

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MODELAGEM  
COMPUTACIONAL

Gustavo dos Santos Oliveira

**Análise da produção de biogás considerando um modelo computacional  
adaptado:** Um estudo para diferentes composições de substrato.

Juiz de Fora

2026

**Gustavo dos Santos Oliveira**

**Análise da produção de biogás considerando um modelo computacional adaptado:** Um estudo para diferentes composições de substrato.

Dissertação apresentada ao Programa de pós graduação em modelagem computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional. Área de concentração: Modelagem Computacional

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dra. Bárbara de Melo Quintela

Coorientador: Dr. Marcelo Henrique Otênio

Coorientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dra. Priscila Vanessa Zabala Capriles Goliatt

Juiz de Fora

2026

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

dos Santos Oliveira, Gustavo.

Análise da produção de biogás considerando um modelo computacional adaptado: um estudo para diferentes composições de substrato. / Gustavo dos Santos Oliveira. -- 2026.

72 f. : il.

Orientadora: Bárbara de Melo Quintela

Coorientadores: Marcelo Henrique Otênio, Priscila Vanessa Zabala Capriles Goliatt

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional, 2026.

1. Biogás. 2. Digestão anaeróbia. 3. Equações diferenciais. 4. Evolução diferencial. 5. Modelagem matemática. I. de Melo Quintela, Bárbara, orient. II. Henrique Otênio, Marcelo, coorient. III. Vanessa Zabala Capriles Goliatt, Priscila, coorient. IV. Título.

**Gustavo dos Santos Oliveira**

**Análise da produção de biogás considerando um modelo computacional adaptado:** Um estudo para diferentes composições de substrato

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Modelagem Computacional. Área de concentração: Modelagem Computacional.

Aprovada em 24 de março de 2026.

BANCA EXAMINADORA

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Bárbara de Melo Quintela** - Orientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

**Prof. Dr. Guilherme Henrique da Silva** - Membro titular externo

Universidade Federal de Viçosa

**Prof. Dr. Wilhelm Passarella Freire** - Membro titular interno

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 30/03/2026.



Documento assinado eletronicamente por **Guilherme Henrique da Silva, Usuário Externo**, em 30/03/2026, às 12:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Barbara de Melo Quintela, Professor(a)**, em 30/03/2026, às 16:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wilhelm Passarella Freire, Professor(a)**, em 30/03/2026, às 20:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf ([www2.ufjf.br/SEI](http://www2.ufjf.br/SEI)) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2926249** e o código CRC **B0C19B48**.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais Célia Regina dos Santos e Francisco Antônio de Oliveira, por todo carinho, apoio e esforço depositados em mim.

Agradeço aos meus avós, em especial ao meu avô Orlando Antônio dos Santos, por todos os seus esforços feitos.

Agradeço a minha namorada Larissa por todo o companheirismo e incentivo depositados em mim.

Agradeço ao meu irmão Arthur, que mesmo distante sempre esteve ao meu lado.

Agradeço aos meus amigos de curso que também compartilharam vivências comigo, obrigado por todo conhecimento compartilhado e pelas dificuldades que passamos juntos.

Agradeço primeiramente a minha orientadora Barbara De Melo Quintela por todo suporte prestado, por toda sua disponibilidade, ajuda e por aceitar meu convite. Também agradeço ao meu coorientadores Marcelo Henrique Otênio e Priscila Vanessa Zabala Capriles Goliatt por todos os conhecimentos compartilhados, sugestões e conselhos.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e a Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) por concederem minhas bolsas de estudos, essenciais para a realização da pesquisa.

## RESUMO

A crescente demanda por fontes renováveis de energia e a necessidade de mitigar as emissões de gases de efeito estufa têm intensificado as pesquisas sobre a digestão anaeróbia como tecnologia sustentável para o tratamento de resíduos e geração de energia. Nesse contexto, este trabalho propõe uma adaptação de um modelo matemático que representa a dinâmica de um biodigestor, baseado no modelo apresentado por Oro et al. (2017), por meio da inclusão de uma equação diferencial simplificada e de uma variável de estado que representa o volume de substrato. O modelo modificado foi desenvolvido para simular condições de operação em batelada, descrevendo diretamente as curvas de produção de biogás ao longo do tempo. A validação foi realizada com dados de dois experimentos laboratoriais. O primeiro tratando da co-digestão envolvendo águas residuárias bovinas leiteiras (ARBL) e *Arundo donax L.*, já o segundo tratando da co-digestão entre ARBL e caldo de capim-elefante (CCe). Ambos os experimentos foram feitos sob diferentes composições de substrato e condições de temperatura. A calibração dos parâmetros foi conduzida por meio do algoritmo de otimização por Evolução Diferencial, visando minimizar o erro na norma  $L^2$  entre os dados simulados e experimentais. Além disso, foram realizadas análises de estabilidade e sensibilidade para avaliar a influência dos parâmetros no comportamento do sistema. Os resultados demonstraram que o modelo proposto reproduz adequadamente os perfis de produção acumulada de biogás observados experimentalmente, apresentando baixos valores de erro  $L^2$ , variando entre 0.0006-0.0013 e erro máximo 0.0015-0.0025 no experimento com *Arundo donax L.*, variando no intervalo 0.0067-0.0359 para o erro  $L^2$  e 0.0020-0.0710 para erro máximo. A análise também indicou que a composição do substrato influencia significativamente o desempenho do sistema, evidenciando possíveis efeitos inibitórios dependendo das proporções adotadas. De modo geral, o modelo adaptado mostrou-se uma ferramenta computacional consistente e confiável para descrever a dinâmica da digestão anaeróbia em biodigestores operando em batelada, contribuindo para estudos de otimização de processo e para o suporte à tomada de decisão em sistemas de produção de biogás.

**Palavras-chave:** Biogás; Digestão anaeróbia; Equações diferenciais; Evolução diferencial; Modelagem matemática.

## ABSTRACT

The growing demand for renewable energy sources and the need to mitigate intensified greenhouse gas emissions have led to research on anaerobic digestion as a sustainable technology for waste treatment and energy generation. In this context, this work proposes an adaptation of a mathematical model representing the dynamics of a biodigester, based on the model presented by Oro et al. (2017), through the inclusion of a simplified differential innovation and a state variable representing the substrate volume. The modified model was developed to simulate batch operating conditions, directly describing biogas production curves over time. Validation was performed using data from two laboratory experiments. The first, dealing with co-digestion, involved dairy bovine wastewater (DBW) and *Arundo donax* L., while the second dealt with co-digestion between DBW and elephant grass broth (ECB). Both experiments were conducted under different substrate compositions and temperature conditions. The interruption of interruptions was avoided through the Differential Evolution optimization algorithm, minimizing the error in the  $L^2$  norm between simulated and experimental data. Furthermore, stability and sensitivity analyses were performed to evaluate the influence of the parameters on the system's behavior. The results presented show that the proposed model reflects the cumulative biogas production profiles observed experimentally, exhibiting low  $L^2$  error values, ranging from 0.0006-0.0013 and a maximum error of 0.0015-0.0025 in the experiment with *Arundo donax* L., varying in the range of 0.0067-0.0359 for the  $L^2$  error and 0.0020-0.0710 for the maximum error. The analysis also indicated that the substrate composition significantly influences the system's performance, highlighting possible inhibitory effects and variations in the imposed proportions. Overall, the presented model proved to be a consistent and reliable computational tool for describing the dynamics of anaerobic digestion in batch-operated biodigesters, contributing to process optimization studies and supporting decision-making in biogas production systems.

**Keywords:** Anaerobic digestion; Biogas; Differential equations; Differential evolution; Mathematical modeling.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Esquema representativo do reator modelo lagoa coberta. . . . .	18
Figura 2: Biodigestor em batelada, com recirculação de inóculo. . . . .	19
Figura 3: Processos de hidrólise, acidogênese, acetogênese e metanogênese. . . . .	21
Figura 4: Fluxograma resumo do processo de filtragem na plataforma PRISMA. . . . . .	27
Figura 5: Classificação de trabalhos correlatos de acordo com sua abordagem. . . . .	29
Figura 6: Análise de sensibilidade do modelo. . . . .	37
Figura 7: Experimento de co-digestão entre dejetos bovinos e <i>Arundo donax L.</i> . . . .	38
Figura 8: Produção diária de biogás em diferentes proporções de substrato do estudo de (SILVA et al., 2024). . . . .	39
Figura 9: Acúmulo de biogás em diferentes proporções de substrato do estudo de (SILVA et al., 2024) para o ajuste do modelo de Gompertz e do modelo proposto. . . . .	39
Figura 10: Montagem dos ensaios em batelada na incubadora shaker. . . . .	41
Figura 11: Produção do volume acumulado de biogás no ensaio em batelada, Teste I à 25°C . . . . .	42
Figura 12: Produção do volume acumulado de biogás no ensaio em batelada, Teste II à 39°C. . . . .	42
Figura 13: Simulação com ajuste manual de parâmetros para o experimento com 50g de gramínea. . . . .	47
Figura 14: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com apenas ARBL. . . . .	48
Figura 15: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com apenas ARBL. . . . .	49
Figura 16: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 50g de gramínea. . . . .	49
Figura 17: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 50g de gramínea. . . . .	49
Figura 18: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 100g de gramínea. . . . .	50

Figura 19: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 100g de gramínea. . . . .	51
Figura 20: Simulação com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 200g de gramínea. . . . .	52
Figura 21: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 200g de gramínea. . . . .	52
Figura 22: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 20 CCe/80 ARBL. . . . .	57
Figura 23: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 20 CCe/80 ARBL. . . . .	57
Figura 24: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 40 CCe/60 ARBL. . . . .	57
Figura 25: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 40 CCe/60 ARBL. . . . .	58
Figura 26: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 80 CCe/20 ARBL. . . . .	58
Figura 27: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 80 CCe/20 ARBL. . . . .	59
Figura 28: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 100% CCe. . . . .	60
Figura 29: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 100% CCe. . . . .	60
Figura 30: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 100% ARBL. . . . .	61
Figura 31: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 100% ARBL. . . . .	61
Figura 32: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com Inóculo. . . . .	62
Figura 33: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com Inóculo. . . . .	62

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – PICO . . . . .	24
Tabela 2 – Valores dos parâmetros no modelo base . . . . .	48
Tabela 3 – Parâmetros ajustados para diferentes condições experimentais . . . . .	54
Tabela 4 – Comparação dos erros $L^2$ e erro máximo para diferentes condições do experimento com <i>Arundo donax L.</i> . . . . .	55
Tabela 5 – Parâmetros do modelo para os três primeiros experimentos . . . . .	63
Tabela 6 – Parâmetros do modelo para os três últimos experimentos . . . . .	63
Tabela 7 – Comparação dos erros $L^2$ e erro máximo para diferentes condições do experimento com CCo. . . . .	64

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABIOGAS	Associação Brasileira de Biogás
ABRL	Águas Residuárias Bovino Leiteiras
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CCE	Caldo de Capim Elefante
GEE	Gases de Efeito Estufa
PRISMA	Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Taxa de crescimento das bactérias
$\beta$	Taxa de coleta de biogás
$\gamma$	Taxa de consumo do substrato pelas bactérias
$k$	Taxa de produção de biogás
$\mu$	Volume de inserção de substrato
$\rho$	Taxa de inibição do crescimento das bactérias
CH <sub>4</sub>	Metano
CO <sub>2</sub>	Dióxido de carbono
H <sub>2</sub>	Hidrogênio
H <sub>2</sub> S	Sulfeto de hidrogênio
N <sub>2</sub>	Nitrogênio
NH <sub>4</sub>	Amônio

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1	OBJETIVOS . . . . .	15
1.2	ESTRUTURA DO TRABALHO . . . . .	15
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .</b>	<b>17</b>
2.1	BIODIGESTOR . . . . .	17
2.2	DIGESTÃO ANAERÓBIA . . . . .	20
2.3	BIOGÁS . . . . .	21
2.4	MODELOS COMPUTACIONAIS . . . . .	22
2.5	TRABALHOS RELACIONADOS . . . . .	23
<b>3</b>	<b>MÉTODOS . . . . .</b>	<b>32</b>
3.1	MODELO MATEMÁTICO . . . . .	32
<b>3.1.1</b>	Análise de estabilidade . . . . .	34
<b>3.1.2</b>	Análise de Sensibilidade . . . . .	36
3.2	DADOS EXPERIMENTAIS . . . . .	37
<b>3.2.1</b>	Experimento de co-digestão com ARBL e <i>Arundo donax L.</i> . . . .	37
<b>3.2.2</b>	Experimento de co-digestão com ARBL e CCe . . . . .	40
<b>3.2.3</b>	Aplicação do Modelo . . . . .	43
<b>3.2.4</b>	Evolução diferencial . . . . .	44
<b>3.2.5</b>	Análise do Erro entre Dados Experimentais e o Modelo Ajustado	45
<b>4</b>	<b>RESULTADOS . . . . .</b>	<b>47</b>
4.1	AJUSTE DOS PARÂMETROS AO EXPERIMENTO COM <i>ARUNDO DONAX L.</i> . . . . .	47
<b>4.1.1</b>	Análise dos parâmetros do experimento entre ARBL e <i>Arundo donax L.</i> . . . . .	54
4.2	AJUSTE DOS PARÂMETROS AO EXPERIMENTO COM CALDO DE CAPIM ELEFANTE . . . . .	56
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>66</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>67</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, a procura e o interesse sobre a expansão de fontes alternativas e renováveis de energia para que sejam supridas as demandas energéticas cresce de forma conjunta à preocupação com o esgotamento dos combustíveis de origem fóssil e as consequências que eles trazem ao meio ambiente. Com o aumento do debate sobre os problemas ambientais enfrentados hoje no planeta, é natural que surjam novas pesquisas com o intuito de explorar novos recursos energéticos que sejam menos nocivos à atmosfera.

Existem inúmeras fontes alternativas de energia renovável, como a energia solar, eólica, hidráulica, geotérmica e a energia proveniente da biomassa, que têm ganhado destaque no cenário energético mundial em função da crescente preocupação com a sustentabilidade ambiental e a redução da dependência de combustíveis fósseis. Essas fontes apresentam menor impacto ambiental, são capazes de reduzir as emissões de gases de efeito estufa e contribuem para a diversificação da matriz energética, especialmente em países com grande disponibilidade de recursos naturais. Nesse contexto, a energia de biomassa se destaca por utilizar matéria orgânica de origem vegetal e animal, incluindo resíduos agrícolas, florestais, industriais e urbanos, transformando passivos ambientais em insumos energéticos. Além disso, a biomassa possui relevância estratégica no Brasil, onde se consolida como uma das principais fontes renováveis da matriz energética nacional, apresentando elevado potencial de expansão aliado ao desenvolvimento sustentável e à valorização de resíduos orgânicos (MARTINS; CARRINO, 2023).

A digestão anaeróbia pode ocorrer a partir de diferentes combinações de substratos, isso leva à definição de dois diferentes conceitos: a mono-digestão e a co-digestão. A mono-digestão refere-se ao processo em que apenas um tipo de substrato orgânico é utilizado no biodigestor. Por outro lado, a co-digestão anaeróbia consiste na utilização simultânea de dois ou mais substratos distintos, como resíduos agrícolas, dejetos animais e resíduos industriais, com o objetivo de melhorar a eficiência do processo (SOUSA, 2023).

Uma alternativa que aparece integrada ao nicho da energia de biomassa é o biogás, o qual se configura como o eixo central da presente pesquisa. O biogás é um

gás resultante da decomposição de matéria orgânica em ambiente anaeróbico, ou seja, na ausência de oxigênio, por meio da ação de microrganismos em biodigestores, de forma que resíduos agrícolas, dejetos animais, lodo de esgoto e outros materiais orgânicos podem ser convertidos em uma mistura gasosa com elevado potencial energético, constituída predominantemente por metano ( $\text{CH}_4$ ) e dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) (MIZGER-ORTEGA; VANEGAS-CHAMORRO; QUINTERO, 2022). Esse processo de digestão anaeróbia tem sido amplamente estudado na literatura como uma tecnologia sustentável para transformação de resíduos em energia renovável, representando não apenas uma solução para a gestão de resíduos orgânicos, mas também uma fonte alternativa capaz de gerar eletricidade, calor e combustíveis (JAMEEL et al., 2024).

No contexto brasileiro, embora o potencial de aproveitamento do biogás seja expressivo, sua utilização prática ainda permanece aquém das possibilidades, considerando a ampla disponibilidade de resíduos agroindustriais e urbanos. Apesar dos avanços recentes, sobretudo com a destinação do biogás para a geração de energia elétrica e para a produção de biometano, sua participação efetiva na matriz energética nacional ainda é incipiente. Esse cenário evidencia a necessidade de estratégias mais robustas de incentivo, envolvendo políticas públicas e investimentos voltados à expansão do setor, uma vez que o biogás apresenta capacidade significativa de diversificação da matriz energética e contribui diretamente para a mitigação das emissões de gases de efeito estufa (CIBiogás, 2024).

De acordo com o Panorama do Biogás no Brasil 2024, o país registrou 1.633 plantas com aproveitamento energético, das quais 1.587 estavam em operação em 2024, resultando em uma capacidade instalada anual de aproximadamente  $4,7 \times 10^9 \text{ Nm}^3/\text{ano}$ . Esse volume representa um crescimento de 16% na capacidade instalada em relação ao ano anterior.

Ainda que o número de plantas dedicadas à produção de biometano tenha crescido significativamente — totalizando 79 plantas cadastradas em 2024, sendo 54 operacionais e 25 em implantação —, o panorama evidencia que o país ainda possui ampla margem de expansão diante da grande disponibilidade de resíduos e do elevado potencial de substituição de combustíveis fósseis.

A modelagem computacional pode ser aplicada para representar a dinâmica

de bactérias em um biodigestor e estimar a produção de biogás, esse tipo de abordagem pode ser representada por diferentes modelos como estequiométricos, cinéticos e de regressão. Esses métodos permitem otimizar processos, reduzir custos, prever desempenhos em diferentes escalas e avaliar cenários operacionais, fornecendo suporte crucial à tomada de decisões. No entanto, a precisão dos modelos depende da calibração adequada com dados experimentais e a validação de parâmetros. Além da influência de fatores ambientais, especialmente temperatura e pH, que são cruciais para a eficiência do processo de digestão anaeróbia e da variabilidade dos substratos (SILVA et al., 2024).

## 1.1 OBJETIVOS

O principal objetivo do presente trabalho é apresentar uma adaptação do modelo matemático que representa a dinâmica de um biodigestor apresentado em (ORO et al., 2017), a partir da inserção de uma nova equação diferencial para representar o volume de substrato, fazendo com que este volume no sistema possa ser representado de maneira direta e que a resposta dada pelo modelo seja uma curva que represente a produção de biogás.

Este trabalho tem como objetivos específicos: considerar que a inserção do substrato num primeiro momento seja feita apenas uma vez, simulando o funcionamento de um biodigestor em batelada; realizar a validação do modelo aferindo sua aplicabilidade em estudos laboratoriais de (SILVA et al., 2024) e (SILVA, 2024) sobre a produção de biogás em diferentes composições de substrato; avaliar como realizar o melhor aproveitamento da co-digestão, analisando as diferentes composições de substrato e se o mesmo substrato pode ser um fator inibitório para a produção de biogás do sistema.

## 1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado em cinco capítulos. Na Introdução, apresenta-se a motivação do estudo, bem como os objetivos de desenvolver e analisar um modelo de reator destinado à digestão anaeróbia. O modelo é formulado por meio de um sistema de equações diferenciais que descrevem a dinâmica de funcionamento

do reator, contemplando o crescimento bacteriano e a produção de biogás ao longo do tempo.

No capítulo de Fundamentação Teórica, são discutidos os princípios relacionados à digestão anaeróbia, formação de biogás e tipos de biodigestores. Além disso são apresentados os modelos matemáticos usualmente empregados na literatura e as abordagens adotadas para a representação da dinâmica de um biodigestor e da produção de biogás.

O capítulo de Métodos descreve a proposta de inserção de uma nova equação diferencial que representa a alimentação do biodigestor. A partir desse novo modelo matemático, são conduzidas análises de estabilidade do sistema, bem como a análise de sensibilidade dos parâmetros envolvidos.

Em Resultados, apresentam-se as simulações obtidas com o modelo proposto, as quais são comparadas com os dados laboratoriais de produção de biogás reportados por (SILVA et al., 2024) e (SILVA, 2024). Nessa etapa, inclui-se ainda o ajuste dos pontos experimentais com base no modelo de Gompertz, possibilitando a avaliação e comparativo da capacidade preditiva do modelo. Além disso, também é feita uma análise do erro máximo e erro  $L^2$  afim de verificar a distância entre os pontos fornecidos pelo experimento e a curva de resposta do modelo.

Por fim, na Conclusão, são discutidas as principais contribuições do trabalho, destacando-se o desempenho do modelo desenvolvido e sua relevância para a compreensão da dinâmica da digestão anaeróbia em reatores.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 BIODIGESTOR

Os biodigestores representam uma tecnologia amplamente utilizada em ambientes rurais, proporcionando maior controle da qualidade e do uso da água nos processos produtivos da agropecuária, bem como a destinação ambientalmente adequada dos resíduos gerados ou seu aproveitamento em bases sustentáveis. Além disso, esses sistemas contribuem para processos produtivos que consideram o conforto animal, a proteção ambiental e a conservação dos recursos naturais (OTENIO et al., 2023). No contexto brasileiro, sua aplicação tem se destacado especialmente na pecuária, em função do elevado volume de resíduos orgânicos produzidos e da necessidade de manejo ambientalmente adequado desses materiais.

Essa tecnologia também promove o aproveitamento energético de resíduos orgânicos, sobretudo dejetos animais e resíduos de origem vegetal provenientes da produção agrícola. Por meio da biodigestão anaeróbia, ocorre a conversão da matéria orgânica em biogás, composto majoritariamente por metano ( $\text{CH}_4$ ) e dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ), que pode ser utilizado como fonte de energia térmica ou elétrica. Adicionalmente, os biodigestores desempenham papel relevante na mitigação das emissões de gases de efeito estufa (GEE), ao reduzirem o impacto ambiental associado à disposição inadequada dos resíduos orgânicos e ao aproveitarem o metano como recurso energético (OTENIO et al., 2023).

O funcionamento dos biodigestores são exigem atenção criteriosa a variáveis que influenciam diretamente a eficiência do processo de digestão anaeróbia. Entre os principais parâmetros operacionais destacam-se a temperatura, o pH, a carga orgânica aplicada, o tempo de retenção hidráulica e a homogeneização do conteúdo no interior do reator. A manutenção dessas condições em faixas adequadas é fundamental para garantir a atividade microbiológica eficiente e, conseqüentemente, a conversão satisfatória da matéria orgânica em biogás (KUNZ et al., 2019).

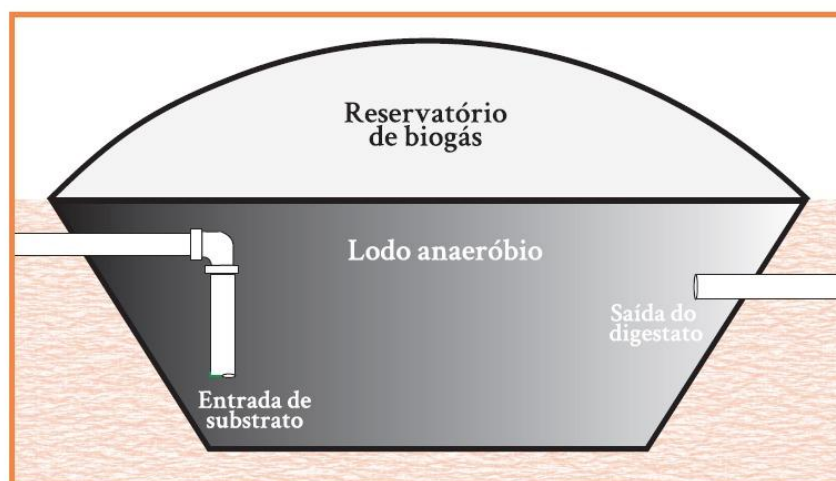
Além da geração de energia, os biodigestores proporcionam benefícios adicionais associados ao reaproveitamento do efluente final, denominado digestato. Esse subproduto pode ser utilizado como biofertilizante, promovendo a reciclagem de

nutrientes, a melhoria das propriedades físicas, químicas e biológicas do solo e a redução da dependência de fertilizantes químicos comerciais, contribuindo para o aumento da sustentabilidade dos sistemas agropecuários.

Os biodigestores são estruturas destinadas a conter a biomassa e proporcionar condições adequadas para a atuação de microrganismos anaeróbios responsáveis pela produção do biogás. Embora não produzam o biogás diretamente, esses sistemas são essenciais para garantir a estabilidade do processo e o aproveitamento energético eficiente dos resíduos (OTENIO et al., 2023). De modo geral, os biodigestores podem ser classificados de acordo com o regime de alimentação em contínuos e descontínuos (ou de batelada), sendo essa classificação determinante para o desempenho operacional e a adequação a diferentes realidades produtivas.

Os biodigestores contínuos são indicados para sistemas com geração regular de resíduos, nos quais a alimentação ocorre de forma diária ou periódica, com descarga contínua do digestato. Esse regime operacional confere maior estabilidade ao processo, sendo amplamente adotado em propriedades rurais com produção constante de dejetos, especialmente na pecuária leiteira, um dos principais tipos de biodigestor contínuo utilizado é o modelo de lagoa coberta, que está ilustrado conforme a Figura 1.

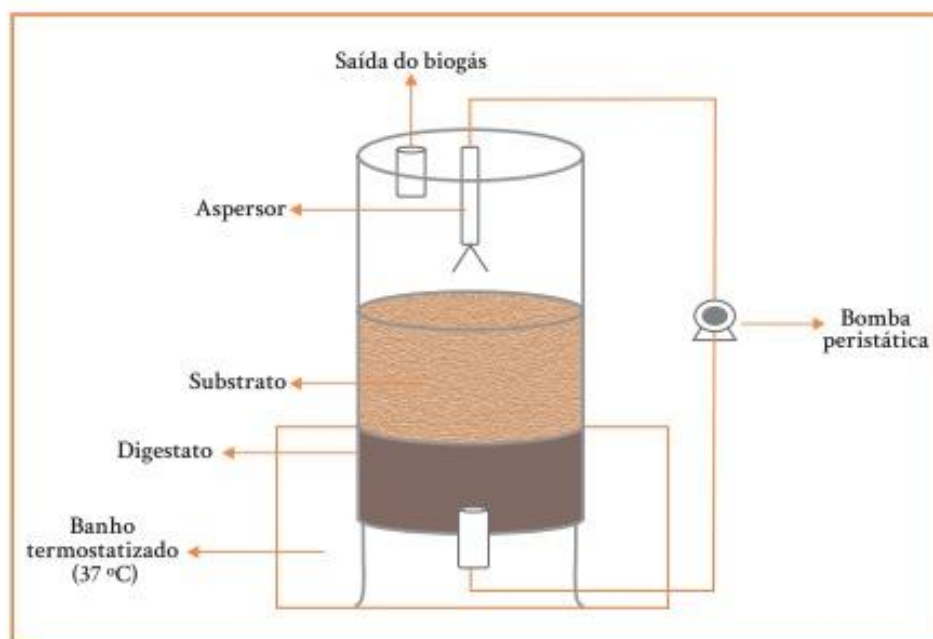
Figura 1: Esquema representativo do reator modelo lagoa coberta.



Fonte: (KUNZ et al., 2019)

Por outro lado, os biodigestores descontínuos, ou de batelada, operam com a carga total de biomassa introduzida de uma única vez, permanecendo fechados até o término do processo de biodigestão. Após a completa digestão do material, o sistema é esvaziado e preparado para um novo ciclo. Esse tipo de biodigestor é mais indicado para substratos de decomposição lenta ou para situações em que não há disponibilidade contínua de resíduos, conforme apresentado na Figura 2.

Figura 2: Biodigestor em batelada, com recirculação de inóculo.



Fonte: (KUNZ et al., 2019)

De modo geral, a escolha do tipo de biodigestor deve considerar fatores técnicos, econômicos e operacionais, como a quantidade e a característica dos resíduos, o custo de implantação, a demanda energética e o aproveitamento do biofertilizante. Assim, a biodigestão anaeróbia se consolida como uma alternativa viável e estratégica para o manejo sustentável de resíduos agropecuários e para a transição energética no meio rural.

## 2.2 DIGESTÃO ANAERÓBIA

A digestão anaeróbia é um processo metabólico que ocorre na ausência de oxigênio, esse bioprocesso é realizado a partir do processamento de matéria orgânica no interior de um biodigestor. Sua ocorrência é dependente de microrganismos que atuam na degradação da matéria orgânica que resulta na formação do biogás, composto em sua maioria pelos gases metano ( $\text{CH}_4$ ) e dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ). De acordo com (KUNZ et al., 2019) o processo pode ser subdividido em quatro etapas principais e interdependentes: hidrólise, acidogênese, acetogênese e metanogênese.

Na hidrólise, macromoléculas orgânicas complexas, como carboidratos, lipídios e proteínas, são quebradas em compostos solúveis de menor peso molecular, como açúcares, ácidos graxos e aminoácidos. Esta etapa é predominantemente mediada por enzimas extracelulares produzidas por bactérias hidrolíticas, sendo considerada a fase limitante da velocidade do processo em resíduos de difícil degradação.

A etapa seguinte, acidogênese, envolve a fermentação dos compostos resultantes da hidrólise, com formação de ácidos graxos voláteis, álcoois, hidrogênio e dióxido de carbono. Os microrganismos acidogênicos desempenham papel central nesta fase, promovendo a conversão de moléculas simples em intermediários orgânicos que serão utilizados nas etapas subsequentes.

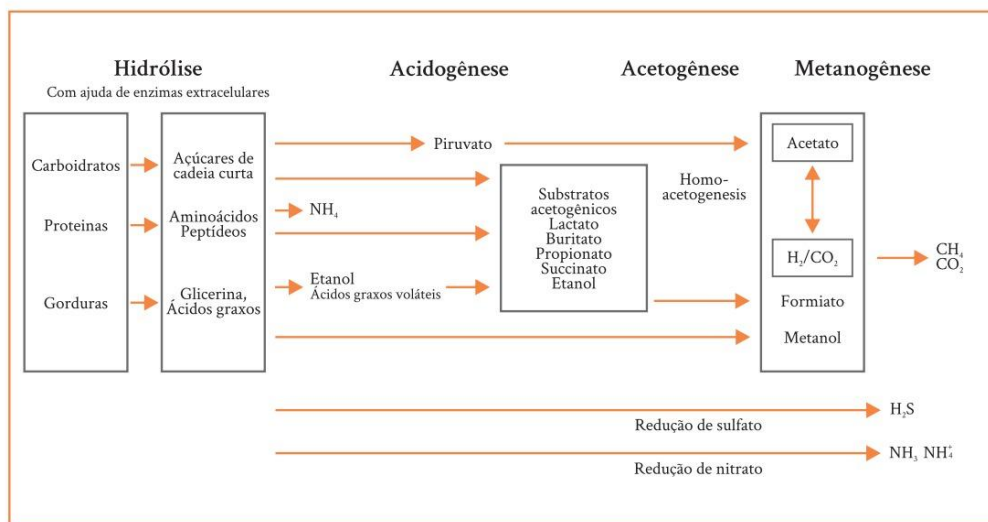
Na acetogênese, ocorre a oxidação de ácidos graxos voláteis e álcoois de cadeia longa em acetato, hidrogênio e dióxido de carbono, por ação de bactérias acetogênicas. Este estágio é termodinamicamente desfavorável em determinadas condições, exigindo associação sintrófica com microrganismos consumidores de hidrogênio, que mantêm baixa a pressão parcial de ( $\text{H}_2$ ) e favorecem o equilíbrio reacional.

Por fim, a metanogênese é a etapa na qual arqueias metanogênicas convertem acetato e hidrogênio em dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) e metano ( $\text{CH}_4$ ), constituindo a fração energética do biogás. Este estágio é sensível a variações ambientais, como pH, temperatura e presença de compostos inibidores, sendo determinante para a eficiência global do processo.

A ilustração do processo de digestão anaeróbia pode ser observada de acordo

com a Figura 3:

Figura 3: Processos de hidrólise, acidogênese, acetogênese e metanogênese.



Fonte: (KUNZ et al., 2019)

O entendimento integrado dessas etapas é essencial para o controle operacional e otimização de biodigestores, permitindo maximizar a produção de biogás e garantir a estabilidade microbológica do sistema.

## 2.3 BIOGÁS

No contexto da bioenergia, o biogás configura-se como uma alternativa diretamente integrada ao aproveitamento energético da biomassa, sendo considerado um vetor energético estratégico no cenário de transição para fontes renováveis.

O biogás é definido como uma mistura gasosa inflamável, incolor e de odor característico, produzida a partir da degradação de resíduos orgânicos tais como dejetos animais, resíduos agrícolas, efluentes domésticos e rejeitos agroindustriais em meio aquoso e na ausência de oxigênio, por meio da ação de organismos microbianos em biodigestores. Esse processo, conhecido como digestão anaeróbia ocorre a partir de quatro etapas bioquímicas sucessivas: a hidrólise, acidogênese, acetogênese e metanogênese. Nas quais a matéria orgânica complexa é gradualmente convertida

em compostos mais simples até a formação do biogás e do digestato (JAMEEL et al., 2024).

A composição do biogás é predominantemente constituída por metano ( $\text{CH}_4$ ), com concentrações típicas de até 75%, e dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) chegando até 25% (OTENIO et al., 2023). Além desses componentes principais, o biogás pode conter pequenas quantidades de outros gases, como sulfeto de hidrogênio ( $\text{H}_2\text{S}$ ), vapor d'água, nitrogênio ( $\text{N}_2$ ) e hidrogênio ( $\text{H}_2$ ), os quais influenciam diretamente seu poder calorífico, sua corrosividade e a necessidade de processos de purificação antes do uso energético. O elevado teor de metano confere ao biogás significativo potencial energético, permitindo sua aplicação na geração de energia elétrica e térmica, bem como, após processos de purificação e enriquecimento, sua conversão em biometano para uso veicular ou para injeção em redes de gás natural (JAMEEL et al., 2024).

## 2.4 MODELOS COMPUTACIONAIS

De maneira geral, os modelos podem ser classificados quanto à sua natureza determinística ou estocástica. Modelos determinísticos descrevem o sistema por meio de relações matemáticas bem definidas, nas quais um conjunto de condições iniciais e parâmetros conduz sempre à mesma trajetória temporal. Essa abordagem é amplamente utilizada em modelos baseados em equações diferenciais ordinárias (EDOs), como aqueles fundamentados em cinéticas microbianas do tipo *Monod*, *Haldane* ou em sistemas inspirados em *Lotka–Volterra*. Por outro lado, modelos estocásticos incorporam incertezas e variabilidades inerentes aos processos biológicos, utilizando variáveis aleatórias para representar a dinâmica do sistema, sendo mais indicados quando a variabilidade do processo desempenha papel relevante.

Outra classificação importante diz respeito à formulação dinâmica do modelo. Modelos contínuos no tempo são usualmente expressos por equações diferenciais ordinárias (EDOs) ou parciais (EDPs) e descrevem a evolução temporal das variáveis de estado de forma contínua. Em contraste, modelos em tempo discreto são especialmente adequados para aplicações de monitoramento e controle baseadas em dados amostrados, nos quais os parâmetros são atualizados recursivamente a partir de observações recentes.

Quanto ao nível de representação dos fenômenos, os modelos podem ser classificados como mecanicistas ou empíricos. Modelos mecanicistas descrevem explicitamente os mecanismos físicos, químicos e biológicos do processo, incluindo reações bioquímicas, balanços de massa e energia e interações microbianas. Esses modelos, embora mais complexos, permitem maior interpretabilidade e extrapolação para diferentes condições operacionais. Em contrapartida, modelos empíricos ou estatísticos baseiam-se em relações matemáticas ajustadas a dados experimentais, como regressões lineares ou não lineares, redes neurais e modelos adaptativos.

Além disso, destacam-se os modelos híbridos, que combinam estruturas mecanicistas com técnicas baseadas em dados, buscando unir interpretabilidade física e capacidade adaptativa. Esse tipo de abordagem pode ser utilizado para aplicações industriais, especialmente para previsão de falhas e otimização operacional.

Por fim, os modelos baseados em agentes constituem uma classe distinta de modelagem, na qual microrganismos ou grupos funcionais são representados individualmente por meio de regras locais de interação. Essa abordagem permite descrever a dinâmica do sistema a partir do comportamento de seus componentes elementares, possibilitando a análise de fenômenos emergentes e de heterogeneidades espaciais que não são adequadamente representadas por outros tipos de modelo.

Dessa forma, a literatura apresenta uma ampla gama de abordagens para a modelagem de reatores anaeróbios, variando desde modelos simplificados e determinísticos até estruturas adaptativas e baseadas em dados. A escolha do tipo de modelo deve considerar o equilíbrio entre complexidade, interpretabilidade e aplicabilidade prática, conforme os objetivos específicos do estudo.

## 2.5 TRABALHOS RELACIONADOS

Para auxiliar o desenvolvimento deste trabalho, uma revisão sistemática foi realizada a fim de encontrar novos estudos relacionados a proposta. A premissa de partida desta revisão foi utilizar a estratégia PICO (**P**roblema/**P**opulação, **I**ntervenção/**E**xposição, **C**omparação, **O**utcome/**R**esultado). O modelo de estratégia PICO propõe que seja especificado um problema ou população a ser estudado, uma proposta de intervenção ou exposição a ser investigada, uma comparação feita

entre as intervenções ou exposições investigadas, podendo essa comparação ser facultativa e por fim, apresentar os resultados esperados do estudo. A partir do que foi elencado anteriormente a estratégia PICO definida para este trabalho, ficou definida da seguinte forma conforme a Tabela 1:

Tabela 1 – PICO

<b>P</b>	<b>População</b>	Bactérias
<b>I</b>	<b>Intervenção/Exposição</b>	Modelo matemático da dinâmica de um reator
<b>C</b>	<b>Comparação</b>	Dados Experimentais
<b>O</b>	<b>Outcome/Resultado</b>	Produção de biogás

Fonte: Autor (2026).

A partir da definição da estratégia PICO de maneira que o foco seria a exposição de modelos matemáticos e/ou computacionais que abordassem a dinâmica de um biodigestor para avaliar a produção de biogás, definiu-se as seguintes palavras chaves: "Bactérias", "Biogás", "Modelo computacional", "Modelo matemático". Como o intuito do estudo seria de buscar também trabalhos correlatos em inglês, também foram definidas da seguinte forma "Bacteria", "Biogas", "Computational model", "Mathematical model", sendo combinadas com os operadores booleanos OR (Ou) e AND (E), desta maneira foi gerada a seguinte string de busca: ("Bacteria"AND "Biogas"AND "Computational model"OR "Mathematical model").

Além disso, considerando a aplicação da estratégia PICO (População, Intervenção, Comparação e Outcome) como ferramenta estruturante desta revisão sistemática, definiu-se como questão norteadora principal:

- Quais modelos matemáticos e/ou computacionais têm sido propostos na literatura para descrever a dinâmica de biodigestores e avaliar a produção de biogás?

Também foram formuladas perguntas secundárias com o propósito de aprofundar as análises desenvolvidas neste trabalho, permitindo uma avaliação mais a fundo da aplicabilidade dos modelos identificados na literatura. Nesse sentido, buscou-se investigar:

- Existem modelos que considerem o volume de inserção de matéria orgânica na resposta da produção?
- O modelo incorpora como resposta a dinâmica de bactérias?
- O modelo apresenta capacidade de adaptação para diferentes tipos de matéria-prima?
- Existem modelos que permitem a simulação de sistemas alimentados com matérias-primas misturadas (co-digestão)?

Dando seguimento à revisão, optou-se por fazer a busca de bases sobre o tema na plataforma de Periódicos da Capes (Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), órgão do Ministério da Educação (MEC) do Brasil. Esse processo de busca resultou em 110 publicações encontradas. A partir dos registros encontrados, foram definidos os critérios de inclusão e exclusão dos trabalhos para dar seguimento à triagem, esses critérios estão descritos abaixo:

Critérios de inclusão:

- Trabalhos em inglês e português;
- Estudos que apresentem modelagem matemática ou computacional aplicada a processos de digestão anaeróbia ou produção de biogás.

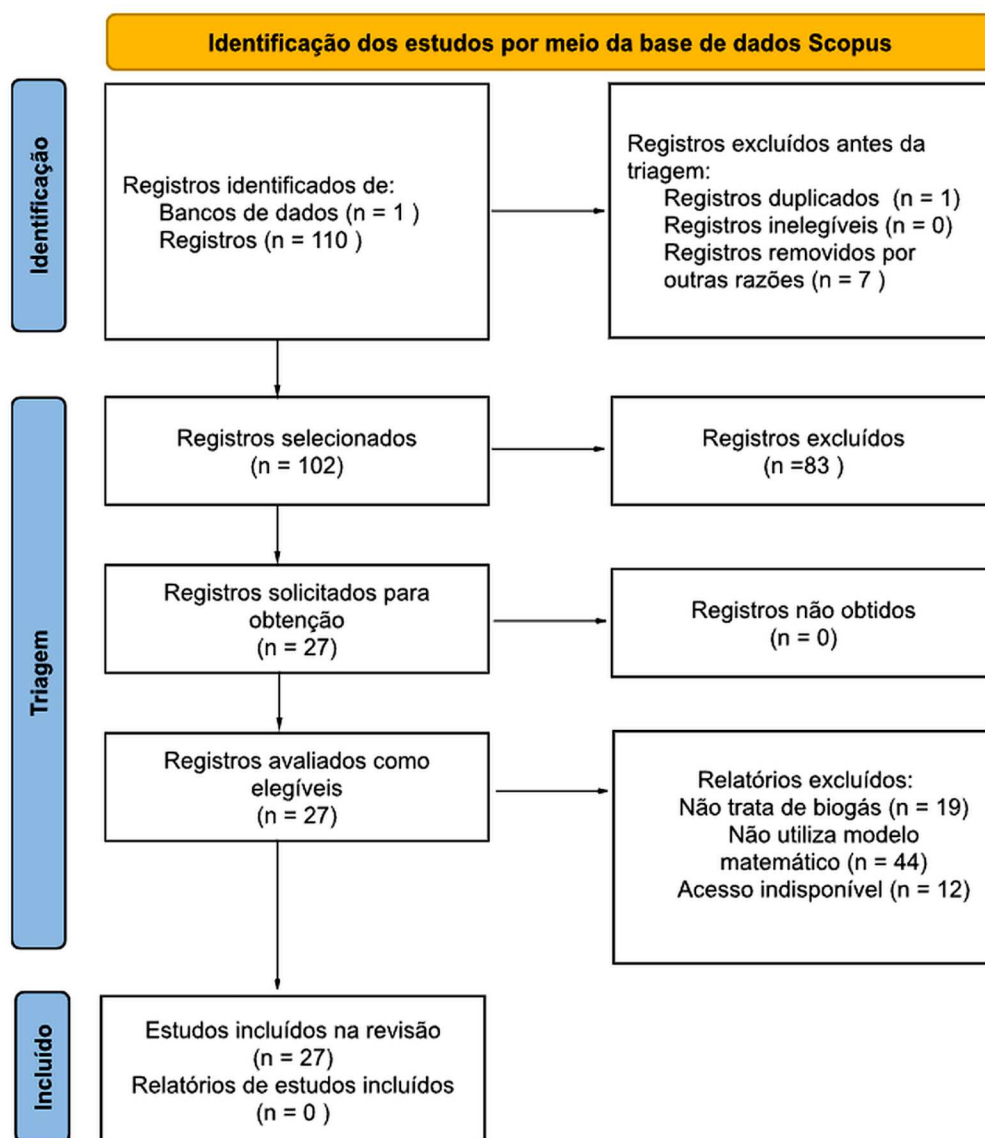
Critérios de exclusão:

- Trabalhos com mais de 30 anos de publicação;
- Referências duplicadas;
- Trabalhos que não tratem de biogás;
- Estudos que não apresentem modelo matemático ou computacional;
- Publicações com acesso indisponível.

A revisão sistemática apresentada foi conduzida com base nas diretrizes do protocolo PRISMA (Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses).

O processo de seleção envolveu a identificação inicial de 110 registros, dos quais 7 foram removidos por sua data de publicação ultrapassar os 30 anos e 1 por duplicidade. Após a triagem de 102 registros, 56 foram excluídos por não tratarem de biogás ou substrato (19), por não utilizarem modelos matemáticos (44) ou por acesso indisponível (12). Ao final do processo, 27 estudos foram incluídos na revisão. A Figura 4 mostra um fluxograma construído a partir do processo de filtragem da plataforma PRISMA.

Figura 4: Fluxograma resumo do processo de filtragem na plataforma PRISMA.



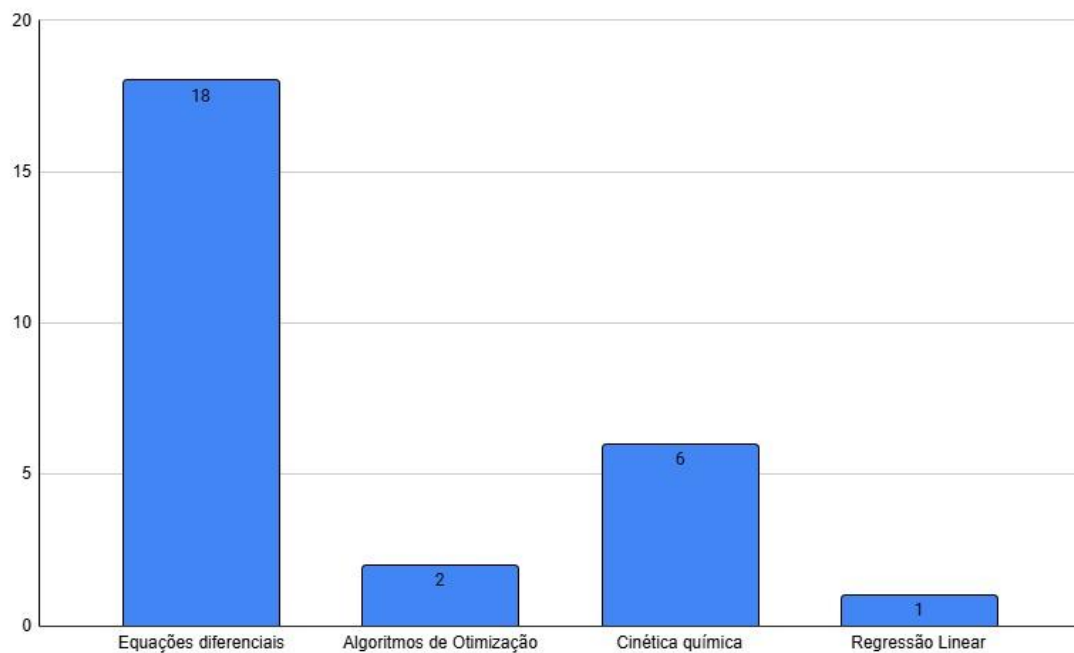
Fonte: (Autor, 2026)

Após a triagem realizada com base nos critérios estabelecidos pelo protocolo PRISMA, foram selecionados os estudos considerados elegíveis para esta revisão. Os 27 modelos identificados na literatura apresentam abordagens semelhantes entre subconjuntos de estudos. As categorias de modelos observadas nos artigos analisados estão listadas a seguir, e a Figura 5 apresenta a distribuição quantitativa

dos estudos de acordo com essas abordagens.

- Modelagem por equações diferenciais;
- Algoritmos de otimização;
- Modelos baseados em cinética química;
- Regressão linear.

Figura 5: Classificação de trabalhos correlatos de acordo com sua abordagem.



Fonte: (Autor, 2026)

Com base na análise dos 27 estudos selecionados por meio da revisão sistemática, foi possível identificar diferentes abordagens de modelagem matemática e computacional aplicadas à dinâmica de biodigestores e à produção de biogás. Cada abordagem reflete estratégias específicas para representar os processos biológicos e físico-químicos envolvidos, permitindo análises preditivas e de otimização. A seguir, são apresentadas referências representativas para cada uma das principais categorias de modelagem identificadas: modelagem por equações diferenciais, modelos matemáticos determinísticos, algoritmos de otimização, métodos numéricos, modelos baseados em cinética química e regressão linear. Essas referências servem

como base comparativa e fundamentação teórica para o desenvolvimento do presente trabalho, destacando as diferentes formas de representação matemática dos sistemas de digestão anaeróbia.

O trabalho de (SENDJAJA et al., 2015) apresenta um modelo adaptativo baseado em regressão linear no espaço de estados, desenvolvido para prever o comportamento de reatores anaeróbios. Diferentemente dos modelos cinéticos tradicionais, o modelo proposto depende de relações estatísticas atualizadas continuamente com base em dados operacionais recentes. Essa abordagem permite que os coeficientes do modelo se ajustem em tempo real às mudanças nas condições do processo, conferindo caráter adaptativo ao sistema. A estrutura do modelo segue a formulação de um sistema dinâmico em tempo discreto, onde os estados e saídas são estimados a partir de entradas e observações históricas por meio de regressão. Essa metodologia demonstrou bom desempenho na previsão da produção de metano e na identificação de sinais precoces de falha no processo, destacando-se como uma alternativa eficiente e flexível para o monitoramento e controle de reatores anaeróbios em operação contínua.

Por sua vez, (KEGL; KRALJ, 2020) desenvolve um modelo matemático baseado em reações bioquímicas e equações diferenciais para simular a digestão anaeróbia de esterco bovino, com foco na otimização multiobjetivo do processo. O modelo incorpora quatro etapas microbianas: hidrólise, acidogênese, acetogênese e metanogênese. Considerando os efeitos da temperatura e do pH sobre o crescimento das bactérias, incluindo inibições por ácidos graxos voláteis e amônia. Para maximizar a produção de biogás e minimizar os custos com aquecimento, os autores aplicam um algoritmo de otimização baseado em gradiente, variando parâmetros de entrada como temperatura, pH e concentração inicial de microrganismos. Os resultados mostram que a abordagem proposta, embora simplificada, é eficaz para encontrar perfis ótimos de operação e pode ser aplicada de forma flexível a diferentes cenários de reatores anaeróbicos.

O modelo proposto por (CARRERA-CHAPELA et al., 2014) utiliza uma abordagem focada em representar o processo de digestão anaeróbia com ênfase na formação de sulfeto de hidrogênio ( $H_2S$ ), sendo a cinética química um dos principais elementos do sistema. A reação de hidrólise é modelada por uma cinética adequada

para representar processos dependentes da biomassa, o que permite captar com mais precisão a degradação da matéria particulada. As etapas seguintes — acidogênese e redução de sulfato — seguem a cinética de *Monod*, comum em processos biológicos, enquanto a metanogênese é descrita por uma cinética de *Haldane*, que inclui o efeito de inibição por ácidos graxos voláteis, característica importante em ambientes sobrecarregados. Essas funções cinéticas, aplicadas a cada população microbiana, permitem descrever as taxas de conversão de substratos e a formação de produtos intermediários e finais, como  $\text{CH}_4$ ,  $\text{CO}_2$  e  $\text{H}_2\text{S}$ . O uso dessas diferentes formas cinéticas confere ao modelo maior realismo na simulação de interações microbianas complexas, especialmente em ambientes ricos em sulfato, onde há competição entre metanogênicos e bactérias redutoras de sulfato.

Por fim, o trabalho de (ORO et al., 2017) apresenta um modelo matemático simplificado baseado em equações diferenciais ordinárias não lineares, com o objetivo de simular o crescimento de bactérias anaeróbias e a produção de biogás em um biodigestor urbano. Inspirado na dinâmica de sistemas presa-predador de Lotka-Volterra, o modelo descreve a interação entre duas variáveis principais: a população de bactérias (que representa a biomassa ativa) e a quantidade de biogás produzido. A estrutura do modelo contempla também a presença de um fator inibidor associado ao acúmulo de biogás e considera cenários com e sem retirada periódica de gás. A análise qualitativa do sistema inclui o estudo de pontos de equilíbrio, estabilidade e comportamento assintótico. As simulações realizadas demonstram que a produção de biogás é limitada e que o sistema tende à estabilidade após um período de crescimento, evidenciando a capacidade do modelo de capturar o comportamento dinâmico fundamental do processo de biodigestão. O estudo de (ORO et al., 2017) foi utilizado como base para o desenvolvimento deste trabalho. A partir desse modelo, propõe-se a inclusão de uma equação diferencial, cuja formulação e análise serão apresentados a fundo nos próximos capítulos.

### 3 MÉTODOS

Neste capítulo, primeiramente será apresentado o modelo proposto em (ORO et al., 2017), em seguida, baseado em outros estudos encontrados na revisão sistemática, será descrita uma proposta de alteração do modelo a partir da inserção de uma equação diferencial que descreva o substrato em um sistema de equações diferenciais que representa a dinâmica de um biodigestor.

#### 3.1 MODELO MATEMÁTICO

Em continuidade, será descrita a proposta de (ORO et al., 2017) onde se diz que o modelo considera a variação de quantidade de biogás no interior do biodigestor, que é proporcional à

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - pxy \\ \frac{dy}{dt} = kx - \beta y. \end{cases} \quad (3.1)$$

Onde:

Variáveis:

- $x$  é a quantidade de bactérias ( $ml$ );
- $y$  é a quantidade de biogás ( $ml$ );

Parâmetros:

- $\alpha$  é a taxa de crescimento das bactérias;
- $\beta$  é a taxa de coleta de biogás;
- $k$  é a taxa de produção do biogás;
- $p$  é a taxa de inibição do crescimento de bactérias;

Sendo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$  e  $p$  constantes positivas adimensionais.

A partir do modelo descrito acima, com base nos estudos encontrados através da revisão sistemática foi feita uma proposta de adaptação do modelo base de maneira à incluir uma equação diferencial que represente o substrato ao longo do tempo em que a nova variável que representa o substrato seja relacionada com as demais variáveis do sistema e não dependa apenas de constantes.

No novo sistema a ser descrito abaixo, além da variável que representa o substrato também foram incluídas novas constantes que serão expostas a seguir.

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \mu - \gamma xs \\ \frac{dx}{dt} = \alpha xs - pxy \\ \frac{dy}{dt} = kx - \beta y. \end{cases} \quad (3.2)$$

Onde:

Variáveis:

- $s$  é a quantidade de substrato ( $\frac{mg}{L}$ );
- $x$  é a quantidade de bactérias ( $\frac{UFC}{mL}$ );
- $y$  é a quantidade de biogás ( $\frac{L}{mgSV}$ );

Parâmetros:

- $\mu$  é o volume de inserção do substrato (L);
- $\gamma$  é a taxa de consumo do substrato pelas bactérias;
- $\alpha$  é a taxa de crescimento das bactérias;
- $p$  é a taxa de inibição do crescimento de bactérias;
- $k$  é a taxa de produção do biogás;
- $\beta$  é a taxa de coleta de biogás;

Mantendo do modelo basico os parametros:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$ ,  $p$  e adicionando  $\gamma$  como constantes adimensionais.

### 3.1.1 Análise de estabilidade

A partir do modelo adaptado explicitado foi realizada uma análise de estabilidade do sistema de equações a fim de observar as perturbações em torno do ponto de equilíbrio para compreender o comportamento dinâmico do sistema e com isso, poder prever e controlar o comportamento dinâmico do sistema em resposta a perturbações. A partir da análise descrita a seguir, observou-se que todos os autovalores do ponto de equilíbrio possuem parte real negativa, o que implica que o sistema é estável e quando sujeito a perturbações, implicando em um sistema oscilatório amortecido.

As equações do modelo adaptado são:

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \gamma xs = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{\mu}{\gamma x} \quad (3.3)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha xs - pxy = 0 \quad \Rightarrow \quad x(\alpha s - py) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = kx - \beta y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{kx}{\beta} \quad (3.5)$$

Da equação (3.2), temos duas possibilidades:  $x = 0$  ou  $\alpha s = py$ .

- A partir das equação (3.1) e (3.3) tem-se um ponto de equilíbrio com as seguintes coordenadas:  $(s, x, y) = (\frac{\mu}{\gamma x}, 0, 0)$  que apresenta uma indeterminação quando  $x = 0$ .
- Para  $x \neq 0$ , da equação (3.2) temos:

$$\alpha s = py \Rightarrow s = \frac{py}{\alpha}$$

Substituindo na equação (3.1):

$$\frac{\mu}{\gamma x} = \frac{py}{\alpha} \Rightarrow \mu\alpha = \gamma pxy$$

Substituindo  $y = \frac{kx}{\beta}$ :

$$\mu\alpha = \gamma px \cdot \frac{kx}{\beta} = \frac{\gamma pkx^2}{\beta} \Rightarrow x^2 = \frac{\mu\alpha\beta}{\gamma pk} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\mu\alpha\beta}{\gamma pk}}$$

E então:

$$y = \frac{kx}{\beta} = \frac{k}{\beta} \cdot \sqrt{\frac{\mu\alpha\beta}{\gamma pk}} = \sqrt{\frac{\mu\alpha k}{\gamma p\beta}}$$

$$s = \frac{\mu}{\gamma x} = \sqrt{\frac{pk\mu}{\alpha\beta\gamma}}$$

O ponto de equilíbrio completo é, portanto:

$$(s, x, y) = \left( \sqrt{\frac{pk\mu}{\alpha\beta\gamma}}, \sqrt{\frac{\mu\alpha\beta}{\gamma pk}}, \sqrt{\frac{\mu\alpha k}{\gamma p\beta}} \right)$$

A matriz Jacobiana  $J$  do sistema é dada pelas derivadas parciais de cada equação em relação às variáveis  $s$ ,  $x$  e  $y$ . Após a substituição dos valores dos parâmetros constantes e simplificações, obteve-se a seguinte equação característica:

$$\det(J - \lambda I) = 0$$

Os autovalores  $\lambda$  obtidos foram:

$$\lambda_1 = -1.02 + 0j, \quad \lambda_2 = -0.04 + 0.158j, \quad \lambda_3 = -0.04 - 0.158j$$

Como todos os autovalores possuem parte real negativa, conclui-se que o sistema é localmente estável no ponto de equilíbrio, com comportamento oscilatório amortecido frente a perturbações externas.

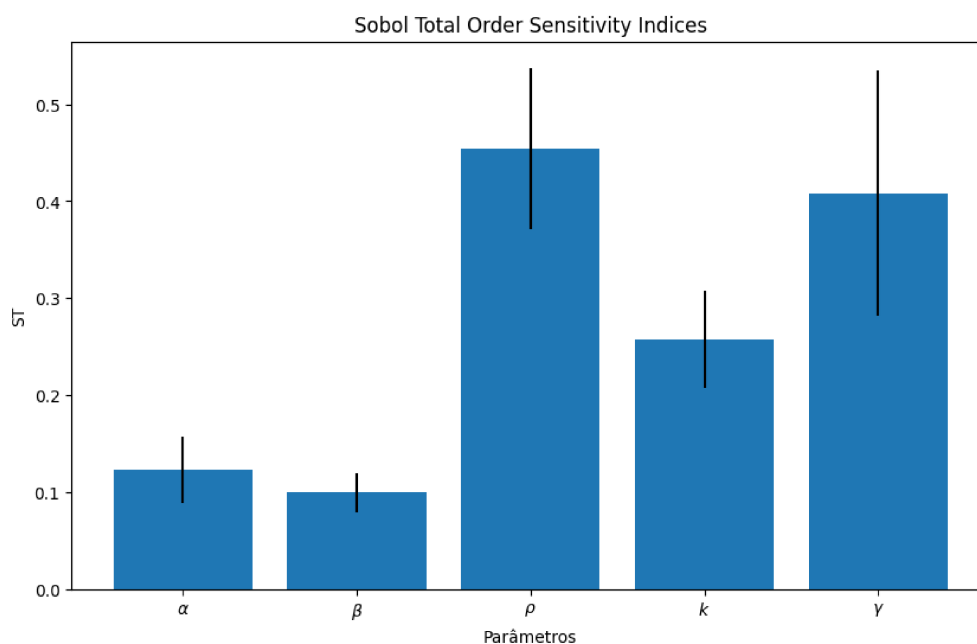
### 3.1.2 Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade é uma técnica utilizada para entender como as variações nos parâmetros de entrada de um modelo afetam suas saídas ou resultados. Em outras palavras, ela avalia a importância relativa de cada parâmetro no comportamento do modelo, permitindo identificar quais parâmetros têm maior influência e quais têm menor impacto sobre as previsões ou simulações realizadas (SALTELLI et al., 2007).

Este estudo aplicou o método de Sobol, utilizando a biblioteca SALib em Python, para avaliar a sensibilidade do modelo proposto. O método de Sobol foi escolhido por sua capacidade de considerar tanto os efeitos diretos quanto as interações entre os parâmetros. A análise de Sobol forneceu os índices S1 e ST, que indicam a importância de cada parâmetro. O índice S1 mostra a contribuição direta de cada parâmetro, enquanto ST revela a influência total, incluindo interações entre parâmetros destacando quais têm maior impacto no comportamento do modelo.

Podemos observar na Figura 6 que a análise de sensibilidade proposta indicou que os parâmetros de inibição do crescimento de bactérias ( $p$ ) e a taxa de consumo do substrato pelas bactérias ( $\gamma$ ) são os parâmetros mais sensíveis a perturbações, vale ressaltar que o parâmetro  $\mu$  (volume de inserção de substrato) teve o seu valor fixado devido ao biodigestor em questão não ser reabastecido durante o processo de co-digestão.

Figura 6: Análise de sensibilidade do modelo.



Fonte: (Autor, 2026)

## 3.2 DADOS EXPERIMENTAIS

### 3.2.1 Experimento de co-digestão com ARBL e *Arundo donax L.*

Em (SILVA et al., 2024) são realizados ensaios laboratoriais onde é feito um estudo do processo de co-digestão anaeróbia utilizando reatores batelada em duplicata. O estudo incluiu quatro condições experimentais, sendo um reator de controle que é composto apenas de ARBL e as demais condições com concentrações de 50g, 100g e 200g de biomassa vegetal nas misturas além do volume de ARBL. A gramínea foi triturada com ARBL, por esse motivo as concentrações escolhidas foram cautelosas para que não ocasionasse um desequilíbrio funcional nos reatores. Foram utilizados reatores experimentais em batelada, especificamente frascos *Schott* de vidro com capacidade total de 500 mL, sendo 400 mL de volume de reação (mistura) e 100 mL de headspace (volume de gás). Os reatores foram mantidos à 36 °C em banho termostático e conectados a um sistema para armazenamento do gás produzido. O volume de biogás produzido foi monitorado e medido diariamente em garrafa Mariotte preenchida com solução de NaCl por meio da movimentação da

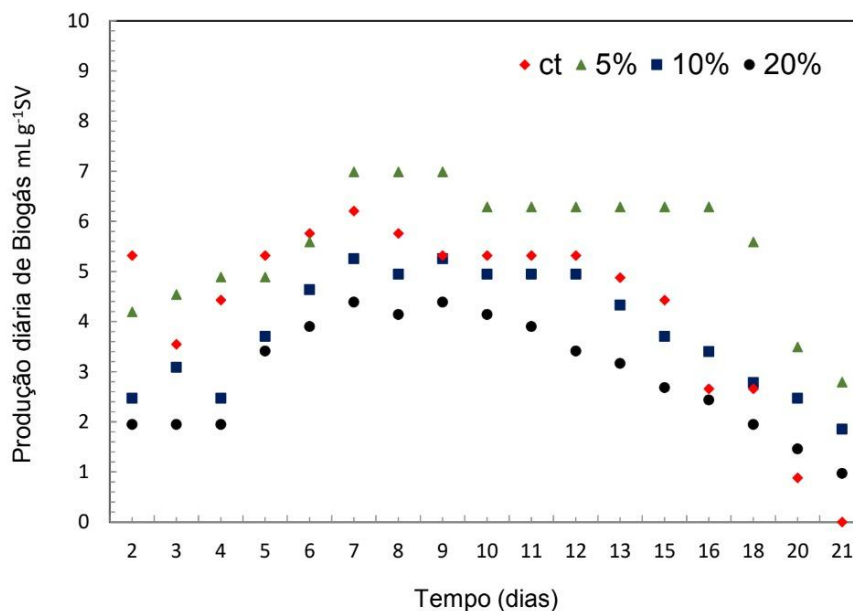
Figura 7: Experimento de co-digestão entre dejetos bovinos e *Arundo donax* L.



Fonte: (SILVA et al., 2024)

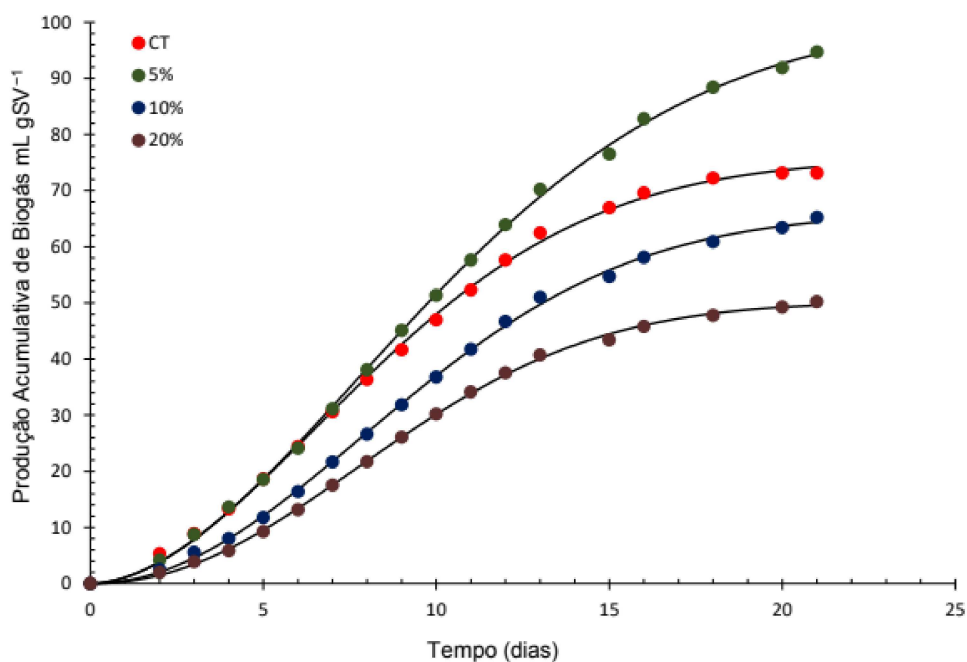
coluna líquida. O tempo de reação foi de 21 dias. O experimento de (SILVA et al., 2024) está descrito pela Figura 7. A partir do experimento acima e de medições diárias de produção, os resultados de produção diária e acúmulo de biogás obtidos foram representados pelos gráficos que estão descritos de acordo com as Figuras 8 e 9.

Figura 8: Produção diária de biogás em diferentes proporções de substrato do estudo de (SILVA et al., 2024).



Fonte: (SILVA et al., 2024)

Figura 9: Acúmulo de biogás em diferentes proporções de substrato do estudo de (SILVA et al., 2024) para o ajuste do modelo de Gompertz e do modelo proposto.



Fonte: (SILVA et al., 2024)

### 3.2.2 Experimento de co-digestão com ARBL e CCe

Para a condução dos ensaios proposta em (SILVA, 2024), foram realizados ensaios em bateladas em escala laboratorial com o objetivo de avaliar a influência de diferentes proporções da mistura entre o caldo da biomassa vegetal capim-elefante BRS Capiaçú (*Pennisetum purpureum Schum*) e águas residuárias bovinas leiteiras (ARBL) na produção de biogás. Foram realizados dois testes, diferenciados apenas pela temperatura operacional: 25°C (ambiente) e 39°C (mesofílica superior).

Os biodigestores utilizados foram frascos de vidro com volume total de 100 mL, sendo 60 mL destinados ao volume reacional (90% de substrato e 10% de inóculo) e 40 mL ao headspace (espaço para acúmulo de biogás). Cada ensaio contou com 12 reatores dispostos em duplicata, incluindo cinco diferentes proporções de mistura (A, B, C, D e E) e um controle com apenas inóculo (F), o ensaio laboratorial descrito pode ser observado na Figura 10. Antes de vedar os frascos, realizou-se uma purga interna com ( $N_2$ ) para garantir ambiente anaeróbico e os frascos foram acondicionados em uma incubadora a 100 rpm, de modo a garantir a homogeneização do substrato. O tempo total de incubação foi de até 30 dias, podendo ser encerrado antes caso a produção diária de metano se mantivesse muito baixa.

O volume de biogás foi quantificado por vaso comunicante, e sua composição analisada por cromatografia gasosa com coletas periódicas, conforme ilustrado na Figura 10.

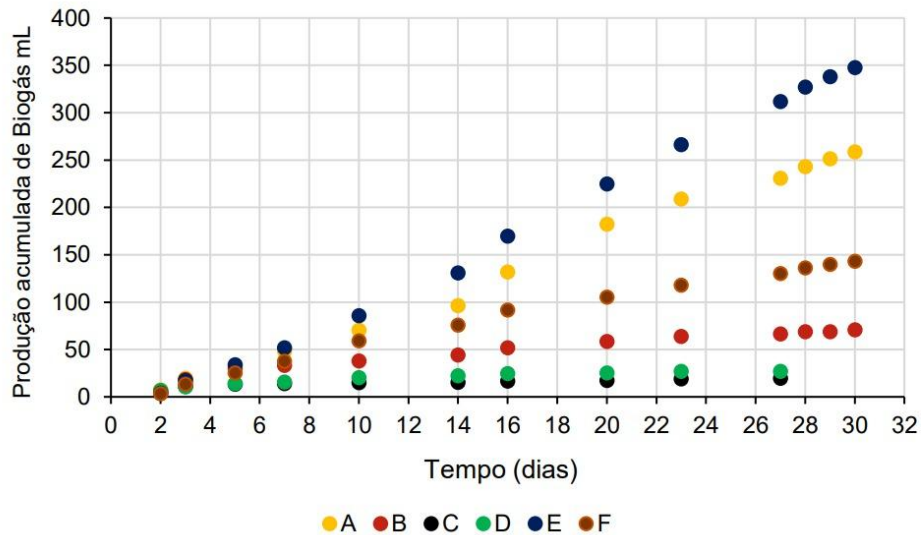
Figura 10: Montagem dos ensaios em batelada na incubadora shaker.



Fonte: (SILVA, 2024)

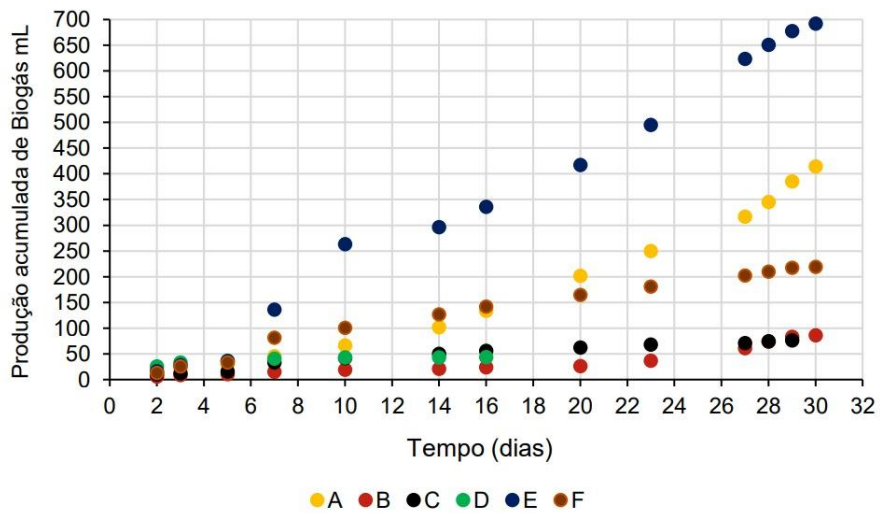
A partir do experimento realizado acima, foram coletados os dados de acúmulo de biogás para os experimentos de 25°C e também 39°C, onde os gráficos apuraram uma melhor produção no experimento denominado de Teste II realizado a 39°C, sendo o Teste II escolhido para ser reproduzido por este trabalho devido a sua produção de biogás ter sido maior em comparativo ao Teste I. Ambos os testes contaram com seis composições diferentes divididas da seguinte maneira: (A) – 20 CCe/80 ARBL; (B) – 40 CCe/60 ARBL; (C) – 80 CCe/20 ARBL; (D) – 100 CCe/0 ARBL; (E) – 0 CCe/100 ARBL; (F) – Inóculo. Os gráficos dos testes realizados em (SILVA, 2024) podem ser observados de acordo com as Figuras 11 e 12.

Figura 11: Produção do volume acumulado de biogás no ensaio em batelada, Teste I à 25°C



Fonte: (SILVA, 2024)

Figura 12: Produção do volume acumulado de biogás no ensaio em batelada, Teste II à 39°C.



Fonte: (SILVA, 2024)

### 3.2.3 Aplicação do Modelo

Sendo expressa a proposta do modelo adaptado, o seu respectivo sistema de EDO foi solucionado afim de ilustrar o comportamento das variáveis  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $s(t)$  ao longo do tempo. Com uma proposta de modelo já estruturada, primeiramente utilizou-se os dados presentes em (SILVA et al., 2024) em seu estudo de produção de biogás através da co-digestão entre resíduos bovinos e a gramínea *Arundo donax* L. Em seguida, optou-se por aplicar o modelo em outro estudo onde é feito o experimento de co-digestão entre resíduos bovinos e caldo de capim elefante para validação do modelo (SILVA, 2024).

Para a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs) utilizado a função *odeint*, proveniente da biblioteca *scipy.integrate* da linguagem *Python*. A *odeint* facilita a resolução de equações diferenciais ao automatizar o processo de integração. Para utilizá-la, é necessário definir as equações que descrevem como as variáveis mudam ao longo do tempo, informar os valores iniciais e o intervalo de tempo a ser analisado. Com essas informações, a *odeint* calcula, de forma precisa, os valores aproximados das variáveis ao longo do tempo. O grande benefício dessa abordagem é permitir a análise do comportamento do sistema sem precisar implementar manualmente métodos numéricos mais complexos. Assim, é possível visualizar como variáveis como a população de bactérias ou a produção acumulada de biogás evoluem com o passar dos dias, com rapidez e eficiência.

A princípio, o modelo foi aplicado com o objetivo de reproduzir os resultados experimentais obtidos por (SILVA et al., 2024) para a mistura contendo 50 g de gramínea, uma vez que essa condição apresentou o maior potencial de produção de biogás. Para efeito de comparação e avaliação da resposta do modelo, foi ajustada uma curva do modelo de Gompertz sobre os dados experimentais. A função de Gompertz é amplamente utilizada na modelagem da produção cumulativa de biogás, especialmente em reatores operando em batelada, por sua capacidade de representar com fidelidade o comportamento do processo (LAY; LI; NOIKE, 1997). Vale ressaltar que o objetivo do modelo proposto não é replicar a curva de Gompertz, mas sim realizar um comparativo sobre sua aderência aos dados em relação a esse ajuste. Posteriormente, realizou-se um ajuste manual dos parâmetros do modelo, com o parâmetro  $\mu$  sendo fixado no valor correspondente ao volume de

substrato presente no experimento representado, isso ocorreu devido aos reatores simulados serem sistemas em batelada.

### 3.2.4 Evolução diferencial

Durante o desenvolvimento e aplicação do modelo matemático, verificou-se a necessidade de empregar uma estratégia automatizada e robusta para a estimação dos parâmetros. Considerando a natureza não linear do problema e a possível presença de múltiplos mínimos locais, optou-se pela utilização da *Evolução Diferencial* (ED), um método de otimização global amplamente reconhecido por sua eficiência em problemas contínuos de alta complexidade.

A Evolução Diferencial é um algoritmo evolutivo baseado em população, originalmente proposto por Price e Storn, e consolidado como uma técnica de estado da arte em otimização global contínua (OPARA; ARABAS, 2018). Trata-se de um método estocástico que opera sobre um conjunto de soluções candidatas, evoluindo-as iterativamente por meio de operadores específicos de mutação diferencial, cruzamento e seleção. Diferentemente de métodos determinísticos baseados em gradiente, a ED não requer informações derivativas da função objetivo, o que a torna particularmente adequada para problemas com superfícies complexas, não diferenciáveis ou multimodais.

O algoritmo processa uma população

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_{N_p}\},$$

em que cada indivíduo é representado por um vetor no espaço de busca. A cada iteração, três operadores principais são aplicados:

- **Inicialização:** A população inicial é gerada aleatoriamente dentro dos limites definidos para cada parâmetro, garantindo diversidade inicial no espaço de busca.
- **Mutação:** Para cada indivíduo, é construído um vetor mutante a partir da combinação linear de vetores da população. Na forma clássica, o vetor mutante é obtido por:

$$u_i = x_{r1} + F(x_{r2} - x_{r3}),$$

onde  $F$  é o fator de escala que controla a amplitude da perturbação, e os índices  $r1, r2, r3$  são escolhidos aleatoriamente.

- **Cruzamento:** O vetor mutante é recombinado com o vetor alvo, gerando um vetor candidato. No cruzamento, cada componente é herdado do mutante com probabilidade  $C_r$ , denominada taxa de cruzamento.
- **Seleção:** O vetor candidato compete diretamente com seu vetor pai. O indivíduo com melhor valor da função objetivo é mantido na próxima geração, caracterizando um mecanismo de seleção elitista local.

Esse ciclo evolutivo é repetido até que um critério de parada seja satisfeito, como número máximo de gerações ou convergência da população. Conforme discutido por (OPARA; ARABAS, 2018), a ED apresenta propriedades importantes como invariância a transformações de escala e translação da função objetivo, além de mecanismos bem definidos de controle da diversidade populacional, aspectos fundamentais para garantir estabilidade e eficiência na busca global.

A simplicidade estrutural da Evolução Diferencial, aliada à sua capacidade de explorar eficientemente o espaço de busca e evitar convergência prematura sob adequada escolha dos parâmetros  $F$ ,  $C_r$  e  $N_p$ , justifica sua aplicação na calibração de modelos matemáticos complexos, como aqueles empregados na modelagem da produção de biogás.

### 3.2.5 Análise do Erro entre Dados Experimentais e o Modelo Ajustado

No presente trabalho, a evolução diferencial foi utilizada para ajustar automaticamente os parâmetros do modelo às curvas experimentais, minimizando o erro entre os dados simulados e os dados observados. Para avaliar a acurácia do modelo matemático proposto em relação aos dados experimentais de produção de biogás, utilizou-se a métrica do erro na norma  $L^2$ , uma ferramenta estatística amplamente empregada na análise de desempenho de modelos preditivos. Essa medida quantifica a diferença entre os valores simulados pelo modelo ( $y_i$ ) e os valores observados experimentalmente ( $d_i$ ), considerando o somatório dos quadrados dos resíduos ao

longo de todos os pontos avaliados. A fórmula utilizada é expressa por:

$$\text{Erro } L^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - d_i)^2}$$

Onde:

- $y_i$  são os valores previstos pelo modelo;
- $d_i$  são os valores observados (dados reais);
- $n$  é o número total de pontos;

Essa análise foi conduzida com o objetivo de quantificar a precisão do modelo matemático proposto, permitindo avaliar a distância entre os dados experimentais de acúmulo de biogás apresentados nos estudos de (SILVA et al., 2024) e (SILVA, 2024) e as respectivas curvas de resposta geradas pelo modelo. Por meio dessa métrica, foi possível comparar de forma objetiva o desempenho do modelo em ambos os conjuntos de dados, fornecendo um critério quantitativo para a avaliação da qualidade das simulações.

Dessa forma, o uso do erro na norma  $L^2$  permitiu verificar o grau de aderência entre as curvas simuladas e os dados experimentais, servindo como indicador da capacidade do modelo em reproduzir o comportamento observado da produção acumulada de biogás nos diferentes experimentos analisados.

Além da métrica baseada na norma  $L^2$ , foi também considerado o erro máximo, definido como o maior valor absoluto da diferença entre os dados experimentais e os valores simulados pelo modelo. Essa medida é expressa por

$$\text{Erro}_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} (|y_i - d_i|),$$

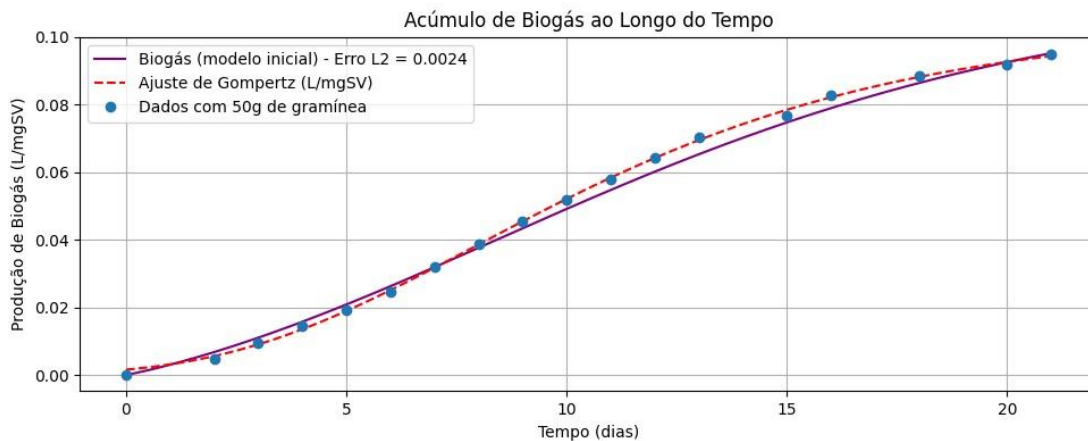
a qual permite identificar a maior distância entre um dado experimental de (SILVA et al., 2024) e (SILVA, 2024) e as curvas de resposta do modelo. A utilização do erro máximo complementa a análise fornecida pelo erro na norma  $L^2$ , possibilitando uma avaliação mais abrangente do desempenho do modelo frente aos resultados experimentais.

## 4 RESULTADOS

### 4.1 AJUSTE DOS PARÂMETROS AO EXPERIMENTO COM *ARUNDO DONAX L.*

A princípio o modelo foi aplicado afim de reproduzir o resultado obtido por (SILVA et al., 2024) para a mistura com 50g de gramínea, pois o mesmo foi o que demonstrou maior potencial para a produção de biogás. A partir dos dados experimentais foi traçado um ajuste de *Gompertz* para efeitos de comparação, este tipo de ajuste é comumente usado para descrever o crescimento de populações de bactérias. Em seguida um ajuste manual de parâmetros onde o parâmetro  $\mu$ , que representa o volume de inserção de substrato foi fixado em 0.4 devido ao experimento representado ser feito em batelada. O ajuste foi realizado manualmente de maneira que a curva explicitada pelo modelo se ajustasse o melhor possível sobre os dados experimentais, o ajuste da curva do modelo obtida a partir do ajuste manual de parâmetros de forma manual pode ser observada na Figura 13 e os valores dos parâmetros obtidos a partir do ajuste manual estão presentes na Tabela 1.

Figura 13: Simulação com ajuste manual de parâmetros para o experimento com 50g de gramínea.



Fonte: (Autor, 2026)

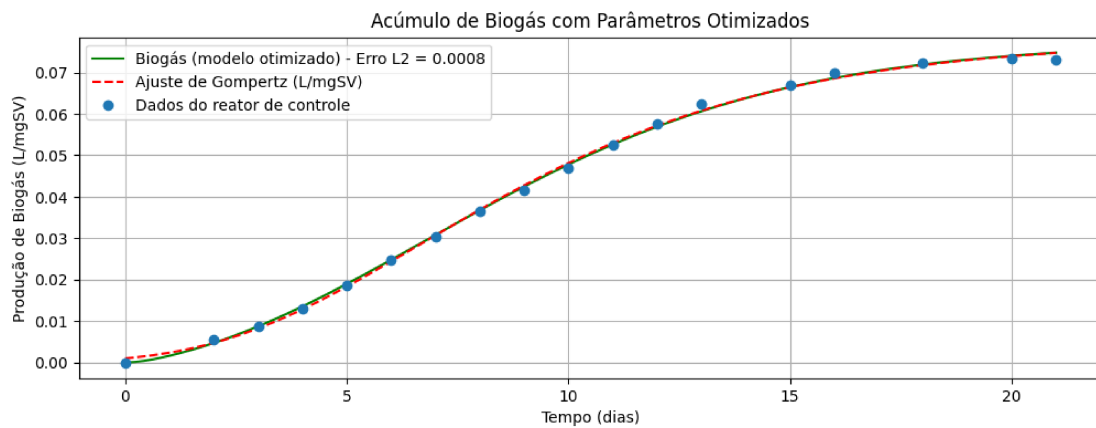
Tabela 2 – Valores dos parâmetros no modelo base

Parâmetro	$\alpha$	$\beta$	$k$	$p$	$\mu$	$\gamma$
Valor	2	0.02	0.08	0.002	0.4	0.1

Fonte: Autor (2026).

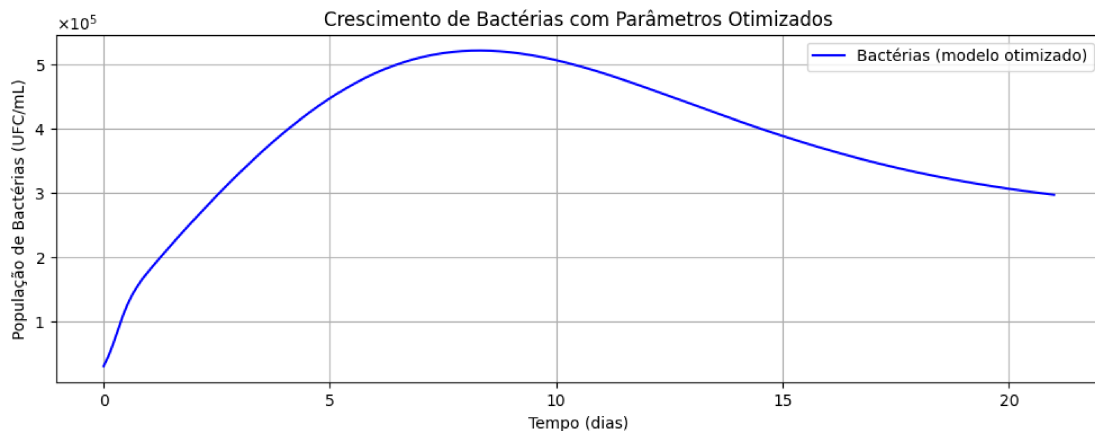
Devido à dificuldade de ajustar manualmente cada parâmetro de forma que todos proporcionem um bom ajuste à curva experimental, optou-se por empregar uma estratégia de otimização automatizada baseada em Evolução Diferencial conforme descrito na seção 3.2.4. Inicialmente, a abordagem foi aplicada ao experimento de controle descrito por (SILVA et al., 2024), composto exclusivamente por ARBL, a produção de biogás e o crescimento bacteriano observados nesse experimento são apresentados nas Figuras 14 e 15. Em seguida, foi representado o experimento com 50 g de *Arundo donax L.*, com o objetivo de reproduzir fielmente o teste de melhor desempenho descrito por (SILVA et al., 2024). As estimativas de produção de biogás e do crescimento bacteriano para esse experimento estão representadas nas Figuras 16 e 17.

Figura 14: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com apenas ARBL.



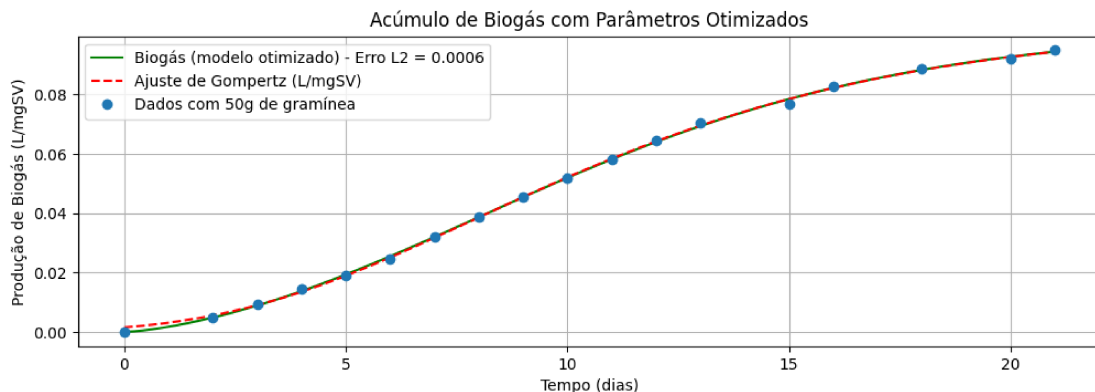
Fonte: (Autor, 2025)

Figura 15: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com apenas ARBL.



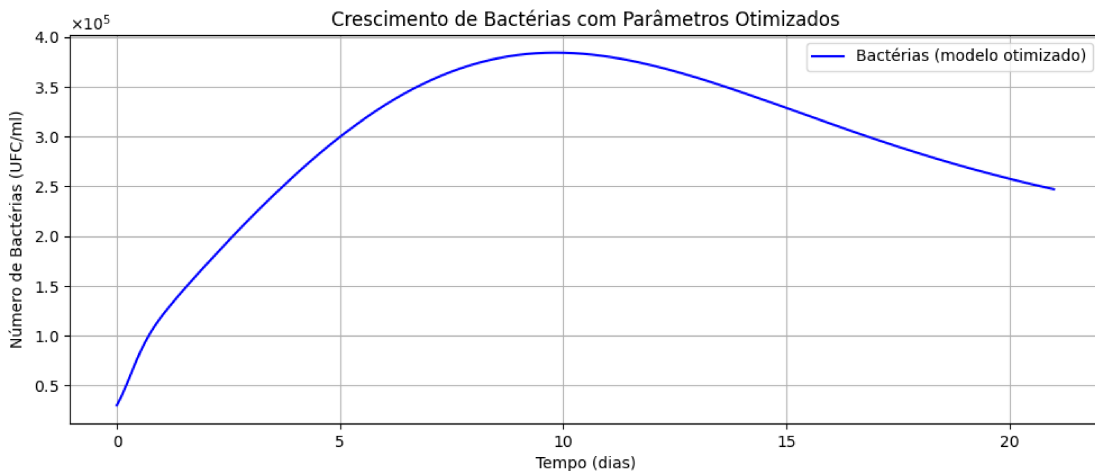
Fonte: (Autor, 2026)

Figura 16: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 50g de gramínea.



Fonte: (Autor, 2026)

Figura 17: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 50g de gramínea.

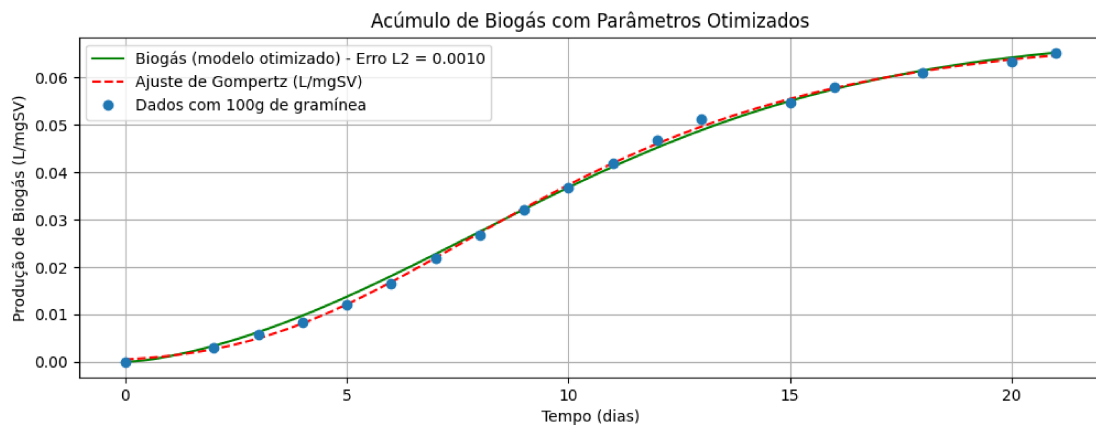


Fonte: (Autor, 2026)

Dando continuidade à análise, a mesma metodologia de otimização dos parâmetros, baseada em Evolução Diferencial, foi aplicada aos experimentos realizados com 100 g e 200 g de *Arundo donax*. O objetivo foi avaliar a capacidade do modelo em representar adequadamente o comportamento do sistema frente a diferentes cargas de substrato, analisando tanto a produção acumulada de biogás quanto a dinâmica do crescimento microbiano.

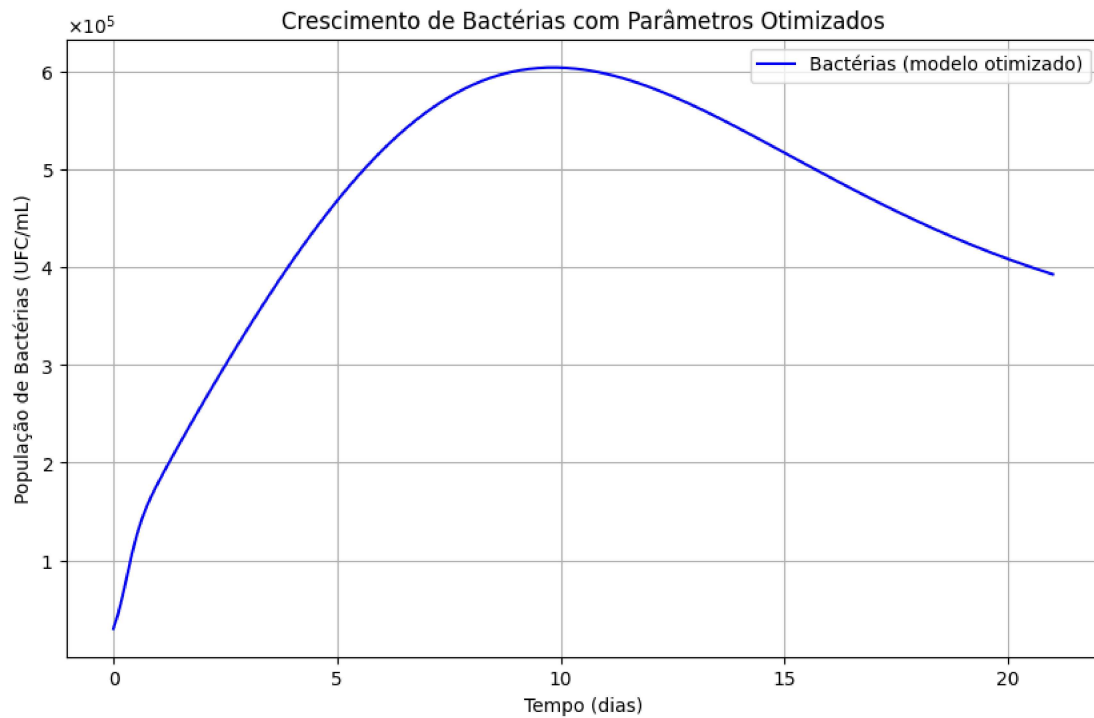
As Figuras 18 e 19 apresentam, respectivamente, os resultados simulados e experimentais para a produção de biogás e o crescimento bacteriano no experimento com 100 g de substrato.

Figura 18: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 100g de gramínea.



Fonte: (Autor, 2026)

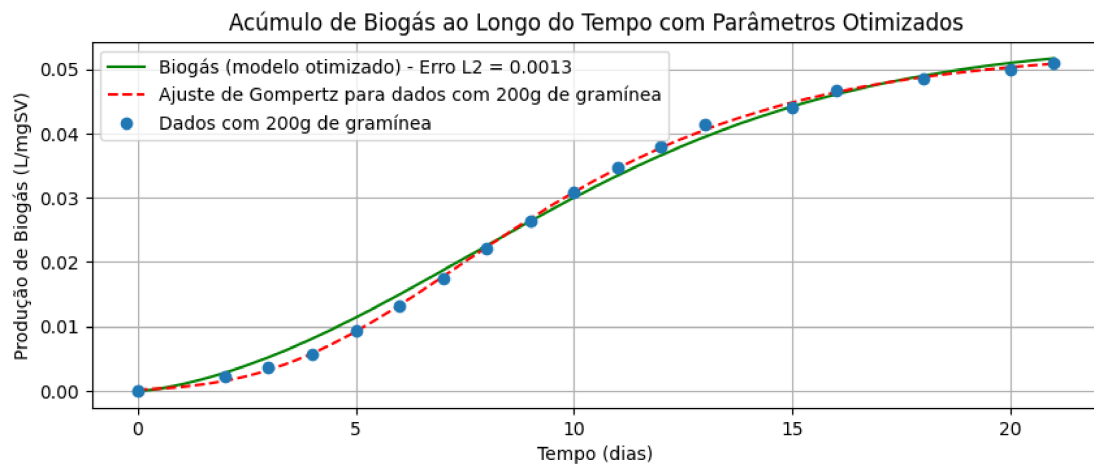
Figura 19: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 100g de gramínea.



Fonte: (Autor, 2026)

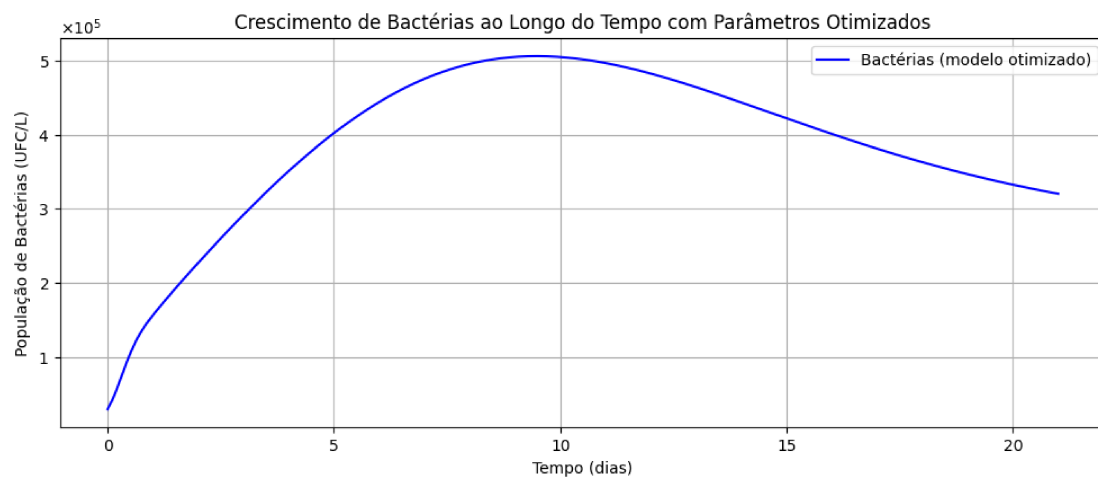
De forma análoga, as Figuras 20 e 21 ilustram os resultados obtidos para o experimento com 200 g de *Arundo donax*, permitindo observar o desempenho do modelo frente a uma condição de maior concentração de matéria orgânica.

Figura 20: Simulação com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 200g de gramínea.



Fonte: (Autor, 2026)

Figura 21: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 200g de gramínea.



Fonte: (Autor, 2026)

Embora o foco principal da proposta seja a produção de biogás, as curvas de crescimento bacteriano estimadas pelo modelo também apresentaram comportamento coerente do ponto de vista microbiológico. Ressalta-se, entretanto, que tais curvas possuem caráter qualitativo, pois representam exclusivamente a resposta dinâmica do modelo matemático e não dados experimentais diretos, visto que o estudo de (SILVA et al., 2024) não disponibilizou medições do crescimento microbiano ao longo do processo.

Ainda assim, observa-se que cada curva estimada apresenta um pico temporal que coincide com o pico diário de produção de biogás para cada proporção avaliada, sugerindo consistência biológica entre a atividade microbiana prevista e a geração de metabólitos gasosos. Além disso, o formato das curvas segue o padrão clássico como descrito por (UGHY et al., 2023) para culturas bacterianas em sistemas com recursos limitados, caracterizado por uma trajetória composta por quatro fases fisiologicamente distintas: lag, exponencial, estacionária e de declínio.

- **Fase lag:** corresponde ao período inicial de adaptação das bactérias às condições do meio, no qual ocorre intensa atividade metabólica e síntese de enzimas, mas sem aumento significativo do número de células. A duração dessa fase depende do histórico fisiológico do inóculo e das características do substrato disponível.
- **Fase exponencial:** caracteriza-se pelo crescimento acelerado da população, com divisões celulares ocorrendo a uma taxa aproximadamente constante, favorecida por condições ambientais adequadas e disponibilidade de nutrientes. Nessa etapa, a biomassa aumenta rapidamente até que fatores limitantes passem a atuar.
- **Fase estacionária:** ocorre quando a taxa de crescimento passa a ser compensada pela taxa de morte celular, em geral devido ao esgotamento de nutrientes e ao acúmulo de produtos metabólicos. As células permanecem metabolicamente ativas, mas sob condições de estresse fisiológico.
- **Fase de declínio:** etapa em que a mortalidade supera a taxa de divisão celular, levando à redução da população viável. Essa fase está associada à

limitação severa de recursos e à toxicidade do meio resultante do acúmulo de subprodutos metabólicos.

Dessa forma, mesmo sem validação da contagem experimental do crescimento bacteriano, a conformidade das curvas simuladas com o comportamento clássico descrito na literatura por (UGHY et al., 2023) reforça a concordância biológica e a consistência estrutural do modelo adaptado para representar o sistema de digestão anaeróbia.

#### 4.1.1 Análise dos parâmetros do experimento entre ARBL e *Arundo donax* L.

A Tabela 3 apresenta um comparativo entre os parâmetros obtidos por ajuste manual e aqueles estimados automaticamente por meio do algoritmo de Evolução Diferencial para os diferentes cenários avaliados: 50 g, 100 g e 200 g de *Arundo donax*.

Tabela 3 – Parâmetros ajustados para diferentes condições experimentais

<b>Parâmetro</b>	<b>Manual</b>	<b>50g</b>	<b>100g</b>	<b>200g</b>
Taxa de crescimento das bactérias ( $\alpha$ )	2.000	6.255	9.960	8.505
Taxa de inibição do crescimento ( $\rho$ )	0.002	0.002	0.003	0.004
Taxa de coleta de biogás ( $\beta$ )	0.020	0.042	0.048	0.049
Taxa de produção de biogás ( $k$ )	0.080	0.024	0.010	0.010
Taxa de metabolismo das bactérias ( $\delta$ )	0.100	0.050	0.050	0.050
Volume de inserção do substrato ( $\mu$ )	0.400	0.400	0.400	0.400

Fonte: Autor (2026).

Além dos valores encontrados para os parâmetros em diferentes condições experimentais, também foram estipulados os valores do erro na métrica  $L^2$  e o erro máximo encontrado em cada reprodução do modelo baseando-se no que foi elencado no item na seção anterior. Os valores de erro para o experimento podem ser observados de acordo com a Tabela 4

Tabela 4 – Comparação dos erros  $L^2$  e erro máximo para diferentes condições do experimento com *Arundo donax L.*

<b>Condição</b>	$L^2$	<b>Erro Máximo</b>
Ajuste manual 50g	0.0024	0.0051
Controle	0.0008	0.0015
50g de gramínea	0.0006	0.0016
100g de gramínea	0.0010	0.0023
200g de gramínea	0.0013	0.0025

Fonte: Autor (2026).

A análise dos parâmetros obtidos por meio da otimização revela tendências importantes sobre o comportamento do sistema frente ao aumento da carga de substrato.

Observa-se que a **taxa de crescimento das bactérias** ( $\alpha$ ) apresenta um aumento expressivo na transição de 50g para 100g, indicando uma resposta positiva do sistema microbiano à maior disponibilidade de substrato. No entanto, esse parâmetro sofre uma leve redução no experimento com 200g, sugerindo que o aumento excessivo de carga pode gerar efeitos limitantes, como sobrecarga orgânica, competição por nutrientes ou acúmulo de metabólitos inibidores.

A **taxa de inibição do crescimento bacteriano** ( $\rho$ ) também cresce gradualmente com o aumento da carga de substrato, refletindo a intensificação dos efeitos de autoinibição devido ao acúmulo de subprodutos ou limitações ambientais no sistema. Este comportamento é coerente com sistemas biológicos, onde elevadas concentrações de substrato podem impactar negativamente o desempenho microbiano.

A **taxa de coleta de biogás** ( $\beta$ ) apresenta uma evolução crescente à medida que a carga de substrato aumenta. Isso indica que, com maiores volumes de matéria orgânica, há uma intensificação da formação e coleta de biogás no sistema, condizente com a maior disponibilidade de substrato biodegradável.

Por outro lado, a **taxa de produção de biogás** ( $k$ ) sofre uma redução acentuada nos cenários de 100 g e 200 g. Este comportamento pode estar associado à saturação do sistema, onde o excesso de substrato provoca uma diminuição na eficiência do processo bioquímico, possivelmente devido à limitação de fatores como

pH, nutrientes essenciais ou inibição por acúmulo de produtos intermediários.

A **taxa de metabolismo das bactérias** ( $\delta$ ) manteve-se constante nos ajustes automatizados, com valor em 0,05 para todos os cenários. Este padrão sugere que esse parâmetro pode não ser sensível às variações de carga dentro da faixa testada, ou que seu valor ótimo foi rapidamente encontrado durante o processo de otimização, não exigindo grandes ajustes.

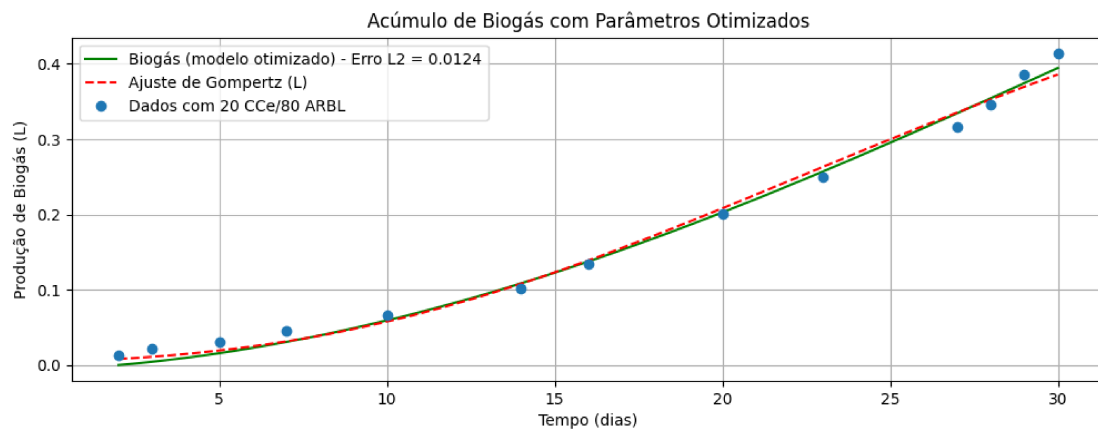
Por fim, o **volume de inserção do substrato** ( $\mu$ ) permaneceu constante em 0,4 em todos os casos, refletindo uma condição experimental fixa no modelo, não sendo tratado como parâmetro variável no processo de otimização.

De forma geral, os resultados demonstram que o modelo calibrado via Evolução Diferencial apresenta boa capacidade de adaptação às diferentes cargas de substrato, ajustando de maneira coerente os parâmetros biológicos e cinéticos em resposta às mudanças nas condições operacionais. Além disso, os comportamentos observados estão alinhados com fenômenos bem conhecidos na digestão anaeróbia, como os efeitos de sobrecarga orgânica, limitação metabólica e auto inibição microbiana.

#### 4.2 AJUSTE DOS PARÂMETROS AO EXPERIMENTO COM CALDO DE CAPIM ELEFANTE

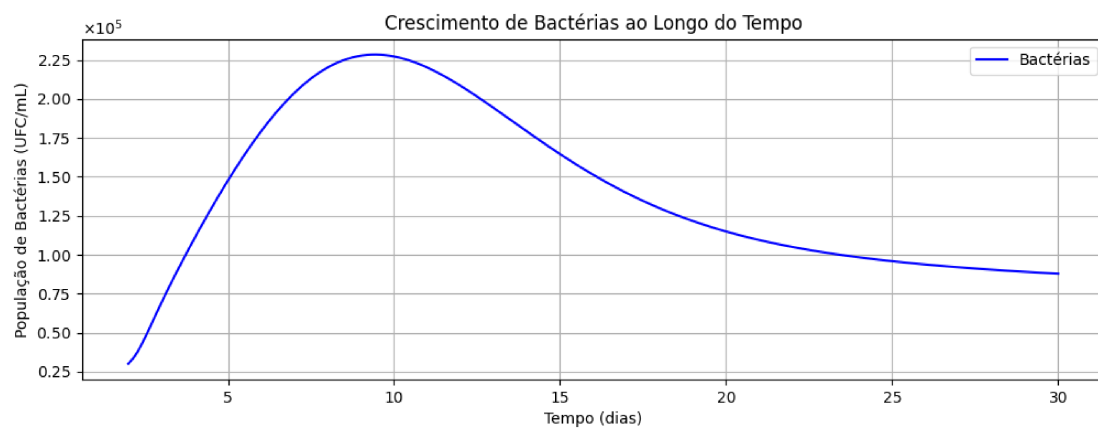
A partir do que foi feito no experimento anterior, essa seção propõe que o mesmo estudo de aplicabilidade do modelo seja feito para o experimento de (SILVA, 2024) que trata da co-digestão entre ARBL e CCe. Devido ao que já havia sido observado no experimento anterior sobre a dificuldade do ajuste manual, a proposta de reproduzir o experimento dessa seção já parte da estratégia de otimização automatizada dos parâmetros com o objetivo de reproduzir os testes feitos em escala laboratorial em (SILVA, 2024). Primeiramente foram reproduzidos apenas os experimentos que abordam a co-digestão e suas diferentes proporções. As estimativas de produção de biogás obtidas e as estimativas de crescimento de bactérias a partir do modelo implementado estão descritas de acordo com as Figuras 22 à 27.

Figura 22: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 20 C<sub>Ce</sub>/80 ARBL.



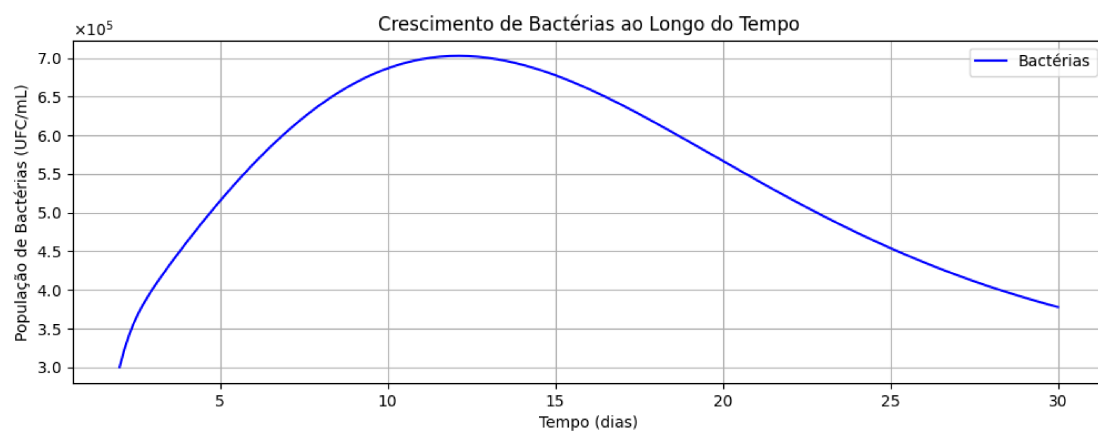
Fonte: (Autor, 2026)

Figura 23: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 20 C<sub>Ce</sub>/80 ARBL.



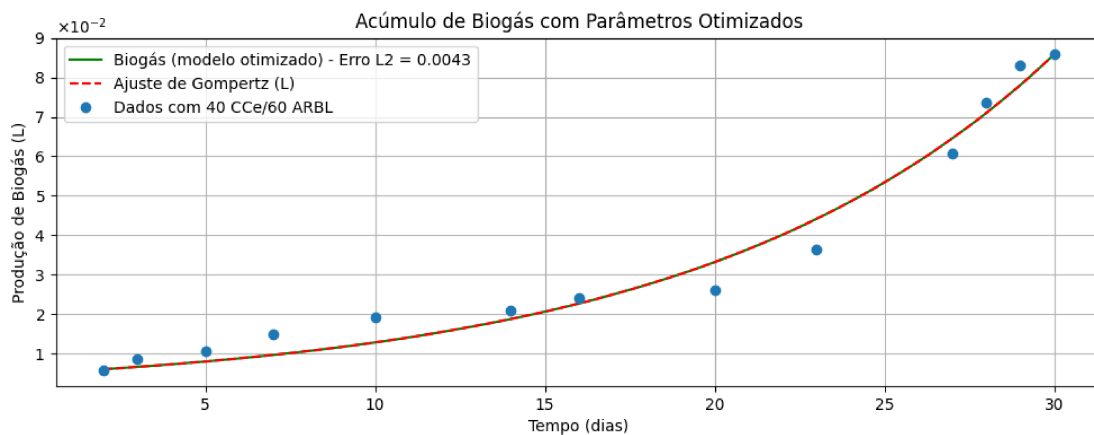
Fonte: (Autor, 2026)

Figura 24: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 40 C<sub>Ce</sub>/60 ARBL.



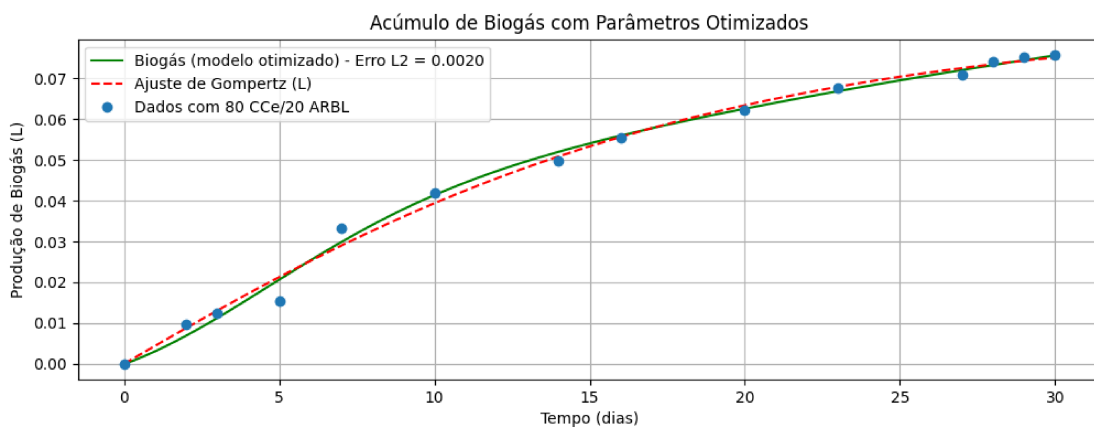
Fonte: (Autor, 2026)

Figura 25: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 40 CCe/60 ARBL.



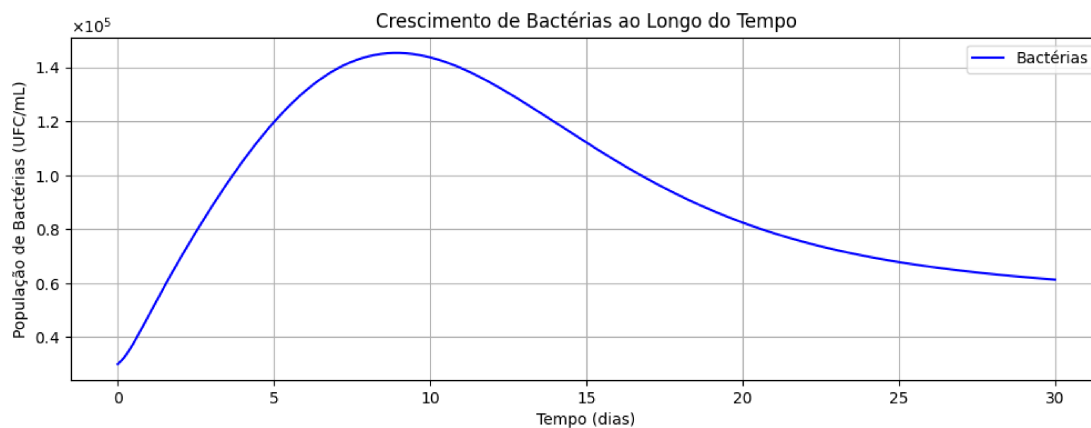
Fonte: (Autor, 2026)

Figura 26: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 80 CCe/20 ARBL.



Fonte: (Autor, 2026)

Figura 27: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 80 CCe/20 ARBL.

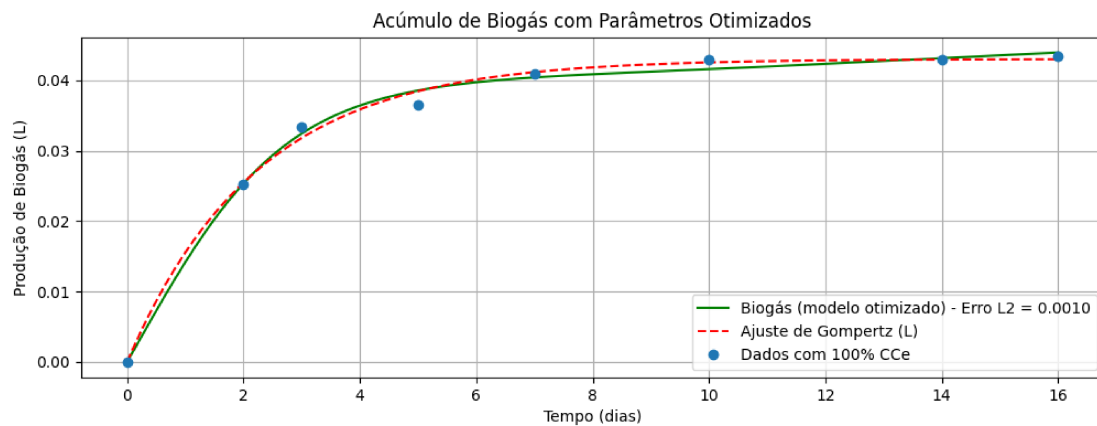


Fonte: (Autor, 2026)

Pode-se observar que o modelo proposto proporcionou um ajuste satisfatório para os experimentos com proporções de 20% CCe/80% ARBL, 80% CCe/20% ARBL e 40% CCe/60% ARBL, apresentando valores de erro entre as curvas modeladas e os dados experimentais considerados baixos.

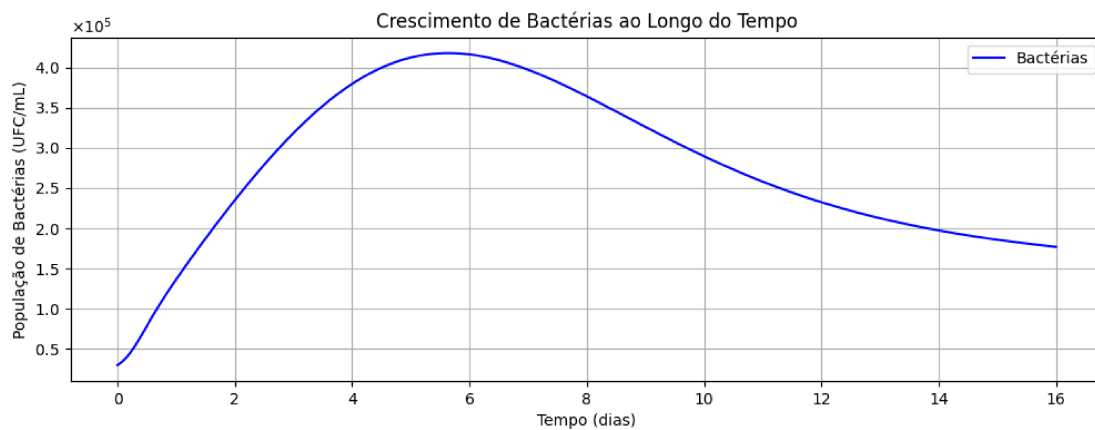
Em continuidade, foram replicados outros três experimentos reportados por (SILVA, 2024), desta vez realizados com substratos compostos por uma única matéria-prima, sem co-digestão. Os experimentos incluíram 100% ARBL, 100% CCe e 100% inóculo, cujas representações de acúmulo de biogás e as respectivas curvas de crescimento bacteriano podem ser visualizadas nas Figuras 28 à 33.

Figura 28: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 100% CCe.



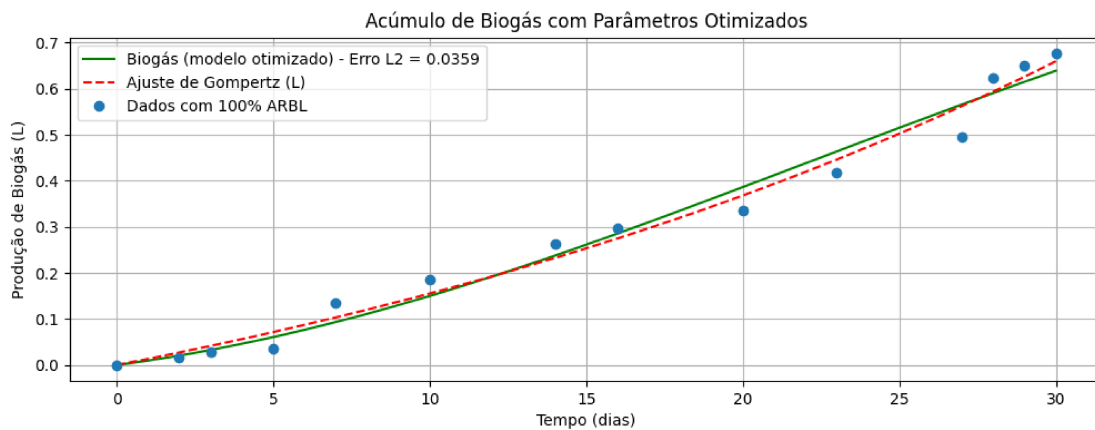
Fonte: (Autor, 2026)

Figura 29: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 100% CCe.



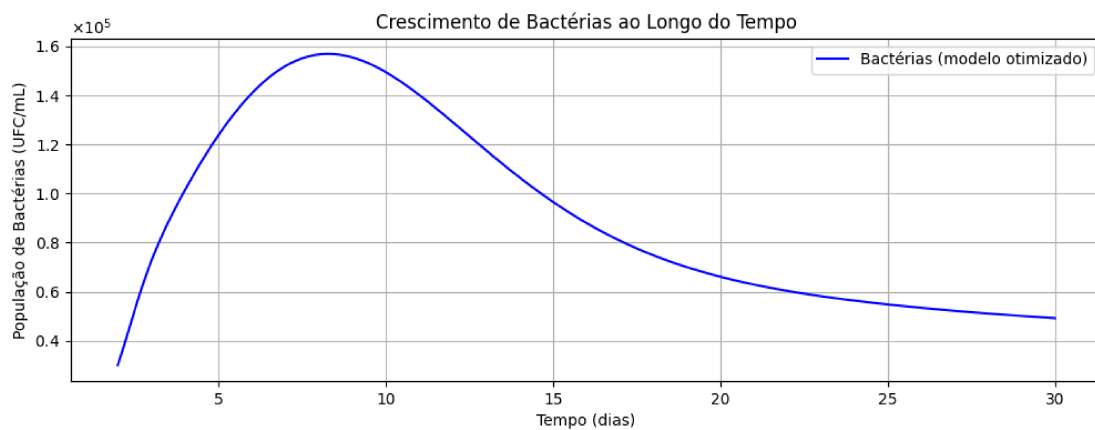
Fonte: (Autor, 2026)

Figura 30: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 100% ARBL.



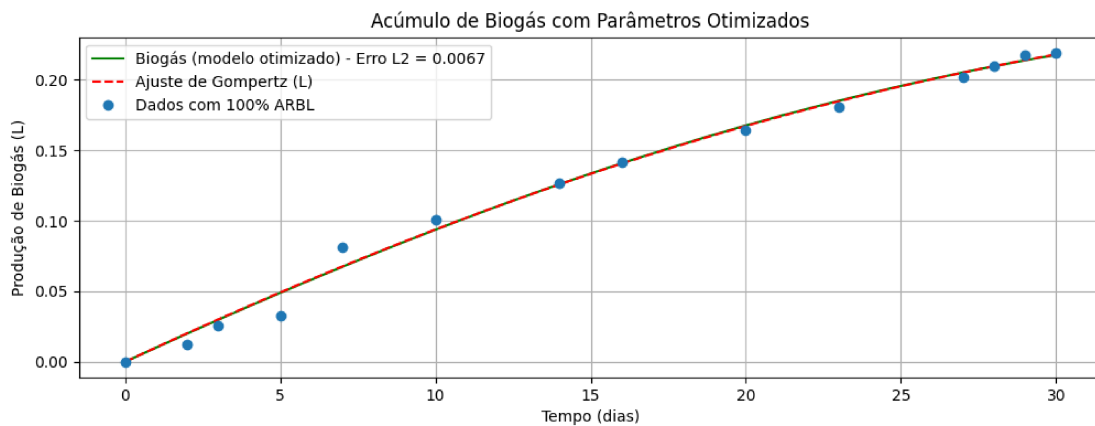
Fonte: (Autor, 2026)

Figura 31: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com 100% ARBL.



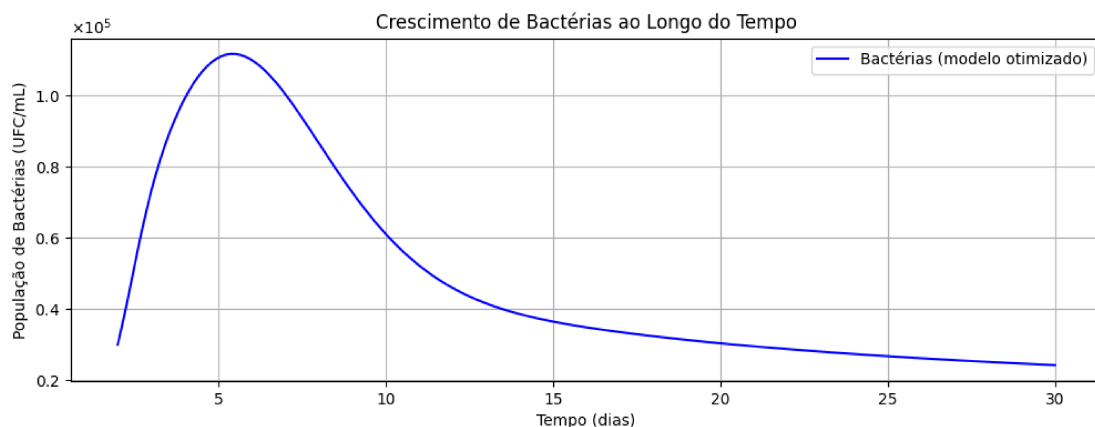
Fonte: (Autor, 2026)

Figura 32: Acúmulo de biogás com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com Inóculo.



Fonte: (Autor, 2026)

Figura 33: Contagem de bactérias com ajuste otimizado de parâmetros para o experimento com Inóculo.



Fonte: (Autor, 2026)

A Tabela 4 apresenta um comparativo dos parâmetros obtidos por estimativa automática utilizando o algoritmo de Evolução Diferencial, considerando os diferentes cenários de co-digestão avaliados: 20% CCe/80% ARBL, 40% CCe/60% ARBL e 80% CCe/20% ARBL. Além disso, a Tabela inclui os valores dos parâmetros obtidos para os experimentos realizados com substratos compostos por uma única matéria-prima, conforme descrito por (SILVA, 2024), correspondentes a 100% CCe, 100% ARBL e inóculo. Dessa forma, é possível comparar o comportamento do

modelo tanto em condições de co-digestão quanto em experimentos com substrato único.

Tabela 5 – Parâmetros do modelo para os três primeiros experimentos

<b>Parâmetro</b>	<b>20cce/ 80arbl</b>	<b>40cce/ 60arbl</b>	<b>80cce/ 20arbl</b>
Taxa de crescimento das bactérias ( $\alpha$ )	19.45	19.94	19.30
Taxa de inibição do crescimento ( $\rho$ )	0.001	0.001	0.007
Taxa de coleta de biogás ( $\beta$ )	0.001	0.005	0.001
Taxa de produção de biogás ( $k$ )	0.108	0.010	0.075
Taxa de metabolismo das bactérias ( $\delta$ )	0.145	0.055	0.123
Volume de inserção do substrato ( $\mu$ )	0.06	0.06	0.06

Fonte: Autor (2026).

Tabela 6 – Parâmetros do modelo para os três últimos experimentos

<b>Parâmetro</b>	<b>100cce/ 0arbl</b>	<b>0cce/ 100arbl</b>	<b>Inóculo</b>
Taxa de crescimento das bactérias ( $\alpha$ )	10.92	12.09	11.52
Taxa de inibição do crescimento ( $\rho$ )	0.020	0.001	0.0001
Taxa de coleta de biogás ( $\beta$ )	0.006	0.003	0.115
Taxa de produção de biogás ( $k$ )	0.469	0.268	0.303
Taxa de metabolismo das bactérias ( $\delta$ )	0.499	0.152	0.365
Volume de inserção do substrato ( $\mu$ )	0.06	0.06	0.06

Fonte: Autor (2026).

Assim como feito no experimento anterior, também optou-se por utilizar as mesmas métricas para ilustrar o erro das curvas do modelo, agora para o experimento com CCE. Os valores encontrados estão listados de acordo com a Tabela 7.

Tabela 7 – Comparação dos erros  $L^2$  e erro máximo para diferentes condições do experimento com CCe.

<b>Condição</b>	$L^2$	<b>Erro Máximo</b>
20 CCe / 80 ARBL	0.0124	0.0198
40 CCe / 60 ARBL	0.0043	0.0077
80 CCe / 20 ARBL	0.0020	0.0052
100 CCe / 0 ARBL	0.0010	0.0020
0 CCe / 100 ARBL	0.0359	0.0710
Inóculo	0.0067	0.0162

Fonte: Autor (2026).

A análise comparativa dos resultados entre todos os seis cenários experimentais existentes revela tendências no comportamento do sistema em função da composição do substrato.

A taxa de crescimento das bactérias ( $\alpha$ ) apresenta valores próximos entre os cenários de co-digestão, variando de 19,30 a 19,95, indicando que a capacidade de crescimento inicial das bactérias se manteve relativamente constante, independentemente da proporção de CCe e ARBL. Nos experimentos com substrato único, observa-se uma redução de  $\alpha$ , principalmente para ARBL (12,09) e inóculo (11,52), evidenciando menor vigor bacteriano quando a co-digestão não é aplicada.

A taxa de inibição do crescimento bacteriano ( $\rho$ ) aumenta levemente com maiores proporções de CCe nos cenários de co-digestão (0,001 a 0,007), sugerindo efeitos inibitórios proporcionais à carga de CCe. Nos experimentos com substrato único, os valores de  $\rho$  apresentam variações mais acentuadas, especialmente para 100% CCe (0,020), refletindo maior sensibilidade das bactérias à composição isolada do substrato, isso pode ocorrer devido à influências das características químicas do CCe como o pH e acidez.

A taxa de coleta de biogás ( $\beta$ ) mostra um pequeno crescimento com o aumento da proporção de CCe na co-digestão (0,001 a 0,005), indicando que maiores quantidades de matéria orgânica facilmente degradável favorecem a eficiência de coleta. Em substratos únicos, observa-se aumento significativo, principalmente para inóculo (0,115), sugerindo que, isoladamente, certos substratos podem acelerar a produção e coleta de biogás. Vale ressaltar que o papel do inóculo não é trabalhar

como substrato, mas sim como um catalisador do processo biológico que tem como objetivo principal acelerar a produção inicial de biogás.

A taxa de produção de biogás ( $k$ ) apresentou seu valor máximo nos cenários intermediários de co-digestão, com destaque para 40% CCe/60% ARBL (0,010), enquanto nos extremos apresenta valores menores, indicando um possível ponto de equilíbrio ideal na proporção de substratos. Para os substratos únicos, os valores de  $k$  são maiores (0,268 a 0,469), reforçando que a taxa de produção pode ser intensificada quando o substrato é homogêneo, dependendo de sua composição.

A taxa de metabolismo bacteriano ( $\delta$ ) apresentou variação tanto nos cenários de co-digestão (0,055 a 0,145) quanto nos de substrato único (0,152 a 0,365); contudo, a amplitude foi significativamente maior nos sistemas com substrato isolado. Em contraste, a maior dispersão observada nos substratos únicos evidencia que o metabolismo bacteriano é mais sensível à composição do material orgânico quando não há co-digestão.

Por fim, o volume de inserção do substrato ( $\mu$ ) permaneceu fixo em 0,06 para todos os experimentos, uma vez que foi definido como valor experimental constante do sistema.

## 5 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho teve como objetivo principal apresentar uma adaptação de um modelo matemático que representasse a dinâmica de um biodigestor, sendo esta adaptação feita a partir da inserção de uma nova equação diferencial, variável e parâmetro que representasse o substrato na dinâmica de um biodigestor. Em um primeiro momento, todas as considerações feitas para a proposta foram idealizadas considerando um sistema em que a dinâmica do biodigestor funcionasse em batelada.

A partir da proposta de adaptação do modelo, os resultados encontrados foram considerados satisfatórios onde em alguns casos as curvas do modelo representaram um ajuste melhor do que o observado na curva de Gompertz. Além disso o modelo apresentou um segundo resultado no qual estima o crescimento bacteriano no processo. Sendo sua representação de caráter qualitativo, porém se assemelhando ao comportamento de crescimento bacteriano encontrado na literatura existente.

Este trabalho também permitiu que fossem observados os comportamentos dos parâmetros do modelo, onde se observou que a biomassa também pode ter caráter inibitório, não significando necessariamente que quando maior a carga de biomassa maior será a produção de biogás. Essa análise indica que é possível encontrar uma proporção ótima entre ARBL e a matéria prima a ser combinada, possibilitando uma otimização no processo de produção de biogás.

Espera-se que trabalhos futuros possam fazer com que o modelo seja preditivo estimando a produção de biogás que aconteceria ao longo de um tempo maior do que o experimento. Outro ponto a ser explorado é a proposta de uma alteração no modelo de maneira que ele também possa representar sistemas com alimentação contínua. Além disso, pode ser explorado a capacidade do modelo em ser preditivo em relação a produção de metano ( $CH_4$ ), principal gás existente na composição do biogás. Também espera-se que o modelo seja aplicado fora da escala laboratorial adaptando processos mais complexos e de grande escala.

## REFERÊNCIAS

- ABANADES, S. et al. A critical review of biogas production and usage with legislations framework across the globe. *International Journal of Environmental Science and Technology*, Springer, 2021.
- ABUBAKAR, A. M. et al. Microbial growth rate kinetics in biogas production by anaerobic digestion of chicken manure. *iRASD Journal of Energy & Environment*, v. 3, n. 2, p. 72–89, 2022. ISSN 2789-3849.
- BIOGÁS, A. B. D. *Proposta de programa nacional do biogás e do biometano*. 2015. São Paulo.
- CARRERA-CHAPELA, F. et al. Development, identification and validation of a mathematical model of anaerobic digestion of sewage sludge focusing on  $\text{H}_2\text{S}$  formation and transfer. *Chemical Engineering Journal*, v. 228, p. 359–368, 2014.
- CIBiogás. *Panorama do Biogás 2024*. Foz do Iguaçu, PR: [s.n.], 2024. Disponível em: <<https://cibiogas.org>>.
- CIBiogás – Centro Internacional de Energias Renováveis - Biogás. *Panorama do Biogás no Brasil 2022*. Foz do Iguaçu, 2023. Levantamento de dados realizado entre abril/2022 e maio/2023; licenciado sob CC BY 4.0. Disponível em: <<https://cibiogas.org/>>.
- DEGANUTTI, R. et al. Biodigestores rurais: modelo indiano, chinês e batelada. In: *Anais do 4<sup>a</sup> Encontro de Energia no Meio Rural*. Campinas, Brasil: UNICAMP, 2002.
- DONOSO-BRAVO, A. et al. Identification in an anaerobic batch system: global sensitivity analysis, multi-start strategy and optimization criterion selection. *Bioprocess and Biosystems Engineering*, v. 36, p. 35–43, 2013.
- DUARTE, V. H. et al. Biocombustíveis: uma revisão sobre o panorama histórico, produção e aplicações do biogás. *Revista Ambientale*, v. 14, n. 2, p. 1–?, 2022. ISSN 2318-454X.
- ELTAEIB, T.; MAHMOOD, A. Differential evolution: A survey and analysis. *Applied Sciences*, v. 8, n. 10, p. 1945, 2018.
- ENERGÉTICA, E. D. P. *Balanço Energético Nacional 2021*. 2022. Rio de Janeiro, RJ.

- FREITAS, F. F. et al. The brazilian market of distributed biogas generation: Overview, technological development and case study. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, v. 101, p. 146–157, 2019.
- GENOVESE, A. L.; UDAETA, M. M.; GALVÃO, L. C. R. Aspectos energéticos da biomassa como recurso no brasil e no mundo. In: *Encontro de Energia no Meio Rural*. Campinas: [s.n.], 2006.
- GUO, H.; CHEN, L. Periodic solution of a chemostat model with monod growth rate and impulsive state feedback control. *Journal of Theoretical Biology*, Elsevier, v. 260, n. 4, p. 502–509, 2009.
- HIDALGO, D.; MARTÍN-MARROQUÍN, J. M. Effects of inoculum source and co-digestion strategies on anaerobic digestion of residues generated in the treatment of waste vegetable oils. *Journal of Environmental Management*, Elsevier, v. 142, p. 17–22, 2014.
- JAMEEL, M. K. et al. Biogas: Production, properties, applications, economic and challenges: A review. *Results in Chemistry*, Elsevier, v. 7, p. 101549, 2024.
- KEGL, T.; KRALJ, A. K. Multi-objective optimization of anaerobic digestion process using a gradient-based algorithm. *Energy Conversion and Management*, Elsevier, v. 226, p. 113560, 2020.
- KESHTKAR, A. Dynamic simulation of cyclic batch anaerobic digestion of cattle manure. *Bioresource Technology*, v. 80, n. 1, p. 9–17, oct 2001.
- KUNZ, A. et al. *Fundamentos da digestão anaeróbia, purificação do biogás, uso e tratamento do digestato*. Concórdia: Sbera: Embrapa Suínos e Aves, 2019. 209 p.
- LAY, J.-J.; LI, Y.-Y.; NOIKE, T. Influences of ph and moisture content on the methane production in high-solids sludge digestion. *Water Research*, Elsevier, v. 31, n. 6, p. 1518–1524, 1997.
- LEON, F. A. et al. Proposal for modelling and numerical simulation with scilab for learning the continuous and discontinuous dynamics of biological and anaerobic digesters. *Desalination and Water Treatment*, v. 234, p. 15–21, 2021.
- LUIZ, C. D. C. *Biodigestão anaeróbia dos resíduos orgânicos do restaurante universitário da UNIPAMPA – Campus Bagé*. 65 p. Dissertação (Mestrado) — Fundação Universidade Federal do Pampa – UNIPAMPA, Bagé, 2019.
- MARTINS, L. O. S. et al. Potential of electric energy generation from vegetable biomass in different regions of brazil: mapping and analysis. *Revista Tecnologia e Sociedade*, v. 15, n. 37, p. 332–359, 2019.

- MARTINS, L. R.; CARRINO, A. L. Um estudo sobre a biomassa: uma fonte renovável de energia limpa. *Interface Tecnológica*, Faculdade de Tecnologia de Taquaritinga (FATEC), v. 20, n. 2, p. 531–?, 2023.
- MARTÍNEZ, E. et al. Mathematical model of a laboratory-scale plant for slaughterhouse effluents biodigestion for biogas production. *Applied Energy*, Elsevier, v. 95, p. 210–219, 2012.
- MEADOWS, T.; WOLKOWICZ, G. S. K. Growth on multiple interactive-essential resources in a self-cycling fermentor: An impulsive differential equations approach. *arXiv preprint arXiv:2004.12242*, April 2020. Available at arXiv.
- MIZGER-ORTEGA, J.; VANEGAS-CHAMORRO, M.; QUINTERO, M. C. Anaerobic digestion in biogas production from organic matter: A bibliometric analysis from 2000 to 2021. *International Journal of Energy Economics and Policy*, v. 12, n. 5, p. 505–514, 2022. ISSN 2146-4553.
- MOTTA, I. G. B. da et al. Population dynamics of methanogenic archaea in co-digestion systems operating different industrial residues for biogas production. *Sustainability*, v. 14, n. 18, p. 14, 2022.
- MUHONGO, V. R.; PREGO, G. J.; VALENTIM, A. F. Production of biogas and electric energy in the rural environment. *Environment International*, v. 11, n. 4, p. 66–74, 2022.
- MURILLO-ROOS, M. et al. Biogas production and microbial communities of mesophilic and thermophilic anaerobic co-digestion of animal manures and food wastes in costa rica. *Energies*, MDPI, v. 15, n. 3, p. 1252, 2022.
- MURRAY, J. D. *Mathematical Biology I: An Introduction*. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2002.
- NASCIMENTO, M. C. B. et al. Estado da arte dos aterros de resíduos sólidos urbanos que aproveitam o biogás para geração de energia elétrica e biometano no brasil. *Engenharia Sanitária e Ambiental*, v. 24, n. 6, p. 1115–1125, 2019.
- NOPHARATANA, A.; PULLAMMANAPPALLIL, P. C.; CLARKE, W. P. Kinetics and dynamic modelling of batch anaerobic digestion of municipal solid waste in a stirred reactor. *Waste Management*, Elsevier, v. 27, n. 5, p. 595–603, 2007.
- OPARA, K. R.; ARABAS, J. Differential evolution: A survey of theoretical analyses. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2018.

- ORO, N. T. et al. Modelagem e simulação do processo de produção de biogás num biodigestor urbano. *Revista CIATEC-UPF*, v. 9, n. 1, p. 25–35, 2017.
- OTENIO, M. H. et al. *Manejo de dejetos e a sustentabilidade da pecuária leiteira*. Brasil: SIMBRAS, 2023. ISBN 978-65-00-80953-4.
- QUEIROZ, S. d. C. *Modelagem da produção acumulada de biogás em biodigestores tipo batelada segundo a porcentagem de inóculo adicionada utilizando os modelos de regressão não-linear de Gompertz e exponencial*. 2003.
- SALTELLI, A. et al. Introduction to sensitivity analysis. In: *Global Sensitivity Analysis: The Primer*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2007. p. 1–51.
- SATPATHY, P. et al. Modelling anaerobic digestion in a biogas reactor: Adm1 model development with lactate as an intermediate (part i). *Journal of Environmental Science and Health, Part A*, Taylor & Francis, v. 51, n. 12, p. 1039–1051, 2016.
- SENDJAJA, A. Y. et al. Regression based state space adaptive model of two-phase anaerobic reactor. *Chemosphere*, Elsevier, v. 140, p. 159–166, 2015.
- SILVA, G. H. d. *Otimização do processo de co-digestão anaeróbia de biomassa vegetal e dejetos bovinos: avaliação do potencial energético de biogás e do cultivo de microalgas no digestato*. Tese (Tese (Doutorado em Engenharia Agrícola)) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2024.
- SILVA, G. H. D. et al. Valorization and bioremediation of digestate from anaerobic co-digestion of giant reed (*arundo donax* l.) and cattle wastewater using microalgae. *Sustainability*, v. 16, 2024.
- SOUSA, I. d. P. *Codigestão anaeróbia de águas residuárias de suinocultura e resíduos orgânicos com vistas à recuperação de recursos: biogás e digestato*. Tese (Tese (Doutorado em Engenharia Agrícola)) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2023.
- STRÖMBERG, S.; NISTOR, M.; LIU, J. Early prediction of biochemical methane potential through statistical and kinetic modelling of initial gas production. *Bioresource Technology*, v. 176, p. 233–241, 2015.
- SULTAN, S. M. et al. Improve biogas production by using bacteria. In: *1st Al-Noor International Conference for Science and Technology (NICST 2019)*. Sulaymaniyah, Iraq: Northern Technical University, 2019.
- TANAKA, G. C. et al. Um modelo matemático de biodigestores, análise de pontos críticos e estabilidade assintótica. São José do Rio Preto, p. 1–7, 2017.

UGHY, B. et al. Reconsidering dogmas about the growth of bacterial populations. *Cells*, MDPI, v. 12, n. 10, p. 1430, 2023.

UKPAKA, C. P. Describing microbial growth rate in solid suspended media using monod and haldane models. *Journal of Thin Films, Coating Science Technology & Application*, v. 11, n. 1, 2024.

WANG, S.; HOU, X.; SU, H. Exploration of the relationship between biogas production and microbial community under high salinity conditions. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 7, p. 1149, 2017. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/s41598-017-01245-0>>.

YANG, G. et al. An improved differential evolution algorithm based on reinforcement learning and its application. *Scientific Reports*, v. 15, p. 38864, 2025.

ZHAO, H. Analysis of the performance of an anaerobic digestion system at the regina wastewater treatment plant. *Bioresource Technology*, v. 95, n. 3, p. 301–307, dec 2004.