Figura 3.3: Aproximação numérica com $K = 50$, 2501 pontos e $h = 0.04$.

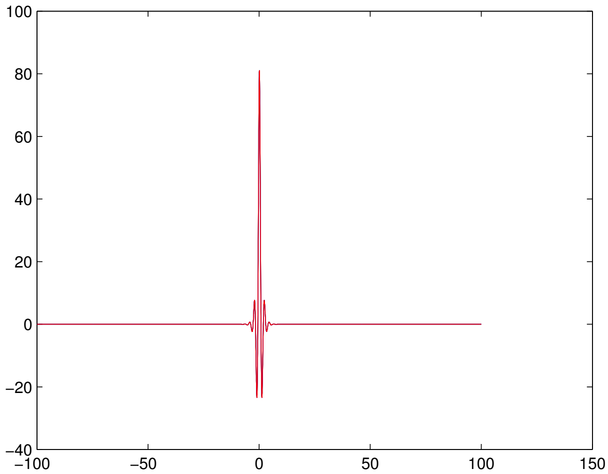

Figura 3.4: Aproximação numérica com $K = 100$, 5001 pontos e $h = 0.04$.

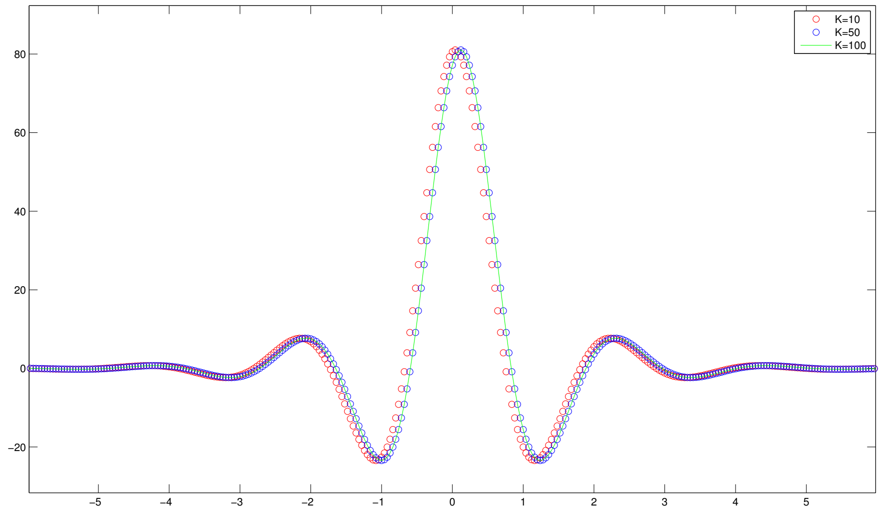

Figura 3.5: Comparação entre as 3 soluções numéricas obtidas via Diferença Finitas com $K = 10$, $K = 50$ e $K = 100$ e passo $h = 0.04$.

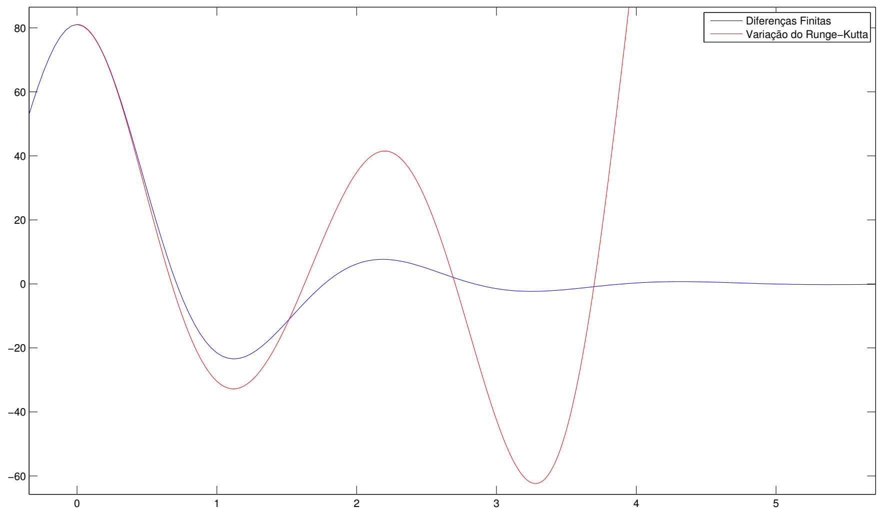

Figura 3.6: Validação da solução numérica obtida no método de Diferenças Finitas através integração direta utilizando uma variação do método de Runge-Kutta .

Apêndice A

Elementos de Análise Funcional

A.1 Espaços Normados

Definição 2. *Seja E um espaço vetorial real. Suponha que esteja definida em E uma função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ tal que*

1. $\|u\| \geq 0 \;\; \forall u \in E$ *e* $\|u\| = 0$ *se, e somente se* $u = 0$.
2. $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\| \quad \forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u,v \in E$.

Nestas condições a função $\|\cdot\|$ é chamada de norma e vamos dizer que $(E,\|\cdot\|)$ é um espaço normado.

Em espaços normados é possível definir o conceito de limite.

Definição 3. *Seja E um espaço normado e $(u_n) \in E$ uma sequência. Diremos que (u_n) converge fortemente a $u \in E$ quando para cada $\epsilon > 0$ for possível obter $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$ então $\|u_n - u\| < \epsilon$.*

Há também para espaços normados a noção de sequência de Cauchy.

Definição 4. *Seja E um espaço normado e $(u_n) \in E$ uma sequência. Vamos dizer que a sequência (u_n) é uma sequência de Cauchy quando para cada $\epsilon > 0$ for possível obter N_0 tal que se $m, n \in \mathbb{N}$ com $n, m > N_0$ então $\|u_m - u_n\| < \epsilon$.*

Observação 1. *É imediato que toda sequência que converge fortemente é uma sequência de Cauchy. A recíproca, porém, não é verdadeira. Basta considerar o espaço $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ onde $|x| = max(x, -x)$. Os espaços normados onde vale a recíproca são chamados de Espaços de Banach.*

A.2 Espaços com Produto Interno

Definição 5. *Seja E um espaço vetorial real. Dizemos que uma função $< \cdot;\cdot >$: $E \times E \to \mathbb{R}$ define um produto interno em E se*

1. *$< \cdot;\cdot >$ é bilinear.*
2. *$< \cdot;\cdot >$ é simétrica.*
3. *$< u;u > \ \geq 0 \ \ \forall u \in E$ e $< u;u >= 0$ se, e somente se, $u = 0$. Neste caso dizemos que $(E, < \cdot;\cdot >)$ é um espaço com produto interno.*

Observação 2. *Se $(E, < \cdot;\cdot >)$ é um espaço com produto interno, então é possível mostrar a seguinte desigualdade, conhecida como Desigualdade de Cauchy-Schwartz*

$$| < u;v > |^2 \leq \ < u;u > \ \ < v;v > .$$

A partir disto, é imediato ver que a função $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ definida por $\|u\| = (< u;u >)^{\frac{1}{2}}$ define uma norma em E. Logo, em todo espaço com produto interno é possível definir uma norma induzida pelo produto interno. Consequentemente surge em espaços com produto interno a noção de limite. Finalmente, se num espaço com produto interno toda sequência de Cauchy for fortemente convergente a algum elemento deste espaço com a norma induzida, então este espaço será chamado de Espaço de Hilbert.

A.3 Espaços Topológicos

Definição 6. *Seja X um conjunto não vazio. Uma topologia em X é uma coleção χ de subconjuntos de X tal que*

1. $\emptyset, X \in \chi$.

2. *Se* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L} \in \chi$ *então* $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \chi$.

Os elementos de χ são chamados de abertos e dizemos que (X, χ) é um espaço topológico. Quando a topologia estiver subentendida vamos denotar apenas por X para não carregar a notação.

Em espaços topológicos é possível introduzir o conceito de limite.

Definição 7. *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência no espaço topológico X e $u \in X$. Dizemos que $\lim u_n = u$ se para todo aberto A de X que contém u for possível obter $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$ então $u_n \in A$.*

Observação 3. *Se E é um espaço normado, é possível induzir em E uma topologia através de sua norma (a saber, a topologia gerada pelas bolas abertas). Neste caso, as definições de limite que introduzimos para espaços normados e espaços topológicos são equivalentes. Por outro lado, nem toda topologia provém de uma norma. Ver [14] .*

Definição 8. *Seja X um conjunto não vazio. Uma métrica (ou distância) em X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que*

1. $d(u,v) \geq 0 \ \ \forall\, u,v \in X$ *e* $d(u,v) = 0$ *se, e somente se,* $u = v$.

2. $d(u,v) = d(v,u) \ \ \forall\, u,v \in X$.

3. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \ \ \forall\, u,v,w, \in X$.

Neste caso dizemos que (X,d) é um espaço métrico.

Em espaços métricos é possível introduzir o conceito de limite.

Definição 9. *Seja (X,d) um espaço métrico, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ e $u \in X$. Dizemos que $\lim u_n = u$ se para cada $\epsilon > 0$, for possível obter $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$ então $d(u_n,u) < \epsilon$.*

Observação 4. *Se $(X,\|\ \ \|)$ é um espaço normado a função $d(u,v) = \|u - v\|$ define uma métrica em X, ou seja, em todo espaço normado é possível induzir uma métrica. Neste caso as definições de limite são equivalentes. Por outro lado, é possível mostrar que nem toda métrica provém de uma norma.*

Observação 5. *Em espaços métricos é possível induzir uma topologia associada à métrica (a saber a topologia gerada pelas bolas abertas). Neste caso, as definições de limite que introduzimos são equivalentes. Por outro lado, é possível mostrar que nem toda topologia provém de uma métrica. Os espaços topológicos em que a topologia provém de uma métrica são chamados de espaços metrizáveis. Veja [14].*

A.4 Compacidade

Nesta seção nos dedicamos aos conjuntos compactos. Tais conjuntos tem importância fundamental no nosso estudo uma vez que estão intimamente ligados à convergências de sequências.

Definição 10. *Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$. Dizemos que a família de abertos $\{U_\lambda\}_{\lambda\in L}$ é uma cobertura aberta de Y se $Y \subset \bigcup_{\lambda\in L} U_\lambda$. Se o conjunto L é finito, dizemos que a cobertura é finita.*

Definição 11. *Seja X um espaço topológico e $Y \subset X$. Dada uma cobertura aberta $\{U_\lambda\}_{\lambda\in L}$ do conjunto Y, dizemos que a família $\{U_\lambda\}_{\lambda\in L'}$ onde $L' \subset L$ é uma subcobertura de Y se $Y \subset \bigcup_{\lambda\in L'} U_\lambda$.*

Podemos agora definir conjuntos compactos.

Definição 12. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto $K \subset X$ é compacto quando toda cobertura aberta de K possuir alguma subcobertura finita.*

Observação 6. *É possível mostrar que em um espaço normado X (e consequentemente metrizável) todo compacto é fechado e limitado. Além disso, é possível mostrar que toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contida num compacto $K \subset X$ possui alguma subsequência convergente para um elemento $u \in K$. Esta última propriedade tem importância fundamental neste trabalho. Veja [14].*

Apêndice B

Espaços de Sobolev

Neste capítulo vamos definir os espaços de Sobolev. Além disso, vamos dar uma atenção especial ao espaço de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$ que é o espaço principal utilizado neste trabalho. Também colocamos no final resultados de integração que como o próprio Brezis afirma: "Todos devem saber".

B.1 Espaços de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R})$

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo possivelmente ilimitado e seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq +\infty$.

Definição 13. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R})$ é definido como*

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \ \ tal \ \ que \int_{\mathbb{R}} u\varphi' dx = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I)\}. \tag{B.1}$$

Se $u \in W^{1,p}(I)$ então existe $g \in L^p(I)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} u\varphi' dx = -\int_{\mathbb{R}} g\varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I). \tag{B.2}$$

Neste caso, denotamos $u' = g$ e dizemos que u' é a derivada fraca de u.

Teorema 7. *O espaço $W^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach com a norma*

$$\|u\|_{H_2} = \|u\|_{L_p} + \|u'\|_{L_p} \quad \forall u \in W^{1,p}(I), \tag{B.3}$$

onde $\|u\|_{L_p} = [\int_I |u|^p]^{\frac{1}{p}}$. Além disso, $W^{1,p}(I)$ é reflexivo se $1 < p < +\infty$ e separável se $1 \leq p < +\infty$.

Para demonstração veja [3].

B.2 Propriedades

Teorema 8. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Existe uma função $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ tal que*

$$u(x) = \tilde{u}(x) \quad q.t.p. em \quad I \quad e \tag{B.4}$$

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt. \tag{B.5}$$

Observação 7. *Em outras palavras, o teorema acima nos diz que toda função $u \in W^{1,p}(I)$ possui um representante contínuo.*

Teorema 9. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$ Então existe uma sequência (u_n) em $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $(u_n)_I \to u$ em $W^{1,p}(I)$.*

Para demonstrações veja [3].

B.3 Imersões de Sobolev

Teorema 10 (Imersões de Sobolev)**.** *Existe uma constante C dependendo apenas de $|I|$ (medida de I) tal que*

$$\|u\|_{L_\infty} \leq C\|u\|_{W_{1,p}} \;\; \forall u \in W^{1,p}(I), \;\; \forall\, 1 \leq p \leq +\infty.$$

De outro modo: $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ *é com imersão contínua.*

Além disso, se I *é limitado, então*

1. *A imersão* $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$ *é compacta para todo* $1 < p \leq +\infty$.

2. *A imersão* $W^{1,p}(I) \subset L^q(I)$ *é compacta para todo* $1 \leq q < +\infty$.

Para demonstração veja [3].

Observação 8. *Seja* I *possivelmente ilimitado. Então* $u \in W^{1,p}(I) \Rightarrow u \in L^q(I)$ *para todo* $q \in [p, +\infty]$ *já que*

$$\int_I |u|^q dx = \int_I |u|^{q-p}|u|^p dx \leq \|u\|_{L_\infty}^{q-p} \cdot \|u\|_{L_p}^p. \tag{B.6}$$

Observação 9. *Decorre imediatamente da observação acima que a imersão* $W^{1,p}(I) \subset L^q(I)$ *é contínua para todo* $q > p$. *Logo, se* $u \in W^{1,p}(I)$ *então existe* $C > 0$ *tal que*

$$\|u\|_{L_q} \leq C\|u\|_{W^{1,p}} \quad .$$

Teorema 11. *Suponha que* I *é um intervalo ilimitado e* $u \in W^{1,p}(I)$ *com* $1 \leq p < +\infty$. *Então*

$$\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0.$$

Para demonstração veja [3].

B.4 Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Definição 14. *Dado um inteiro* $m \geq 2$ *e um número real* $1 \leq p \leq +\infty$ *definimos por indução o espaço*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I); u' \in W^{m-1,p}(I)\}. \tag{B.7}$$

Também definimos o espaço

$$H^m(I) = W^{m,2}(I). \tag{B.8}$$

A norma considerada nesses espaços é

$$\|u\|_{W^{m,p}} = (\|u\|_{L_p}^p + \|u'\|_{L_p}^p + \cdots + \|u^{(m)}\|_{L_p}^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{B.9}$$

B.5 O espaço $H^2(\mathbb{R})$

Neste trabalho o espaço principal considerado é o $H^2(\mathbb{R})$. Este se torna um espaço de Hilbert com o seguinte produto interno

$$< u; v >_{H_2} = \int_I u''v''dx + \int_I u'v'dx + \int_I uvdx \ \ \forall \ \ u,v \in H^2(\mathbb{R}).$$

Além disso, é imediato que o produto interno acima induz a norma usual de $H^2(\mathbb{R})$ e vale

$$\|u\|_{L_2} \leq \|u\|_{W_{1,2}} \leq \|u\|_{H_2} \ \ \forall u \in H^2(\mathbb{R}).$$

Neste trabalho especificamente vamos introduzir outro produto interno em $H^2(\mathbb{R})$

$$< u; v >_{k\alpha} = \int_I u''v''dx - k\int_I u'v'dx + \int_I \alpha(x)uvdx \ \ \forall \ \ u,v \in H^2(\mathbb{R})$$

onde k é uma constante e $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder- Contínua. Para garantir que o produto definido acima é de fato um produto interno vamos supor que k e α estão nas condições do lema a seguir, o qual nos garante uma equivalência de normas em $H^2(\mathbb{R})$.

Lema 9 (Equivalência de Normas). *Suponha que α e k satisfaçam as seguintes hipóteses*

1. *α é Hölder-contínua.*

2. *Existem constantes positivas $a,b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < \alpha(x) < b \ \forall x \in \mathbb{R}$.*

3. $k \in (-\infty, 2\sqrt{a})$.

Então, existem constantes positivas γ, η *tais que*

$$\gamma\|u\|_{H_2}^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}} (u''^2 - ku'^2 + \alpha(x)u^2)dx \leqslant \eta\|u\|_{H_2}^2 \quad \forall u \in H^2(\mathbb{R}). \tag{B.10}$$

Demonstração. Existência de η:

Seja $u \in H^2(\mathbb{R})$. Defina

$$\eta = \max\{1, -k, b\}. \tag{B.11}$$

Temos

$$\int_{\mathbb{R}} (u''^2 - ku'^2 + \alpha(x)u^2)dx \leq \eta \int_{\mathbb{R}} (u''^2 + u'^2 + u^2)dx = \eta\|u\|_{H^2}, \quad \forall u \in H^2(\mathbb{R}). \tag{B.12}$$

Existência de γ:

Se $k < 0$, de maneira análoga á feita no ítem anterior, o resultado segue tomando

$$\gamma = min\{1, -k, a\}. \tag{B.13}$$

Suponha que $0 \leq k \leq 2\sqrt{a}$ e seja $\widehat{u}(\xi)$ a transformada de Fourier de $u \in H^2(\mathbb{R})$.

Se $s \in (0,3)$ é tal que

$$(k+1)\xi^2 - a + 1 \leq \frac{s}{3}(1 + \xi^2 + \xi^4) \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \tag{B.14}$$

basta tomar $\gamma = 1 - \frac{s}{3}$ Com efeito, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} (u''^2 - ku'^2 + \alpha(x)u^2)dx \geq \int_{\mathbb{R}} (u''^2 - ku'^2 + au^2)dx \tag{B.15}$$

e utilizando a Identidade de Parseval (veja [6]) na equação ($B.15$) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} (u''^2 - ku'^2 + \alpha(x)u^2)dx \geq \int_{\mathbb{R}} (\xi^4 - k\xi^2 + a)|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi. \tag{B.16}$$

Note que

$$\xi^4 - k\xi^2 + a = \xi^4 + \xi^2 + 1 - (k+1)\xi^2 + a - 1 \geq (\xi^4 + \xi^2 + 1)(1 - \frac{s}{3}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{B.17}$$

Substituindo ($B.17$) em ($B.16$) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} (u''^2 - ku'^2 + \alpha(x)u^2)dx \geq \int_{\mathbb{R}} (\xi^4 + \xi^2 + 1)|\widehat{u}|^2 d\xi = \gamma \|u\|_{H^2} \quad \forall u \in H^2(\mathbb{R}). \tag{B.18}$$

Para finalizar a demonstração, basta garantir a existência de $s \in (0{,}3)$ que verifica ($B.14$). Para isto, note que ($B.14$) é equivalente a

$$0 \leq \xi^4 + (1 - \frac{3(k+1)}{s})^2 - 4(1 + \frac{3(a-1)}{s}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \tag{B.19}$$

que é satisfeita se, e somente se,

$$(1 - \frac{3(k+1)}{s})^2 - 4(1 + \frac{3(a-1)}{s}) \leq 0, \tag{B.20}$$

ou seja, se, e somente se,

$$s^2 + 2s(k + 2a - 1) - 3(k+1)^2 \geq 0. \tag{B.21}$$

Como por hipótese $0 < s < 3$, a inequação ($B.21$) é satisfeita se, e somente se,

$$s_0 = -(k + 2a - 1) + \sqrt{(k + 2a - 1) + 3(k+1)^2} \leq s < 3, \tag{B.22}$$

sendo que a desigualdade (B.22) implica

$$k < 2\sqrt{a}, \tag{B.23}$$

o que é verdade por hipótese. $\square$

B.6 Resultados de Integração que Todos devem saber

No que segue, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ onde $N \in \mathbb{N}$ e a integral utilizada é a Integral de Lebesgue. A prova dos resultados a seguir pode ser encontrada em [3].

Teorema 12 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis em Ω, isto é, $(f_n) \subset L^1(\Omega)$. Suponha que $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \ldots$ q.t.p em Ω e que $\sup_{n\in\mathbb{N}}(\int_\Omega f_n) < \infty$. Então existe uma função $f \in L^1(\Omega)$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω e $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$, ou seja,*

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx. \tag{B.24}$$

Teorema 13 (Teorema da Convergência Dominada)**.** *Sejam (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω onde f é uma função mensurável. Suponha que exista $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p em Ω. Então $f \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx. \tag{B.25}$$

Lema 10 (Fattou)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$ tais que $f_n(x) \geq 0$ q.t.p em Ω e $\sup_{n\in\mathbb{N}}(\int_\Omega f_n) < \infty$. Defina $f(x) = \liminf_{n\in\mathbb{N}}(f_n(x))$. Então $f \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega f_n dx \to \int_\Omega f dx. \tag{B.26}$$

B.7 Noções de Distribuições

Vamos agora introduzir o conceito de distribuição e fazer uma breve exposição sobre suas propriedades básicas. Optamos por fazer um caso bem particular que cabe neste trabalho. Para uma exposição mais geral veja [18].

B.7.1 Definição

Considere o conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R})$ das funções reais com suporte compacto. É possível introduzir em $C_0^\infty(\mathbb{R})$ uma topologia, denominada limite indutivo, que faz deste espaço um espaço topológico denotado por $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e cujos elementos são chamados de funções teste. Como já observamos no apêndice A, uma topologia induz uma noção de limite. Em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ a noção de limite é dada pela definição a seguir.

Definição 15. *Seja (φ_n) uma sequência de funções teste e seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Dizemos que $\varphi_n \to \varphi$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ se existir um subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$ que contenha supp φ_n e supp φ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi^{(m)} \to \varphi^{(m)}$ uniformemente para todo $m \in \mathbb{N}$.*

Definição 16. *O espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ é o espaço dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, isto é, o conjunto dos funcionais lineares contínuos definidos em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Observe que se $u \in L^2(\mathbb{R})$, então o seguinte funcional T_u definido em $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dado por

$$< T_u; \varphi >= \int_{\mathbb{R}} u\varphi \tag{B.27}$$

define uma distribuição. Dessa maneira o espaço $L^2(\mathbb{R})$ pode ser visto como um subespaço do espaço das distribuições.

Definição 17. *Dada uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, definimos sua derivada $T' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ da seguinte maneira*

$$< T'; \varphi >= - < T; \varphi' > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{B.28}$$

Assim, toda distribuição possui derivada sendo que a derivada de ordem $m \in \mathbb{N}$ de uma distribuição T é dada por

$$< T^{(m)}; \varphi >= (-1)^m < T; \varphi^{(m)} > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{B.29}$$

Como o espaço $L^2(\mathbb{R})$ pode ser imerso em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, toda função $u \in {}^2(\mathbb{R})$ possui derivada no sentido das distribuições. Note ainda que se $u \in H^2(\mathbb{R})$, então u' e u'' $\in L^2(\mathbb{R})$ e

$$\int_{\mathbb{R}} u' \varphi dx = < T_u'; \varphi > = \; - < T_u; \varphi' > = \; - \int_{\mathbb{R}} u \varphi' dx \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{B.30}$$

$$\int_{\mathbb{R}} u'' \varphi dx \; = < T_u''; \varphi > = < T_u; \varphi'' > = \; \int_{\mathbb{R}} u \varphi'' dx \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \tag{B.31}$$

Neste caso, o conceito de derivada fraca coincide com o de derivada no sentido das distribuições, ou seja, a derivada fraca de Sobolev é um caso particular de derivada de distribuições.

Apêndice C

Funcionais Diferenciáveis

C.1 Definições Básicas

Neste capítulo $\|\cdot\|$ indicará a norma do espaço de Banach em questão.

Definição 18. *Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}$ onde U é um aberto de um espaço de Banach X. O funcional é Gateaux diferenciável em $u \in U$ se existir $f \in X^*$ tal que para todo $v \in X$*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u+tv) - \varphi(u) - t < f; v >] = 0.$$

Neste caso, o funcional f é único e será chamado de derivada de Gateaux em u e será denotado por $\varphi'(u)$ dada por

$$< \varphi'(u); v >= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\varphi(u+tv) - \varphi(u)).$$

Observação 10. *$< \varphi'(u), v >$ é a derivada direcional de φ em u na direção v.*

Definição 19. *O funcional φ tem derivada a Fréchet $f \in X^*$ em $u \in U$ se*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{1}{\|h\|}[\varphi(u+th) - \varphi(u) - < f; h >] = 0.$$

Neste caso, f é a derivada a Fréchet de φ em u e será denotada por $\varphi'(u)$.

Observação 11. *O fucional φ é diferenciável a Fréchet (ou a Gateaux) se for diferenciável em todos os pontos de U.*

Observação 12. *Se φ é diferenciável a Fréchet então φ é diferenciável a Gateaux*

Observação 13. *O funcional $\varphi \in C^1(U;\mathbb{R})$ se possuir derivada de Fréchet em todos os pontos de U e a função $u \mapsto \varphi'(u)$ for contínua em U.*

Teorema 14. *Se φ tem derivada de Gateaux contínua em U ent˜åo $\varphi \in C^1(U;\mathbb{R})$, ou seja, φ é diferenciável a Fréchet.*

Para maiores detalhes veja [12].

C.2 O funcional I_w

Nesta parte, vamos provar que o funcional I_w definido em (23) é $C^1(H^2(\mathbb{R});\mathbb{R})$ onde $w \in H^2(\mathbb{R})$ está fixo.

Considere o seguinte funcional, definido em $H^2(\mathbb{R})$:

$$I_w(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(u''^2 - ku'^2 + \alpha(x)u^2)dx - \int_{\mathbb{R}} F(x,u,w')dx \quad \forall u \in H^2(\mathbb{R}).$$

Vamos mostrar que $I_w \in C^1(H^2(\mathbb{R});\mathbb{R})$. Para isto, tome $\varphi : H^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi_v(u) = \int_{\mathbb{R}}(u''v'' - ku'v' + \alpha(x)uv)dx - \int_{\mathbb{R}} f(x,u,w')vdx \ \forall\ v\ \in\ H^2(\mathbb{R}).$$

Vamos mostrar primeiramente que $\varphi_v \in (H^2(\mathbb{R}))^*$ para todo $v \in H^2(\mathbb{R})$. Claramente φ_v é linear. Basta portanto verificar a continuidade. Para isto, seja $(u_n) \in H^2(\mathbb{R})$ tal que $u_n \to u \in H^2(\mathbb{R})$. Temos que

$$< u_n; v >_{q\alpha} = \int_I u_n''v''dx - k\int_I u_n'v'dx + \int_I \alpha(x)u_nvdx \to < u,v >_{k\alpha}$$

pois como foi observado no Apêndice B $< \ \cdot\ ;\ \cdot\ >_{k\alpha}$ é um produto interno e, consequentemente, (vide Apêndice A) contínuo. Além disso, pelas Imersões de Sobolev, segue que $u_n(x) \to u(x)$ em $\mathbb{R}$ e existe $K_0 > 0$ tal que $\|u_n\|_{L^\infty} < K_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. De maneira inteiramente análoga à feita na Seção (1.3.2) concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,u_n,\xi)vdx \to \int_{\mathbb{R}} f(x,u,\xi)vdx. \tag{C.1}$$

Segue que o funcional φ_v é contínuo para todo $v \in H^2(\mathbb{R})$.

Para finalizar, vamos mostrar que $I_w'(u)v = \varphi_u(v) \quad \forall v \in H^2(\mathbb{R})$. Temos que

$$I_w'(u)v = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[I_w(u+tv) - I_w(u)]. \tag{C.2}$$

Para calcular o limite acima, vamos calcular inicialmente a diferença $[I_w(u+tv)-I_w(u)]$. Temos que

$$I_w(u+tv) = \frac{1}{2}\|u\|_{k\alpha}^2 + t < u;v >_{k\alpha} + \frac{1}{2}\|tv\|_{k\alpha}^2 - \int_{\mathbb{R}} F(x,u+tv,w')dx \tag{C.3}$$

ou seja,

$$I_w(u+tv) - I_w(u) = t < u,v >_{k\alpha} + \frac{t^2}{2}\|v\|_{k\alpha}^2 + \int_{\mathbb{R}} [F(x,u,w') - F(x,u+tv,w')]dx. \tag{C.4}$$

Como

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[F(x,u,w') - F(x,u+tv,w')] = -f(x,u,w')v \tag{C.5}$$

segue que

$$I_w'(u)v =< u,v >_{k\alpha} - \int_{\mathbb{R}} f(x,u,w')vdx = \varphi_v(u). \tag{C.6}$$

Concluimos que o funcional I_w é $C^1(H^2(\mathbb{R});\mathbb{R})$.

Apêndice D

Formulação Variacional

Neste capítulo vamos fazer a formulação variacional dos problemas (P) e (P_w). Para isto, seja $v_0 \in C_0^2(\mathbb{R})$. Temos que se u é solução clássica de (P) então

$$u^{iv} + ku'' + \alpha(x)u = f(t,u,u').$$

Multiplicando por v_0 os dois lados da equação e integrando obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} u^{iv}v_0 + ku''v_0 + \alpha(x)uv_0 dx = \int_{\mathbb{R}} f(t,u,u')v_0 dx. \tag{D.1}$$

Seja $K > 0 \in \mathbb{R}$ tal que *supp* $v_0 \subset [-K,K]$. Temos que

$$\int_{\mathbb{R}} u^{iv}v_0 dx = \int_{-K}^{K} u^{iv}v_0 dx = \int_{-K}^{K} u''v_0'' dx, \tag{D.2}$$

onde na ultima igualdade utilizamos integração por partes duas vezes. Analogamente temos que

$$\int_{\mathbb{R}} u''v_0 dx = -\int_{\mathbb{R}} u'v_0' dx. \tag{D.3}$$

Logo, substituindo na equação (D.1) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} u''v_0'' - k'v_0' + \alpha(x)uv_0dx = \int_{\mathbb{R}} f(t,u,u')v_0dx \ \ \forall v_0 \in C_0^2(\mathbb{R}). \tag{D.4}$$

Como $C_0^2(\mathbb{R})$ é denso em $H^2(\mathbb{R})$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}} u''v'' - k'v' + \alpha(x)uvdx = \int_{\mathbb{R}} f(t,u,u')vdx \ \ \forall v \in H^2(\mathbb{R}). \tag{D.5}$$

Definição 20. *Uma solução fraca do problema* (P) *é uma função* $u \in H^2(\mathbb{R})$ *que satisfaz a equação* (D.5) *para todo* $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Analogamente, obtemos que se u é solução clássica de (P_w) com $w \in H^2(\mathbb{R})$ fixado, então

$$\int_{\mathbb{R}} u''v'' - k'v' + \alpha(x)uvdx = \int_{\mathbb{R}} f(t,u,w')vdx \ \ \forall v \in H^2(\mathbb{R}). \tag{D.6}$$

Definição 21. *Uma solução fraca do problema* (P_w) *é uma função* $u \in H^2(\mathbb{R})$ *que satisfaz a equação* (D.6) *para todo* $v \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Observação 14. *Se* u *é solução clássica de* (P) *(respectivamente de* (P_w)*) é imediato ver que* u *é solução fraca de* (P) *(respectivamente* (P_w)*).*

Apêndice E

Propriedades da Topologia Fraca

No que segue, faremos uma exposição básica sobre as propriedades básicas da topologia fraca. Para uma visão mais detalhada veja ([3]).

Definição 22. *Seja X um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(X, X^*)$ é a topologia menos fina que torna todos os funcionais $\varphi \in X^*$ contínuos.*

Observação 15. *Quando colocamos em X a topologia fraca $\sigma(X, X^*)$ induzimos uma nova noção de convergência chamada de convergência fraca. Neste caso, diremos que (u_n) converge fracamente a $u \in X$ e denotaremos isto por $u_n \rightharpoonup u$.*

E.1 Propriedades básicas da convergência fraca

Teorema 15. *Seja $(x_n) \subset X$ uma sequência. Então*

1. $[x_n \rightharpoonup x] \Leftrightarrow [< f,x_n > \to < f,x > \quad \forall f \in X^*]$.
2. *Se $x_n \to x$ então $x_n \rightharpoonup x$.*
3. *Se $x_n \rightharpoonup x$ então $(\|x_n\|)$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.*
4. *Se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \to f$ em X^* então $< f_n, x_n > \to < f,x >$.*

Teorema 16 (Kakutani). *Seja X um espaço de Banach. Então X é reflexivo se, e somente se, a bola*

$$B[0,1] = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$$

é compacta na topologia fraca $\sigma(X, X^*)$.

Teorema 17. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e $(x_n) \subset X$ uma sequência limitada em X. Então existe uma subsequência (x_{n_k}) que converge fracamente a algum $x \in X$.*

Observação 16. *Os dois teoremas acima têm importância fundamental neste trabalho e no estudo das equações diferenciais de uma maneira geral.*

Observação 17. *O espaço $H^2(\mathbb{R})$ é reflexivo. Logo suas bolas fechadas são fracamente compactas e sequências limitadas admitem subsequências fracamente convergentes.*

Teorema 18. *Seja $T : X \to y$ um operador compacto entre dois espaços de Banach. Se $(u_n) \subset X$ é uma sequência tal que $u_n \rightharpoonup u \in X$ então a sequência $(T(u_n)) \subset Y$ converge fortemente a $T(u)$, ou seja, $T(u_n) \to T(u)$.*

Observação 18. *Note que segundo o teorema acima e o teorema de imersões de Sobolev, se $u_n \rightharpoonup u$ em $H^2(\mathbb{R})$ então $u_n \to u$ em $L^p(I)$ para todo $1 \leq p < +\infty$ onde I é um intervalo limitado.*

Apêndice F

Caracterização do nível c_w

Neste capítulo vamos mostrar que $I'_w(u_w) = c_w$ onde $u_w \in H^2(\mathbb{R})$ é a solução fraca do problema (P_w). A demonstração foi baseada em [8].

Nós já provamos que a solução u_w do problema (P_w) é não nula. Logo, o conjunto

$$M_w = \{u \in H^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}; I'_w(u)u = 0\} \tag{F.1}$$

é não vazio. Além disso, para cada $u \in H^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ defina a função $\psi_u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi_u(t) = I_w(tu) \ \ \forall t \geq 0. \tag{F.2}$$

Se $t > 0$, pelos Lemas 2 e 3, temos que $\psi_u(t) > 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $\psi_u(t) < 0$ para t suficientemente grande. Além disso, pela hipótese (f_1) segue que $\psi_u(0) = 0$. Podemos concluir então que ψ_u é limitada superiormente e seu máximo é atingido em algum $t_u > 0$.

Defina a função $\varphi : H^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(u) = t_u$, onde t_u é algum número real positivo (note que podem existir mais de um) tal que $\psi_u(t_w) = \max_{t \geq 0} I_w(tu)$. Sendo assim, temos que

$$\psi'_u(\varphi(u)) = I'_w(\varphi(u)u)u \tag{F.3}$$

ou seja,

$$\varphi(u)\|u\|_{k\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x,\varphi(u)u,w')dx. \tag{F.4}$$

A equação acima nos mostra que $\varphi(u)u \in M_w$ e , utilizando a hipótese (f_6) mostra-se que $\varphi(u)$ é o único número real tal que $\varphi(u)u \in M_w$.

Proposicão 1. *A função $u \mapsto \varphi(u)$ é contínua em $H^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.*

Demonstração. Seja $(u_n) \subset H^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tal que $u_n \to u \neq 0$ em $H^2(\mathbb{R})$.

Temos

$$\varphi(u_n)\|u_n\|_{k\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x,\varphi(u_n)u_n,w')u_n dx \tag{F.5}$$

ou seja,

$$\varphi(u_n)^2\|u_n\|_{k\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x,\varphi(u_n)u_n,w')\varphi(u_n)u_n dx. \tag{F.6}$$

Vamos mostrar que a sequência $(\varphi(u_n))$ é limitada. Se a sequência satisfaz $\varphi(u_n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o resultado é imediato. Da mesma maneira, se houver apenas um número finito de índices $i \in \mathbb{N}$ tais que $\varphi(u_i) > 1$. Se, porém, a sequência $(\varphi(u_n))$ tiver infinitos termos maiores do que 1, isto é, existir um conjunto infinito de índices $i \in \mathbb{N}$ tais que $\varphi(u_i) > 1$ temos, extraindo essa subsequência também denotada por $(\varphi(u_n))$, que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,\varphi(u_n)u_n, w')\varphi(u_n)u_n dx \geq \Theta \int_{\mathbb{R}} F(x, \varphi(u_n)u_n, w')dx \geq \Theta \int_{\mathbb{R}} \varphi(u_n)^{\Theta} F(x,u_n,w')dx. \tag{F.7}$$

Note que na última desigualdade utilizamos o fato de a função $t \mapsto \frac{F(x,tu,w')}{t^{\Theta}}$ ser crescente para $t > 0$ onde $x \in \mathbb{R}$ e $u, w \in H^2(\mathbb{R})$ estão fixados. Para ver isto, defina $\xi(t) = \frac{F(x,tu,w')}{t^{\Theta}}$ para todo $t > 0$. Temos que

$$\xi' = \frac{f(x,tu,w')t^{\Theta} - \Theta F(x,tu,w')t^{\Theta-1}}{t^{2\Theta}} = \frac{1}{t^{\Theta+1}}(f(x,tu,w')tu - \Theta F(x,tu,w')) > 0 \tag{F.8}$$

onde a última desigualdade segue da hipótese (f_4). Mostramos assim que a função ξ é crescente. Substituindo ($F.7$) em ($F.6$) obtemos

$$\varphi(u_n)^{\Theta-2} \leq \frac{1}{\Theta} \cdot \frac{\|u_n\|_{k\alpha}^2}{\int_{\mathbb{R}} F(x,u_n,w')dx} \to \frac{1}{\Theta} \cdot \frac{\|u\|_{k\alpha}^2}{\int_{\mathbb{R}} F(x,u,w')dx}. \tag{F.9}$$

Segue que a sequência $(\varphi(u_n))$ é limitada.

Concluimos, portanto, que em qualquer dos casos a sequência $(\varphi(u_n))$ deve ser limitada. Sendo assim, a menos de subsequência, $\varphi(u_n) \to \bar{\varphi}$. Vamos mostrar que $\bar{\varphi} \neq 0$. Com efeito, se fosse $\bar{\varphi} = 0$, pela equação ($F.6$) teríamos que

$$\|u_n\|_{k\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x,\varphi(u_n)u_n,w')\varphi(u_n)u_n dx \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}} |u_n|^2 dx \ + \ C_\epsilon \varphi(u_n)^{q-2} \int_{\mathbb{R}} |u|^q dx \tag{F.10}$$

e, como $u_n \to u$ em $H^2(\mathbb{R})$, segue que esta é limitada e utilizando as imersões de Sobolev obtemos que $u_n \to 0$ em $H^2(\mathbb{R})$ o que é absurdo pois $u \neq 0$ por hipótese. Sendo assim, temos que $\bar{\varphi} > 0$ e passando o limite na equação ($F.6$) obtemos

$$\bar{\varphi}^2 \|u\|_{k\alpha}^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x,\bar{\varphi}u,w')\bar{\varphi}u dx \tag{F.11}$$

i.e. $\bar{\varphi}u \in M_w$ e pela unicidade do número $\varphi(u)$ segue que $\bar{\varphi} = \varphi(u)$ é o único valor de aderência da sequência $\varphi(u_n)$ e consequentemente $\varphi(u_n) \to \varphi(u)$, i.e, a função é contínua. □

Agora estamos prontos para dar uma nova caracterização para o nível c_w (ver Capítulo 2, Teorema 2). Defina

$$c^* = \inf_{u \in H^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} I_w(t,u). \tag{F.12}$$

Proposicão 2. *O nível c_w pode ser alternativamente caracterizado por*

$$c^* = c_w = \inf_{u \in M_w} I_w. \tag{F.13}$$

Demonstração. Como observamos anteriormente, temos que, para cada $u \in H^2(\mathbb{R})\backslash\{0\}$,

$$\max_{t\geq 0} I_w(tu) = I_w(\varphi(u)u) \tag{F.14}$$

e $\varphi(u)u \in M_w$. Segue então que $c^* = \inf_{u\in M_w} I_w(u)$. Seja agora $g \in C([0,1]; H^2(\mathbb{R}))$ um caminho tal que $g(0) = 0$ e $g(1) = v \neq 0$ de maneira que $I_w(v) \leq 0$. Afirmamos que g cruza M_w. Com efeito, se $u \in H^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ é interior a M_w ou $I'_w(u)u > 0$ temos que

$$\|u\|^2_{q\alpha} \geq \int_{\mathbb{R}} f(x,u,w')udx > \Theta \int_{\mathbb{R}} F(x,u,w')dx \tag{F.15}$$

ou seja,

$$I_w(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{k\alpha} - \int_{\mathbb{R}} F(x,u,w')dx \geq (\frac{\Theta}{2} - 1) \int_{\mathbb{R}} F(x,u,w')dx. \tag{F.16}$$

Note que $g(t) > 0$ para t positivo suficientemente pequeno pelo lema 2. Logo, pelo Teorema da Alfândega, segue que g cruza M_w. Sendo assim, temos

$$\max_{t\in[0,1]} I_w(g(t)) \geq \inf_{u\in M_w} I_w(u) = c^* \tag{F.17}$$

e então $c_w \geq c^*$. Por outro lado, fixado $u \in H^2(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, temos que $I_w(tu) < 0$ para $t(u)$ suficientemente grande. Logo, cada raio $R_u = \{tu; t \geq 0\}$ pode ser associado a algum caminho $g_u \in C([0,1]; H^2(\mathbb{R}))$ tal que $g(0) = 0$ e $g(1) = v \neq 0$ de maneira que $I_w(v) \leq 0$. Consequentemente

$$c^* = \inf_{u\in H^2(\mathbb{R})\backslash\{0\}} \max_{t\geq 0} I_w(tu) = \inf_{u\in H^2(\mathbb{R})\backslash\{0\}} \max_{t\in[0,1]} I_w(g_u(t)) \geq \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_w(g(t)) := c_w \tag{F.18}$$

onde Γ é dado no teorema 2.

Mostramos que $c^* = c_w = \inf_{u\in M_w} I_w(u)$. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] P.H. Rabinowitz A. Ambrosetti. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Funct. Anal*, 14:349 – 381, 1973.

[2] D. Bonheure, L. Sanchez, M. Tarallo, and S. Terracini. Heteroclinic connections between nonconsecutive equilibria of a fourth order differential equation. *Calc. Var.*, 17(4):341–356, 2003.

[3] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer-Verlag New York Inc, 2010.

[4] P.C. Carriao, L.F.O. Faria, and O.H. Miyagaki. Periodic solutions for extended fisher–kolmogorov and swift–hohenberg equations by truncature techniques. *Nonlinear Analysis*, 67(11):3076–3083, 2007.

[5] D.G. de Figueiredo, M. Girardi, and M. Matzeu. Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via mountain pass techniques. *Differ. Integ. Eq.*, 17:119–126, 2004.

[6] L.C. Evans. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics. Hardcover, Providence, 1998.

[7] Q. Fan, W. Wang, and J. Zhou. Periodic solutions of some fourth-order nonlinear differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233:121–126, 2009.

[8] G.M. Figueiredo. *Multiplicidade de soluções positivas para uma classe de problemas quasilineares*. PhD thesis, UNICAMP, 2004.

[9] G.M. Figueiredo. Quasilinear equations with dependence on the gradient via mountain pass techniques in rn. *Applied Mathematics and Computation*, 203(1):14–18, 2008.

[10] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix computations*, volume 3. Johns Hopkins Univ Pr, third edition, 1996.

[11] W.D. Kalies and R. VanderVorst. Multitransition homoclinic and heteroclinic solutions of the extended fisher-kolmogorov equation. *journal of differential equations*, 131:209–228, 1996.

[12] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin. *Introdutory real analysis*. Dover, 1975.

[13] C. Li. Remarks on homoclinic solutions for semilinear fourth-order ordinary differential equations without periodicity. *Appl. Math. J. Chinese Univ.*, 24(1):49–55, 2009.

[14] E.L. Lima. *Espaços Métricos*. IMPA, 1993.

[15] P.L. Lion. The concentration-compacteness principle in the calculus of variation. the locally compact case. part ii. *Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineéaire*, 1:223–283, 1984.

[16] R. Ma and G. Dai. Periodic solutions of nonlocal semilinear fourth-order differential equations. *Nonlinear Analysis*, 74:5023–5029, 2011.

[17] K.W. Morton and D.F. Mayers. *Numerical solution of partial differential equations: an introduction*. Cambridge Univ Pr, 2005.

[18] L. Narici and G. Beckenstein, E. e Bachman. *Functional analysis and valuation theory*, volume 5. CRC, 1971.

[19] P.H. Rabinowitz. On a class of nonlinear schrödinger equations. *ZAMP*, 43:271–291, 1992.

[20] Y. Ruan. Periodic and homoclinic solutions of a class of fourth order equations. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 41(3):885–907, 2011.

[21] D. Smets and J.B. van den Berg. Homoclinic solutions for swift–hohenberg and suspension bridge type equations. *Journal of Differential Equations*, 184(1):78–96, 2002.

[22] C. Zhao, W. Chen, and J. Zhou. Periodic solutions for a class of fourth-order nonlinear differential equations. *Nonlinear Analysis*, 72(3-4):1221–1226, 2010.