

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
FACULDADE DE ECONOMIA
GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

João Gabriel Alves Dayrell Drummond

**Modelo de previsão do consumo de água em m³
no Setor Urbano de Juiz de Fora e distritos**

Juiz de Fora

2025

João Gabriel Alves Dayrell Drummond

**Modelo de previsão do consumo de água em m³ no Setor Urbano de Juiz de
Fora e distritos**

Trabalho de conclusão de curso apresentado
à Faculdade de Economia da Universidade
Federal de Juiz de Fora, como requisito
parcial à obtenção do bacharelado em
Ciências Econômicas.

Orientador: Prof. Alexandre Zanini

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Alves Dayrell Drummond, João Gabriel.

Modelo de previsão do consumo de água em m³ no Setor Urbano de Juiz de Fora e distritos / João Gabriel Alves Dayrell Drummond. -- 2025.

40 p. : il.

Orientador: Alexandre Zanini

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Economia, 2025.

1. Séries Temporais. 2. Modelo de Previsão. 3. Modelos autoregressivos. 4. Consumo de água. 5. Modelo de Box & Jenkins. I. Zanini, Alexandre, orient. II. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
REITORIA - FACECON - Depto. de Economia

FACULDADE DE ECONOMIA / UFJF

ATA DE APROVAÇÃO DE MONOGRAFIA II (MONO B)

Na data de 02/12/2025, a Banca Examinadora, composta pelos professores

1 - Alexandre Zanini - orientador; e

2 - Rafael Morais de Souza,

reuniu-se para avaliar a monografia do acadêmico **JOÃO GABRIEL ALVES DAYRELL DRUMMOND**, intitulada: **MODELO DE PREVISÃO DO CONSUMO DE ÁGUA EM M³ NO SETOR URBANO DE JUIZ DE FORA E DISTRITOS**.

Após primeira avaliação, resolveu a Banca sugerir alterações ao texto apresentado, conforme relatório sintetizado pelo orientador. A Banca, delegando ao orientador a observância das alterações propostas, resolveu **APROVAR** a referida monografia.

ASSINATURA ELETRÔNICA DOS PROFESSORES AVALIADORES



Documento assinado eletronicamente por **Alexandre Zanini, Professor(a)**, em 02/12/2025, às 17:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Morais de Souza, Professor(a)**, em 03/12/2025, às 16:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2776324** e o código CRC **4E2B80BA**.

Referência: Processo nº 23071.954529/2025-73

SEI nº 2776324

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer aos meus pais, Dílio Alvarenga e Liliana Alves que sempre me permitiram usufruir da melhor educação possível para que alcançasse qualquer sonho, além de todo o amor e apoio recebido em toda a minha vida. Gostaria de agradecer, também, ao meu irmão, Pedro Inácio Drummond, pela amizade, apoio e companheirismo de sempre. Agradeço à minha tia-avó Elizabeth Alves e ao meu padrinho Lucas Maria por todo o carinho e suporte até hoje. Agradeço à minha namorada, Isabela Mello, por todo o amor, carinho, companheirismo e incentivo que me proporciona. Finalmente, agradeço ao meu professor-orientador Alexandre Zanini por todos os ensinamentos e suporte ao longo da realização desta monografia.

RESUMO

Este trabalho monográfico tem como principal objetivo o desenvolvimento e estudo de um modelo de previsão para o total mensal de m^3 de consumo de água no Setor Urbano de Juiz de Fora e distritos no período definido entre maio de 2025 e dezembro de 2026. Para isso, foram desenvolvidos dois modelos de projeção: um utilizando o método de Amortecimento Exponencial e o outro, utilizando a metodologia de Box & Jenkins. A fim de definir qual dos modelos seria o mais apropriado para projetar o consumo de água, foi realizada uma competição entre eles através da análise de *out-of-sample rolling evaluation*. Dessa forma, o modelo vencedor e o definido para a projeção foi o de Box & Jenkins, ele projetou um aumento consecutivo no consumo de água para os anos de 2025 e 2026, porém de forma mais modesta no segundo ano. Ademais, foi realizada pesquisa acerca da capacidade hídrica do país além de sua importância econômica.

Palavras-chave: Consumo de água em m^3 . Projeções de dados. Séries Temporais.

ABSTRACT

This monographic study aims to develop and analyze a forecasting model for the monthly total water consumption (in m³) in the Urban Sector of Juiz de Fora and its districts, covering the period from May 2025 to December 2026. To achieve this, two projection models were developed: one using the Exponential Smoothing method and the other employing the Box & Jenkins methodology. In order to determine which model would be most appropriate for forecasting water consumption, a competition between them was conducted through out-of-sample rolling evaluation analysis. As a result, the Box & Jenkins model was identified as the most suitable, projecting a consecutive increase in water consumption for the years 2025 and 2026, though with a more modest growth in the second year. Additionally, research was carried out regarding the country's water capacity and its economic significance.

Keywords: Water consumption (m³). Data forecasting. Time series.

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO	12
2 – REFERENCIAL TEÓRICO.....	14
3 – METODOLOGIA	16
3.1 – SÉRIES TEMPORAIS	16
3.1.1 – Definição do conceito.....	16
3.1.2 – Processo Estocástico.....	17
3.2 – MÉTODO DE AMORTECIMENTO EXPONENCIAL.....	17
3.3 – MODELO DE BOX & JENKINS.....	19
3.4 – COMPETIÇÃO ENTRE MÉTODOS	23
3.5 – ANÁLISE RECURSIVA FORA DA AMOSTRA (OUT-OF-SAMPLE ROLLING EVALUATION).....	25
4 – ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS.....	27
4.1 – BASE DE DADOS.....	27
4.2 –Modelo estimado através do Método de Amortecimento Exponencial (MAE)	28
4.3 – Modelo estimado através do Método Box & Jenkins (MBJ)	30
4.4 – COMPETIÇÃO DE MÉTODOS	31
4.5 – PREVISÃO DO CONSUMO	33
5 – CONCLUSÃO	37
6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	38

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Procedimento de out-of-sample rolling evaluation	25
Figura 2 - Série Temporal de consumo de água em Juiz de Fora e Distritos. Valores dados em 100.000 m3.....	28
Figura 3 - Função de autocorrelação dos erros – Método de Amortecimento Exponencial	30
Figura 4 - Função de autocorrelação dos erros - Box & Jenkins Univariado	31
Figura 5 - Previsão de consumo de água no horizonte de 20 meses no futuro.	35

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultado do MAE	28
Tabela 2 - Fatores Sazonais da série temporal - MAE	29
Tabela 3 - Desempenho preditivo do MAE	30
Tabela 4 - Desempenho preditivo do MBJ.....	31
Tabela 5 - Comparação entre modelos	32
Tabela 6 - Previsão do consumo de água em valores mensais de m ³ no horizonte de 20 meses no futuro – Intervalo de confiança de 95%	34
Tabela 7 - Valores anuais do consumo de água (em m ³).....	36

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Resumo das características teóricas da FAC e da FACP dos modelos AR(p), MA(q) e ARMA(p,q).....	21
---	----

1 – INTRODUÇÃO

Cerca de 70% do planeta Terra são água, entretanto, a grandiosa parte (cerca de 97%) dessa água é salgada e, portanto, imprópria para o consumo. Há também água em forma de gelo nos polos do planeta e na Groenlândia (2%). O restante (cerca de 1%) é referente à água em que realmente é possível usufruir e consumir (Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico – ANA, 2021). Dentro deste 1% de água doce, o Brasil é considerado o país com a maior quantidade de recursos hídricos no mundo, apresentando cerca de 13% do volume de água disponível para consumo. Eles se encontram tanto em reservatórios subterrâneos quanto correndo abertamente em rios, riachos e outros corpos d'água no território (ANA, 2021). Segundo o IBGE em um estudo de 2021 o país possui 5.353 bacias hidrográficas com mais de 100 km², incluindo a Bacia Amazônica de mais de 1 milhão de km² (IBGE, 2021).

Para gerir um recurso tão abundante no país, foi estabelecida pela Lei n. 9433 de 8.01.1997, as diretrizes básicas para a gestão das águas no país e levou à criação de planos de recursos hídricos. O Plano Nacional de Recursos Hídricos – PNRH foi realizado de 2003 a 2005 pela Secretaria de Recursos Hídricos do Ministério do Meio Ambiente, com suporte da Agência Nacional de Águas (ANA, 2021). Evidenciando a importância de se planejar na gestão de um recurso tão valioso.

A água é utilizada para prover vários tipos de necessidades da população. Eles podem ser consuntivos ou não-consuntivos, isso é, se é necessário mover o recurso de seu local de origem para o consumo (Tucci, 2001).

Dentre os consumos consuntivos estão: consumo humano (16,4%); dessedentação – consumo bovino (4,9%); irrigação (64,7%) e indústria (13,9%) (Tucci, 2001). Já os não-consuntivos: navegação e produção de energia elétrica em hidrelétricas (Tucci, 2001).

A maior parte da energia ofertada no território brasileiro advém da energia hidráulica – 58,9%, conforme estudo realizado pela Empresa de Pesquisa Energética (EPE, 2024).

Dessa forma, é possível evidenciar a importância que a água representa no território brasileiro. Assim, é preciso instituições fortes e preparadas para uma boa gestão deste recurso essencial à vida.

No Estado de Minas Gerais, a gestão hídrica é realizada pelo Instituto Mineiro de gestão das Águas (Igam) criado em 17 de julho de 1997, através do decreto-lei nº 12.584 (IGAM – Gestão das Águas, s.d.).

Segundo Panorama de Abastecimento de Água e Esgotamento Sanitário de 2023, aproximadamente 93,1% da população urbana mineira têm acesso ao abastecimento de água tratada e 87,15% têm acesso ao esgotamento sanitário (Secretaria de Estado de Meio Ambiente e Desenvolvimento Sustentável, 2023).

No caso de Juiz de Fora, a distribuição de água e coleta de esgoto é gerenciada pela Companhia de Saneamento Municipal (Cesama), criada em 1990 em substituição ao Departamento de Água e Esgoto (DAE). (CESAMA - Histórico, s.d.)

Cerca de 96% da população urbana têm acesso à água tratada e, aproximadamente, 99% contam com serviço de coleta de esgoto, de acordo com o Sistema Nacional de Informações em Saneamento Básico (Sinisa). Para isto, conta com as represas Dr. João Penido, São Pedro e Chapéu d'Uvas, além do Ribeirão do Espírito Santo, utilizados como mananciais para o abastecimento de água potável em Juiz de Fora (CESAMA - Histórico, s.d.).

Dessa forma, é necessário haver um preparo e uma gestão que estejam no mesmo patamar da importância da água para a vida e o funcionamento da sociedade. Ainda mais quando se trata de um recurso onde sua oferta é imprevisível já que é ditada por fenômenos climáticos e fora da alçada humana. Portanto, para um bom planejamento na distribuição deste recurso é essencial a previsão através da demanda, ou seja, do consumo da água. Dessa forma, este trabalho monográfico, através da definição de um modelo vencedor após competição entre dois modelos autorregressivos, se propõe a prever o consumo de água no Setor Urbano de Juiz de Fora e distritos na forma probabilística, com o horizonte de 20 meses no futuro.

Após esta introdução, na seção 2, é apresentado o referencial teórico deste trabalho; no capítulo 3 encontra-se a metodologia utilizada em sua realização. Na parte 4, vê-se a análise dos dados, serão apresentados os resultados encontrados, além da competição dos modelos para enfim, realizar a previsão do consumo da água na forma probabilística para os períodos seguintes. Finalmente, na parte 5 vê-se as conclusões finais sobre o estudo.

2 – REFERENCIAL TEÓRICO

Modelos de previsão acerca do consumo de água são comumente realizados devido à sua importância, ainda mais em cidades urbanizadas e populosas. É possível citar o caso de Istambul, na Turquia, onde foi desenvolvido um modelo de previsão do consumo de água mensal, utilizando uma competição dos métodos de amortecimento exponencial e Box-Jenkins (Ölçenoğlu; Borat, 2023). O modelo vencedor, o de Holt-Winters, calculou a previsão de que em 2033, o consumo total de água passará de 778 milhões de m³ (em 2010) para o número exorbitante de 1,41 bilhão de m³ (Ölçenoğlu; Borat, 2023). Este trabalho facilitou o preparo necessário dos formadores de política locais.

Kontopoulos et al., 2023, realizaram trabalho similar em Atenas, Grécia. Foram utilizados os métodos SARIMA de Box-Jenkins e de Redes Neurais. Após a competição entre os modelos, as Redes Neurais se mostraram mais poderosas na explicação e apresentaram menor erro médio, sendo selecionadas para o modelo oficial do trabalho.

Localmente, no Brasil, Falkenberg, 2005, desenvolveu estudo acerca de modelos de previsão de consumo de água no curto prazo, mais precisamente, nas próximas 24 horas (Falkenberg, 2005). O autor utilizou dados históricos de três bairros distintos da cidade de Ponta Grossa, PR. Propôs e competiu entre eles, modelos de previsão utilizando métodos de redes neurais artificiais, modelos do tipo Box-Jenkins e híbridos dos dois modelos (Falkenberg, 2005). Neste estudo, o modelo vencedor foi o de Box-Jenkins e o autor atenta trabalhos futuros acerca da importância de possuir um banco de dados bem estruturado para o desenvolvimento de modelos mais confiáveis (Falkenberg, 2005).

Feroni et al., 2020, utilizaram de uma série histórica que abrangia o período de 1997 a 2018, acerca do consumo de água na cidade de São Mateus-ES. Foram realizados modelos utilizando os métodos de Holt-Winters aditivo e multiplicativo (Feroni et al., 2020). Após competição entre os modelos, apesar de apresentarem resultados quase idênticos, o modelo aditivo resultava em menores erros de previsão (Feroni et al., 2020).

Em Juiz de Fora (MG), Andrade (2023) utilizou de uma série temporal disponibilizada pela Agência Nacional de Águas que representa os usos consuntivos da água para todos os municípios brasileiros entre 1931 e 2021. Desenvolveu e competiu entre eles modelos utilizando os Métodos de Amortecimento Exponencial e o de Box-Jenkins para prever o consumo de água de forma abrangente entre os diferentes setores que utilizam recursos hídricos, sendo eles: Humano Urbano; Humano Rural; Agricultura de Irrigação; Mineração; Dessedentação animal; Indústria de transformação; Termoeletricidade (Andrade, 2023). Após a competição, nota-se que o modelo mais apropriado para a previsão do consumo de água depende de qual setor está sendo analisado. O setor urbano, em sua pesquisa, apresentou menor erro de previsão utilizando o Método de Amortecimento Exponencial. O autor conclui o trabalho afirmando que novos estudos acerca de cada setor são necessários para uma otimização dos modelos de previsão sobre o consumo de água em Juiz de Fora já que o autor fez uma análise geral dos setores e não concentrou sua pesquisa em apenas um deles.

Portanto, nota-se que o desenvolvimento de modelos de previsão para o consumo de água em regiões metropolitanas não é uma preocupação momentânea nem regional. Pesquisadores do mundo todo dedicam seu trabalho nesta área. Dessa forma, é importante que novos estudos sejam frequentemente realizados em grandes cidades como Juiz de Fora.

3 – METODOLOGIA

Para a previsão do consumo de água no setor urbano em Juiz de Fora (MG), aplicou-se a análise de séries temporais estimando-se modelos através do Método de Amortecimento Exponencial (Montgomery & Johnson, 1990) e do Método de Box & Jenkins (Box & Jenkins, 1994). Foi realizada uma competição entre estes dois métodos, selecionando o método vencedor através de uma análise recursiva fora da amostra (Goodrich, 1999).

Foi utilizada uma base de dados mensal que envolve o período de janeiro de 2000 a abril de 2025. Foram geradas previsões mensais (20 meses à frente).

Este capítulo está fundamentado em Zanini (2023).

3.1 – SÉRIES TEMPORAIS

3.1.1 – Definição do conceito

Segundo Zanini (2023): “Uma série temporal é um conjunto de observações de uma dada variável, ordenadas segundo o parâmetro tempo, geralmente em intervalos eqüidistantes”, entretanto, se comportar desta forma não é o bastante para uma série de dados ser considerada uma série temporal, adicionalmente, é necessário “que as observações apresentem uma dependência serial, isto é, sejam dependentes no tempo.” (Zanini, 2023). Se Z_t representa o valor da variável aleatória Z no instante t , denota-se a série temporal por Z_1, Z_2, \dots, Z_N onde N é o tamanho da série ou número de observações seriais da variável. Usualmente, para séries temporais discretas, as periodizações de coleta de dados usuais são definidas por dia, semana, mês ou ano. (Zanini, 2023).

É importante ressaltar que nem todo acontecimento que ocorre mais de uma vez no tempo pode ser considerado uma série temporal, um exemplo disso é o sorteio do jogo da MegaSena da Virada, evento que ocorre anualmente, entretanto, não há maneira de ajustar um modelo estatístico e estudar os resultados passados para prever os futuros.

3.1.2 – Processo Estocástico

O processo estocástico, geralmente, apresenta-se como uma sequência no tempo de variáveis aleatórias, em outras palavras, é “um modelo que descreve a estrutura de probabilidade de uma sequência de observações” (Zanini, 2023). Processos estocásticos são sistemas que evoluem o tempo e/ou no espaço de acordo com leis probabilísticas (Zanini, 2023).

Dessa forma, um processo estocástico é definido como $Z=\{Z(t), t \in N\}$ tal que para cada $t \in R$, $Z(t)$ é uma variável aleatória. Se $N \equiv Z=\{1, \dots, t\}$, diz-se que o processo é de parâmetro discreto, denotando por Z_t . Se $N \in R$, diz-se que o processo é de parâmetro contínuo, denotando-se por $Z(t)$.

Zanini compila as definições de forma absoluta na seguinte frase: “De forma geral, o objetivo do estudo de uma série temporal consiste em: dada uma realidade (processo estocástico) retira-se uma amostra finita de observações equiespaçadas no tempo (série temporal) e através do estudo desta amostra (análise de séries temporais) identifica-se um modelo cujo objetivo é inferir sobre o comportamento da realidade (modelo estocástico).” (Zanini, 2023).

3.2 – MÉTODO DE AMORTECIMENTO EXPONENCIAL

Considerando o conjunto de observações Z_1, Z_2, \dots, Z_T como uma série temporal de tamanho “ T ” e que tem variância irrisória ao decorrer do tempo, a equação de previsão dessa série pode ser:

$$Z_t = a(T) + \varepsilon_t \quad (3.2.1)$$

Onde Z_t representa o valor esperado da previsão da variável, $a(T)$ representa o nível médio da variável no período T , e ε_t é o erro de previsão, onde $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

A cada novo dado incluído na amostra, o parâmetro representativo $a(T)$ é atualizado para obter uma melhor estimação, ou seja, a cada novo dado inserido, este é reestimado para obter uma previsão da variável mais confiável. Dessa forma, a equação de previsão pode ser definida como:

$$\hat{a}(T) = \alpha * Z_T + (1 - \alpha) \hat{a}(T - 1) \quad (3.2.2)$$

Ou seja, o parâmetro “a” será calculado usando o que é chamada de combinação convexa. Serão aplicados pesos de consideração para o dado mais recente e os demais dados mais antigos na obtenção do valor de previsão. Em outras palavras, o hiperparâmetro α apontará se um novo dado é amplamente influenciado por dados atuais ou pelos demais.

Não é necessário utilizar dois hiperparâmetros diferentes para a definição de “a” já que α é um número entre 0 e 1, dessa forma, utiliza-se “1- α ” para definir seu complementar.

Geralmente, séries temporais que apresentam grande variância, têm seus hiperparâmetros apontando uma maior relevância aos dados recentes, enquanto no caso de variância mais comportada, o hiperparâmetro α tende a se aproximar do valor 0,50, ou seja, atribui valor igual a dados atuais e passados.

O modelo de previsão já apresentado realiza um trabalho excepcional na previsão de séries temporais onde não há tendência, isso é, uma variação em seu nível, podendo ser de crescimento ou de decrescimento. Dessa forma, é necessário implementar mais um parâmetro na equação de previsão:

$$Z_t = (a_1(T) + a_2(T) * t) + \varepsilon_t \quad (3.2.3)$$

Onde $a_2(T)$ é o parâmetro de tendência do modelo no instante T. Assim como o parâmetro de nível $a_1(T)$ (anteriormente definido como $a(T)$), o parâmetro $a_2(T)$ também é reestimado a cada novo dado inserido na amostra.

Além disso, apresentará a mesma forma de aplicar pesos a dados mais atuais ou antigos, pela utilização de hiperparâmetros. Agora, definidos como β e seu complementar 1- β . Este é o modelo de Amortecimento Exponencial de Holt.

Ademais, é possível adaptar este modelo para considerar mais um fator extremamente importante e presente nas séries temporais. É a chamada Sazonalidade, isso é, o valor esperado de um dado tende a variar por se encontrar em um determinado período do tempo. Por exemplo, quando a série é representada em semanas, um aumento nas vendas de um restaurante pode ser identificado aos fins de semana. Ou, um aumento nas vendas de brinquedos infantis em outubro e dezembro por serem os meses do Dia das Crianças e do Natal. Portanto, é necessário adicionar um novo parâmetro à equação:

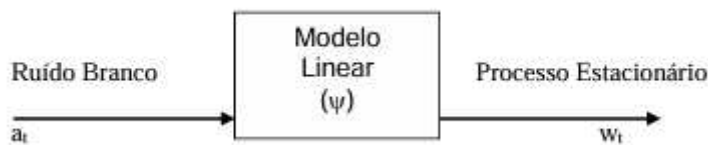
$$Z_t = (a_1(T) + a_2(T) * t) * p_t + \varepsilon_t \quad (3.2.4)$$

Onde p_t indica o fator sazonal do período em questão. Este novo parâmetro também se comporta como os apresentados anteriormente – é reestimado a cada nova introdução de dados à série temporal e é estimado através do hiperparâmetro γ e seu complementar.

Agora, o modelo apresentado se caracteriza como o Modelo de Amortecimento Exponencial de Holt-Winters.

3.3 – MODELO DE BOX & JENKINS

A teoria utilizada na fundamentação deste modelo baseia-se na Teoria Geral de Sistemas Lineares. Ela dita que “a passagem de um ‘ruído branco’ por um filtro linear de memória infinita gera um processo estacionário de segunda ordem” (Zanini, 2023). Um processo estacionário de segunda ordem diz respeito a um processo estocástico com média e variâncias constantes.



Definindo um operador de atraso “B” (backward shift operator)

$$B^k Z_t = Z_{t-k}$$

Tem-se que:

$$w_t = a_t - \Psi_1 a_t B - \Psi_2 a_t B^2 - \dots$$

$$w_t = (1 - \Psi_1 B - \Psi_2 B^2 - \dots) a_t = \Psi(B) a_t$$

$$w_t = \Psi(B) a_t \Leftrightarrow a_t = \Psi(B)^{-1} w_t$$

Sendo que:

$$\Psi(B)^{-1} = \pi(B)$$

$$\text{onde } \pi(B) = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 \dots$$

Pelo fato de $\psi(B)$ [ou $\pi(B)$] possuírem infinitos parâmetros, Box & Jenkins afirmam que, sob certas restrições, todo polinômio infinito pode ser descrito pelo quociente de dois polinômios finitos, resolvendo o problema da infinidade. (Zanini, 2023).

Dessa forma:

$$\Psi(B) = \theta(B) / \phi(B), \text{ onde:}$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \Rightarrow \text{Polinômio MA (q)}$$

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \Rightarrow \text{Polinômio AR (p)}$$

E então, surgem os Modelos ARMA (p,q) que assumem a seguinte forma:

$$\phi(B)w_t = \theta(B)a_t \quad (3.3.1)$$

No entanto, originalmente, a série pode ser não estacionária, portanto, é necessário torná-la não estacionária e homogênea. Para isso, utiliza-se o método de diferenciação. Então, se Z_t é uma série não estacionária, é preciso transformá-la na série X_t não estacionária homogênea. Dessa forma:

$$X_t = Z_t - Z_{t-1} = Z_t - BZ_t = (1 - B) Z_t = \nabla Z_t$$

Onde: $\nabla = (1 - B) \Rightarrow$ operador de diferença

De forma simplificada, aplica-se tantas diferenças quantas forem necessárias para produzir estacionariedade (na média) da série resultante. Para a obtenção de uma série estacionária w_t , aplica-se o termo “d” ($d=0, 1, 2, \dots$) diferenças na série original: $w_t = \nabla^d Z_t$. Geralmente, na prática, “d” se apresenta como 0, 1 ou 2.

E então, surgem os Modelos ARIMA (p,d,q) que assumem a seguinte forma:

$$\phi(B)\nabla^d Z_t = \theta(B)a_t \quad (3.3.2)$$

A modelagem de Box & Jenkins fundamenta-se em duas ideias básicas: o princípio da parcimônia (definir um modelo com o menor número de parâmetros possíveis para a simplificação e a adequação de sua representação matemática) e a elaboração de modelos através de um ciclo iterativo (elaboração de modelos até a obtenção de um modelo satisfatório).

Assim, a modelagem através da metodologia de Box & Jenkins abrange várias etapas de análise. Desde a identificação da estrutura do modelo, chegando à estimação paramétrica até a realização de um número de testes para a validação do modelo elaborado.

A primeira etapa a ser realizada na metodologia Box & Jenkins é a de encontrar a ordem de homogeneidade “d”, ou seja, é a etapa de definir quantas vezes a série original deve ser diferenciada para se comportar como uma série estacionária. Ela pode ser realizada através da observação do gráfico da série ou pela função de autocorrelação (FAC).

A etapa seguinte é a de identificação do modelo, quanto à sua ordem (identificação de p e q). Para isso, devem ser utilizados os conceitos de função de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP). A seguir, há um quadro que caracteriza os modelos AR(p), MA(q) e ARMA (p,q).

Quadro 1 - Resumo das características teóricas da FAC e da FACP dos modelos AR(p), MA(q) e ARMA(p,q)

Modelo	Função de Autocorrelação (ρ_k)	Função de Autocorrelação Parcial (ϕ_{kk})
AR(p)	Infinita (Exponencial e/ou senóides amortecidas)	Finita (Corte após o lag “p”)
MA (q)	Finita (Corte após o lag “q”)	Infinita (Exponencial e/ou senóides amortecidas)
ARMA (p,q)	Infinita (Exponencial e/ou senóides amortecidas após o lag “q-p”)	Infinita (Exponencial e/ou senóides amortecidas após o lag “p-q”)

Fonte: Zanini, 2023.

De modo geral, para identificar a ordem p, de um modelo AR(p), analisa-se se a FAC diminui e se a FACP apresenta um corte – se as autocorrelações estão todas dentro de intervalo estipulado. Se isso ocorrer, é fornecido ao modelador a ordem p (p=lag do corte).

De forma paralela, para um modelo MA(q), é preciso que a FAC e a FACP apresentem comportamento inverso de um modelo genuinamente autorregressivo.

Isto é, para um modelo MA(q), a FACP decresce e a FAC deve apresentar um corte. Logo, o lag onde ocorre este corte do FAC refere-se à ordem “q” do modelo MA.

Após a identificação de “p” e “q” do modelo, é preciso obter as estimativas dos parâmetros dele. Para isso, é utilizada a técnica da máxima verossimilhança (Dudewicz & Mishra, 1988).

Finalmente, após a identificação do modelo e a estimação dos parâmetros, aplicam-se os testes de aderência a fim de verificar a adequabilidade final do modelo. É possível destacar dentre os mais importantes testes, o teste de sobrefixação e os testes para os resíduos.

O primeiro consiste na geração de modelos com ordem superior ao original, de forma que seja possível reforçar a pertinência deste.

No caso dos testes de resíduos, têm o objetivo de verificar se o resíduo gerado por este modelo é um ruído branco, ou seja, demonstra se o erro residual não apresenta correlação com a série temporal. Fato que representa um dos indicadores de eficiência explicativa do modelo.

Na prática, os processos estocásticos, raramente, são estacionários e na maioria das vezes, apresentam sazonalidade. Portanto, Box & Jenkins adequaram seus modelos para séries temporais com componentes sazonais, dando origem aos modelos SARIMA.

Nesse caso a modelagem segue a equação:

$$\phi(B)\Phi(B^s) \nabla^{d_s} \nabla^d Z_t = \theta(B)\theta(B^s)a_t$$

Onde:

$\phi(B)$: operador não sazonal autorregressivo;

ϕ_i = parâmetros autorregressivo não-sazonais;

$\nabla^d = (1 - B)^d$ = operador diferença não sazonal de ordem d;

$\Phi(B^s)$ = operador sazonal autorregressivo;

Φ_i = parâmetros autorregressivo sazonais;

$\nabla^{d_s} = (1 - B^s)^{d_s}$ = operador diferença sazonal de ordem D;

$\theta(B)$ = operador não sazonal de médias móveis;

θ_i = parâmetros de médias móveis não sazonais;

$\theta(B^s)$ = operador sazonal de médias móveis;

θ_i = parâmetros de médias móveis sazonais.

O modelo que apresente esta estrutura é denominado SARIMA (p,d,q)x(P,D,Q). As etapas para a obtenção deste modelo são as mesmas do modelo ARIMA não sazonal. Portanto, a observância do comportamento da FAC e da FACP além de seus lags de cortes ainda é feita, entretanto, adicionalmente, olha-se para os lags sazonais (no caso de uma série temporal com base mensal, os lags 12, 24, 36,... são observados).

3.4 – COMPETIÇÃO ENTRE MÉTODOS

A fim de definir o melhor método de previsão para a série temporal, é realizada a Competição entre os Métodos, isto é, são utilizados critérios e métricas de desempenho para comparar os métodos testados e encontrar aquele que performa mais eficientemente nos parâmetros estabelecidos. Entre eles, tem-se:

MAPE (Mean Absolute Percentual Error)

O MAPE (erro médio absoluto padrão em sua sigla em inglês) é uma métrica de desempenho encontrado através da diferença entre o valor real e o valor estimado pelo modelo durante a análise dentro e fora da amostra (in-sample e out-of-sample). A fórmula de cálculo é como se segue:

$$MAPE = \frac{\sum_{t=1}^N \frac{Y(t) - \hat{Y}(t)}{Y(t)} \times 100}{N} \quad (3.4.1.1)$$

onde $Y(t)$ é o valor da série no período (t), $\hat{Y}(t)$ é o valor ajustado da série para o período (t) e N é o total de dados utilizados, ou seja, o total de observações, podendo ser dias, meses, anos etc.

MAD (Mean Absolute Deviation)

O MAD (erro médio absoluto em inglês), da mesma forma do critério de desempenho anterior, também é encontrado através da diferença entre os valores estimados e reais para as previsões um período a frente. Porém, de forma contrária, ele não é lido em termos percentuais, mas sim na unidade de medida da variável de interesse.

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^N |Y(t) - \hat{Y}(t)|}{N} \quad (3.4.2.1)$$

onde $Y(t)$ é o valor da série no período (t) , $\hat{Y}(t)$ é o valor ajustado da série para o período (t) e N é o total de dados utilizados, ou seja, o total de observações.

Coefficiente de Explicação Ajustado (R^2 ajustado)

Este coeficiente indica o quanto da variação total dos dados é explicada pelo modelo. E esta variação é corrigida tendo em vista a quantidade de parâmetros no modelo. A equação a seguir ilustra seu cálculo:

$$R_{ajust}^2 = \left(1 - \frac{\sum_{t=1}^N \frac{(Y(t) - \hat{Y}(t))^2}{N-k}}{\sum_{t=1}^N \frac{(Y(t) - \bar{Y})^2}{N-1}} \right) \times 100 \quad (3.4.3.1)$$

onde $Y(t)$ é o valor da série no período (t) , $\hat{Y}(t)$ é o valor ajustado da série para o período (t) , \bar{Y} é o valor médio das observações, N é o total de dados utilizados, ou seja, o total de observações, e k é o número de parâmetros do modelo.

GMRAE (Geometric Mean Relative Absolute Error)

Este critério de desempenho compara o erro do modelo selecionado com o erro do modelo naïve ou modelo ingênuo (que utiliza como previsão o valor do último dado disponível). O GMRAE é a média geométrica da razão entre o erro absoluto do modelo estimado e o erro absoluto do método ingênuo. Dessa forma, é esperado e desejável que o GMRAE seja igual ou menor do que 1.

$$GMRAE = \sqrt[N]{\prod_{t=1}^N \left(\frac{|Y(t) - \hat{Y}(t)|}{|Y(t) - Y(t-1)|} \right)} \quad (3.4.4.1)$$

onde $Y(t)$ é o valor da série no período (t) , $\hat{Y}(t)$ é o valor ajustado da série para o período (t) , $Y(t-1)$ é o valor da série no período $(t-1)$ e N é o número de observações.

3.5 – ANÁLISE RECURSIVA FORA DA AMOSTRA (OUT-OF-SAMPLE ROLLING EVALUATION)

Para a seleção de um melhor método de previsão, é incorporada à competição de métodos, o procedimento de análise in-sample e out-of-sample. Isto é realizado através da seleção de parte dos dados a fim de validar o poder de previsão dos modelos ajustado com o restante dos dados que não foram removidos, – por isso, são utilizados os termos dentro e fora da amostra.

Ainda pode ser feito, o que se denomina out-of-sample rolling evaluation, isto é, move-se a origem da previsão no período out-of-sample, fazendo-se previsões para cada origem. Se o período de corte for, por exemplo, 12 meses (últimos 12 dados levados para fora da amostra), serão realizadas um total de 78 previsões (12 previsões para um passo à frente; 11 previsões para 2 passos à frente; 10 previsões para 3 passos à frente e assim por diante). Pode-se, então, definir que o método vencedor a ser escolhido será o que minimizar o MAD acumulado ou o erro médio absoluto acumulado fora da amostra. Este processo é ilustrado na figura a seguir:

Figura 1 - Procedimento de out-of-sample rolling evaluation

		HORIZONTE											
		jan	fev	mar	abr	mai	jun	jul	ago	set	out	nov	dez
ORIGEM	dez	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
	Jan	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
	Fev	A	A	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
	mar	A	A	A	F	F	F	F	F	F	F	F	F
	abr	A	A	A	A	F	F	F	F	F	F	F	F
	mai	A	A	A	A	A	F	F	F	F	F	F	F
	Jun	A	A	A	A	A	A	F	F	F	F	F	F
	Jul	A	A	A	A	A	A	A	F	F	F	F	F
	ago	A	A	A	A	A	A	A	A	F	F	F	F
	set	A	A	A	A	A	A	A	A	A	F	F	F
	out	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	F	F
	nov	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	F

Nota: F = Forecast; A = Actual

Fonte: Zanini, 2023.

Assim que encontradas as previsões out-of-sample, podem ser calculadas uma série de métricas de desempenho, como as já mencionadas anteriormente: o GMRAE, o MAPE e o MAD para cada horizonte de previsão, além de suas versões acumuladas entre os períodos.

É de suma importância ressaltar que após a seleção do melhor método de acordo com os critérios previamente estabelecidos, os dados retirados retornam à

amostra, os parâmetros são atualizados, e então, as projeções do modelo são realizadas. De forma simplificada, a análise in-sample e out-of-sample é apenas um procedimento de competição de métodos que visa definir qual é o melhor entre eles.

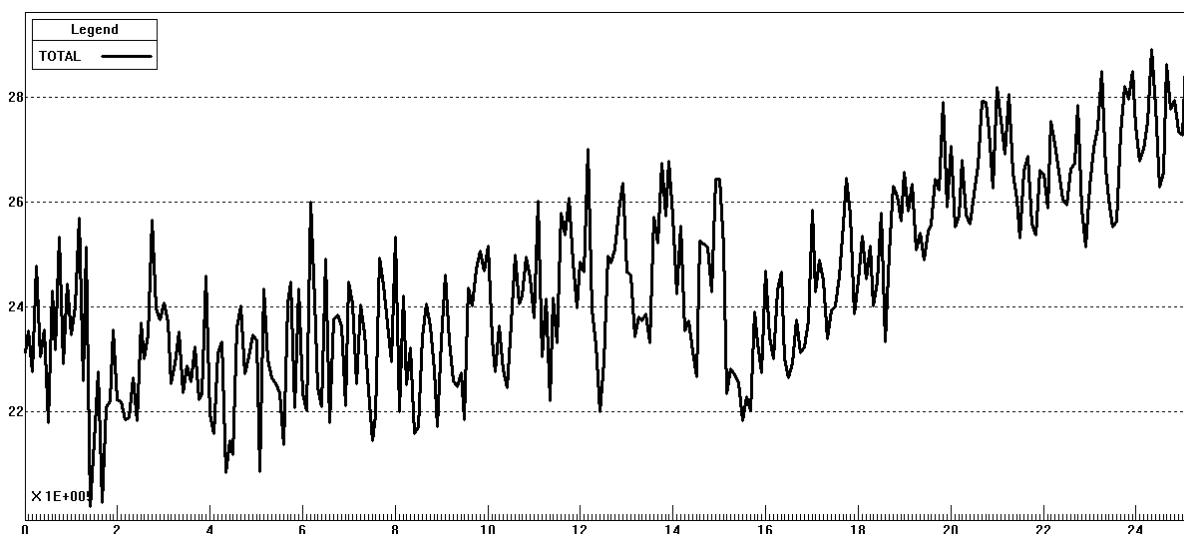
4 – ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS

4.1 – BASE DE DADOS

A série temporal utilizada neste trabalho utiliza como base os valores de consumo de água no Setor Urbano de Juiz de Fora e seus distritos em m³ fornecidos pela CESAMA. Os dados são referentes aos meses entre janeiro de 2000 e abril de 2025. Ou seja, são contabilizados na série um total de 304 dados. Para estimar os modelos apresentados anteriormente foi utilizado o software Forecast Pro for Windows® ou FPW®.

A seguir, na figura 2, é possível analisar a série temporal de forma ilustrada. Vê-se que em determinada parte da série, o nível médio de consumo é mais ou menos constante, sendo que é possível observar uma tendência de crescimento a partir de 2015. Este aumento provavelmente se deve ao fato da inclusão da adutora de Chapéu D'uvas em agosto de 2014 (CESAMA, 2024) à disposição de tratamento e distribuição por parte da CESAMA. Além disso, há a presença de sazonalidade em toda a amostra, representando um aumento ou uma diminuição na demanda por água em certos meses do ano.

Figura 2 - Série Temporal de consumo de água em Juiz de Fora e Distritos. Valores dados em 100.000 m³.



Fonte: CESAMA

4.2 –Modelo estimado através do Método de Amortecimento Exponencial (MAE)

Tabela 1 - Resultado do MAE

Componentes	Hiperparâmetros	Parâmetros
Nível	0,17263	2.770.404
Tendência	0,00294	1.239,1
Sazonalidade	0,05220	*

Fonte: Elaboração própria. Nota:* Podem ser vistos na Tabela 2 a seguir

O Parâmetro de nível dita o valor base de consumo de água em m³ para cada mês previsto. Ademais, o modelo identifica tendência na série temporal, e, constata que há sim, uma sazonalidade aparente na amostra. Este valor base será então, multiplicado pelo valor da tendência e pelo fator sazonal de cada mês do ano para representar variações no consumo mês a mês.

Através do hiperparâmetro, entende-se que o modelo aplica um peso de cerca de 17% ao dado mais recente e 83% aos dados antigos quando se trata da estimação do parâmetro de Nível. O hiperparâmetro de tendência revela que a informação mais recente da tendência é responsável por apenas 0,3% de seu comportamento, ponderando-se mais a informação passada da tendência. Já no caso da sazonalidade, a informação mais atual é considerada com peso de cerca de 5%, e os dados

passados, 95%. De forma geral, as informações anteriores (passadas) dos componentes de nível, tendência e sazonalidade recebem maior peso na estimação destes parâmetros.

A equação de previsão estabelecida através deste método contabiliza esses fatores em sua concepção:

$$Z_t = (2.770.404 + 1.239,1 * \tau) * p_t + \varepsilon_t \quad (4.2.1)$$

onde Z_t é o valor estimado de consumo de água no período t ; 2.770.404 é o parâmetro de nível em m^3 ; 1.239,1 é o parâmetro de tendência em m^3 ; τ indica o horizonte de previsão; p_t representa a sazonalidade em cada período e ε_t é o erro observado do modelo.

Os fatores sazonais estimados podem ser vistos na tabela 2 a seguir.

Tabela 2 - Fatores Sazonais da série temporal - MAE

Mês	Fator Sazonal	Mês	Fator Sazonal
Janeiro	1,01928	Julho	0,96632
Fevereiro	1,00269	Agosto	0,99236
Março	1,00965	Setembro	1,01307
Abril	1,00130	Outubro	1,02593
Maio	0,98646	Novembro	1,00918
Junho	0,96669	Dezembro	1,00907

Fonte: elaboração própria.

Ao analisar a tabela 2, pode-se ver que há queda do consumo de água em meses como junho, julho e agosto, já que foram estimados fatores sazonais inferiores a 1. Isso pode ser devido ao fato de ser uma época de temperaturas mais baixas, onde a utilização da água para atividades recreativas ou de refrescamento tendem a ser reduzidas. Por outro lado, em meses como janeiro a demanda por água é maior, potencialmente, também devido à temperatura, agora mais elevada. Em janeiro, por exemplo, pode-se ver um incremento de cerca de 2% no consumo de água.

Na tabela 3 a seguir pode-se visualizar o desempenho preditivo do modelo. Vê-se um R^2 ajustado de cerca de 69% e um MAPE de 3,4%. Isto significa que o MAE explica 69% da variação de consumo de água em m^3 no Setor Urbano de Juiz de Fora

e distritos neste período, e erra, em média, cerca de 3,4% (para cima ou para baixo) nas previsões do consumo do mês seguinte.

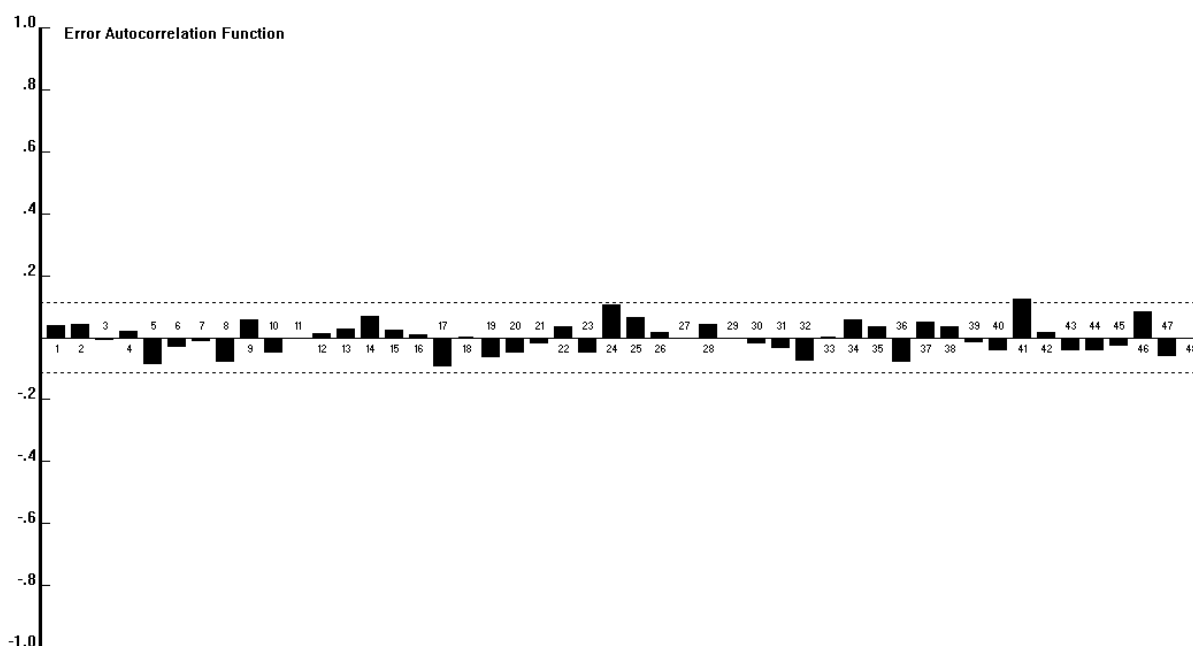
Tabela 3 - Desempenho preditivo do MAE

Estatística	%
R² ajustado	68,71
MAPE	3,42

Fonte: elaboração própria

No caso do teste de Ljung-Box, nota-se uma previsão com erros descorrelatados (abaixo de 0,2 em módulo). A função de autocorrelação dos erros pode ser vista na figura 3 a seguir.

Figura 3 - Função de autocorrelação dos erros – Método de Amortecimento Exponencial



Fonte: elaboração própria.

4.3 – Modelo estimado através do Método Box & Jenkins (MBJ)

Utilizando o método de Box & Jenkins Univariado, o modelo estimado foi o ARIMA (0,1,1)*(2,0,0). A equação de previsão estabelecida pode ser expressa da forma a seguir:

$$(1 - 0,1603B^{12} - 0,2923B^{24}) * (1-B) * (Z_t) = (1 - 0,7958B) * a_t \quad (4.3.1)$$

onde B é o operador de atraso.

O desempenho preditivo do MBJ pode ser visto na tabela 4. O MBJ explica cerca de 67% da variação do consumo de água no período e erra em média 3,5% (para baixo ou para cima) ao prever o valor do consumo do próximo mês.

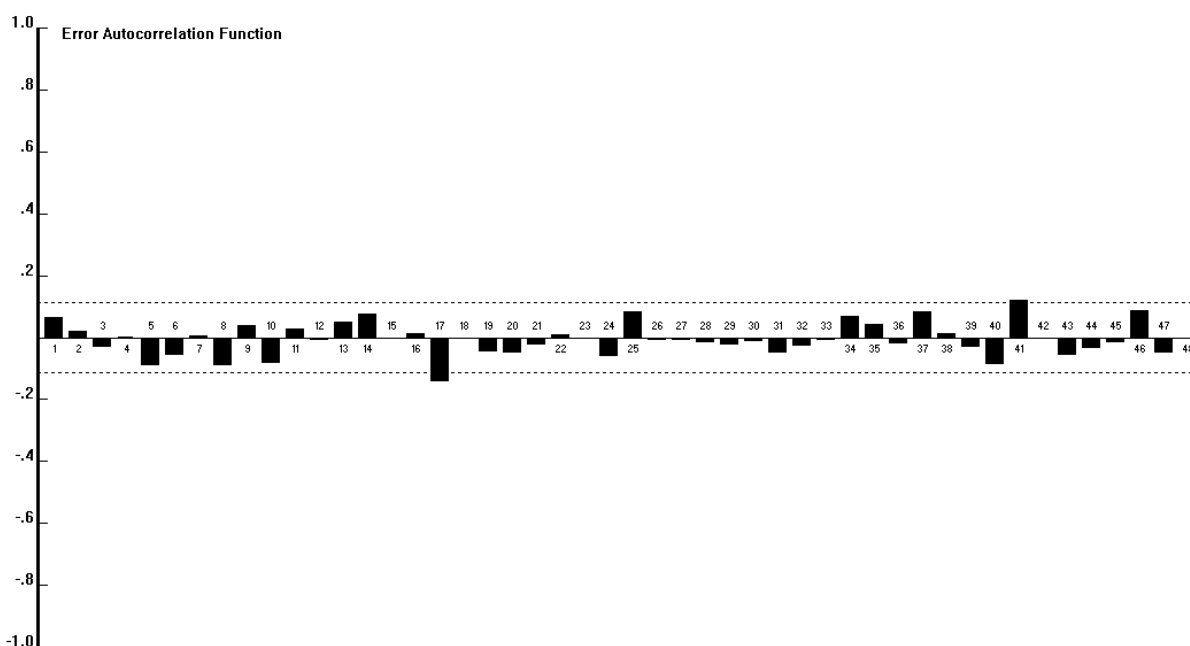
Tabela 4 - Desempenho preditivo do MBJ

Estatística	%
R² ajustado	67,08
MAPE	3,5

Fonte: elaboração própria

Quanto ao teste de Ljung-Box, é possível concluir que os erros são suficientemente descorrelatados, como é ilustrado na figura 4 a seguir:

Figura 4 - Função de autocorrelação dos erros - Box & Jenkins Univariado



Fonte: elaboração própria

4.4 – COMPETIÇÃO DE MÉTODOS

Foi realizada uma competição entre os métodos através da análise recursiva fora da amostra (out-of-sample rolling evaluation). Foram retirados os últimos 12 dados da amostra e estimadas as estatísticas dentro e fora da amostra.

Tabela 5 - Comparação entre modelos

In-sample (dentro da amostra)			Out-of-sample (fora da amostra)			
Modelo	R ² ajustado	MAPE	MAPE H=1 N=12	MAPE Acumulado	GMRAE H=1 N=12	GMRAE Acumulado
MAE	65%	3,4%	3,8%	3,5%	1,263	0,868
MBJ	63%	3,5%	3,4%	3,4%	1,025	0,751

Fonte: elaboração própria

Primeiramente analisando-se o poder de generalização dos modelos (análise na linha da tabela), vê-se que o MBJ possui bom poder de generalização gerando um erro de previsão fora da amostra menor do que o erro dentro da amostra. O mesmo não acontece com o MAE. O MAE, por exemplo, apresenta um MAPE de 3,4% dentro da amostra e de 3,8% fora da amostra para as previsões um passo à frente (mês seguinte). Já o MBJ apresenta um MAPE de 3,5% dentro da amostra e 3,4% fora da amostra para as previsões um passo à frente (mês seguinte). É possível observar também que, em ambos os métodos, o erro acumulado nas 78 previsões fora da amostra é próximo do erro para as previsões um passo à frente. No MAE, por exemplo, tem um erro de cerca de 3,4% para as previsões um passo à frente e 3,5% no acumulado. Já no MBJ tem-se um erro de cerca de 3,5% para as previsões um passo à frente e 3,4% no acumulado. Já na comparação com o método ingênuo, vê-se que ambos os métodos possuem um GMRAE maior do que 1 nas previsões um passo à frente e menor do que 1 no acumulado. Desta forma, no acumulado encontra-se um erro menor do que o erro que seria obtido caso se utilizasse o método ingênuo que usa o último dado como previsor.

Num segundo momento, faz-se a análise entre os modelos (análise entre as linhas da tabela). Na comparação dentro da amostra, O MAE apresenta maior poder de explicação do que o MBJ. Ambos os métodos apresentam um MAPE próximo, sendo o do MAE um pouco menor. Desse modo conclui-se que o MAE faz um ajuste dos dados melhor dentro da amostra. Entretanto, na análise fora da amostra, o MBJ

apresenta todos os indicadores de desempenho preditivo melhores que o seu concorrente, MAE.

Em síntese, pode-se ver que ambos os métodos apresentam desempenho preditivo similar dentro da amostra, com um desempenho um pouco melhor do MAE, sendo que fora da amostra o MBJ apresenta indicadores melhores, ou seja, menor erro de previsão tanto para as previsões um passo à frente (mês seguinte) quanto no acumulado das 78 previsões. O mesmo se observa quanto a comparação com o método ingênuo. Desta forma, através do critério definido neste trabalho monográfico, o método que apresenta melhor poder de previsão fora da amostra é o MBJ que foi definido como o método vencedor. Dessa forma, frente às análises realizadas, o modelo escolhido para a previsão do consumo de água neste trabalho foi o Modelo de Box & Jenkins.

Essa seleção contrária à de Andrade (2023) é corroborada pelo material teórico que aponta que o Modelo de Box & Jenkins tende a performar melhor ao longo do incremento no número de dados da série temporal.

4.5 – PREVISÃO DO CONSUMO

Utilizando o modelo vencedor de Box & Jenkins foi realizada previsão no horizonte de 20 meses no futuro a partir do último dado da amostra, ou seja, de maio de 2025 até dezembro de 2026. A seguir, é apresentada a tabela 6 que demonstra os valores previstos de consumo de água em m^3 na cidade de Juiz de Fora e distritos. Importante ressaltar que uma das vantagens de se trabalhar com métodos matemáticos e estatísticos de previsão é que não se gera apenas um número, a previsão. Esta é calculada na forma probabilística, ou seja, calcula-se um intervalo de confiança que possui determinada probabilidade de conter o valor calculado para a previsão. Em sendo assim, vê-se, por exemplo, que para maio de 2025 calculou-se que há 95% de chances do consumo de água na área de urbana de Juiz de Fora ficar entre 2,6 milhões de m^3 e 3 milhões de m^3 , sendo que o valor esperado é de 2,8 milhões de m^3 .

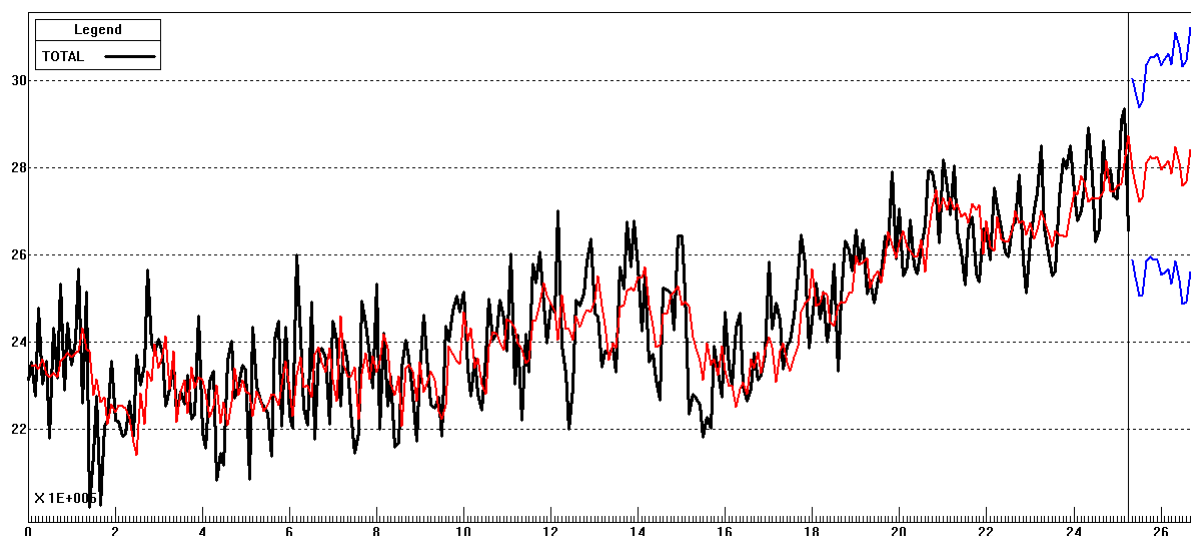
Tabela 6 - Previsão do consumo de água em valores mensais de m³ no horizonte de 20 meses no futuro – Intervalo de confiança de 95%

Data	Limite Inferior	Previsão	Limite Superior
mai/25	2.587.715	2.795.994	3.004.273
jun/25	2.549.245	2.761.823	2.974.401
jul/25	2.504.642	2.721.433	2.938.225
ago/25	2.508.437	2.729.362	2.950.287
set/25	2.586.401	2.811.383	3.036.365
out/25	2.594.776	2.823.743	3.052.711
nov/25	2.586.805	2.819.690	3.052.575
dez/25	2.589.064	2.825.802	3.062.539
jan/26	2.553.637	2.794.165	3.034.694
fev/26	2.558.861	2.803.121	3.047.382
mar/26	2.566.450	2.814.387	3.062.323
abr/26	2.533.052	2.784.611	3.036.169
mai/26	2.584.902	2.847.665	3.110.429
jun/26	2.542.954	2.810.312	3.077.670
jul/26	2.487.061	2.758.936	3.030.811
ago/26	2.491.945	2.768.262	3.044.580
set/26	2.561.084	2.841.774	3.122.465
out/26	2.533.604	2.818.600	3.103.596
nov/26	2.534.038	2.823.275	3.112.513
dez/26	2.513.372	2.806.789	3.100.207

Fonte: elaboração própria

O gráfico com a série histórica, valores ajustados e previstos com o intervalo de confiança pode ser visualizado abaixo.

Figura 5 - Previsão de consumo de água no horizonte de 20 meses no futuro.



Fonte: elaboração própria. Nota: ____ Valor real ____ Valor ajustado/previsão ____
Intervalo de confiança de 95%

É possível também realizar uma análise anualizada dos resultados (tabela 7). De 2020 a 2022, provavelmente pelo acontecimento da pandemia, o consumo de água manteve-se praticamente o mesmo, inclusive reduziu-se em 2022 em relação ao ano anterior. A partir de 2023, o consumo de água retornou a elevar-se, com uma variação positiva de cerca de 2,2%. Este movimento voltou a acontecer no ano seguinte, com uma elevação de 1,5%. Através dos dados previstos neste trabalho, tem-se que deverá haver um aumento similar no ano seguinte, em 2025. Já em 2026, a variação prevista é novamente positiva, porém de forma mais modesta. Com base nas projeções realizadas, é indicado que haverá um aumento de cerca de 1,5% no consumo de água para o ano 2025 em relação ao ano anterior que foi de 33.002.297 m³. O total para o biênio 2025-2026 foi de 67.185.383 m³, um aumento de cerca de 2,5% em relação ao biênio anterior (2023-2024).

Tabela 7 - Valores anuais do consumo de água (em m³)

Ano	Valor (em m³)	Variação %
2020	31.870.810	-
2021	31.962.711	0,2
2022	31.784.592	-0,6
2023	32.501.315	2,2
2024	33.002.297	1,5
2025*	33.513.486	1,5
2026*	33.671.896	0,4

Fonte: Elaboração própria. Nota: *valores projetados pelo MBJ.

5 – CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo realizar a projeção de dados mensais de consumo de água em m^3 no Setor Urbano de Juiz de Fora e distritos. Entende-se que este objetivo é importante no planejamento estratégico de grandes cidades já que a água é o bem mais básico e o mais valioso para a vida de todos os seres.

Assim, ao realizar estudo abrangente sobre este recurso tão importante, foi evidenciado que o Brasil é o país com a maior quantidade de recursos hídricos no mundo, além de comportar a Bacia Amazônica com mais de 1 milhão de km^2 . Portanto, realizações de trabalhos visando a previsão do consumo deste recurso se provam de suma importância.

Para selecionar o método vencedor para fazer as previsões, foi feita uma competição entre dois métodos autoprojetivos: o Método de Amortecimento Exponencial (MAE) e o Método de Box & Jenkins (MBJ). Através de uma análise recursiva fora da amostra evidenciou-se que o MBJ foi o melhor método por ter melhor desempenho preditivo ao prever a realidade mais recente.

Dessa forma, utilizando o modelo vencedor, previu-se os dados de consumo para os 20 meses seguintes, de maio de 2025 até dezembro de 2026. Obteve-se, então que é esperado que o consumo de água para o biênio 2025 a 2026 apresentará um aumento de cerca de 2,5% em relação aos 24 meses anteriores.

Finalmente, como sugestão de trabalhos futuros, recomenda-se a aplicação de outros métodos autoprojetivos, como as técnicas de inteligência artificial. Sugere-se ainda a inclusão de novas variáveis no modelo, não limitando-se somente a modelos autoprojetivos. Como trata-se de o consumo de água no Setor Urbano de uma grande cidade como Juiz de Fora e seus distritos, variáveis como o crescimento populacional e o crescimento espacial da própria cidade podem compor o conjunto de variáveis explicativas a serem testadas na estimação de modelos como, por exemplo, os de Regressão Dinâmica.

6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS E SANEAMENTO BÁSICO (BRASIL). **Boletim técnico: desenvolvimento de metodologia para construção de modelos de demanda hídrica baseado na ocupação de bacias hidrográficas**. Brasília: ANA, [2021]. Disponível em:

<https://metadados.snirh.gov.br/geonetwork/srv/api/records/3d87216f-e45e-41d8-9837-074c1608fb1e/attachments/liv101854.pdf>. Acesso em: 12 jul. 2025.

ANDRADE, Renan Chaves. **Projeção do consumo de água em Juiz de Fora no período de 2022-2041**: monografia (Bacharelado em Ciências Econômicas) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Economia, Juiz de Fora, jul.2023. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/17079>. Acesso em 9 jul. 2025.

Balanco Energético Nacional 2024: ano base 2023. Rio de Janeiro: EPE, 2024. Disponível em: <https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-819/topico-723/BEN2024.pdf> . Acesso em 27 jun. 2025.

BOX, George E. P.; JENKINS, Gwilym M. **Time series analysis: forecasting and control**. San Francisco: Holden-Day, 1994.

CESAMA – Companhia de Saneamento Municipal. **Histórico**. 2024. Disponível em: <https://www.cesama.com.br/a-cesama/historico>. Acesso em: 27 jun. 2025.

CESAMA – Companhia de Saneamento Municipal. **Mananciais**. 2024. Disponível em: <https://www.cesama.com.br/mananciais/barragem-de-chapeu-d-uvas-2>. Acesso em: 20 out. 2025.

DUDEWICZ, E.J.; MISHRA, S.N.. **Modern Mathematical Statistics**. Wiley, 1988.

FALKENBERG, Alex Vieira. **Previsão de consumo urbano de água em curto prazo**. UFPR. Curitiba, 2005. Disponível em:

https://www.researchgate.net/profile/Alex-Falkenberg/publication/26976231_Previsao_de_consumo_urbano_de_agua_em_curto_prazo/links/56d8454608aebabdb408edd3/Previsao-de-consumo-urbano-de-agua-em-curto-prazo.pdf. Acesso em 12 de jul. de 2025.

FERONI, R. C., VINTURINI, A. R., GALVÃO E. S., **Análise de série histórica e previsão de consumo de água para a cidade de São Mateus-ES**, XI Encontro Científico de Física Aplicada, Blucher Physics Proceedings, Volume 7, 2021.

Disponível em: https://www.proceedings.blucher.com.br/article-details/anlise-de-srie-historica-e-previso-de-consumo-de-gua-para-a-cidade-de-so-mateus-es-35984?utm_source=chatgpt.com. Acesso em 12 jul. 2025.

GOODRICH, R.L.. **Applied Statistical Forecasting**. Belmont, Business Forecast Systems, 1999.

IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Bacias e divisões hidrográficas do Brasil** [relatório metodológico, v. 48]. Rio de Janeiro: IBGE, 2021. Disponível em:

https://geofp.ibge.gov.br/informacoes_ambientais/estudos_ambientais/bacias_e_divisoes_hidrograficas_do_brasil/2021/Bacias_Hidrograficas_do_Brasil_BHB250/vetores/Documentacao_Tecnica_BHB250.pdf . Acesso em 26 jun. 2025.

INSTITUTO MINEIRO DE GESTÃO DAS ÁGUAS – IGAM. **Gestão das águas: IGAM, [s.d.]**. Disponível em: <https://igam.mg.gov.br/gest%C3%A3o-das-%C3%A1guas>. Acesso em: 12 jul. 2025.

KONTOPOULOS, Ioannis et al. **An evaluation of time series forecasting models on water consumption data: A case study of Greece**, 2023. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2303.17617>. Acesso em 12 jul. 2025.

MONTGOMERY, D.C., JOHNSON, L.A.. **Forecasting and Time Series Analysis**. New York, McGraw-Hill Book Co., 1990.

ÖLÇENOĞLU, A., BORAT, O. **Holt-Winters ve Box-Jenkins Modellerini Kullanarak Su Tüketimi Tahmini: İstanbul Örneği**, Journal of Technology and Applied Sciences 6(2) s.81-96, (2023). Disponível em: <https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/3275313>. Acesso em 12 jul. 2025.

Secretaria de Estado de Meio Ambiente e Desenvolvimento Sustentável. **Panorama de abastecimento de água e esgotamento sanitário** / Secretaria de Estado de Meio Ambiente e Desenvolvimento Sustentável. --- Belo Horizonte, Minas Gerais: Semad, 2023. Disponível em: https://idesisema.meioambiente.mg.gov.br/geonetwork/srv/api/records/d6c06e2f-18ae-4922-986b-3ad2b94c38e9/attachments/panorama_abastecimento_agua_esgotamento_sanitario_semad_2023.pdf. Acesso em 12 jul. 2025.

TUCCI, Carlos E. M. **Gestão da água no Brasil**– Brasília: UNESCO, 2001. Disponível em <https://www.precog.com.br/bc-texto/obras/ue000058.pdf>. Acesso em 12 jul. 2025.

ZANINI, A. Modelos de Previsão para Séries Temporais. Material Didático. Juiz de Fora, 2023.