

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Vítor Carreiro Ramalho

Modelos Baseados em Agentes em Economia e Finanças: Estimação por Máxima
Verossimilhança Simulada e Dinâmica Evolutiva de Mercados Heterogêneos

Juiz de Fora
2025

Vítor Carreiro Ramalho

Modelos Baseados em Agentes em Economia e Finanças: Estimação por Máxima
Verossimilhança Simulada e Dinâmica Evolutiva de Mercados Heterogêneos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada

Orientador: Dr. Tiago Maia Magalhães

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ramalho, Vítor.

Modelos Baseados em Agentes em Economia e Finanças : Estimação por Máxima Verossimilhança Simulada e Dinâmica Evolutiva de Mercados Heterogêneos / Vítor Carreiro Ramalho. – 2025.

174 f. : il.

Orientador: Tiago Maia Magalhães

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática, 2025.

1. Agentes Heterogêneos. 2. Máxima Verossimilhança Simulada. 3. Bifurcação. I. Magalhães, Tiago Maia, orient. II. Título.

Vitor Carreiro Ramalho

Modelos Baseados em Agentes em Economia e Finanças: Estimação por Máxima Verossimilhança Simulada e Dinâmica Evolutiva de Mercados Heterogêneos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada

Aprovada em 23 de julho de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Tiago Maia Magalhães - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Clécio da Silva Ferreira

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Manuel Alejandro González Navarrete

Universidad de La Frontera

Juiz de Fora, 26/08/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Tiago Maia Magalhaes, Professor(a)**, em 26/08/2025, às 18:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Clecio da Silva Ferreira, Professor(a)**, em 27/08/2025, às 09:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Manuel González-Navarrete, Usuário Externo**, em 01/09/2025, às 19:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2578768** e o código CRC **3978F286**.

Dedico este trabalho aos meus pais,
Murilo (em memória) e Consuelo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Consuelo, por todo o carinho, sacrifício e suporte que me proporcionou ao longo dessa jornada. Sua dedicação e incentivo e amor foram a base fundamental para que eu pudesse levar o curso de mestrado até o fim.

Sou grato ao meu irmão, Igor, que contribuiu de forma significativa para tornar este período mais leve e agradável, trazendo momentos de alegria e apoio nos momentos mais difíceis. Agradeço também suas dicas e sábios conselhos.

Agradeço à Luísa pelo amor, carinho, paciência e motivação que sempre me ofereceu. Sua presença foi essencial nas escolhas importantes e na persistência que este desafio exigiu. Te amo e admiro profundamente. Espero retribuir tudo o que fez por mim.

Agradeço à Marisa, por me acolher em seu lar como um filho e por seu apoio constante e motivador. Seu carinho fez toda a diferença durante essa caminhada.

Agradeço ao professor Tiago Maia Magalhães, em primeiro lugar, por aceitar me orientar e por sua generosidade em me ajudar no decorrer deste trabalho. Também sou grato por todo o incentivo e pela confiança depositada em meu potencial.

Agradeço ao professor Regis pelas orientações e acompanhamento desde antes de entrar no curso de mestrado. Agradeço toda a sua paciência, compreensão e boa vontade em me ensinar e ajudar nos momentos de dúvidas.

Ao programa de Pós-Graduação em Matemática da UFJF e aos demais professores do programa que contribuíram para a minha formação. Agradeço especialmente aos professores Frederico Sercio Feitosa, Willian Versolati França e Lonardo Rabelo pelo apoio, motivação e papel fundamental que tiveram durante minha formação. Agradeço, também especialmente, à Secretária do PPG de Matemática, Paula Mara dos Reis, por sua eficiência e por estar sempre disposta a ajudar os alunos. Agradeço à UFJF, ao ICE e ao Departamento de Matemática pela estrutura fornecida durante a graduação e o mestrado.

Este trabalho contou com o apoio da Rede Integrada de Pesquisa em Alta Velocidade (RePesq) da UFJF (<https://www.repesq.ufjf.br/>). Desse modo, agradeço pela alocação de recursos computacionais que viabilizaram este trabalho.

Agradeço à FAPEMIG pelo apoio financeiro que recebi durante o mestrado.

"Vede bem como os mortais acusam os deuses!
A partir de nós (dizem) existem os males, quando são eles,
pelas suas loucuras, que têm dores além do destino!"

(fala de Zeus na Odisseia, canto I, vv 32-34)¹.

¹ Tradução Frederico Lourenço

RESUMO

O trabalho visa à elaboração e análise de modelos em economia e finanças com agentes heterogêneos e racionalidade limitada. No modelo com dinâmica discreta, os agentes podem adaptar suas crenças em cada passo de tempo, escolhendo entre um conjunto finito de diferentes preditores caracterizando diferentes estratégias. Cada preditor é uma função dos preços passados e fornece uma estimativa do preço para o próximo passo. Além disso, cada preditor possui uma medida de performance associada que é avaliada publicamente. Para uma análise mais aprofundada, consideramos inicialmente o modelo cobweb com oferta e demanda lineares e um conjunto com dois preditores: um correspondente ao comportamento racional e o outro ao comportamento ingênuo. Mostraremos que o aumento da racionalidade dos agentes, medida no modelo pela intensidade de escolha entre os preditores, leva os preços a convergirem para uma dinâmica caótica caracterizada pela existência de um atrator estranho. Em seguida, consideramos um modelo heterogêneo para o apreçamento de ativos. Através do estimador de máxima verossimilhança não paramétrica simulada, baseado no método de núcleos, ajustamos o modelo a dados empíricos de diferentes classes de ativos. As estimativas permitiram caracterizar os mercados considerados como fortemente heterogêneos e com baixa adaptabilidade dos agentes. Além disso, verificamos que o modelo é capaz de reproduzir fatos estatísticos das séries empíricas que modelos clássicos falham em reproduzir. Dessa forma, concluímos que a complexidade dinâmica global é uma característica intrínseca a uma concepção de equilíbrio que é inteiramente racional.

Palavras-chave: Mercados Heterogêneos. Racionalidade Limitada. Bifurcação. Sistemas Complexos.

ABSTRACT

This work aims to develop and analyze models in economics and finance featuring heterogeneous agents with bounded rationality. In the discrete-time framework, agents are allowed to adapt their beliefs at each time step by selecting from a finite set of predictors, each representing a distinct forecasting strategy. Each predictor is a function of past prices and provides an estimate for the next-period price. Furthermore, each predictor is associated with a publicly evaluated performance metric. To conduct a more detailed analysis, we first consider the cobweb model with linear supply and demand functions, alongside a set of two predictors: one representing rational behavior and the other naive behavior. We show that increasing the agents' rationality, modeled through the intensity of choice among predictors, drives the price dynamics toward chaos, characterized by the emergence of a strange attractor. Subsequently, we consider a heterogeneous agent model for asset pricing. Using the Simulated Nonparametric Maximum Likelihood Estimator based on kernel methods, we calibrate the model to empirical data from different asset classes. The estimations reveal that the analyzed markets exhibit strong heterogeneity and low agent adaptability. Moreover, the model is able to replicate empirical statistical features that standard models typically fail to reproduce. We thus conclude that global dynamic complexity is an intrinsic feature of an equilibrium concept based on fully rational behavior.

Keywords: Heterogeneous Markets. Bounded Rationality. Bifurcation. Complex Systems.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores de parâmetros utilizados nas simulações numéricas.	34
Tabela 2 – Valores de parâmetros utilizados nas simulações numéricas.	74
Tabela 3 – Valores de parâmetros utilizados nas simulações numéricas.	76
Tabela 4 – Resultados recuperados para o parâmetro β	83
Tabela 5 – Resultados recuperados para o parâmetro β	86
Tabela 6 – Resultados recuperados para o modelo com 4 parâmetros	89
Tabela 7 – Resultados recuperados para o modelo com 6 parâmetros.	90
Tabela 8 – Estatística Descritiva das Séries Financeiras	95
Tabela 9 – Resultados empíricos para o modelo com 2 tipos de agentes.	97
Tabela 10 – Resultados empíricos para o modelo com 3 tipos calibrados pela serie do Ibovespa.	98
Tabela 11 – Maior Expoente de Lyapunov do Modelo Ajustado.	103
Tabela 12 – Valores do índice de Hurst calculados para as séries financeiras. . . .	106
Tabela 13 – Valores do índice de Hurst calculados sobre simulações do modelo ajustado.	107

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ARED	Dinâmica de Equilíbrio Racional Adaptativo
BH97	Modelo Apresentado por [15] e estudado neste trabalho
BH98	Modelo Apresentado por [16] e estudado neste trabalho
DFA	"Detrended Fluctuation Analysis"
HER	Hipótese de Expectativas Racionais
HME	Hipótese de Mercado Eficiente
NPSMLE	Estimador de Máxima Verossimilhança Não Paramétrica Simulada

SUMÁRIO

	SUMÁRIO	10
1	INTRODUÇÃO	12
1.1	OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	20
2	MODELO COBWEB COM AGENTES HETEROGÊNEOS E RACIONALIDADE LIMITADA	23
2.1	A ABORDAGEM ARED PARA O MODELO COBWEB	24
2.2	MODELO COBWEB COM EXPECTATIVAS RACIONAL VERSUS INGÊNUA	32
2.3	BIFURCAÇÃO HOMOCLÍNICA: O SURGIMENTO DE UM ATRATOR ESTRANHO	49
3	APREÇAMENTO DE ATIVOS EM MERCADOS HETEROGÊNEOS E MÉTODO DE ESTIMAÇÃO	67
3.1	MODELO DE CRENÇAS HETEROGÊNEAS	69
3.1.1	Preço Fundamental.	70
3.1.2	Crenças Heterogêneas e Dinâmica Evolutiva.	71
3.1.3	Dinâmica com Pouco tipos de agentes.	73
3.2	MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA NÃO-PARAMÉTRICA SIMULADA.	78
4	ESTUDO VIA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	82
5	APLICAÇÃO A SÉRIES DE DADOS FINANCEIROS	91
5.1	FATOS ESTATÍSTICOS ESTILIZADOS	102
5.1.1	Agrupamento de Volatilidade	103
5.1.2	Expoente de Hurst	104
5.1.3	Caudas Pesadas	108
6	CONCLUSÃO	110
	REFERÊNCIAS	114
A	APÊNDICE A – SISTEMAS DINÂMICOS.	121
A.1	DEFINIÇÕES INICIAIS	121
A.2	HIPERBOLICIDADE E VARIEDADES INVARIANTES	125
A.3	CRIAÇÃO DE ÓRBITAS HOMOCLÍNICAS E A FERRADURA DE SMALE	129
A.4	BIFURCAÇÕES LOCAIS	141
A.4.1	Variedade central e Forma Normal	143
A.4.2	Bifurcação Sela-Nó	147

A.4.3	Bifurcação de duplicação de período	148
A.4.4	Bifurcação de Hopf	154
A.4.5	Ressonâncias Fortes em Bifurcações de Codimensão 2	159
A.5	DINÂMICAS SENSÍVEIS AO CAOS	162
B	APÊNDICE B – CÁLCULO DOS COEFICIENTES g_{ik}	171

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho visa o estudo do comportamento dinâmico de mercados onde os agentes possuem racionalidade limitada e comportamento heterogêneo através de uma combinação da teoria de sistemas dinâmicos discretos e da teoria estatística. Por *Racionalidade Limitada* referenciamos a ideia de que os agentes econômicos, unidades atuantes no mercado, não são plenamente racionais no sentido neoclássico, ou seja, não têm conhecimento perfeito, nem a capacidade ilimitada de processar informações para tomar decisões ótimas. Ademais, na ausência de racionalidade perfeita que uniformize a formação de expectativas entre os agentes, o mercado é dito *heterogêneo*, quando diferentes agentes formulam expectativas divergentes a respeito de variáveis futuras, sendo a principal delas o preço futuro de um ativo específico. Outra característica importante é que consideramos *agentes adaptativos*, isto é, agentes que coevoluem com o tempo, ajustando suas expectativas com as informações disponíveis no mercado até o momento.

A abordagem comportamental de agentes heterogêneos com racionalidade limitada desafia a estrutura tradicional de agentes representativos e racionais. No entanto, é importante destacar que muitas ideias dessa nova perspectiva têm raízes históricas na teoria econômica. Essas ideias surgiram muito antes dos conceitos de expectativas racionais e da hipótese de mercados eficientes. Como argumenta Hommes [41], elementos centrais dos modelos comportamentais estão ligados, por exemplo, à visão do economista britânico John Maynard Keynes de que "as expectativas importam" e à ideia de Herbert Simon de que o ser humano tem uma racionalidade limitada. Essa perspectiva ressoou em outras áreas do conhecimento, incluindo a psicologia, como, por exemplo, as pesquisas de Kahneman e Tversky [49] e, mais recentemente, Kahneman [48] evidenciando que o comportamento em situações de incerteza é melhor compreendido através de heurísticas e vieses, em vez de um comportamento exclusivamente racional. As influências históricas são centrais e permeiam a discussão ao longo dessa dissertação. Assim, é cabível uma pequena contextualização do problema a ser abordado e do desenvolvimento histórico dos conceitos nos quais esse trabalho foi baseado.

No final do século XIX, a Teoria Econômica sofreu uma de suas mais importantes transformações. De uma teoria clássica essencialmente político-social, cujos principais expoentes eram Adam Smith, David Ricardo e John Stuart Mill, passou a ser vista cada vez mais como uma ciência formal. Como observa Hunt e Lautzenheiser [43], um dos momentos mais importantes neste contexto foi a Revolução Marginalista. Economistas como Carl Menger, foram responsáveis por introduzir a ideia de valor marginal em oposição à ideia de valor baseado no trabalho, isso é, o valor de um bem não depende da quantidade de trabalho envolvida em sua produção, mas da utilidade marginal, ou adicionada, que esse bem proporciona ao consumidor. Além deste, foi introduzido por William Stanley Jevons o conceito de equilíbrio geral e formalizado por Léon Walras, que demonstrou

matematicamente como os mercados poderiam alcançar um equilíbrio onde a oferta e a demanda se igualassem. Esse ponto de inflexão levou a uma "matematização da economia", inspirada em grande parte pelos então recentes avanços na física e outras ciências exatas, como aponta Mazzucato [70], que abriu caminho para a economia neoclássica e a teoria microeconômica.

Na busca por entender matematicamente o funcionamento de mercados a partir do comportamento de seus agentes, fez-se necessário lançar mão de simplificações e hipóteses que garantiam as condições ideais para a existência de um preço de equilíbrio. George Gibson, com a publicação de "*The stock markets of London, Paris, and New York*" em 1889, enfatizou que informações publicamente conhecidas em um mercado aberto determinam o valor das ações, marcando o surgimento inicial da ideia de mercados eficientes na literatura econômica e financeira. Alguns anos depois, Louis Bachelier, em sua tese de doutorado "*Théorie de la spéculation*", propôs que a dinâmica de preços de ativos seguia um processo estocástico denominado Movimento Browniano Aritmético¹ em tempo contínuo, ou caminho aleatório em tempo discreto². Como implicação direta da tese de Bachelier, a variação de preço atual não pode apresentar correlação com a variação de preços do passado, uma vez que os incrementos de um movimento browniano devem ser independentes. Ver definição em [52].

Em 1961, John Fraser Muth [75] apresentou a hipótese das expectativas racionais (HER), defendendo que os agentes de mercado tomam decisões racionais baseadas nas melhores informações disponíveis. Em 1965, Eugene Fama publicou o artigo "O comportamento dos preços do mercado de ações"³, onde descreveu as principais características dos mercados eficientes. No mesmo ano, Paul Anthony Samuelson, em seu trabalho "Prova de que os preços adequadamente antecipados flutuam aleatoriamente"⁴, formalizou um argumento matemático para a eficiência dos mercados. Trata-se da introdução da hipótese ergódica na economia, ver Peters [80].

O termo Hipótese de Mercado Eficiente (HME) foi utilizado pela primeira vez por Harry Roberts em 1967, mas a definição clássica veio com Fama [27] em 1970. Em 1978, Michael C. Jensen [47] apresentou uma classificação das informações disponíveis no mercado em três categorias principais:

1. Preços passados: Essa categoria inclui dados históricos, como cotações anteriores de ativos e outras informações temporais, como taxas de juros de períodos anteriores.
2. Informações públicas: Abrangem todos os dados acessíveis ao público, incluindo

¹ Esse processo, foi formalizado em 1905 por Albert Einstein e estudado com rigor matemático por Norbert Wiener.

² Como a discussão nesse trabalho se baseia em modelos de tempo discreto a partir de agora falaremos somente em caminhos aleatórios, do inglês "Random Walk".

³ Ver [29]

⁴ Ver [87]

séries temporais históricas, notícias econômicas e financeiras, além de outros dados amplamente disponíveis para qualquer interessado.

3. Informações privadas ou de "*insiders*": Referem-se a dados que não são divulgados publicamente, sendo conhecidos apenas por pessoas específicas, geralmente ligadas à gestão ou operação de uma empresa.

Essa classificação corresponde aos três níveis de eficiência que um mercado pode apresentar e que foram considerados por Fama. Respectivamente, essas três formas de eficiência são: fraca, semiforte e forte. Desse modo, a eficiência de um mercado depende da rapidez e da precisão com que os preços atuais refletem essas informações.

Assim, um mercado é considerado fracamente eficiente quando não é possível prever os preços futuros de ativos apenas com base nos valores passados. Isso significa que todas as informações históricas, como preços anteriores e outras séries temporais, já estão completamente refletidas nos preços atuais de mercado. A lógica dessa forma de eficiência é que, se fosse possível prever consistentemente os movimentos futuros com base nesses dados históricos, os investidores explorariam esses padrões para obter ganhos por meio de arbitragem. Em um mercado ideal, sem atritos como custos de transação, restrições à venda a descoberto ou controles de capital, os investidores comprariam ativos com previsão de valorização e venderiam aqueles com expectativa de queda, buscando maximizar seus retornos com base nessas previsões.

No entanto, para que essas oportunidades de arbitragem sejam eliminadas, os preços de mercado precisam se ajustar de maneira rápida e eficiente a novas informações. Isso impede que os investidores obtenham lucros consistentes com base em padrões passados de preços, já que as oportunidades de exploração desaparecem rapidamente. Como resultado, o conceito de eficiência fraca de mercado sugere que os preços seguem um comportamento de um caminho aleatório, como argumentava Bachelier, ou seja, não são influenciados de forma sistemática pelos movimentos históricos. Dessa forma, prever o comportamento futuro dos preços com base apenas em dados passados se torna inviável, uma vez que o mercado já assimilou essas informações, impedindo que padrões previsíveis persistam.

Já em um mercado semiforte eficiente, não é possível prever os preços futuros utilizando apenas informações públicas. As informações públicas englobam uma vasta gama de dados disponíveis gratuitamente, como séries temporais, indicadores macroeconômicos (PIB, inflação, taxas de juros) e notícias corporativas (balanços financeiros, lucros, perdas, planos de investimento). Quando uma nova informação relevante é divulgada, os preços dos ativos tendem a reagir de forma rápida, ajustando-se conforme o impacto dessa notícia, seja positivo ou negativo. Depois desse ajuste, os preços devem encontrar um novo equilíbrio sem que haja qualquer padrão previsível. Se fosse possível identificar padrões após esses ajustes, novamente surgiriam oportunidades de arbitragem. Portanto, em um mercado

semiforte eficiente, a reação rápida e precisa às informações públicas impede que essas oportunidades se concretizem.

Por fim, um mercado é classificado como fortemente eficiente quando, além das informações públicas, também as informações privadas não permitem prever preços futuros. Aqui, as informações privadas referem-se a dados exclusivos, disponíveis apenas para *insiders*, como executivos de empresas ou membros de bancos centrais e órgãos reguladores. Em um mercado fortemente eficiente, até mesmo essas informações privilegiadas já estariam incorporadas nos preços dos ativos, tornando impossível para qualquer investidor, mesmo aqueles com acesso a dados confidenciais, obter retornos superiores de forma consistente. Essa forma de eficiência é a mais desafiadora, já que pressupõe que o mercado reflete completamente todas as informações possíveis, públicas e privadas, garantindo que não existam brechas para arbitragem ou previsibilidade.

As críticas à Hipótese dos Mercados Eficientes (HME) ganharam força nas décadas de 1980 e 1990, questionando suas suposições fundamentais. Em 1980, Grossman e Stiglitz [34], em seu artigo "Sobre a impossibilidade de mercados informacionalmente eficientes", argumentaram que a existência de custos para a obtenção de informações inviabiliza a perfeita eficiência informacional dos mercados, pois, se todos os dados fossem gratuitos e disponíveis, não haveria incentivo para coletar informações. Em 1985, De Bondt e Thaler [24], no estudo "O mercado de ações exagera?", demonstraram evidências de reações exageradas dos preços dos ativos, ajudando a fundar o campo das finanças comportamentais, que explora as limitações cognitivas dos investidores. A crise financeira de 2007-2008, muitas vezes vista como uma refutação da HME, foi interpretada por autores como [5], em "A crise financeira global e a hipótese do mercado eficiente: O que aprendemos?", como um exemplo de falha na aplicação adequada das lições dos mercados eficientes, ao invés de uma negação completa de sua validade.

Em contrapartida, John Maynard Keynes [54] argumentou que o sentimento dos investidores e a psicologia do mercado têm um papel crucial nos mercados financeiros, destacando que o investimento baseado em expectativas de longo prazo é extremamente complexo e arriscado.

Investment based on genuine long-term expectation is so difficult as to be scarcely practicable. He who attempts it must surely lead much more laborious days and run greater risks than he who tries to guess better than the crowd how the crowd will behave; and, given equal intelligence, he may make more disastrous mistakes. ⁵ (Keynes [54], pg. 157).

Em vez de se basear nos fundamentos do mercado, ele sugeriu que muitos investi-

⁵ O investimento baseado em expectativa genuína de longo prazo é tão difícil que é dificilmente praticável. Aquele que tenta isso deve certamente levar dias muito mais trabalhosos e correr riscos maiores do que aquele que tenta adivinhar melhor do que a multidão como a multidão se comportará; e, dada a mesma inteligência, ele pode cometer erros mais desastrosos.

dores preferem tentar prever o comportamento da multidão ⁶, uma estratégia que, embora mais arriscada, pode ser mais eficaz. Para Keynes, calcular uma medida objetiva dos fundamentos do mercado é difícil e custoso, além de depender da concordância de vários investidores sobre quais variáveis são realmente relevantes para a precificação dos ativos.

Herbert Simon [90] complementou essa visão ao enfatizar que os indivíduos possuem racionalidade limitada, sendo incapazes de obter ou processar todas as informações disponíveis para tomar decisões ótimas. Diante dessas limitações, ele argumentou que os agentes recorrem a regras práticas simples, que, embora não perfeitas, são suficientes para a tomada de decisão sob incerteza. Além disso, Milgrom e Stokey [73] apresentaram alguns teoremas de não negociação, que afirmam que, em um cenário onde todos os agentes são racionais e essa racionalidade é de conhecimento comum, a negociação não ocorreria, já que os agentes antecipariam o valor das informações privadas dos outros agentes. O que contrasta com o elevado volume de negociação observado em mercados reais, como ações e câmbio. Assim, a racionalidade limitada reflete de forma mais realista o comportamento humano do que a ideia de racionalidade perfeita com decisões sempre otimizadas.

Nos anos 1970, essa perspectiva foi reforçada pelos experimentos de Kahneman e Tversky [49], que demonstraram que, em situações de incerteza, os indivíduos frequentemente não se comportam racionalmente, utilizando frequentemente heurísticas, ou seja, regras simples de decisão, que podem gerar vieses significativos. Esses estudos desafiam a ideia de que os indivíduos tomam decisões racionais para maximizar a utilidade esperada, apresentando uma visão mais prática do comportamento humano. Para uma discussão aprofundada sobre esses temas, as palestras memorial Nobel de Simon [91] e Kahneman [48] são boas referências.

A maior parte dessas críticas ataca a simplicidade das abordagens e o exagero das hipóteses que foram necessárias à economia neoclássica para tornar seus modelos, quase sempre lineares, matematicamente tratáveis. No entanto, com o recente avanço da computação, o fato de que ferramentas computacionais se tornaram amplamente disponíveis no final dos anos 1980 estimulou enormemente o desenvolvimento e a análise de simulações numéricas, viabilizando uma abordagem por sistemas complexos.

A definição de complexidade varia significativamente segundo a área de conhecimento. Segundo Meyers [72] existem mais de 45 definições de complexidade. Aqui adotaremos as seguintes definições presentes em [72]; **complexidade** é a quantidade de informação necessária para descrever um sistema de modo que um **sistema complexo** é caracterizado por suas propriedades emergentes, isto é, pela formação espontânea de estruturas auto-organizadoras em múltiplos níveis do sistema. No entanto, para o filósofo francês Edgar Morin, considerado o "fundador da ciência da complexidade" por pesquisadores como Demo [25];

⁶ Tradução livre de *crowd* e empregado no mesmo sentido de Keynes [54]

Sua primeira definição não pode fornecer nenhuma elucidação; é complexo o que não pode ser reduzido a uma palavra-chave, o que não pode se resumir a uma lei nem a uma ideia simples. Em outros termos, o complexo não pode se resumir à palavra 'complexidade'.

Morin critica o grande paradigma ocidental, originado na filosofia cartesiana durante a revolução científica, caracterizado por ser disjuntor e redutor. Ele fragmenta áreas e teorias para explicá-las em partes simples, mas falha em apreender a complexidade dos fenômenos. Em contraposição, Morin propõe o pensamento complexo. Este, ao contrário do reducionismo, busca compreender a interconexão entre as partes e o todo, reconhecendo a importância das relações, da organização e de propriedades emergentes nos sistemas. Assim, Morin propõe um modelo de conhecimento que é ao mesmo tempo integrador e contextual, capaz de lidar com a incerteza, a diversidade e a complexidade do mundo real.

Mesmo com a difusão de tais conceitos sendo limitada na matemática, muito devido à sua falta de um rigor apropriado por definição, a abordagem de sistemas complexos encontra sua melhor aproximação na teoria de sistemas dinâmicos, que, segundo Palis e Takens [79] é a teoria que descreve modelos matemáticos de evolução temporal, como equações diferenciais e aplicações. É possível traçar influências desse movimento direta e indiretamente. Um exemplo notável é a teoria qualitativa proposta pelo matemático francês Jules Henri Poincaré,

L'étude complète d'une fonction comprend deux parties :

1. Partie qualitative (pour ainsi dire), ou étude géométrique de la courbe définie par la fonction;
2. Partie quantitative, ou calcul numérique des valeurs de la fonction.

... Cette étude qualitative, quand elle sera faite complètement, sera de la plus grande utilité pour le calcul numérique de la fonction et elle y conduira d'autant plus facilement que l'on connaît déjà des séries convergentes ... ⁷ (H. POINCARÉ, IN MÉMOIRE SUR LES COURBES DÉFINIES PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (1ÈRE PARTIE), (1881), 375–422.

Essa abordagem é hoje amplamente utilizada, ver [92].

O matemático americano Robert Devaney divide, em [26], a história da teoria de sistemas dinâmicos em quatro momentos que revolucionaram essa área da matemática. O primeiro e, segundo Devaney [26], o mais importante ocorreu em 1890, quando o rei Oscar II da Suécia anunciou um prêmio para o primeiro cientista que pudesse resolver o problema de n -corpos e, assim, provar a estabilidade do sistema solar. Ao estudar o problema, Poincaré descobriu que em modelos definidos por equações não lineares pode

⁷ O estudo completo de uma função compreende duas partes:

1. Parte qualitativa (por assim dizer), ou estudo geométrico da curva definida pela função;
2. Parte quantitativa, ou cálculo numérico dos valores da função.

... Este estudo qualitativo, quando for concluído, será de grande utilidade para o cálculo numérico da função e conduzirá de uma forma mais fácil para que se conheça as séries convergentes ...

haver a existência de pontos homoclínicos, chamados por ele de bi-assintóticos, onde uma trajetória no espaço de fase se aproxima assintoticamente de uma mesma solução tanto no passado quanto no futuro. Ele percebeu que a presença desses pontos implica em uma dinâmica muito mais complexa do que qualquer uma que se havia imaginado até o momento, tornando extremamente difícil o cálculo ou a descrição de forma exata das órbitas das soluções. Assim, em seu artigo, que foi amplamente difundido, empregou e defendeu o método qualitativo mencionado no parágrafo anterior para sistemas não lineares. Já na década de 1930, G.D. Birkhoff ampliou as ideias de Poincaré e destacou o estudo de processos iterativos como alternativa para compreender o comportamento dinâmico de equações diferenciais.

O segundo marco surgiu na década de 1960, com Stephen Smale e Edward Lorenz. Smale demonstrou a possibilidade de compreender o caos utilizando um modelo topológico hoje chamado de "ferradura de Smale", que introduziu a dinâmica simbólica como ferramenta analítica. O modelo da ferradura se tornou fundamental para entender o fenômeno dos pontos homoclínicos. A introdução desse conceito marcou uma mudança significativa na teoria dos sistemas dinâmicos, trazendo novas perspectivas e direcionando grande parte das pesquisas subsequentes na área. Paralelamente, Lorenz identificou a sensibilidade às condições iniciais em modelos meteorológicos, destacando a relevância do caos em fenômenos naturais. Na década de 1970, T. Y. Li e James Yorke popularizaram o termo "caos" ao demonstrar que funções simples podem exibir comportamento caótico, mesmo na reta real. Essa descoberta renovou o interesse na área, enquanto os trabalhos de Oleksandr Sharkovsky estabeleceram relações precisas entre ciclos periódicos e caos.

O terceiro momento histórico foi a explosão de pesquisas em dinâmica não linear nas décadas de 1970 e 1980. Descobertas como as de Robert May na biologia matemática e Mitchell Feigenbaum sobre a universalidade no caos abriram novas perspectivas. Ferramentas como a teoria dos atratores estranhos e o estudo das bifurcações consolidaram o entendimento do caos em diversos sistemas. Uma década após Lorenz ter feito suas observações, John Guckenheimer e Robert F. Williams alavancaram a teoria dos atratores estranhos para explicar esse fenômeno. Simultaneamente, a teoria das bifurcações somada à dinâmica simbólica surgiu como uma ferramenta crucial para o entendimento do comportamento complexo dos sistemas dinâmicos não lineares.

Finalmente, o quarto marco foi a chegada dos computadores modernos, que possibilitaram a visualização gráfica e o estudo experimental de sistemas dinâmicos. A descoberta do conjunto de Mandelbrot em 1980 reavivou o interesse por trabalhos anteriores e trouxe avanços significativos na análise de iterações de funções complexas. Computadores transformaram-se em ferramentas indispensáveis para explorar o comportamento dinâmico e o caos.

Paralelamente, em 1984 foi fundado O Santa Fe Institute (SFI) por um grupo de

cientistas, quase todos vindos do Laboratório Nacional de Los Alamos, incluindo George Cowan, David Pines e Stirling Colgate. Desde o início, o instituto se propôs a promover uma nova área de pesquisa interdisciplinar, conhecida como teoria da complexidade ou sistemas complexos. O objetivo era oferecer uma abordagem alternativa à crescente fragmentação da ciência, que os fundadores percebiam como resultado da especialização excessiva. Em vez disso, o SFI buscava estimular a síntese entre diferentes disciplinas, promovendo uma visão mais integrada e colaborativa da investigação científica. Nesse contexto, um grupo de economistas vinculados a esse instituto começou a abordar o problema das hipóteses de agentes racionais e eficiência de mercado do ponto de vista de sistemas complexos.

Como exposto acima, a eficiência de mercado está baseada na hipótese de racionalidade dos agentes participantes desse mercado. Ao se considerar um modelo de agentes heterogêneos, isto é, a distribuição não degenerada de diferentes níveis de racionalidade em uma população de agentes, obtém-se, na maioria dos casos, modelos não lineares e o subsequente comportamento caótico que pode ocorrer, como observado por Brock [14].

Há vantagens nesse tipo de abordagem, por exemplo, um aspecto intrigante dos sistemas de agentes heterogêneos e evolutivos é que eles conseguem replicar várias características estilizadas observadas nas séries temporais financeiras, ver LeBaron, Arthur e Palmer [61]. Entre essas características destacam-se a imprevisibilidade dos retornos, a presença de caudas pesadas, o agrupamento de volatilidade e a memória de longo prazo no retorno de ativos. As flutuações nos preços, que se afastam dos valores fundamentais, e a volatilidade excessiva podem ser causadas pela incerteza sobre os fundamentos econômicos, mas são amplificadas pela interação evolutiva entre diferentes estratégias de negociação limitadamente racionais. Grande parte dessa pesquisa tem um forte componente computacional, utilizando simulações de sistemas adaptativos complexos para explorar a dinâmica do mercado, ver Arthur et al. [4].

Na virada do século, houve um aumento significativo no interesse por sistemas multiagentes. Mercados financeiros, quando modelados como sistemas adaptativos evolutivos, compostos por agentes interativos com racionalidade limitada, têm sido amplamente estudados por vários pesquisadores, Brock e Hommes [15, 16] respectivamente publicados em 1997 e 1998, além de Chiarella e He [20], Farmer [30], Gaunersdorfer, Hommes e Wagener [32], LeBaron, Arthur e Palmer [61], Lux [65] e Lux e Marchesi [67].

O conceito de dinâmica de equilíbrio racional adaptativo (ARED) foi primeiramente apresentado por William A. Brock e Cars H. Hommes em [15], no artigo intitulado "Uma rota racional para a aleatoriedade" como uma forma de modelar a heterogeneidade dos agentes. A premissa central do ARED é que os agentes financeiros tomam decisões com base em suas expectativas sobre variáveis relevantes, como o preço de um ativo. Estes investidores têm a opção de selecionar entre um conjunto limitado de previsores, que

são funções dos valores passados dessas variáveis, refletindo assim todas as informações disponíveis no momento da decisão. Contudo, o processo de obtenção de informações não é gratuito: cada predictor tem um custo associado. Em geral, preditores mais avançados e complexos têm um custo maior do que preditores mais simples e básicos, que são menos precisos. O modelo apresentado em [15], que daqui em diante será chamado por BH97 seguindo a nomenclatura de [41], desenvolvido com base em um modelo cobweb com oferta e demanda lineares, descreve a dinâmica evolutiva entre estratégias de previsão concorrentes, nas quais o estado da economia e a distribuição de agentes em diferentes regras de expectativa evoluem conjuntamente ao longo do tempo.

Já o modelo BH98 apresentado em [16] representa como diferentes tipos de agentes, caracterizados por seus comportamentos ou estratégias baseadas em diferentes crenças sobre o preço observado de um ativo, explicam flutuações erráticas e outras propriedades de séries financeiras que fogem às explicações propostas por modelos clássicos. O modelo BH98, que pode ser visto como uma aplicação da estrutura de BH97 a mercados financeiros, foi proposto para ser uma versão expandida e, até certo ponto, analiticamente tratável de mercados artificiais mais complicados de Arthur et al. [4] e LeBaron, Arthur e Palmer [61].

1.1 OBJETIVOS E ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Tendo em vista a centralidade e influência dos modelos BH97 e BH98, este trabalho busca, através do estudo desses modelos, investigar e entender a relação entre conceitos matemáticos inerentes à teoria de Sistemas Dinâmicos Discretos e sua manifestação como fatores determinantes de fenômenos críticos e estatísticos em modelos econômicos que evoluem ao longo do tempo. Buscaremos mostrar que, mesmo em um modelo simples, com a adição da hipótese de heterogeneidade de agentes, é possível obter, com o aumento da capacidade adaptativa dos agentes β , uma dinâmica caótica caracterizada pela existência de um atrator estranho. Desse modo, o principal resultado matemático é expresso no seguinte teorema, estabelecido em [15]:

Teorema A. *Para curvas de demanda e oferta genéricas, suficientemente próximas na topologia C^2 de curvas lineares, o modelo cobweb com expectativas racionais versus ingênuas exibe um atrator estranho para um conjunto de medida de Lebesgue positiva de valores de β .*

Do ponto de vista estatístico, estamos interessados em entender como tais propriedades dinâmicas, quando munidas de um ruído aleatório, são capazes de gerar fatos observados em séries empíricas, como agrupamento de volatilidade, efeito de memória e caudas pesadas na distribuição de retornos. Objetivamos demonstrar que métodos de máxima verossimilhança simulada são capazes de estimar com elevada precisão os parâmetros de modelos aplicados a diferentes tipos de dados financeiros. Ao incorporar

os conceitos de heterogeneidade de agentes e racionalidade limitada na modelagem de mercados financeiros reais, por meio do ajuste a séries temporais de preços de fechamento de ativos, buscamos evidenciar que esses mercados se comportam como sistemas complexos, com dinâmicas fracamente caóticas.

Dessa forma, são enfatizados os objetivos específicos a seguir:

- Objetivo 1: Identificar fenômenos dinâmicos presentes no modelo em questão e investigar se esses fenômenos afetam, bem como de que maneira e em qual medida, a dinâmica evolutiva do modelo comparado com modelos e hipóteses clássicas.
- Objetivo 2: Calibrar o modelo a diferentes séries históricas empíricas de mercados financeiros.
- Objetivo 3: Apresentar como os modelos explicam fatos estatísticos observados empiricamente nos dados de ativos financeiros reais.

Para esse fim, o trabalho está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2, após introduzir o modelo BH97 para um número H de agentes, nos limitamos ao estudo do caso com apenas dois tipos de agentes, caracterizados como racionais e ingênuos de acordo com a postura que adotam frente à situação atual. Para esse caso, exploramos estabilidades e bifurcações que ocorrem com o aumento do parâmetro que mede a intensidade com que os agentes se adaptam a novos cenários. Apresentamos interpretações econômicas para os resultados obtidos.

No Capítulo 3, introduzimos o modelo BH98 para um número H de agentes, e verificamos numericamente as principais propriedades dinâmicas que o modelo possui, como uma bifurcação de Hopf gerando ciclos quase-periódicos e, posteriormente, a presença de órbitas caóticas. Além disso, introduziremos o estimador por máxima verossimilhança não paramétrica simulada e discutiremos sua adaptação ao modelo BH98, assim como suas principais vantagens e desvantagens.

Em seguida, no Capítulo 4 realizamos um estudo via simulações de Monte Carlo para comprovar a aplicabilidade ao modelo e sua capacidade de recuperar, inicialmente, o parâmetro de adaptabilidade dos agentes, β e, em seguida, os 4 parâmetros para o modelo com 2 tipos de agentes e os 6 parâmetros para o modelo com 3 tipos de agentes.

Com base nos experimentos do capítulo anterior, no Capítulo 5 ajustamos o modelo a séries financeiras reais de diferentes classes de ativos, discutimos esses resultados e comparamos com os resultados obtidos na literatura. Além disso, caracterizamos os mercados analisados como sistemas complexos através da aproximação do maior expoente de Lyapunov e verificamos a capacidade do modelo ajustado de reproduzir os fatos estatísticos estilizados citados anteriormente.

Por fim, o Capítulo 4 conclui o texto. No Apêndice A, visando tornar o texto mais acessível, são introduzidas noções gerais de Teoria de sistemas dinâmicos discretos, como a noção de ponto fixo, estabilidade, conjuntos invariantes, hiperbolicidade, órbitas homoclínicas, bifurcações, maior expoente de Lyapunov e atratores estranhos.

Todas as imagens, figuras e simulações apresentadas foram produzidas pelo autor em seu computador pessoal, utilizando a linguagem de programação Python 3.8.20, assim como a biblioteca Matplotlib [44] e o programa Inkscape. Os cálculos das estimativas apresentados no Capítulo 3 contaram com a colaboração da Rede Integrada de Pesquisa em Alta Velocidade, RePesq, da UFJF.

2 MODELO COBWEB COM AGENTES HETEROGÊNEOS E RACIONALIDADE LIMITADA

A discussão sobre a racionalidade dos agentes e se um modelo de agente adotando expectativas completamente racionais representaria bem uma multidão de tipos de agentes com crenças particulares é uma das mais importantes nos estudos econômicos desde que trabalhos seminais como John F. Muth [75] se tornaram prática comum na teoria econômica. Muth, que em [75] propôs a hipótese das expectativas racionais, defendendo os benefícios de adotar essa hipótese, destacou que as expectativas em mercados eficientes são suficientemente racionais. Segundo o autor

... if expectations were not moderately rational there would be opportunities for economists to make profits in commodity speculation, running a firm, or selling the information to present owners.

¹ Muth [75], pg 330

Outro defensor de expectativas racionais, Milton Friedman [31] argumentou nesse sentido que agentes não racionais não conseguirão sobreviver à competição evolutiva e, portanto, serão excluídos do mercado.

Em contraste, Grossman e Stiglitz defenderam em [34] que, se o mercado fosse perfeitamente eficiente, os agentes não estariam dispostos a arcar com o custo de obter informações, já que esses dados já estariam embutidos nos preços. Por outro lado, se nenhum agente buscar informações devido à falta de incentivos, os preços não poderiam refletir adequadamente o valor real dos ativos, gerando ineficiências de mercado. Dessa forma, Grossman e Stiglitz propuseram que os mercados não podem ser completamente eficientes, pois um certo grau de assimetria informacional é necessário para que a coleta de informações seja recompensada, e para que os agentes informados possam obter retornos baseados em suas análises.

Esse argumento, conhecido na literatura como Paradoxo de Grossman e Stiglitz, desafia diretamente a visão tradicional de mercados totalmente eficientes, ao introduzir a noção de que a presença de custos de informação e a existência de agentes informados e não informados são condições fundamentais para o funcionamento dos mercados. O equilíbrio entre o custo de adquirir informações e os benefícios obtidos a partir dessa coleta define o nível de eficiência que um mercado pode alcançar, mas essa eficiência nunca será total, uma vez que a completa eficiência eliminaria o incentivo para que os agentes buscassem informações, levando à falha do próprio mercado.

Nesse capítulo vamos ilustrar esse mecanismo geral através de um exemplo simples com dois preditores. Os agentes podem escolher comprar, a um custo informacional pequeno, mas positivo, um preditor sofisticado H_1 que garante baixo ou nenhum erro na

¹ ... se as expectativas não fossem moderadamente racionais, haveria oportunidades para os economistas lucrarem com a especulação de commodities, administrando uma empresa ou vendendo as informações aos atuais proprietários.

previsão, ou, de forma gratuita, utilizar um preditor simples H_2 com um alto erro associado. Podemos considerar o preditor H_1 como uma informação privilegiada ou uma análise mais rebuscada e custosa dos dados disponíveis e o preditor H_2 como uma estimativa ao acaso ou um chute. Os agentes decidem racionalmente entre os preditores e tendem a selecionar aquele que proporciona o menor erro de previsão ou o maior lucro líquido. Nesse sentido, buscamos desenvolver e estudar o modelo proposto por W. Brock e C. Hommes em [15] que em diante será abreviado por BH97 adotando a abreviação utilizada por [40].

O interesse econômico desse capítulo é, portanto, estudar a hipótese forte de mercados eficientes na dinâmica de um modelo onde os agentes têm a possibilidade de pagar por uma informação ou um preditor. Assim, é interessante comparar as consequências desse estudo com o ponto de vista teórico proposto anteriormente. Do ponto de vista matemático, o objetivo principal é apresentar um tratamento analítico, baseado em [15], para um modelo econômico simples, o cobweb, simplificado ainda mais por hipóteses de linearidade das funções de oferta e demanda, mas que, devido à não linearidade da equação de diferenças que definem o sistema dinâmico, que por sua vez decorre da hipótese de agentes heterogêneos, produz uma dinâmica bastante complexa. Assim, buscamos exemplificar a dificuldade da abordagem analítica. Portanto, todas as simulações numéricas feitas nesse capítulo buscam somente tornar claros e mais intuitivos os resultados e suas demonstrações. Esperamos, assim, mostrar que esse problema pode ser modelado com a dinâmica complexa de um emaranhado homoclínico em um sistema hiperbólico.

2.1 A ABORDAGEM ARED PARA O MODELO COBWEB

O modelo cobweb clássico descreve as flutuações nos preços e quantidades em torno de um equilíbrio em mercados para um bem de consumo não estocável e nos quais a oferta e a demanda estão inicialmente em desequilíbrio. Assim, o bem leva um certo período para ser produzido, de forma que o modelo atua em tempo discreto. No modelo clássico, os produtores simplesmente reagem a preços passados, ajustando a quantidade produzida, enquanto os consumidores reagem a preços atuais, ajustando a quantidade demandada. Essa dinâmica pode resultar em oscilações cíclicas nos preços e nas quantidades, representando um desequilíbrio temporário entre oferta e demanda. O modelo cobweb é comumente utilizado em economia para aplicações em mercados agrícolas, como os ciclos do milho, da soja ou do gado, fornecendo *insights* sobre a dinâmica de curto prazo em situações de desequilíbrio desses mercados.

Consideramos as funções demanda $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e oferta $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como funções invertíveis, diferenciáveis com derivadas contínuas. Além disso, o modelo tem por hipótese que a demanda é estritamente decrescente e positiva, enquanto a oferta é estritamente crescente e não negativa. Assim, podemos considerar somente a dinâmica dos produtores de forma que o modelo é um sistema dinâmico unidimensional de tempo discreto definido

pela composição

$$p_{t+1} = D^{-1}(S(p_t)). \quad (2.1)$$

Definição 2.1.1. O *estado estacionário*² no modelo cobweb é um ponto p^* que é alcançado quando a quantidade demandada $q_d = D(p^*)$ é igual à quantidade oferecida $q_s = S(p^*)$.

Nesse estado, não há mais mudanças na oferta ou na demanda, indicando um ponto fixo do sistema dinâmico (2.1).

Definição 2.1.2. Dado $h > 0$. A *elasticidade preço da oferta* E_p^s em um ponto p é a variação percentual na quantidade oferecida $S(p) = q_s$ dividida pela variação percentual no preço p , expressa pela fórmula:

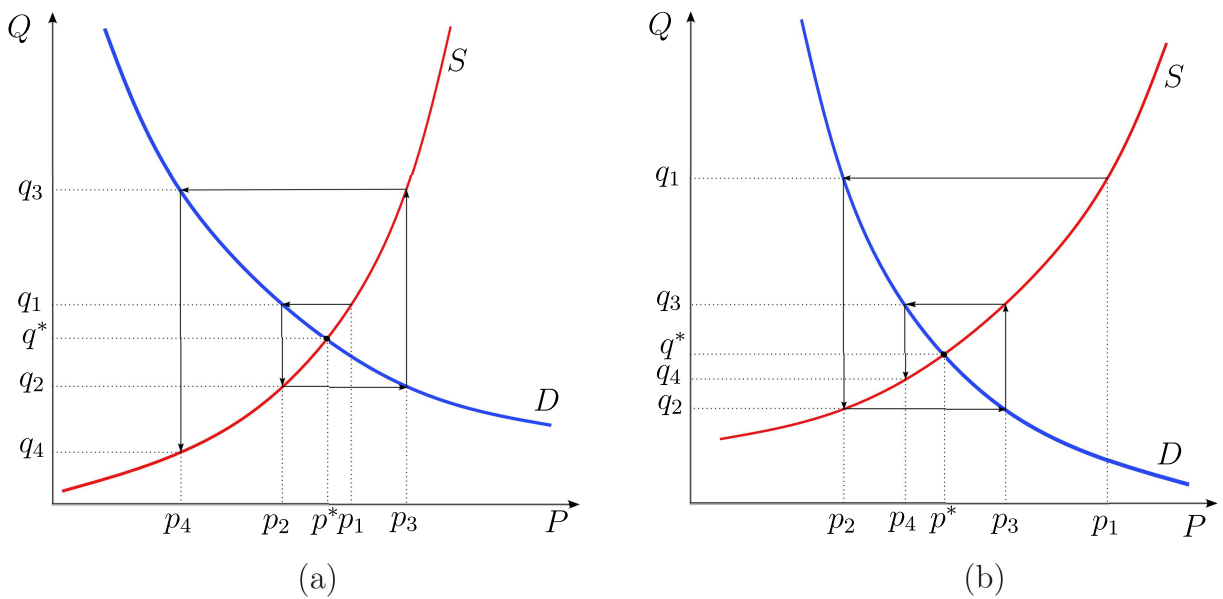
$$E_p^s = \frac{\Delta q_s / q_s}{\Delta p / p} = \frac{S(p+h) - S(p)}{h} \cdot \frac{p}{S(p)}$$

A *elasticidade preço da demanda* E_p^d é a variação percentual na quantidade demandada $D(p) = q_d$ dividida pela variação percentual no preço p , expressa pela fórmula:

$$E_p^d = \frac{\Delta q_d / q_d}{\Delta p / p} = \frac{D(p+h) - D(p)}{h} \cdot \frac{p}{D(p)}$$

Essas fórmulas capturam a sensibilidade da oferta e da demanda às mudanças nos preços, fornecendo uma medida quantitativa da elasticidade no modelo cobweb.

Figura 1 – (a) modelo cobweb com a curva de oferta mais elástica que a curva de demanda – (b) modelo cobweb com a curva de demanda mais elástica que a curva de oferta



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

² Tradução livre do termo em inglês "steady state".

O nome do modelo foi dado por Kaldor [50] em 1934 ao analisar a dinâmica de um mercado com curvas de oferta e demanda, obteve diagramas semelhantes aos da Figura 1, concluindo que o chamou de Teorema cobweb ou teia de aranha. Esse teorema afirma que, dado p^* um estado estacionário das curvas de oferta S e demanda D , então, o preço de mercado converge para o estado estacionário p^* se em uma vizinhança desse ponto, o valor absoluto da elasticidade-preço da demanda for maior do que a elasticidade-preço da oferta. Por outro lado, se a curva de oferta é mais elástica que o módulo da elasticidade da curva de demanda, em uma vizinhança do ponto de equilíbrio, qualquer perturbação à dinâmica dos preços (2.1) tende a se afastar do estado estacionário, como mostra a Figura 1. O teorema cobweb pode ser demonstrado utilizando a teoria desenvolvida no Apêndice A.

Proposição 2.1.1. *Seja p^* um estado estacionário de curvas de oferta S e demanda D . Se a elasticidade da oferta é menor que o módulo da elasticidade da demanda calculadas no estado estacionário, então o estado estacionário é localmente estável.*

Demonstração. De fato, suponha $E_{p^*}^s < |E_{p^*}^d|$, então em p^*

$$\frac{\Delta q_s/q^*}{\Delta p_s/p^*} < \left| \frac{\Delta q_d/q^*}{\Delta p_d/p^*} \right|$$

de onde, passando ao limite, segue que

$$\frac{dS}{dp}(p^*) < \left| \frac{dD}{dp}(p^*) \right|$$

Usando que $D^{-1}(S(p^*)) = p^*$, pela regra da cadeia, temos

$$|(D^{-1}(S(p^*)))'| = |(D^{-1})'(S(p^*)) \cdot S'(p^*)| = \frac{S'(p^*)}{|D'(D^{-1}(S(p^*)))|} = \frac{S'(p^*)}{|D'(p^*)|} < 1$$

O resultado segue do Teorema A.1.2. □

Essa condição de estabilidade foi modificada posteriormente, à medida que modelos de expectativas mais sofisticados foram adotados, como é o caso do modelo descrito a seguir.

Na continuação desta seção, vamos explorar o modelo de teia de aranha aplicado a cenários em que estão presentes múltiplos tipos de agentes. Tal situação é comumente referida como a condição de agentes heterogêneos, que consiste em abordar a interação e o comportamento de diversos agentes com expectativas distintas. Antes de continuarmos, vamos correlacionar os termos e conceitos usados no Apêndice A aos normalmente utilizados em economia.

Observação 2.1.1. *Para organizar melhor as ideias, considere a seguinte correlação entre os conceitos.*

1. Reservaremos o termo "Estado Estacionário" como exposto na Definição 2.1.1 para o ponto fixo que, no modelo cobweb clássico, representa a interseção entre a curva de oferta e demanda.
2. Pelo termo "Equilíbrio" queremos significar L^+ , isto é, o conjunto limite positivo dos pontos do sistema. Veja a Definição A.2.2. Assim, no modelo clássico, o equilíbrio consiste no estado estacionário caso ele seja estável pela Definição A.1.5. Já no caso do modelo com agentes heterogêneos, o equilíbrio pode variar de um ponto fixo para um ciclo periódico e até mesmo para um atrator estranho, dependendo de um parâmetro a ser definido. Essa diferença entre o equilíbrio clássico e o equilíbrio no modelo BH97 é o ponto chave da argumentação em [15] e, por consequência, nesse trabalho.
3. A noção de estabilidade, quando referente à dinâmica coincide com a noção exposta na Definição A.1.5 e na caracterização dada pelo Teorema A.1.2. Já a noção de estabilidade do mercado, é uma característica do modelo e está associada ao caso clássico e portanto especificamente à estabilidade do estado estacionário. Dessa forma, em virtude da Proposição 2.1.1 a estabilidade do mercado se reflete na condição $|D^{-1}(S(p^*))| < 1$.
4. Os demais termos utilizados nesse capítulo devem conter os mesmos significados dos termos apresentados no Apêndice A.

Os produtores devem formar expectativas para a quantidade produzida em um período à frente baseada no preço do período atual. Aqui, adotaremos a abordagem dinâmica de equilíbrio racional adaptativo, ARED proposta em Brock e Hommes [15] para o modelo cobweb, que consiste em adicionar K **preditores** $H_j : \mathbb{R}^{L+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq K$, isto é, funções que no tempo t fornecem uma estimativa do preço futuro em $t+1$ utilizando um histórico de $L+1$ preços anteriores $(p_t, \dots, p_{t-L})$ a um **custo informacional** $C_j \geq 0$. Assim, os agentes podem escolher racionalmente entre os preditores em função de sua eficiência e custo, adaptando suas escolhas a cada instante discreto de tempo.

Considere os vetores de preços anteriores e de preditores dados respectivamente por $P_t = (p_t, p_{t-1}, \dots, p_{t-L})$ e $\mathcal{H}(P_{t-1}) = (H_1(P_{t-1}), \dots, H_K(P_{t-1}))$. Sejam $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função **custo de produção** associada a cada firma e C_j o custo da informação obtida de H_j . Cada preditor H_j , $1 \leq j \leq K$ tem a ele associado uma função **lucro líquido realizado** π_j conhecida por todos os agentes e que serve para os agentes formarem uma avaliação pública da performance desse preditor. O lucro líquido realizado $\pi_j(p_{t+1}, H_j(P_t))$ pelo preditor H_j quando o preço real é p_{t+1} é definido pela fórmula,

$$\pi_j(p_{t+1}, H_j(P_t)) = p_{t+1}S(H_j(P_t)) - c(S(H_j(P_t))) - C_j. \quad (2.2)$$

A equação (2.2) pode ser interpretada da seguinte maneira. No passo $t+1$ o preditor $H_j(P_t)$ estipulou um preço p_{t+1}^j com base nos L preços anteriores, para esse preço foi

produzida uma certa quantidade $S(p_{t+1}^j)$. O lucro bruto obtido com essa quantidade de produto foi $p_{t+1} \cdot S(p_{t+1}^j)$. De onde obtemos o lucro líquido subtraindo os custos de produção $c(S(p_{t+1}^j))$ da quantidade $S(p_{t+1}^j)$ e o custo da informação do preditor H_j .

Assim, a avaliação pública da performance dos preditores no tempo $t + 1$ é formada segundo a **utilidade** de cada preditor H_j que é definida da seguinte maneira,

$$U_{j,t+1} = \sum_{k=0}^M w_{j,k} \cdot \pi_j(p_{t+1-k}, H_j(P_{t-k})), \quad \sum_{k=0}^M w_{j,k} = 1. \quad (2.3)$$

U_j é a média ponderada do histórico de lucro proporcionado por H_j . Importante ressaltar que essa informação é pública e pode ser considerada por todos os agentes em cada passo. Dessa maneira, em cada passo, os agentes podem avaliar todos os preditores utilizados anteriormente e decidir se mudam ou não de estratégia. Essa dinâmica implica que o número de agentes utilizando cada preditor deve variar ao longo da evolução do sistema, de modo que a **fração dos investidores utilizando o preditor H_j** no tempo t é $n_{j,t}(p_t, \mathcal{H}(P_{t-1}))$,

$$n_{j,t}(p_t, \mathcal{H}(P_{t-1})) = \frac{\exp(\beta U_{j,t})}{\sum_{j=1}^K \exp(\beta U_{j,t})}. \quad (2.4)$$

As funções $n_{j,t}$ são definidas segundo o modelo logit multinomial amplamente utilizado em economia e que por sua vez tem como base teórica as medidas de Gibbs em física estatística. Veja [21] para resultados de existência e um tratamento matemático das medidas de Gibbs. O texto de Anderson, De Palma e Thisse [2] fornece um tratamento extensivo para modelos de escolha discreta, em particular ao modelo logit multinomial e suas aplicações em economia. Podemos encontrar em [76] uma derivação da equação (2.4) obtida maximizando-se uma combinação linear entre os lucros passados e a informação disponível no mercado através do princípio da máxima entropia. A principal e mais importante característica desse modelo é que os agentes escolhem com intensidade exponencial cada preditor, baseados em quão maior foi a adequação da estratégia de negociação que ele representou na variação dos preços históricos.

O parâmetro $\beta \geq 0$ indica a intensidade de escolha dos agentes, isto é, mede o quão sensíveis e eficientes são os agentes na seleção da estratégia de previsão ótima. Assim, para $\beta = 0$, as frações são constantes e iguais para todos os preditores $n_{j,t} = 1/K$, implicando que os agentes são incapazes de avaliar e, portanto, indiferentes a cada estratégia de previsão. Já no outro caso limite, $\beta = +\infty$, os agentes conseguem mensurar perfeitamente qual a estratégia ótima em cada passo da dinâmica, uma vez que o aumento no parâmetro β implica em um aumento na racionalidade dos agentes. Esse caso corresponde à intensidade de escolha pressuposta pela teoria neoclássica, podendo ser chamado de limite neoclássico como em [40], e será muito importante para a análise do sistema nas próximas seções.

Desse modo, obtemos o sistema dinâmico denominado **modelo cobweb com**

crenças heterogêneas:

$$p_{t+1} = D^{-1} \left(\sum_{j=1}^K n_{j,t}(p_t, \mathcal{H}(P_{t-1})) \cdot S(H_j(P_t)) \right) = F(p_t, \dots, p_{t-L}), \quad (2.5)$$

$$n_{j,t+1}(p_{t+1}, \mathcal{H}(P_t)) = \frac{\exp(\beta U_{j,t+1})}{\sum_{j=1}^K \exp(\beta U_{j,t+1})}. \quad (2.6)$$

A dinâmica do sistema (2.5) pode ser interpretada economicamente como: Depois do preço real em $t + 1$ for revelado por (2.5), todos os preditores H_j são avaliados publicamente de acordo com sua medida de performance $U_{j,t+1}$ e novas frações $n_{j,t+1}$ são determinadas conforme (2.6). Com as novas frações, (2.5) determina o próximo preço p_{t+2} e assim por diante. Os preços e as frações de equilíbrio, portanto, coevoluem ao longo do tempo.

É importante estudarmos, em seguida, alguns resultados de instabilidade locais para o modelo cobweb com crenças heterogêneas, e colocá-los em perspectiva com o modelo clássico. Novamente, consideramos p^* o preço no ponto onde a curva de demanda e oferta se encontram, $S(p^*) = D(p^*)$. Começamos assumindo uma hipótese básica, de que as curvas de oferta e demanda são suaves e só se interceptam em um ponto.

Hipótese 2.1.1 (H1). *D é estritamente crescente e positiva, S é estritamente crescente e não negativa, com $S(0) = 0$. As funções D, S e $\{H_j\}$ são todas de classe C^1 . Para todo preditor H_j , o sistema dinâmico $D^{-1}(S(H_j(P_t)))$ tem p^* como seu único estado estacionário.*

Estamos interessados em estudar o caso em que o estado estacionário é instável. Assim, faz-se necessária a seguinte hipótese,

Hipótese 2.1.2 (H2). *Para o seguinte sistema*

$$D(p_{t+1}) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K S(H_j(P_t)), \quad (2.7)$$

o estado estacionário p^ ou $p^* = (p^*, \dots, p^*)$ de (2.7) é hiperbólico. Isto é, a linearização de (2.7) no ponto p^* não tem autovalores no círculo unitário e, portanto, (2.7) é localmente instável em p^* .*

A hipótese H2 significa que quando o custo de informação for zero e os agentes se encontrarem igualmente divididos entre as estratégias de predição, isto é, a fração de agentes utilizando cada preditor H_j é igual e constante $n_{j,t} = 1/K$, para todo $j \leq K$, o sistema será localmente instável. Uma forma prática de interpretar H2 é considerar um cenário onde nenhum produtor busca informações sobre o preço futuro ou é impossível a obtenção dessas informações. A divisão homogênea dos agentes garante que todo tipo de estratégia será adotada, tanto estratégias que se aproximam quanto estratégias que se

afastam do preço de equilíbrio, causando, assim, uma oscilação nos preços em torno desse último. No modelo, essa oscilação é representada pelo fato de o estado estacionário ser um ponto hiperbólico. Assim, toda vizinhança suficientemente pequena de p^* apresentará regiões atratoras mas também regiões repulsoras, o que é o bastante para garantir que o sistema é localmente instável nesse ponto. O cenário acima pode apresentar baixas chances de acontecer em um mercado real, desse modo o próximo resultado estabelecerá que o mesmo ocorre para o modelo sem custo de informação mesmo com os agentes não estando igualmente distribuídos.

Teorema 2.1.1. *Sob as hipóteses H1 e H2 e supondo ainda que o custo pela informação é $C = 0$, para todo H_j , o sistema dinâmico (2.5)-(2.6) é localmente instável no estado estacionário p^* , que é um ponto hiperbólico.*

Demonstração. Pela hipótese H1, o sistema $D(p_{t+1}) = S(H_j(P_t))$ tem p^* como seu estado estacionário. Então, $D(p^*) = S(p^*)$ de modo que $p^* = H_j(p^*)$, para todo $0 \leq j \leq K$. Assim, no estado estacionário temos $n_{j,t}(p_t, \mathcal{H}(P_{t-1})) = n(p^*, p^*)$. Mas, por definição, para todo t ,

$$\sum_{j=1}^K n_{j,t}(p_t, \mathcal{H}(P_{t-1})) = 1, \quad (2.8)$$

o que implica em $n(p^*, p^*) = 1/K$.

Agora, aproximando por diferenças finitas, isto é, $n'_{j,t} = \Delta n_{j,t}(p_t) / \Delta p_t$ com $\Delta p_t = p_{t+1} - p_t$, e aplicando a regra de cadeia, temos

$$D'(p^*) = \sum_{j=1}^K \frac{\Delta n_{j,t}(p_t, \mathcal{H}(P_{t-1}))}{\Delta p_t} \cdot S(p^*) + \sum_{j=1}^K n(p^*, p^*) \cdot S'(p^*) \nabla H_j(p^*) \frac{\Delta P_t}{\Delta p_t}$$

Por (2.8), $\sum_{j=1}^K \Delta n_{j,t}(p_t, \mathcal{H}(P_{t-1})) = 0$. Logo

$$D'(p^*) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K S'(p^*) \nabla H_j(p^*) \frac{\Delta P_t}{\Delta p_t}$$

Assim, a linearização de (2.5) é a mesma de (2.7). De modo que se (2.7) é localmente instável no estado estacionário p^* , (2.5) também é localmente instável nesse ponto. $\square$

Uma situação análoga à considerada anteriormente é considerar o modelo com custos de informação decrescentes $C_1 > \dots > C_j > \dots > C_K \geq 0$ e onde todos os agentes escolhem o preditor mais barato H_K . Esse preditor mais barato, que podemos considerar como míope ou ingênuo, é com frequência utilizado em modelos econômicos para efeito de comparação. É de se esperar que se todos os agentes adotarem a estratégia mais barata H_K em detrimento de preditores mais sofisticados e eficientes, a informação disponível no mercado se torne cada vez mais escassa, afastando o preço previsto do preço real e, portanto, tornando o mercado instável. Vamos assumir essa situação como hipótese.

Hipótese 2.1.3 (H2'). Quando todos os agentes usam o preditor mais barato H_K , o estado estacionário $p^* = (p^*, \dots, p^*)$ é hiperbólico e localmente instável. Isto é, o modelo cobweb simples

$$D(p_{t+1}) = S(H(P_t)).$$

com crenças heterogêneas é localmente instável no estado estacionário.

O resultado seguinte visa demonstrar, aproximando os sistemas dinâmicos correspondentes, que quanto maior for β maior será a fração de agentes utilizando o preditor mais barato H_K quando o preço se aproxima do equilíbrio p^* , tornando o mercado localmente instável. Essa situação corresponde no modelo cobweb heterogêneo ao paradoxo de Grossman e Stiglitz já mencionado acima.

Teorema 2.1.2. Supondo H1 e H2' e que $C_1 > C_j > C_K \geq 0$, para $1 < j < K$, se a intensidade de escolha β for suficientemente grande, então o estado estacionário p^* é um ponto fixo hiperbólico e o sistema dinâmico (2.5)-(2.6) é localmente instável em p^* .

Demonstração. Considere o sistema dinâmico definido pela aplicação de $L + 2$ variáveis.

$$p_{t+1} = D^{-1} \left(\sum_{j=1}^K n_{j,t}(p_t), \mathcal{H}(P_{t-1}) \cdot S(H_j(P_t)) \right) = F(p_t, \dots, p_{t-L-1}) \quad (2.9)$$

No estado estacionário, as equações (2.2) e (2.3) ficam

$$U_j = \pi_j(p^*, p^*) \sum_{k=1}^M w_{j,k} = \pi_j(p^*, p^*) = p^* \cdot S(p^*) - c(S(p^*)) - C_j.$$

Como a diferença entre o lucro e o custo é constante para todos os preditores no estado de estacionário, podemos supor $U_j = -C_j$. Assim, obtemos uma nova expressão para as frações,

$$n_j^*(\beta) = n_{j,t}(p^*, \mathcal{H}(p^*)) = \frac{\exp(-\beta C_j)}{\sum_{j=1}^K \exp(-\beta C_j)}$$

Então, consideramos o sistema dinâmico dado por uma equação de diferenças com $L + 1$ variáveis, descrevendo o equilíbrio quando as frações de agentes usando o preditor H_j estão fixas nos valores estacionários de (2.9).

$$p_{t+1} = D^{-1} \left(\sum_{j=1}^K n_j^*(\beta) S(H_j(P_t)) \right) = G(p_t, p_{t-1}, \dots, p_{t-L}). \quad (2.10)$$

Notemos que, para todo $p \in R$,

$$F(p^*, \dots, p^*, p) = D^{-1}(S(p^*) \cdot \sum n_{j,t}(p^*, \mathcal{H}(p^*, \dots, p^*, p))) = D^{-1}(S(p^*)) = p^*.$$

De forma que a derivada parcial na última variável é $\frac{\partial F}{\partial p_{t-L-1}} = 0$. Assim, a matriz jacobiana $DF(p^*)$ tem os mesmos $L + 1$ autovalores que $DG(p^*)$ mais o autovalor $\lambda_{L+2} = 0$. De

modo que basta mostrar que (2.10) seja localmente instável no estado estacionário para que (2.9) também o seja.

Nesse sentido, vamos considerar o seguinte sistema dinâmico

$$p_{t+1} = D^{-1}(S(H_K(P_t))) = H(p_t, \dots, p_{t-L+1}) \quad (2.11)$$

e mostrar que (2.10) tende a (2.11), no espaço $C^1(\mathbb{R}^L, \mathbb{R}^L)$ com a norma $\|f\| = \sup\{f(x), df(x)\}$, quando β tende a $+\infty$. Primeiro notamos que para β grande o suficiente, no estado estacionário, a fração de agentes usando o preditor mais barato tende a 1. De fato, usando a hipótese $C_j > C_k$ temos, para $1 \leq j < K$,

$$0 \leq n_j^*(\beta) = \frac{\exp(-\beta C_j)}{\sum_{j=1}^{K-1} \exp(-\beta C_j) + \exp(-\beta C_K)} \leq \frac{\exp(-\beta C_j)}{\exp(-\beta C_K)} = \exp(-\beta(C_j - C_K)).$$

Além disso, $n_K^*(\beta) = 1 - \sum_{j=1}^{K-1} \exp(-\beta C_j)$. Segue, usando o teorema do confronto, que $n_j^*(\beta) \rightarrow 0$, para $j < K$, e portanto, $n_K^*(\beta) \rightarrow 1$ quando $\beta \rightarrow +\infty$. Logo, aplicando em (2.10) e (2.9) temos $G \rightarrow H$ pela norma do supremo com $\beta \rightarrow +\infty$. Para as derivadas temos

$$\frac{\partial G}{\partial p_{t-j}}(P_t) = n_j^* \cdot \frac{\partial_j S(H_j(P_t))}{\partial_j D \left(D^{-1} \left(\sum_{j=1}^K n_j^*(\beta) S(H_j(P_t)) \right) \right)} = n_j^* \cdot \frac{\partial_j S(H_j(P_t))}{\partial_j D(G(P_t))}$$

Então, quando $\beta \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial p_{t-K}} &\rightarrow \frac{\partial_K S(H_K(P_t))}{\partial_K D(D^{-1}(S(H_K(P_t))))} = \frac{\partial H}{\partial p_{t-K}}, \\ \frac{\partial G}{\partial p_{t-j}} &\rightarrow 0 = \frac{\partial H}{\partial p_{t-j}}, \quad \text{se } j \neq K. \end{aligned}$$

Concluimos que G tende a H na topologia C^1 quando β tende a $+\infty$. Uma vez que a hipótese H2' implica que (2.11) é localmente instável no estado estacionário, podemos concluir que (2.10) e portanto (2.9) também são localmente instáveis no estado estacionário. $\square$

2.2 MODELO COBWEB COM EXPECTATIVAS RACIONAL VERSUS INGÊNUA

Para um estudo mais aprofundado do tema que se propõe esse trabalho é necessário lançar mão de simplificações que tornarão o modelo analiticamente tratável. A primeira delas diz respeito à dimensão do sistema, que por sua vez está diretamente relacionada com o número de tipos de agentes no mercado. No resto do capítulo, trabalharemos com dois tipos de preditores: um representando as esperanças racionais e outro as esperanças ingênuas. O modelo cobweb heterogêneo com dois preditores é dado por

$$p_{t+1} = D^{-1}(n_{1,t} \cdot S(H_1(P_t)) + n_{2,t} \cdot S(H_2(P_t))) \quad (2.12)$$

Para manter o modelo mais simples possível, supomos que as funções demanda e oferta são lineares:

$$D(p_t) = A - Bp_t,$$

$$S(H(P_t)) = bH(P_t),$$

sendo a oferta derivada da função quadrática custo $c(q) = q^2/2b$. Com $(c')^{-1} : q \rightarrow bq$ e $S = (c')^{-1}$. Supomos que o preditor H_1 representa as esperanças racionais e H_2 as esperanças ingênuas,

$$H_1(P_t) = p_{t+1}$$

$$H_2(P_t) = p_t$$

no qual o custo da informação fornecida por H_1 é $C > 0$ e por H_2 é 0. Portanto, existe um feedback negativo que afasta o preço do equilíbrio quando a maioria dos agentes usa o preditor sofisticado, e um feedback positivo que aproxima o preço do equilíbrio quando todos utilizam o preditor simples. Essas hipóteses permitem que as fórmulas para os lucros líquidos realizados sejam analiticamente tratáveis:

$$\pi_j(p_{t+1}, H_j(P_t)) = p_{t+1}S(H_j(P_t)) - c(S(H_j(P_t))) - C_j.$$

$$\pi_1(p_{t+1}, p_{t+1}) = p_{t+1} \cdot bp_{t+1} - \frac{b^2 p_{t+1}^2}{2b} - C = \frac{b}{2} p_{t+1}^2 - C.$$

$$\pi_2(p_{t+1}, p_t) = p_{t+1} \cdot bp_t - \frac{b^2 p_t^2}{2b} = \frac{b}{2} p_t(2p_{t+1} - p_t).$$

As frações dos agentes usando a esperança racional e a ingênuas são, respectivamente

$$n_{1,t} = \frac{\exp \left[\beta \left(\frac{b}{2} p_{t+1}^2 - C \right) \right]}{\exp \left[\beta \left(\frac{b}{2} p_{t+1}^2 - C \right) \right] + \exp \left[\beta \left(\frac{b}{2} (2p_{t+1}p_t - p_t^2) \right) \right]} \quad (2.13)$$

$$n_{2,t} = \frac{\exp \left[\beta \left(\frac{b}{2} p_t(2p_{t+1} - p_t) \right) \right]}{\exp \left[\beta \left(\frac{b}{2} p_{t+1}^2 - C \right) \right] + \exp \left[\beta \left(\frac{b}{2} (2p_{t+1}p_t - p_t^2) \right) \right]} \quad (2.14)$$

A fim de reduzir essas frações a um só parâmetro, tomamos $m_{t+1} = n_{1,t+1} - n_{2,t+1}$. De modo que, m_t é um valor no intervalo $[-1, 1]$, sendo $m_t = -1$ a medida de um comportamento totalmente ingênuo dos agentes e $m_t = 1$ a medida de um comportamento totalmente racional. De (2.13) e (2.14) e depois multiplicando e dividindo por $\exp \left[-\frac{\beta}{2} \left(\frac{b}{2} (p_{t+1}^2 + 2p_{t+1}p_t - p_t^2) - C \right) \right]$, obtemos

$$\begin{aligned} m_{t+1} &= \frac{\exp \left[\beta \left(\frac{b}{2} p_{t+1}^2 - C \right) \right] - \exp \left[\beta \left(\frac{b}{2} (2p_{t+1}p_t - p_t^2) \right) \right]}{\exp \left[\beta \left(\frac{b}{2} p_{t+1}^2 - C \right) \right] + \exp \left[\beta \left(\frac{b}{2} (2p_{t+1}p_t - p_t^2) \right) \right]} \\ &= \tanh \left[\frac{\beta}{2} \left(\frac{b}{2} (p_{t+1} - p_t)^2 - C \right) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como, $n_{1,t} = (m_t + 1)/2$ e $n_{2,t} = (1 - m_t)/2$ aplicando em (2.12) temos

$$p_{t+1} = \frac{A - \frac{1 + m_t}{2} \cdot b \cdot p_{t+1} - \frac{1 - m_t}{2} \cdot b \cdot p_t}{B}$$

O preço no estado estacionário é dado por $A/(b + B)$. Sem perda de generalidade, podemos fazer uma mudança de coordenadas para que esse preço se encontre sob a origem. Assumindo que $A = 0$, segue que

$$p_{t+1} = \frac{-b(1 - m_t)}{2B + b(1 + m_t)} \cdot p_t = f(p_t, m_t) \quad (2.16)$$

Aplicando em (2.15)

$$m_{t+1} = \tanh \left(\frac{\beta}{2} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{b(1 - m_t)}{2B + b(1 + m_t)} + 1 \right)^2 p_t^2 - C \right] \right) = g(p_t, m_t). \quad (2.17)$$

Denotamos o sistema dinâmico bidimensional não linear (2.16) e (2.17) por

$$(p_{t+1}, m_{t+1}) = F_\beta(p_t, m_t) = (f(p_t, m_t), g(p_t, m_t)). \quad (2.18)$$

Assim, fica definida a dinâmica de equilíbrio racional adaptativa do modelo de cobweb com esperanças racionais versus ingênuas, com oferta e demanda lineares. A partir de agora, até a Seção 5.1 utilizaremos, em todas as simulações numéricas do sistema dado pelas equações (2.16) e (2.17) os valores de parâmetros dados pela seguinte tabela:

Tabela 1 – Valores de parâmetros utilizados nas simulações numéricas.

B	b	A	C
0.5	1.35	0.0	1.0

Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Estudaremos na seção seguinte o surgimento de um atrator estranho no modelo para valores da intensidade de escolha β acima de um certo valor crítico. No entanto, mesmo antes disso, o sistema já apresenta mudanças qualitativas em sua dinâmica com o aumento de β . Primeiro, temos um valor crítico β_1 para o qual $\beta > \beta_1$ implica em uma mudança do estado estacionário de globalmente estável para um ponto hiperbólico de sela através de uma bifurcação de duplicação de período, criando um ciclo de período 2. Logo depois, outro valor crítico β_2 é responsável por causar uma bifurcação de Hopf criando quatro ciclos com período 4.

Nas simulações numéricas apresentadas na Figura 2 é possível observar essas mudanças qualitativas com o aumento do parâmetro β , tanto na trajetória de uma solução inicial destacada pela variedade instável, quanto na série temporal de preços. Especificamente, na Figura 2 (a)-(b) pode-se observar a mudança na estabilidade do

sistema descrita no item 2) do Teorema 2.2.1 assim como a duplicação de período descrita no item 3) do mesmo teorema. Na Figura 2 (c)-(d) podemos observar a perda de estabilidade do ciclo de período 2 e o surgimento de dois pares simétricos de ciclos de período 4 através da bifurcação de Hopf. No final do capítulo, apresentamos um diagrama de bifurcação onde é possível uma visualização dessas mudanças qualitativas. Ver Figura 15.

Note que, todos os sistemas simulados na Figura 2 exibem um atrator. Em (a) o atrator é um ponto fixo globalmente estável. Em (b) o atrator são dois pontos periódicos simétricos e o formato de sua série temporal segue dessa simetria, uma vez que a imagem de um dos pontos é o outro. O mesmo ocorre em (c). Já em (d) o atrator são dois ciclos de período 4 estáveis.

Apresentamos esses resultados na forma dos seguintes teoremas.

Teorema 2.2.1 (Bifurcação Primária). *Suponha que as inclinações das curvas de oferta e demanda satisfazem $b/B > 1$. Então:*

1. *Se o custo da informação for $C = 0$, então o estado estacionário é $E = (0, 0)$ e esse ponto é globalmente estável.*
2. *Se o custo da informação é $C > 0$, então existe um valor crítico β_1 para o qual, $0 \leq \beta < \beta_1$ implica na existência de um equilíbrio globalmente estável, enquanto que $\beta_1 \leq \beta$ o equilíbrio é um ponto de sela com autovalores 0 e*

$$\lambda(\beta) = \frac{-b(1 - \bar{m}(\beta))}{2B + b(1 + \bar{m}(\beta))} < -1.$$

No valor crítico, o estado estacionário é $\bar{m}(\beta_1) = -B/b$.

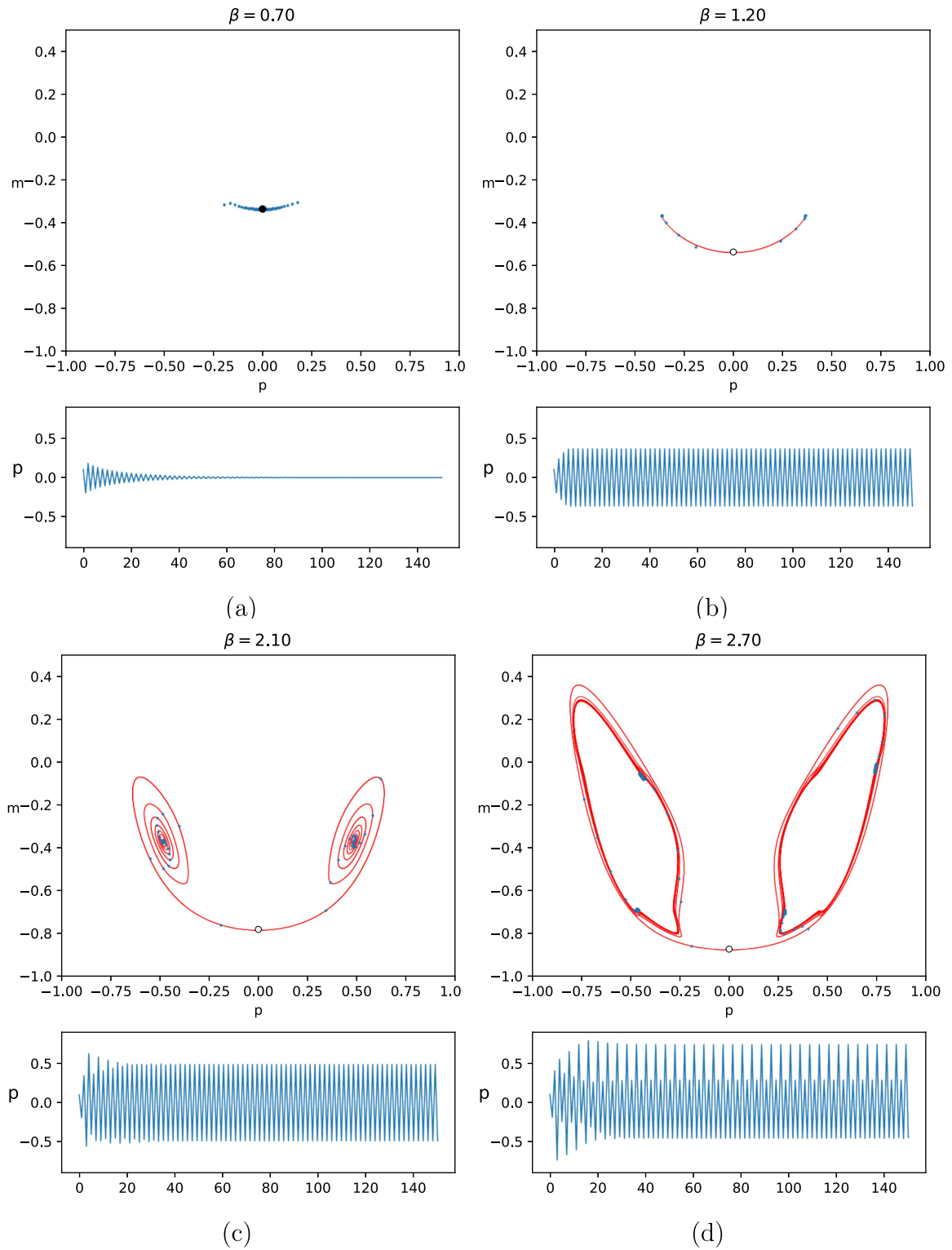
3. *Se o estado estacionário é instável, então existe um única órbita de período 2 $\{(\tilde{p}, \tilde{m}), (-\tilde{p}, \tilde{m})\}$, com $\tilde{m} = -B/b$ e $\tilde{p}$ a única solução positiva de*

$$\tanh \left[\frac{\beta}{2}(2b\tilde{p}^2 - C) \right] = -\frac{B}{b}.$$

Além disso, existe β_2 tal que o ciclo de período 2 é estável para $\beta_1 < \beta < \beta_2$.

Note que o estado estacionário é dado por $E = (0, \tanh(\frac{-\beta C}{2}))$ e se move com o aumento de β , partindo de $(0, 0)$ quando $\beta = 0$ percorre o eixo m em sentido negativo até o ponto $(0, -1)$ quando $\beta = +\infty$. Na Figura 2 pode-se observar esse deslocamento que é bastante atenuado para valores muito maiores de β .

Figura 2 – Simulações variando o parâmetro β . Em vermelho, uma representação não rigorosa da variedade instável do ponto hiperbólico. Em azul a trajetória de uma solução inicial $(0.1, -0.8)$ arbitrariamente escolhida seguido de sua série temporal de preços.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Demonstração. Considere o sistema dinâmico (2.18). Como o preço no estado estacionário é $p^* = 0$ por construção, de (2.17) segue que

$$\bar{m}(\beta) = \tanh\left(\frac{-\beta C}{2}\right), \quad (2.19)$$

em que $\bar{m}$ denota o valor de m_t atingido no estado estacionário, que, portanto, é dado por $E = (0, \bar{m}(\beta))$. A matriz jacobiana de F calculada nesse ponto é um operador diagonal

$$(DF)_{(0, \bar{m}(\beta))} = \begin{pmatrix} \frac{-b(1-\bar{m}(\beta))}{2B+b(1+\bar{m}(\beta))} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então, seja λ o autovalor não nulo de $DF_{(0, \bar{m}(\beta))}$. Logo, quando $C = 0$, $\bar{m}(\beta) = 0$ e $-1 < \lambda = -b/(2B+b) < 0$, assim, $\|(DF)_{(0, \bar{m}(\beta))}\| < 1$ e o estado estacionário é localmente estável.

Para $C > 0$, de (2.19) quando β cresce de 0 a $+\infty$, $\bar{m}(\beta)$ decresce de 0 para -1 . Logo, $\lambda(\bar{m})$ decresce de $\lambda(0) = -b/(2B+b) > -1$ para $\lambda(1) = -b/B < -1$ por hipótese. O estado estacionário se torna um ponto de sela localmente instável para algum valor crítico β_1 de forma que $\lambda(\bar{m}(\beta_1)) = -1$, e portanto, $\bar{m}(\beta_1) = -B/b$.

Para a estabilidade global quando $\beta < \beta_1$, primeiro notemos que para todo $m_t \in [-1, 1]$,

$$m_{t+1} = \tanh\left(\frac{\beta}{2} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{b(1-m_t)}{2B+b(1+m_t)} + 1 \right)^2 p_t^2 - C \right]\right) \geq \tanh\left(\frac{-\beta C}{2}\right) = \bar{m}(\beta)$$

De modo que podemos supor $m_0 \geq \bar{m}$. Agora, seja $L(m) = b(1-m_t)/[2B+b(1+m_t)]$. Notemos que L é uma função decrescente limitada, então L atinge seu máximo em $L(\bar{m})$. De (2.16) podemos escrever $p_{t+1} = -L(m_t)p_t$, de onde segue

$$|p_{t+1}| = |L(m_t)| \cdot |L(m_{t-1})| \cdots |L(m_1)| \cdot p_0 \leq |L(\bar{m})|^t p_0 \quad (2.20)$$

Como $\beta < \beta_1$ devemos ter $|L(\bar{m})| = |\lambda| < 1$ de (2.20) concluímos que quando $t \rightarrow +\infty$ teremos $p_t \rightarrow 0$ e portanto $m_t \rightarrow \bar{m}$. Isto é, F é globalmente estável. Notemos que o argumento permanece válido para todo β quando $C = 0$, de modo que também podemos concluir a estabilidade global de F nesse caso.

Para o item 3., notemos que, quando $\beta = \beta_1$, o autovalor associado a $\bar{m}$ é $\lambda(\bar{m}) = -1$. Isso nos diz que se o sistema apresentar bifurcação local pelo parâmetro β , ela será do tipo duplicação de período. Para obter mais informações sobre o produto dessa bifurcação, vamos usar a redução à variedade central fornecida pelo Lema A.4.1 calculando a forma normal crítica que fornece o gráfico dessa variedade a fim de aplicar o Teorema A.4.5.

Por definição, para $\beta = \beta_1$ temos que o autovalor não nulo da matriz jacobiana calculada no estado estacionário é $\lambda_1 = -1$. Assim, para os cálculos, vamos utilizar os

autovetores $q = p = (1, 0)$. Assim $\langle p, q \rangle = 1$ e

$$(DF)_{0, \overline{m}(\beta_1)} q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -q$$

$$(DF)_{0, \overline{m}(\beta_1)}^T p = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -p$$

Começamos por calcular $B(q, q)$, que de (A.8), segue

$$B(q, q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial p \partial p} \Big|_{(0, \overline{m}(\beta_1))} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial p \partial p} \Big|_{(0, \overline{m}(\beta_1))} \end{pmatrix}, \quad C(q, q, q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^3 F_1}{\partial p \partial p \partial p} \Big|_{(0, \overline{m}(\beta_1))} \\ \frac{\partial^3 F_2}{\partial p \partial p \partial p} \Big|_{(0, \overline{m}(\beta_1))} \end{pmatrix}$$

Uma vez que

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial p \partial p} = -b^2 \beta_1^2 p^2 (\xi(m))$$

$$+ \frac{b\beta_1}{2} \left[1 - \tanh^2 \left(\frac{\beta_1}{2} \left(\frac{bp^2}{2} \left(\frac{b(1-m)}{2B+b(1+m)} + 1 \right)^2 - C \right) \right) \right] \left(\frac{b(1-m)}{2B+b(1+m)} + 1 \right)^2.$$

temos

$$B(q, q) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b\beta_1}{2} \left(\frac{b(1+\frac{B}{b})}{2B+b(1-\frac{B}{b})} + 1 \right)^2 \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\beta_1 C}{2} \right) \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2b\beta_1 \left(1 - \left(\frac{B}{b} \right)^2 \right) \end{pmatrix}$$

Do mesmo modo temos $C(q, q, q) = (0, 0)^T$. Ainda

$$((DF)_{(0, \overline{m}(\beta_1))} - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$((DF)_{(0, \overline{m}(\beta_1))} - I)^{-1} \cdot B(q, q) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2b\beta_1 \left[1 - \left(\frac{B}{b} \right)^2 \right] \end{pmatrix}$$

Uma vez que q e $((DF)_{(0, \overline{m}(\beta_1))} - I)^{-1} \cdot B(q, q)$ são ortogonais, basta calcular as seguintes derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial p \partial m} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial m \partial p} = \frac{b^2(1-m)}{(2B+b(1+m))^2} + \frac{b}{2B+b(1+m)},$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial p \partial m} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial m \partial p} = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
B(q, ((DF)_{(0, \overline{m}(\beta_1))} - I)^{-1} \cdot B(q, q)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial p \partial m} \Big|_{(0, \overline{m}(\beta_1))} p_1 m_2 + \frac{\partial^2 F_1}{\partial m \partial p} \Big|_{(0, \overline{m}(\beta_1))} p_2 m_1 \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial p \partial m} \Big|_{(0, \overline{m}(\beta_1))} p_1 m_2 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial m \partial p} \Big|_{(0, \overline{m}(\beta_1))} p_2 m_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2b\beta_1 \left[1 - \left(\frac{B}{b} \right)^2 \right] \left(\frac{b^2(1 - \overline{m}(\beta_1))}{(2B + b(1 + \overline{m}(\beta_1)))^2} + \frac{b}{2B + b(1 + \overline{m}(\beta_1))} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2b\beta_1 \left[1 - \left(\frac{B}{b} \right)^2 \right] \frac{2b}{B + b} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Finalmente, calculando o coeficiente c_0 da forma normal,

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) + 3B(q, (I_n - A)^{-1} B(q, q)) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle p, B(q, (I_n - A)^{-1} B(q, q)) \rangle \\
&= -\frac{2b^2}{B + b} \beta_1 \left[1 - \left(\frac{B}{b} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Aplicando na Equação (A.21) do Apêndice A obtemos a seguinte forma normal para a bifurcação primária.

$$z_{t+1} = f(z_t) = -z_t + \frac{2b^2}{B + b} \beta_1 \left[1 - \left(\frac{B}{b} \right)^2 \right] z_t^3 + O(z^4).$$

Agora, calculando o coeficiente $c(0)$ em (A.19), temos.

$$c(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(0, \beta_1) + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 f}{\partial p^3}(0, \beta_1) = \frac{4b}{B + b} \beta_1 \left[1 - \left(\frac{B}{b} \right)^2 \right] > 0.$$

Do Teorema A.4.5 segue que $\beta > \beta_1$ surge um ciclo de período 2 estável formado durante a bifurcação de duplicação de período quando $\beta = \beta_1$. $\square$

O próximo resultado trata de uma das bifurcações entre as bifurcações com ressonância mais difíceis de se analisar: a ressonância de ordem 4. Como explicamos na Seção A.4, nem todas as condições de não degenerescência podem ser expressas analiticamente, veja [59]. No caso do modelo BH97, a dificuldade se dá pela falta de condições necessárias para verificar as desigualdades presentes no Teorema A.4.7; desse modo, estabeleceremos o resultado pelo menos para os valores presentes na Tabela 3.

Teorema 2.2.2 (Bifurcação Secundária). *Seja β_1 o primeiro valor de bifurcação para o qual é criado o ciclo de período 2, $\{(p, m), (-p, -m)\}$. Existe $\beta_2 > \beta_1$ tal que:*

1. O ciclo $\{(\tilde{p}, \tilde{m}), (-\tilde{p}, \tilde{m})\}$ é estável para $\beta_1 < \beta < \beta_2$.
2. Em $\beta = \beta_2$ o sistema sofre uma bifurcação de Hopf com ressonância forte (1:2). Ou seja, a matriz jacobiana $DF_{(p,m)}^2$ apresenta dois autovalores iguais, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Para valores de β próximos de β_2 esses autovalores são complexos.
3. Para $\beta > \beta_2$ com β próximo à β_2 o ciclo de período 2 se torna instável. Como resultado, ao menos para os valores de parâmetros próximos aos da Tabela 3, temos a criação de par de ciclos de período 4 estáveis e um par de ciclos de período 4 hiperbólico do tipo sela. Todos os 4 ciclos são simétricos pelo eixo m .³

Demonstração. Considere o sistema $F(p, m) = (f(p, m), g(p, m))$ definido em (2.18). Sejam $\tilde{m} = -B/b$ e $\tilde{p}$ a solução positiva de $\tanh((\beta/2)(2b\tilde{p}^2 - C)) = \tilde{m}$. Temos

$$f(\tilde{p}, \tilde{m}) = \frac{-b(1 - \tilde{m})}{2B + b(1 + \tilde{m})}\tilde{p} = -\tilde{p},$$

logo $\partial f / \partial p(\tilde{p}, \tilde{m}) = -1$. Um cálculo direto fornece a matriz Jacobiana no ponto periódico de período 2 $(\tilde{p}, \tilde{m})$:

$$DF_{(\tilde{p}, \tilde{m})} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2b\tilde{p}}{b+B} \\ 2b\beta\tilde{p}\tanh'\left(\frac{\beta}{2}(2b\tilde{p}^2 - C)\right) & -2b\beta\frac{b}{b+B}\tilde{p}^2\tanh'\left(\frac{\beta}{2}(2b\tilde{p}^2 - C)\right) \end{pmatrix}$$

ou, denotando por $\gamma = \frac{b\tilde{p}}{b+B}$ e $\nu = 2b\beta\tilde{p}\tanh'\left(\frac{\beta}{2}(2b\tilde{p}^2 - C)\right)$,

$$DF_{(\tilde{p}, \tilde{m})} = \begin{pmatrix} -1 & 2\gamma \\ \nu & -\gamma\nu \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad DF_{(-\tilde{p}, \tilde{m})} = \begin{pmatrix} -1 & -2\gamma \\ -\nu & -\gamma\nu \end{pmatrix}.$$

A estabilidade do ciclo de período dois é, então, determinada pela matriz $DF_{(\tilde{p}, \tilde{m})} \cdot DF_{(-\tilde{p}, \tilde{m})} = DF_{(\tilde{p}, \tilde{m})}^2$ que fornece,

$$DF_{(p,m)}^2 = \begin{pmatrix} 1 - 2\gamma\nu & 2\gamma^2\nu - 2\gamma \\ \nu - 2\gamma\nu^2 & -2\gamma\nu + \gamma^2\nu^2 \end{pmatrix}.$$

Seu polinômio característico é

$$\det(DF_{(\tilde{p}, \tilde{m})}^2 - I\lambda) = \lambda^2 - \lambda(\gamma^2\nu^2 - 4\gamma\nu + 1) + \gamma^2\nu^2 = 0,$$

com discriminante $\Delta = (\gamma\nu - 1)^2(\gamma^2\nu^2 - 6\gamma\nu + 1)$. Quando β tende à $+\infty$, $\tilde{p}$ tende à $\sqrt{C/2b}$ e $\tanh((\beta/2)(2b\tilde{p}^2 - C))$ tende à $+\infty$, de modo que γ tende à $\frac{b}{b+B}\sqrt{C/2b}$ e ν tende à $+\infty$. Em particular, $\gamma\nu$ cresce de 0 para $+\infty$ com β tendendo à $+\infty$. Resolvendo as equações do segundo grau no discriminante para $\gamma\nu$ como variável temos que $(\gamma\nu - 1)^2 = 0$

³ Ver Figura 2 (d).

para $\gamma\nu = 1$ e $(\gamma^2\nu^2 - 6\gamma\nu + 1) < 0$ para $3 - 2\sqrt{2} < \gamma\nu < 3 + 2\sqrt{2}$. Assim, temos que $\Delta < 0$ para $3 - 2\sqrt{2} < \gamma\nu < 3 + 2\sqrt{2}$ exceto em $\gamma\nu = 1$, onde $\Delta = 0$. Além disso, o produto dos autovalores é $\gamma^2\nu^2$. Então, sejam β_2 e β^* os valores de β para os quais $\gamma\nu = 1$ e $\gamma\nu = 3 + 2\sqrt{2}$. Portanto, para $\beta < \beta_2$ suficientemente próximo de β_2 o ciclo de período 2 é estável com $DF_{(\tilde{p}, \tilde{m})}^2$ tendo autovalores complexos, segundo o Teorema 2.2.1. Para $\beta = \beta_2$, os autovalores de $DF_{(\tilde{p}, \tilde{m})}^2$ são iguais à -1 e para $\beta_2 < \beta < \beta^*$, o ciclo de dois períodos é instável com autovalores complexos. A expressão analítica para β_2 pode ser determinada através da definição que estabelece β como o valor para o qual $\gamma\nu = -1$. Obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{2b}{b+B} \cdot \left[\ln \left(\sqrt{\frac{-B+b}{B+b}} \right) + \frac{C\beta_2}{2} \right] \cdot \left[1 - \tanh^2 \left(\ln \left(\sqrt{\frac{-B+b}{B+b}} \right) \right) \right] = -1$$

de onde segue que

$$\beta_2 = \frac{1}{C} \left[\frac{b^2 + Bb}{b^2 - B^2} - \ln \left(\frac{-B+b}{B+b} \right) \right]. \quad (2.22)$$

Desse modo, para $\beta = \beta_2$, o ciclo periódico $\{(\tilde{p}, \tilde{m}), (-\tilde{p}, \tilde{m})\}$ então passa por uma bifurcação de Hopf com ressonância forte 1:2. Isso prova (i) e (ii).

Para provar a criação dos ciclos de período 4, dois estáveis e dois hiperbólicos, na bifurcação secundária para $\beta = \beta_2$, precisamos calcular a forma normal correspondente. Esses cálculos de forma normal são simplificados explorando a simetria em relação ao eixo m , reduzindo assim a bifurcação de Hopf de ressonância forte 1:2 de um ciclo de F de dois períodos a uma bifurcação de Hopf de ressonância forte 1:4 de um ponto fixo da aplicação $G = FT$, onde

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

de forma que $G = (-f(p, m), g(p, m))$. Para G , o ciclo $\{(-\tilde{p}, \tilde{m}), (\tilde{p}, \tilde{m})\}$ torna-se um único ponto fixo $(\tilde{p}, \tilde{m})$. Façamos uma substituição de variáveis, tomando $x = p$ e $y = -f(p, m)$. Desse modo, o sistema se escreve como

$$\begin{cases} x_{t+1} = -f(x_t, y_t) = y_t \\ y_{t+1} = g^*(x_t, y_t) = \frac{b \left[1 - \tanh \left(\frac{\beta}{2} \left(\frac{b}{2}(y_t + x_t)^2 - C \right) \right) \right]}{2B + b \left[1 + \tanh \left(\frac{\beta}{2} \left(\frac{b}{2}(y_t + x_t)^2 - C \right) \right) \right]} \cdot y_t. \end{cases}$$

Assim, o ponto fixo torna-se $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{y}, \tilde{y})$ único ponto com coordenada positiva que é solução da equação

$$\tanh \left(\frac{\beta}{2} (2b\tilde{y}^2 - C) \right) = -\frac{B}{b}. \quad (2.23)$$

Isto é,

$$\tilde{y} = l(\beta) = \sqrt{\frac{\ln \left(\sqrt{\frac{-B+b}{B+b}} e^{\frac{C\beta}{2}} \right)}{b\beta}}.$$

No caso da ressonância forte (1:4) os coeficientes da forma normal são dados pelas equações (A.33) e (A.34). Para esses cálculos, devemos calcular os coeficientes a_{ij} da expansão de Taylor, indicados em (A.31) que para $\theta = \pi/2$ são aproximados por

$$\begin{cases} a_{20} \approx -\frac{i}{4}(g_{20} + ig_{11} + g_{02}) \\ a_{11} \approx -\frac{i}{2}(g_{20} + g_{02}) \\ a_{02} \approx -\frac{i}{4}(g_{20} - ig_{11} - g_{02}) \\ a_{30} \approx -\frac{i}{8}(g_{30} + ig_{21} + g_{12} - ig_{03}) \\ a_{21} \approx -\frac{i}{8}(3g_{30} + ig_{21} + 3g_{12}) \end{cases}$$

Calculando os coeficientes da expansão em séries de potência para $g^*(x, y)$ no ponto $(0, 0)$ e utilizando a expressão (2.23) temos

$$Q = -\frac{(1-i)(g_{02} + g_{20})^2}{8} - \frac{(1+3i)(g_{02} + g_{20})(g_{02} + ig_{11} + g_{20})}{16} - \frac{i(3g_{12} + ig_{21} + 3g_{30})}{8} + \frac{(1+i)(g_{02} + ig_{11} + g_{20})^2}{16}. \quad (2.24)$$

$$R = -\frac{i\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(-g_{02} - ig_{11} + g_{20})\left(\frac{g_{02}}{2} + \frac{ig_{11}}{2} - \frac{g_{20}}{2} - \frac{i(g_{02} + g_{20})}{2}\right)}{4} - \frac{i(ig_{03} - g_{12} - ig_{21} + g_{30})}{8}. \quad (2.25)$$

O cálculo dos coeficientes g_{jk} está apresentado no Apêndice A. Dessa forma, obtemos que a forma normal em coordenadas complexas é dada por

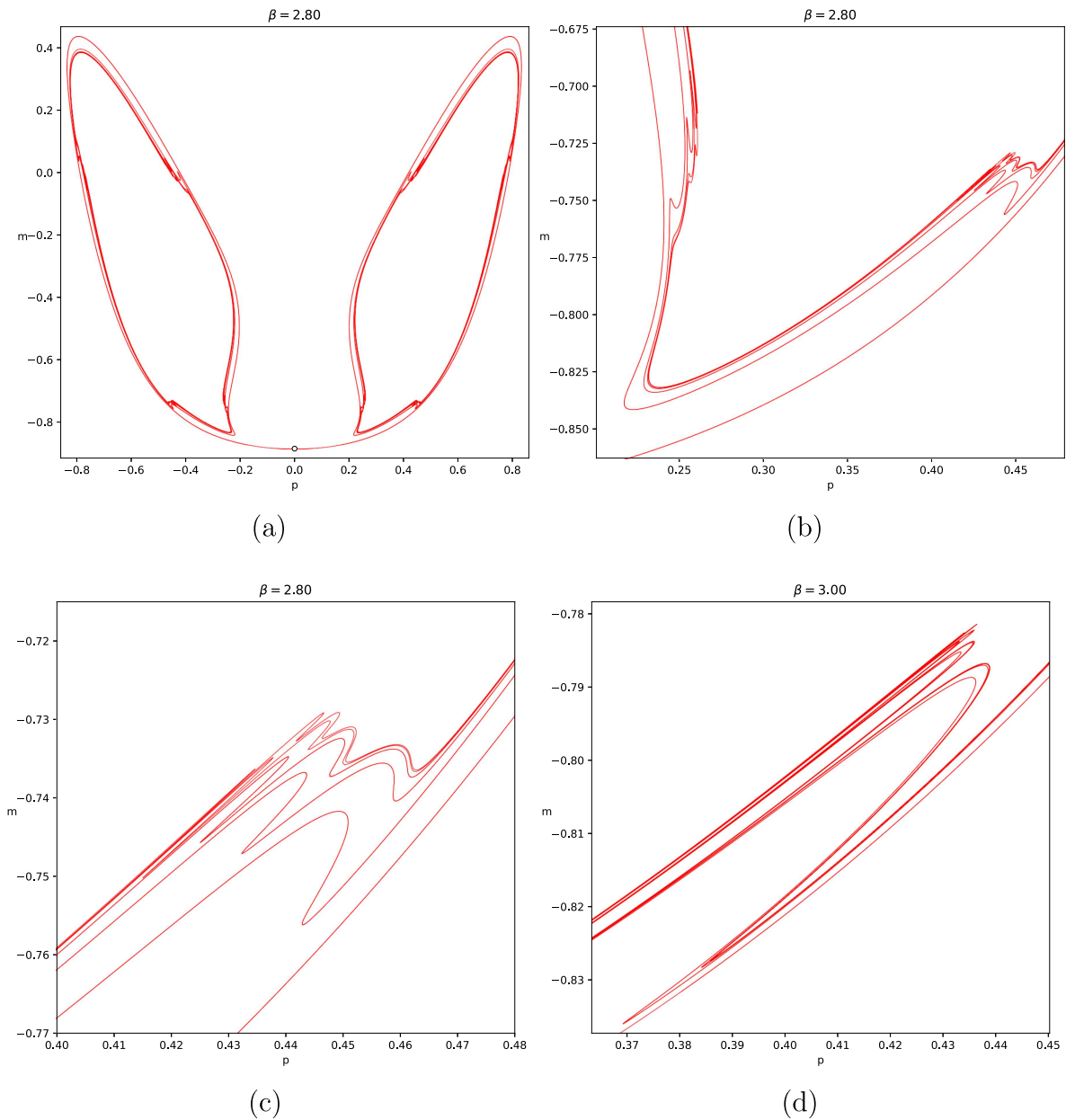
$$z_{t+1} = re^{i\theta}z_t + Qz_t^2\bar{z}_t + Rz^3 + O(\|z\|^5).$$

Como os cálculos ficam complexos o bastante para não permitir uma aplicação geral do Teorema A.4.7, vamos nos limitar a continuar a demonstração para os valores de parâmetro apresentados na Tabela 3. Para esse caso, utilizando (2.24) e (2.25) temos $Q = q_1 + q_2i \approx 0.947 - 1.211i$ e $R = r_1 + r_2i \approx 0.024 - 0.285i$.

Uma vez que $|Q| \approx 2.36333 > 0.08180 \approx |R|$ com $q_2 \approx -1.211 < 0$, segue que, para valores de β maiores que β_2 e quando β é próximo a β_2 , a função composta $G = FT$ exibe a presença de um ciclo estável de período quatro, denotado por $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, além de um ciclo do tipo sela também de período quatro, simbolizado por $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. Explorando a propriedade de simetria expressa por $FT = TF$, inferimos que a sequência $\{a_1, Ta_2, a_3, Ta_4\}$ bem como seu correspondente simétrico $\{Ta_1, a_2, Ta_3, a_4\}$ correspondem a dois ciclos estáveis de período quatro associados à aplicação F . De maneira análoga, as sequências $\{z_1, Tz_2, z_3, Tz_4\}$ e $\{Tz_1, z_2, Tz_3, z_4\}$ manifestam-se como dois ciclos do tipo sela de período quatro.

□

Figura 3 – Figura não rigorosa da variedade instável de F no ponto E , a órbita heteroclínica formada com a ressonância (1:4).



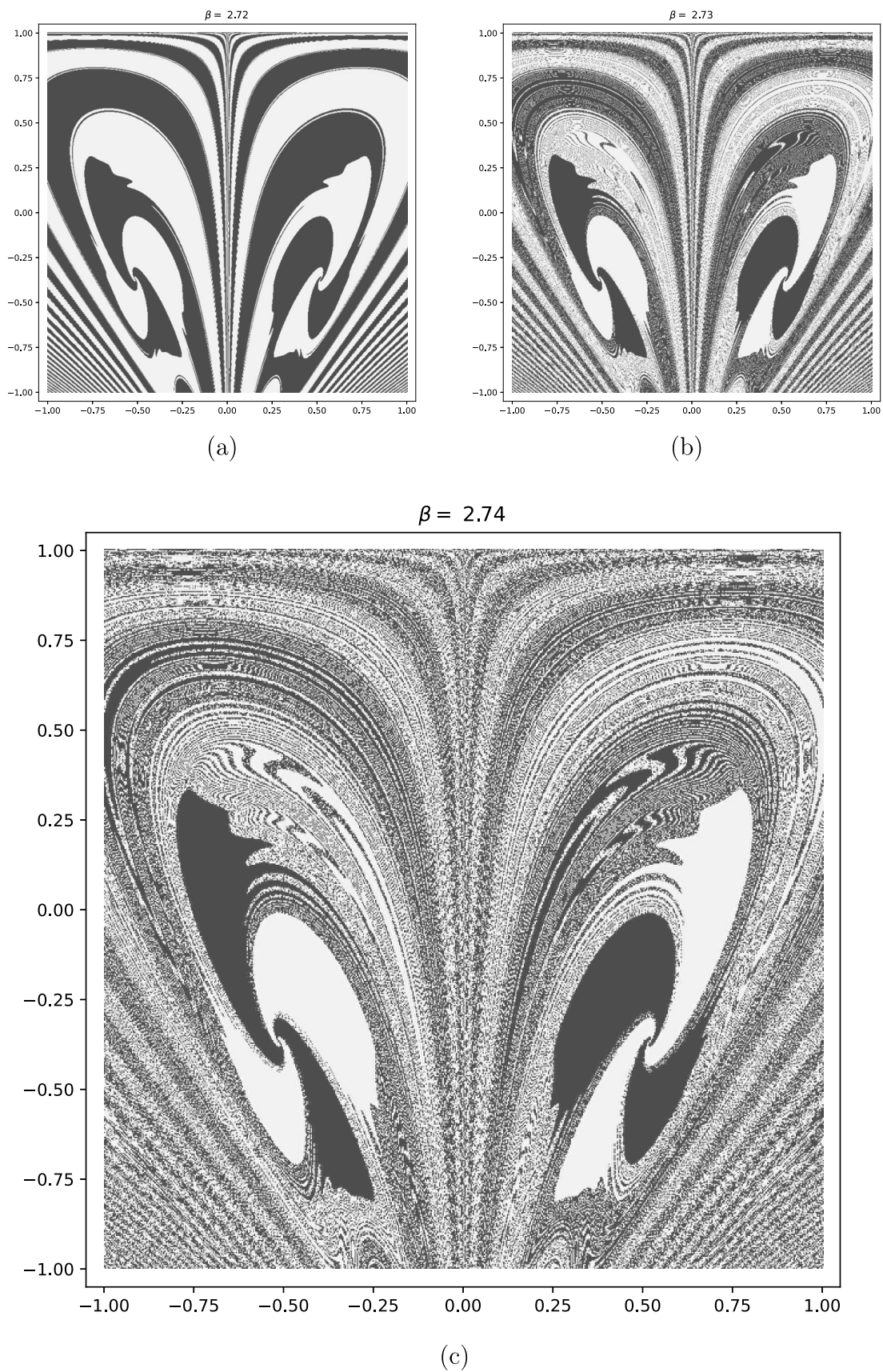
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para os valores da Tabela 3, temos $\beta_2 \approx 2.36594$. Note, no entanto, que, diferente da bifurcação primária, a análise qualitativa não foi capaz de fornecer uma expressão analítica para os quatro ciclos hiperbólicos criados na bifurcação secundária. Esse fato dificulta a interpretação da dinâmica do sistema quando $\beta > \beta_2$. Desse modo, para compreender as consequências da bifurcação secundária, vamos nos basear nos conceitos apresentados, assim como em evidências numéricas. Começamos considerando a variedade instável do ponto de sela E . Com o aumento de β para valores acima de β_2 , o formato de $W^u(E)$ mostrado na Figura 3 indica a criação de órbitas heteroclínicas pela bifurcação secundária

envolvendo a variedade instável de E e a variedade estável dos ciclos periódicos de sela $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ e $\{z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^*\}$. Como E e qualquer ponto de um dos ciclos periódicos de sela não formam um ciclo, não é esperado que esse comportamento, por si só, implique em uma dinâmica complexa, como explicado na Seção A.3 do Apêndice A.

Uma característica importante da bifurcação secundária é a criação de dois ciclos estáveis de período quatro coexistentes, que são simétricos em relação ao eixo vertical m . Quase toda solução inicial, na medida de Lebesgue, deve convergir para um dos ciclos estáveis, de forma similar à solução inicial simulada na Figura 2 —(d). Essa convergência se dá, exceto para um conjunto com medida de Lebesgue nula, consistindo dos pontos que convergem para o estado estacionário instável, o ciclo instável de período dois ou as selas de período quatro. Essa convergência para um dos dois ciclos estáveis depende do estado inicial (p_0, m_0) . Na Figura 4, as bacias de atração dos dois ciclos estáveis de período quatro são mostradas em preto e branco para diferentes valores de β . Em preto, indicam as soluções no espaço de fase convergindo para o atrator $\{a_1, Ta_2, a_3, Ta_4\}$ e em branco as soluções convergindo para o atrator $\{a_1, Ta_2, a_3, Ta_4\}$.

Figura 4 – Bacias de atração para os dois ciclos atratores e diferentes valores de β .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para os valores de parâmetros da Tabela 3 e $\beta = 2.72$, as duas bacias são bastante regulares e, para a maioria dos estados iniciais, não é difícil prever para qual dos dois ciclos estáveis de período quatro o caminho temporal converge. No entanto, para $\beta = 2.74$, a situação muda drasticamente. A fronteira da bacia agora parece ser um conjunto muito complicado. Para valores mais altos e para a maioria dos estados iniciais, será difícil prever para qual dos dois ciclos estáveis de período quatro o caminho temporal irá convergir.

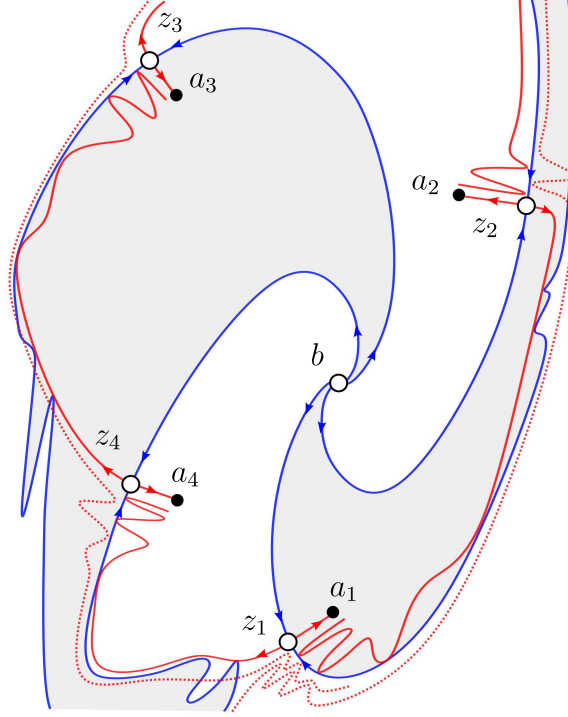
A aparente complexidade e a estrutura fractal das fronteiras das bacias, detectadas numericamente, para valores de β acima de um valor crítico $\beta_3 > \beta_2$, são causadas por uma bifurcação heteroclínica entre os ciclos de sela criados. Desse modo, essa bifurcação é uma implicação imediata e está intimamente associada à bifurcação secundária, devido à sua ressonância. Com a criação das órbitas heteroclínicas, envolvendo pontos hiperbólicos de sela de um mesmo ciclo periódico, a bifurcação heteroclínica também é homoclínica para os ciclos periódicos, veja Seção A.3. Utilizando o programa computacional DUNRO, Brock e Hommes [15] foram capazes de calcular uma aproximação numérica para o valor crítico da bifurcação heteroclínica, $\beta_3 \approx 2.728$, para os valores presentes na Tabela 3.

A Figura 5 ilustra a disposição das variedades invariantes dos ciclos de sela simétricos $\{z_1, Tz_2, z_3, Tz_4\}$ e $\{Tz_1, z_2, Tz_3, z_4\}$, para valores de preço positivos, e como suas variedades estáveis formam a fronteira de bacia entre os dois ciclos estáveis de período quatro simétricos $\{a_1, Ta_2, a_3, Ta_4\}$ e $\{Ta_1, a_2, Ta_3, a_4\}$, resultado garantido pela Proposição A.5.1. Para $\beta < \beta_3$, os dois ramos da variedade instável de cada sela de período quatro se aproximam de pontos das duas diferentes órbitas estáveis de período quatro. Por exemplo, os dois ramos da variedade instável do sela z_1 se aproximam dos pontos estáveis de período quatro a_1 e Ta_1 , respectivamente.

Na bifurcação heteroclínica em β_3 , um ramo da variedade instável de z_1 (respectivamente z_4, z_3, z_2) é tangente à variedade estável de z_4 (respectivamente z_3, z_2 e z_1). Para β ligeiramente maior que β_3 , devem existir interseções heteroclínicas transversais, bem como interseções homoclínicas transversais. Por exemplo, utilizando a Figura 5, o leitor pode verificar que, para $\beta > \beta_3$, temos:

1. O ramo esquerdo da variedade instável de z_1 cruza a variedade estável de z_4 , entrando na bacia de atração (cinza) de a_3 ;
2. A variedade instável de z_1 cruza em seguida a variedade estável de z_3 , entrando na bacia de atração (branca) de a_1 ;
3. A variedade instável de z_1 cruza então a variedade estável de z_2 , entrando na bacia de atração (cinza) de a_1 ;
4. Finalmente, a variedade instável de z_1 cruza a variedade estável de z_1 , entrando na bacia de atração (branca) de a_1 .

Figura 5 – Bacias de atração para o valor crítico $\beta = \beta_3$. As linhas contínuas azul e vermelha representam, respectivamente, as variedades estáveis e instáveis dos pontos periódicos de sela. Em cinza e branco, as bacia de atração dos ciclos $\{a_1, Ta_2, a_3, Ta_4\}$ e $\{Ta_1, a_2, Ta_3, a_4\}$, respectivamente. Em vermelho tracejado a variedade instável do estado estacionário E .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Assim, devem existir pontos homoclínicos associados aos selas de período quatro $\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\}$. Em particular, segue-se que, para β ligeiramente maior que β_3 , as duas bacias de atração dos ciclos de período quatro, ou seja, as regiões cinza e branca, que já começavam a invadir uma à outra antes de β_3 , agora ganham dinâmica equivalente à da ferradura e, portanto, topologicamente caótica.

Para ilustrarmos a relevância dessa dinâmica, vamos considerar o modelo BH97 munido de um ruído aleatório gaussiano $\varepsilon_{i,t} \sim N(0, \sigma_i)$, onde $i = 1, 2$, de acordo com o sistema

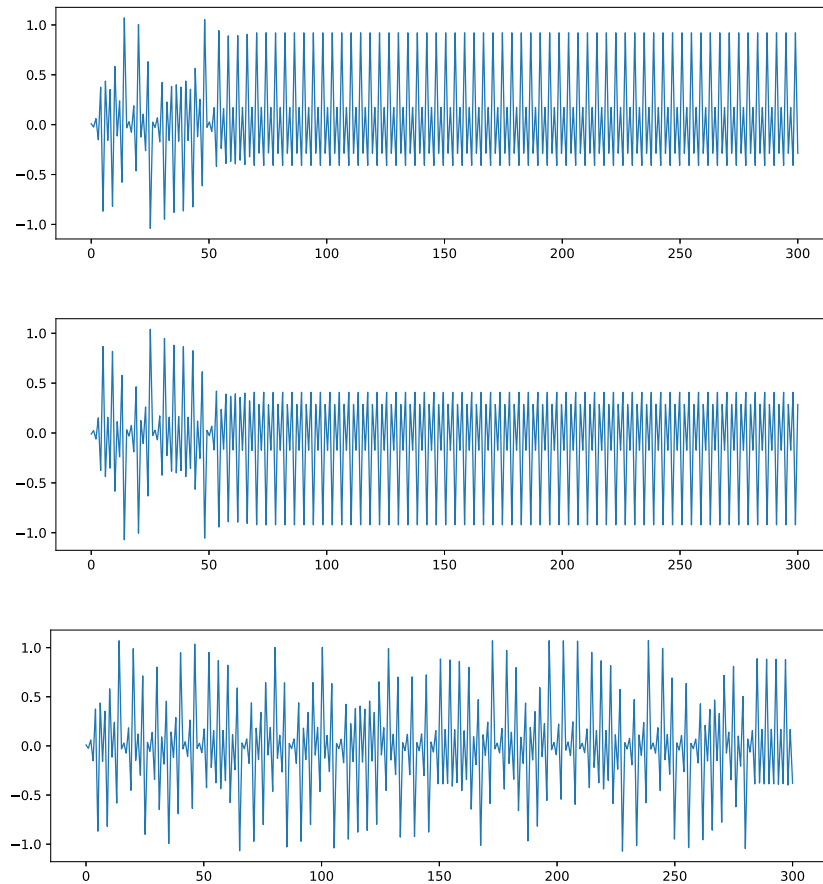
$$\begin{cases} p_{t+1} = \frac{-b(1-m_t)p_t}{2B+b(1+m_t)} + \varepsilon_{1,t} \\ m_{t+1} = \tanh\left(\frac{\beta}{2}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{b(1-m_t)}{2B+b(1+m_t)} + 1\right)^2 p_t^2 - C\right]\right) + \varepsilon_{2,t} \end{cases}$$

Considere $2.73 < \beta < 3.8$ e os parâmetros dados pela Tabela 3. Como discutimos anteriormente após a bifurcação secundária, a bacia de atração dos ciclos de período quatro estáveis assume uma estrutura fractal decorrente da bifurcação homoclínica dos ciclos de período quatro de sela, como é possível observar na Figura 4. Dessa forma, o sistema apresenta dependência sensível às condições iniciais, e embora a dinâmica de longo

prazo seja simples, tendendo quase sempre, com relação à medida de Lebesgue, a um dos ciclos estáveis, a dinâmica de equilíbrio é sensível a ruídos. Dessa forma, na presença de pequenos ruídos, os caminhos temporais saltam de uma bacia de atração para outra de maneira aparentemente aleatória.

A Figura 6 mostra duas séries temporais regulares sem ruído convergindo para cada um dos dois ciclos estáveis de período quatro e uma série com ruído apresentando uma alternância irregular entre os dois ciclos estáveis de período quatro. Então, espera-se que, com o aumento do número de pontos periódicos, consequência da dinâmica caótica, a dinâmica de equilíbrio, perturbada por um ruído, vague por esses infinitos períodos e produza os efeitos observados em dados econômicos reais.

Figura 6 – Séries de preços do modelo determinístico e perturbado aleatoriamente com $\beta = 3.8$ para as soluções iniciais (p_0, m_0) . – (a) $(p_0, m_0) = (0.001, -0.946)$. – (b) $(p_0, m_0) = (-0.001, -0.946)$. – (c) $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.02$ e $(p_0, m_0) = (-0.001, -0.946)$.



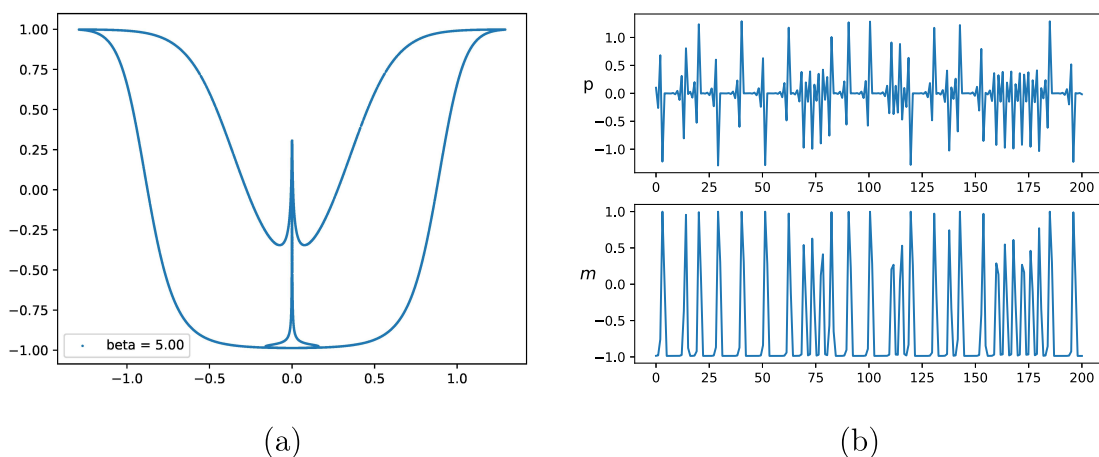
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2.3 BIFURCAÇÃO HOMOCLÍNICA: O SURGIMENTO DE UM ATRATOR ESTRANHO

O objetivo dessa seção é estabelecer a existência de um atrator estranho para um conjunto não vazio de valores de β . Como apresentado no Apêndice A, o termo atrator estranho, às vezes utilizado em artigos em finanças e economia como atrator caótico, se refere a um conjunto compacto Λ de pontos no espaço de fase de um sistema dinâmico caótico para o qual existe um conjunto aberto U , com medida de Lebesgue diferente de zero, tal que se $x \in U$ então $\omega(x) \in \Lambda$ e a órbita positiva de x é caótica. Ou seja, as trajetórias convergem para Λ , mas com uma estrutura extremamente complexa e não periódica. Assim, diferente dos atratores regulares, como pontos fixos ou ciclos periódicos, os atratores estranhos possuem uma geometria fractal e suas órbitas são sensíveis às condições iniciais, o que faz com que pequenas perturbações possam resultar em trajetórias muito diferentes.

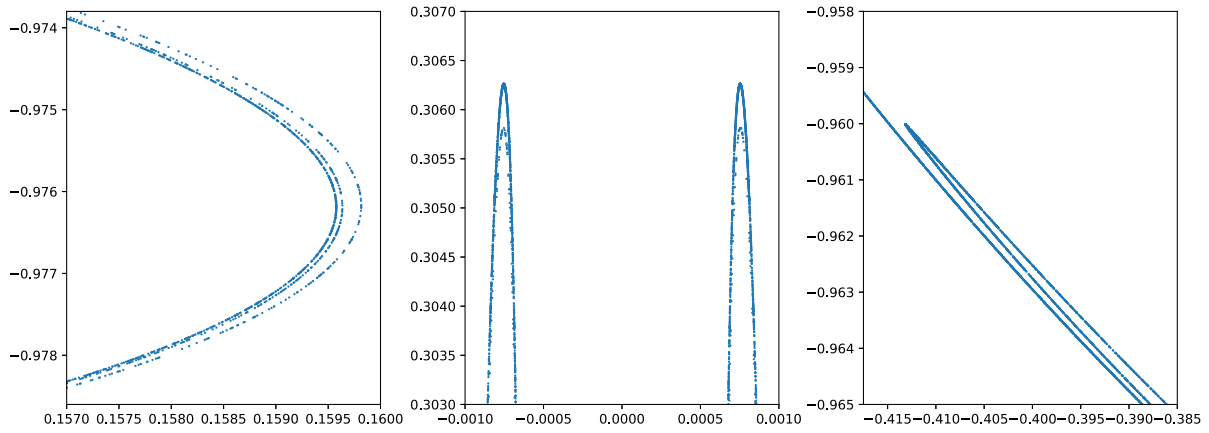
A Figura 7 (a) mostra uma simulação numérica do sistema com parâmetros da Tabela 3 e $\beta = 5$. Essa simulação apresenta uma região com muita densidade de pontos que formam o conjunto atrator. Devido à dimensão fractal próxima de 1, o sistema discreto formado por pontos assemelha-se a uma curva. Compare a densidade do atrator estranho com os atratores presentes na Figura 2. Aproximações de algumas regiões do atrator estranho apresentadas na Figura 8 mostram como as órbitas se doblam e acumulam, indicando a presença de uma ferradura no sistema responsável por gerar essa característica geometria fractal.

Figura 7 – (a) Atrator estranho para $\beta = 5$ – (b) Séries temporais de p e m .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 8 – Regiões ampliadas da simulação presente na Figura 7 para $\beta = 5$, mostram o acúmulo das órbitas devido a presença da ferradura.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para ilustrar a complexidade da dinâmica inerente à presença de um atrator estranho no sistema, considere um mercado heterogêneo com dois preditores; um preditor sofisticado H_1 com um custo informacional pequeno, mas positivo, e outro preditor simples H_2 gratuito, e um cenário em que os preços estão próximos ao valor do estado estacionário, e quase todos os agentes utilizam o preditor simples. Nesse contexto, os preços se afastarão do equilíbrio, e o erro de previsão do preditor H_2 aumentará. Como resultado, mais agentes estarão dispostos a pagar o custo informacional para adquirir o preditor H_1 . Se a intensidade de escolha entre as crenças for alta, assim que o lucro líquido do preditor H_1 superar o do preditor H_2 , quase todos os agentes migrarão para H_1 . Isso fará com que os preços retornem ao valor de equilíbrio, onde permanecerão por algum tempo. Com os preços novamente próximos ao estado estacionário, o erro de previsão de H_2 diminuirá, enquanto o lucro líquido de H_1 se tornará negativo devido ao custo informacional. Quando a intensidade da escolha for elevada, a maioria dos agentes voltará a adotar o preditor H_2 , reiniciando o ciclo.

Portanto, ao mesmo tempo que existe uma tendência dos agentes utilizarem o preditor com o menor erro, existe um feedback negativo que afasta o preço do equilíbrio, quando a maioria dos agentes usa o preditor sofisticado, e um feedback positivo que aproxima o preço do equilíbrio, quando todos utilizam o preditor simples. A interação entre essas forças opostas pode gerar dinâmicas complexas de equilíbrio racional adaptativo, especialmente quando a intensidade da mudança de crenças é alta. Em um mercado instável, com custos informacionais para preditores sofisticados, a instabilidade local e dinâmicas irregulares podem ser características de um equilíbrio totalmente racional.

Na Figura 7 (b) encontramos uma simulação das séries temporais de p e m . Cada pico na série de m e sua correspondente oscilação na série de p representam um "ciclo"

descrito no parágrafo anterior, quando uma fração dos agentes busca informação, levando m para perto de $+1$ e logo em seguida deixam de buscá-la, levando m de volta a -1 . Essa variação de preços e na preferência dos agentes já poderia ser obtida na bifurcação secundária estudada no Teorema 2.2.2, ver Figura 2 (d), mas de forma previsível e regular. A diferença agora é que, após a bifurcação homoclínica, uma cascata de infinitas bifurcações de duplicação de período é gerada. Assim, cada "ciclo" de oscilação de preços equivale a um período nessa infinidade de possibilidades que depende sensivelmente das condições iniciais. Portanto, a flutuação dos preços é caracterizada por uma mudança irregular entre fases de alta volatilidade e fases de baixa volatilidade, essa última perto da volatilidade esperada para o preço fundamental.

Assim, como o atrator está contido na variedade instável do estado estacionário, o formato geométrico dessa variedade desempenha um papel fundamental na compreensão do mecanismo econômico responsável pela flutuação irregular dos preços. No que se segue, vamos investigar a variedade instável $W_\infty^u(E)$ do estado estacionário no caso limite $\beta = +\infty$, que fornecerá um guia de referência para as órbitas de F quando β é finito. Usando o formato geométrico da variedade instável $W_\beta^u(E)$ para β finito, estabeleceremos o Teorema principal desse capítulo sobre a criação de ferradura e a bifurcação homoclínica associada. Por fim, usaremos o Teorema A.5.4 para deduzir a existência de um atrator estranho para o modelo cobweb com crenças heterogêneas, concluindo que o sistema dinâmico associado é caótico para certos valores de β .

Da equação (2.16), temos

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} \left(\frac{b(1-m_t)}{2B+b(1+m_{t-1})} + 1 \right)^2 p_t^2 - C &= \frac{b}{2} \left(\frac{b(1-m_t)}{2B+b(1+m_{t-1})} p_t + p_t \right)^2 - C \\ &= \frac{b}{2} (p_t - p_{t+1})^2 - C \\ &= \frac{b}{2} (p_{t+1} - p_t)^2 - C. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Então a tangente hiperbólica em (2.17) será -1 se (2.26) for negativo e $+1$ se (2.26) for positivo, de onde segue que

$$m_{t+1} = \begin{cases} +1 & , \text{ se } |p_{t+1} - p_t| > \sqrt{\frac{2C}{b}} \\ -1 & , \text{ se } |p_{t+1} - p_t| \leq \sqrt{\frac{2C}{b}} \end{cases}. \quad (2.27)$$

A equação (2.27) expressa o fato de que quando $\beta = +\infty$ os agentes escolhem infinitamente rápido o preditor ótimo entre os preditores racional e o ingênuo. Além disso, (2.27) mostra que no caso limite as variedades invariantes apresentam saltos de descontinuidade decorrentes da forma instantânea com que os agentes formam as expectativas. Mesmo quando há custo pela informação $C > 0$ e o mercado é localmente instável, o sistema

com intensidade de escolha infinita admite um ponto fixo hiperbólico que é um ponto de equilíbrio que é globalmente estável, isto é, após um certo número finito de iterações, toda condição inicial é levada a esse ponto.

Teorema 2.3.1. *Para $\beta = +\infty$, mesmo sob as hipóteses $C > 0$ e $b/B > 1$, o sistema converge para o estado estacionário hiperbólico $E = (0, -1)$ globalmente estável.*

Demonstração. O estado estacionário para o sistema é $E = (0, \bar{m})$. Como $\beta = +\infty$ e temos $\bar{m}(\beta) = \tanh(-(\beta C)/2)$ devemos ter que $E = (0, -1)$. O autovalor não nulo da matriz $(DF)_E$ é

$$\lambda = \frac{-b(1 - \bar{m}(+\infty))}{2B + b(1 + \bar{m}(+\infty))} = -\frac{b}{B} < -1.$$

Logo E é um ponto de sela.

De (2.27), para toda condição inicial (p_0, m_0) , em uma iteração todos os agentes terão esperanças racionais ou ingênuas, isto é, $m_1 = 1$ ou $m_1 = -1$. Então basta considerarmos condições iniciais com m_0 iguais a esses valores. Para $m_0 = -1$ e $p_0 \neq 0$, de (2.16) teremos $|p_t| = (b/B)^t \cdot |p_0|$ e, portanto,

$$|p_{t+1} - p_t| > \left(\frac{b}{B} - 1\right) \left(\frac{b}{B}\right)^t |p_0|.$$

Assim, o módulo da variação do preço forma uma sequência crescente e, depois de um certo número de iterações, ultrapassará $\sqrt{2C/b}$ levando, assim, m ao valor $+1$. Para $m_0 = +1$, na próxima iteração teremos $p_1 = 0$ devido a (2.16), assim (p_0, m_0) assumirá um dos valores $E = (0, -1)$ ou $G = (0, +1)$. Como para $p_1 = 0$, teremos $p_2 = 0$ e $m_2 = -1$, de modo que $F(G) = E$. Segue que todos os estados iniciais são levados à E após um certo número de iterações, de modo que E é globalmente estável. $\square$

Vamos investigar a variedade instável do estado estacionário no caso limite $\beta = +\infty$. Antes, precisamos definir algumas notações que facilitarão a escrita. A variedade instável de E para esse caso será linear por partes, assim considere os pontos A , B e C . Para descrever a variável instável utilizaremos a notação de polígonos ABC ⁴, ao invés da notação por segmentos de reta $\overline{AB} * \overline{BC} * \overline{CA}$. Mas deve-se ter em mente que a variedade instável não é necessariamente uma curva fechada. Denotamos por F_∞ a função $F_\beta(p, m)$ definida em (2.18) para o caso $\beta = +\infty$ e para um ponto $X = (p, m)$ denotamos por abuso de notação, $p(X) = p$ o preço e $m(X) = m$ a racionalidade dos agentes no ponto X . Definimos

$$A_0 = \left(\frac{B}{B+b} \sqrt{\frac{2C}{b}}, -1 \right) = (p(A_0), -1).$$

⁴ Indicando o polígono cujos vértices são os pontos dados, que nesse caso é um triângulo mas a figura que descreve a variedade instável será um polígono degenerado.

Seja A_{-1} o ponto tal que $F_\infty(A_{-1}) = A_0$. Notemos que

$$p(A_{-1}) = -\frac{B^2}{b(B+b)} \cdot \sqrt{\frac{2C}{b}} \quad \text{e} \quad |p(A_0) - p(A_{-1})| = \left| \frac{B^2 + bB}{b(b+B)} \right| \sqrt{\frac{2C}{b}} = \frac{B}{b} \sqrt{\frac{2C}{b}},$$

temos $|p(A_0) - p(A_{-1})| < \sqrt{2C/b}$, logo $m(A_0) = -1$. Assim, temos que A_0 é um ponto do sistema definido por F_∞ . Podemos ilustrar a dinâmica calculando as quatro primeiras iterações de A_0 . Para o ponto $A_1 = F_\infty(A_0)$, pela equação (2.16) temos

$$p(A_1) = -\frac{b}{B+b} \cdot \sqrt{\frac{2C}{b}} \quad \text{e} \quad |p(A_1) - p(A_0)| = \left| \frac{b+B}{b+B} \right| \sqrt{\frac{2C}{b}} = \sqrt{\frac{2C}{b}}.$$

Logo devemos ter $A_1 = ((-b/B)p(A_0), -1)$. Analogamente, para $A_2 = F_\infty^2(A_0)$,

$$p(A_2) = \frac{b^2}{B(B+b)} \cdot \sqrt{\frac{2C}{b}} \quad \text{e} \quad |p(A_2) - p(A_1)| = \left| \frac{b^2 + bB}{B(b+B)} \right| \sqrt{\frac{2C}{b}} = \frac{b}{B} \sqrt{\frac{2C}{b}},$$

temos $|p(A_2) - p(A_1)| > \sqrt{2C/b}$, assim $A_2 = ((-b/B)^2 p(A_0), +1)$. Segue que A_0 é o ponto onde todos os agentes são ingênuos, com $m = -1$, e na próxima iteração todos se tornarão racionais, com $m = 1$. Para cada ponto P denotamos por P^* sua reflexão com relação ao eixo m .

Seja $C_0 = ((b/B)p(A_0), 1 - 2B/b)$. Então $F_\infty(C_0) = (-p(A_0), -1) = A_0^-$ e por simetria $F_\infty(C_0^-) = (p(A_0), -1) = A_0$. Denotando $(-p(A_1), +1)$ por B_0 e $(-p(A_0), +1)$ por C_1 temos $F_\infty(A_1^- C_0) = A_2^- C_1$ e $F_\infty(C_0 B_0) = A_0^- E$ e por simetria $F(A_1^- C_0) = A_2 C_1^-$ e $F_\infty(C_0^- B_0^-) = A_0 E$.

Notemos que pela construção acima para o ponto $A_3 = F_\infty^3(A_0)$ temos

$$p(A_3) = \frac{-b(1 - m(A_2))}{2B + b(1 + m(A_2))} p(A_2) = 0 \quad \text{e} \quad |p(A_3) - p(A_2)| = \frac{b^2}{B^2 + Bb} \cdot \sqrt{\frac{2C}{b}}. \quad (2.28)$$

Desse modo, $m(A_3)$ será igual a -1 se, e somente se, $|p(A_3) - p(A_2)| \leq \sqrt{2C/b}$. Essa última afirmação, por (2.28), equivale à $b^2 - bB - B^2 \leq 0$. Como solução da inequação de segundo grau, obtemos $(1 - \sqrt{5})/2 < b/B < (1 + \sqrt{5})/2$. Como $b/B > 1$ por hipótese, segue que $1 < b/B < (1 + \sqrt{5})/2$ equivale à $m(A_3) = -1$. Do mesmo modo, $b/B > (1 + \sqrt{5})/2$ é equivalente à $m(A_3) = +1$. Vamos analisar esses dois casos separadamente.

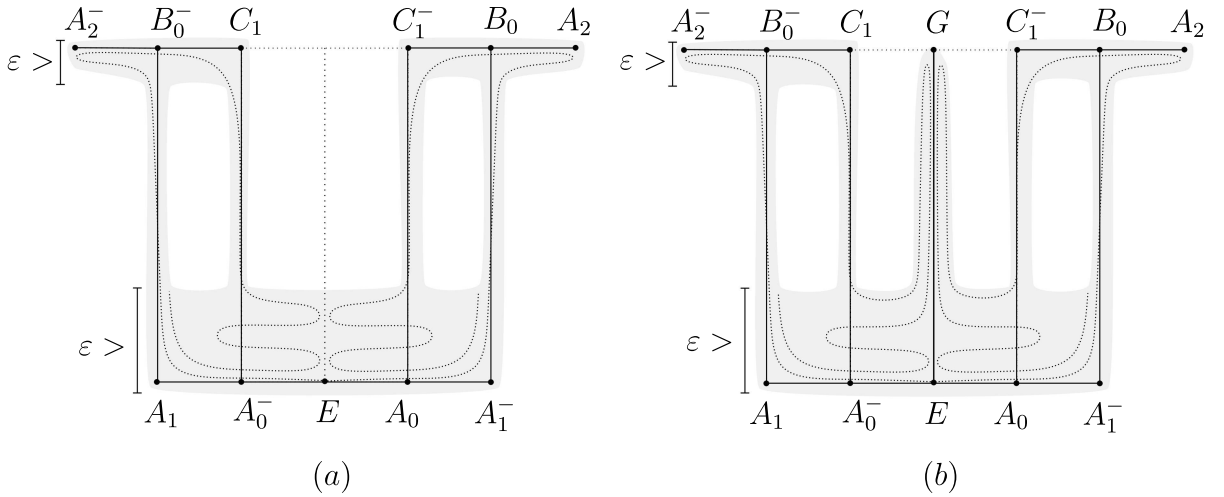
Para o primeiro caso, temos $A_3 = (0, -1) = E$. Segue que $F_\infty(A_2 C_1^-) = F_\infty(A^- C_1^+) = E$, $F_\infty(C_1^-, A_0) = EA_1$ e $F_\infty(C_1^+ A_0^-) = EA_1^-$. Depois de incluir todos os segmentos que unem pontos onde acontecem descontinuidades, teremos $F_\infty^4(EA_0) = EA_1^- B_0 A_2 C_1^- A_0 EA_1^- E$ e simetricamente $F_\infty^4(EA_0^-) = EA_1 B_0^- A_2^- C_1 A_0^- EGEA_1 E$.

Para o segundo caso, $A_3 = (0, +1) = G$ e $F_\infty(B_0) = E$. Temos, $F_\infty(C_1^- A_0) = EA_1$, e $F_\infty(C_1^+ A_0^-) = EA_1^-$. Após incluir todos os segmentos que unem pontos onde ocorrem saltos descontínuos, obtemos $F_\infty^4(EA_0) = EA_1^- B_0 A_2 C_1^- A_0 EGEA_1^- E$ e por simetria $F_\infty^4(EA_0^-) = EA_1 B_0^- A_2^- C_1 A_0^- EGEA_1 E$.

Assim, podemos resumir as informações acima no seguinte itinerário.

1. $F_\infty(EA_0) = EA_1$
 2. $F_\infty^2(EA_0) = F_\infty(EA_1) = EA_1^- B_0 A_2$.
- a) Quando $1 < b/B < (1 + \sqrt{5})/2$ teremos
3. $F_\infty^3(EA_0) = F_\infty(EA_1^- B_0 A_2) = EA_1 B_0^- A_2^- C_1 A_0^- E$,
 4. $F_\infty^4(EA_0) = EA_1^- B_0 A_2 C_1^- A_0 EA_1^- E$.
- b) Quando $b/B > (1 + \sqrt{5})/2$ teremos
3. $F_\infty^3(EA_0) = F_\infty(EA_1^- B_0 A_2) = EA_1 B_0^- A_2^- C_1 A_0^- E$,
 4. $F_\infty^4(EA_0) = EA_1^- B_0 A_2 C_1^- A_0 EGEA_1^- E$.

Figura 9 – O formato de $W_\infty^u(E)$ em linha sólida e o formato de W_β^u com $\beta < +\infty$ em linha pontilhada – (a) para $1 < b/B < (1 + \sqrt{5})/2$ – (b) para $b/B > (1 + \sqrt{5})/2$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

O próximo resultado mostrará que para valores de β finitos mas suficientemente grandes, a variedade instável de F_β se aproxima desse itinerário.

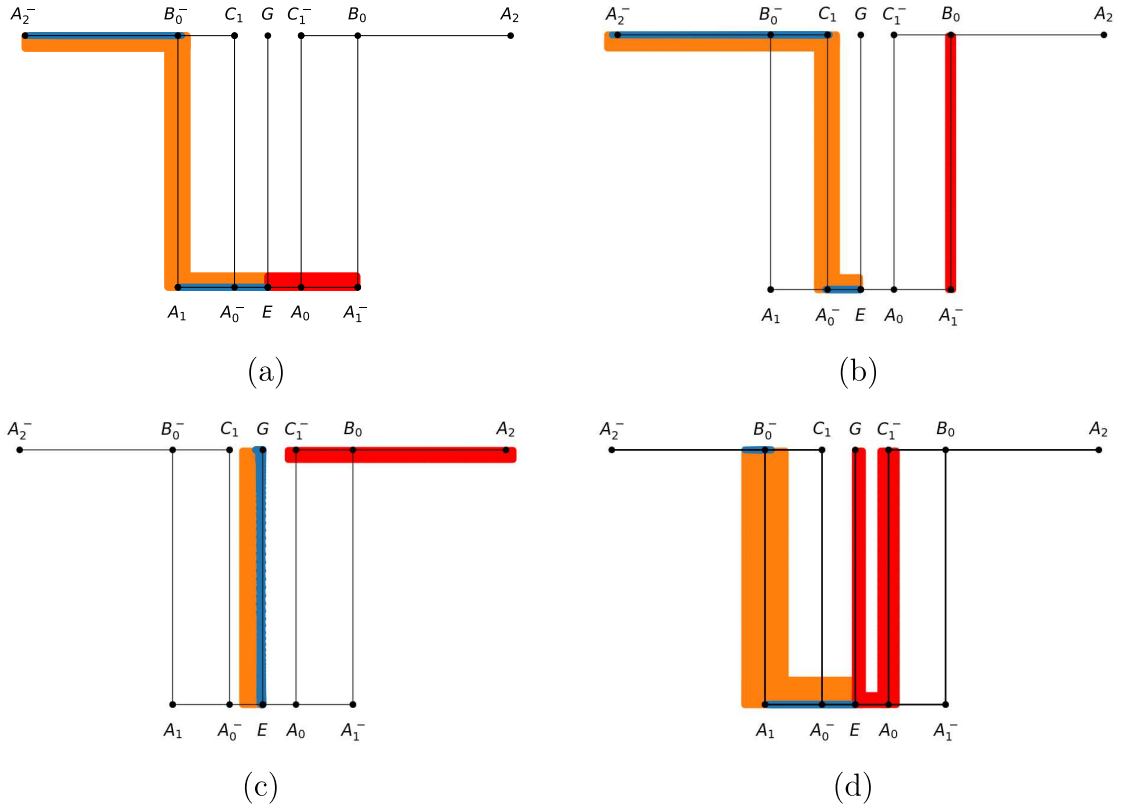
Teorema 2.3.2. *Seja $C > 0$ e $b/B > 1$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe β_c tal que, para todo $\beta > \beta_c$ a variedade instável $W^u(E)$ do estado estacionário E satisfaz,*

1. *Se $1 < b/B < (1 + \sqrt{5})/2$, então a primeira parte do lado direito de $W^u(E)$ é ε -próxima do segmento linear por partes $EA_1^- B_0 A_2 C_1^- A_0 EA_1^- E$. O mesmo para o lado esquerdo e o segmento $EA_1 B_0^- A_2^- C_1 A_0^- EA_1 E$.*

2. Se $b/B > (1 + \sqrt{5})/2$, então a primeira parte do lado direito de $W^u(E)$ é ε -próxima do segmento linear por partes $EA_1^-B_0A_2C_1^-A_0EGEA_1^-E$. O mesmo para o lado esquerdo e o segmento $EA_1B_0^-A_2^-C_1A_0^-EGEA_1E$.

Faremos a prova somente para o caso onde $b/B > (1 + \sqrt{5})/2$ uma vez que o primeiro caso segue por argumentação análoga. Vamos mostrar que, para β suficientemente grande, a variedade instável $W_\beta^u(E)$ de E por F_β está contida em uma vizinhança V_ε da curva linear por partes $F_\infty^4(EA_0)$. Para isso, construiremos uma região $\mathbb{V}$ invariante por F_β quando β for suficientemente grande, isto é, $F_\beta(\mathbb{V}) \subset \mathbb{V}$, e mostraremos que $EA_0 \subset \mathbb{V}$. Primeiro, vamos separar $F_\beta^4(EA_0)$ em quatro regiões, $EA_1^-B_0A_2$, $A_2C_1A_0E$, EG e GEA_1E e, para cada região, definir vizinhanças que dependam somente de β .

Figura 10 – Simulações ilustrando os enunciados dos Lemas A, B, C e D respectivamente. Em cor laranja as vizinhanças V_i , em cor vermelha as vizinhanças U_i , em azul a imagem de U_i por $F_\beta(U_i)$ com $\beta = 1000000$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Lema 2.3.1 (A). Considere uma vizinhança $V_1(\varepsilon) = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ de $EA_1B_0^-A_2^-$, onde

$$S_1(\varepsilon) = \{(p, m) \mid p(A_1) - \varepsilon \leq p \leq 0, -1 \leq m \leq -1 + \varepsilon_1\},$$

$$S_2(\varepsilon) = \{(p, m) \mid p(A_1) - \varepsilon \leq p \leq p(A_1) + \varepsilon_1, -1 \leq m \leq 1\},$$

$$S_3(\varepsilon) = \{(p, m) \mid p(A_2^-) - \varepsilon \leq p \leq p(B_0) + \varepsilon, 1 - \varepsilon_1 \leq m \leq 1\}.$$

Seja $U_1(\delta)$ uma vizinhança de EA_1^- dada por

$$U_1(\delta) = \{(p, m) \mid 0 \leq p \leq p(A_1^-), -1 \leq m \leq -1 + \delta\}.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta_1 > 0$ e $\beta(\delta_1)$ tais que, $\beta > \beta(\delta_1)$ implica

$$F_\beta(U_1(\delta)) \subset S_1(\delta_1) \cup S_2(\varepsilon) \cup S_3(\varepsilon).$$

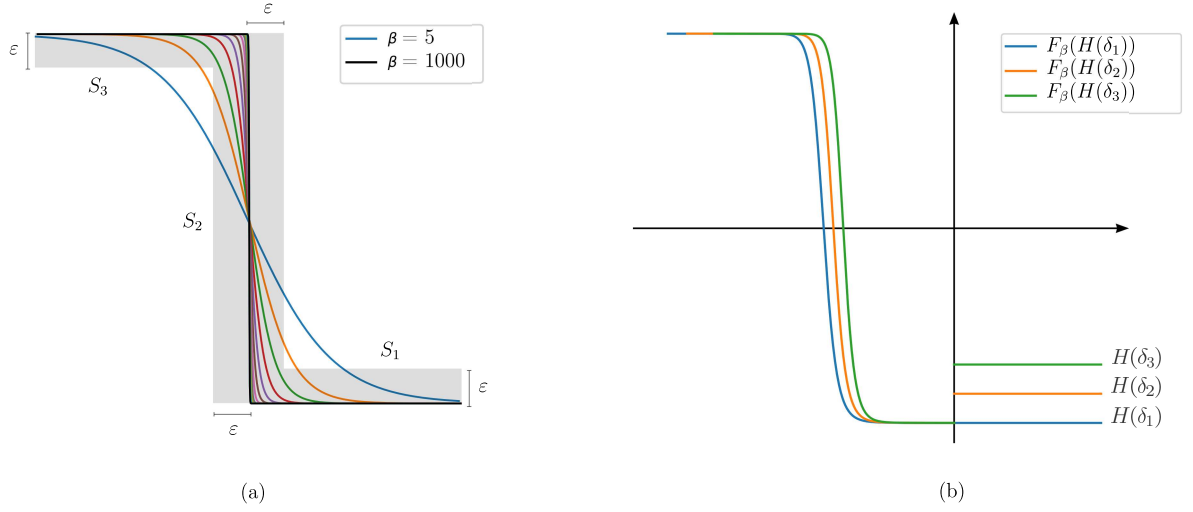
Demonstração. Notemos inicialmente que, por definição, a primeira coordenada das funções F_β e F_∞ coincidem na primeira iteração, pois em uma iteração não dependem de m e, portanto, não dependem de β . Assim, $p(F_\beta(A_1^-)) = p(F_\infty(A_1^-)) = p(A_2^-)$ e $p(F_\beta(A_0)) = p(F_\infty(A_0)) = p(A_1)$, logo $F_\beta(E) = E$. Pela continuidade de F_β em β , $F_\beta(A_1^-)$ está próximo de A_2^- e $F_\beta(A_0)$ está próximo de A_1 de forma que, dado $\varepsilon > 0$, existe um $\beta(\varepsilon)$ tal que $\beta > \beta(\varepsilon)$ implica $F_\beta(EA_1) \subset S_1(\varepsilon) \cup S_2(\varepsilon) \cup S_3(\varepsilon)$. Usando a continuidade de F_β com respeito à p e m , existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$F_\beta(U_1(\delta_1)) \subset V_1(\varepsilon) = S_1(\varepsilon) \cup S_2(\varepsilon) \cup S_3(\varepsilon). \quad (2.29)$$

Para melhorar essa estimativa, seja $H(\delta) = \{(p, m) \mid 0 \leq p \leq p(A_1^-), m = -1 + \delta\}$ segmentos horizontais com distância δ de EA_1^- . Seja p_δ a solução negativa da equação $[b(2 - \delta)/(2B + b\delta) + 1]^2 p_\delta^2 = 2C/b$, isto é, $(p_\delta, 0)$ é o ponto em que a curva $F_\beta(H(\delta))$ cruza o eixo p . Para $\delta = 0$, $p_\delta = p(A_1)$ e segue de (2.29) que existe $\beta(\varepsilon)$ tal que para todo $0 < \delta < \delta_1$, $(p_\delta, 0) \in S_2(\varepsilon)$ pois $(p_\delta, 0) \in F_\beta(U_1(\delta_1))$. Desse modo, por continuidade de F com relação a β , para cada $0 \leq \delta \leq \delta_1$ existe $\beta(\delta)$ tal que $F_\beta(H(\delta)) \subset S_1(\delta_1) \cup S_2(\varepsilon) \cup S_3(\varepsilon)$. Tomando $\beta(\delta_1) = \max\{\beta(\delta) \mid 0 \leq \delta \leq \delta_1\}$ concluimos que para todo $\beta > \beta(\delta_1)$, $F_\beta(U_1(\delta_1)) \subset S_1(\delta_1) \cup S_2(\varepsilon_1) \cup S_3(\varepsilon_1)$. $\square$

A Figura 11 (a) mostra quão suave é a transição entre dois tipos de agentes para diferentes valores de β . Em ambos os gráficos, o eixo horizontal denota a variação do preço e o eixo vertical a proporção de agentes assumindo as expectativas racionais, $m = 1$ e ingênuas, $m = -1$. A Figura 11 (b) mostra como um deslocamento vertical afeta a imagem de F_β por um deslocamento horizontal.

Figura 11 – (a) A vizinhança $V(\varepsilon)$ e 10 curvas $F_\beta(EA_1)$ para β entre 5 e 1000 – (b) H para três valores de δ e suas imagens por F_β com $\beta = 10$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Lema 2.3.2 (B). Considere $V_2(\varepsilon) = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ uma vizinhança de $A_2^- C_1 A_0^- E$, dada por

$$\begin{aligned} T_1(\varepsilon) &= \{(p, m) \mid p(A_2^-) - \varepsilon \leq p \leq p(C_1) + \varepsilon, 1 - \varepsilon \leq m \leq 1\}, \\ T_2(\varepsilon) &= \{(p, m) \mid p(A_0^-) - \varepsilon \leq p \leq p(A_0^-) + \varepsilon, -1 \leq m \leq 1\}, \\ T_3(\varepsilon) &= \{(p, m) \mid p(A_0^-) - \varepsilon \leq p \leq 0, -1 \leq m \leq -1 + \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Seja U_2 uma vizinhança de $A_1^- B_0$ dada por

$$U_2(\delta) = \{(p, m) \mid p(A_1^-) - \delta \leq p \leq p(A_1^-) + \delta, -1 \leq m \leq 1\}.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e β_2 tais que, $\beta > \beta_2$ implica

$$F_\beta(U_2(\delta)) \subset T_1(\varepsilon) \cup T_2(\varepsilon) \cup T_3(\varepsilon).$$

Demonstração. Temos $F_\infty(E) = E$, $F_\infty(A_0) = A_1$ e $F_\infty(A_1^-) = A_2^-$. Da definição de A_0 segue que este é o último ponto com $m = -1$ para o qual $m(F_\infty(A_0)) = -1$, assim segue que para todo δ_1 , $p(F_\infty(A_0 + \delta_1))$ está próximo de $p(A_1) = p(B_0)$ e $m(F_\infty(A_0 + \delta_1)) = +1 = m(B_0)$. Então, dado $\varepsilon > 0$, segue da continuidade de F_∞ com relação a p e m que existe $\delta > 0$ tal que $F_\infty(U_2(\delta)) \subset V_4(\varepsilon)$. Agora, para essas vizinhanças, da continuidade de F_β com relação a β , existe $\beta_2(\delta)$ tal que $\beta > \beta_2$ implique $F_\beta(U_2(\delta)) \subset V_2(\varepsilon)$. $\square$

Lema 2.3.3 (C). Seja V_3 uma vizinhança de EG , dada por

$$V_3(\varepsilon) = \{(p, m) \mid -\varepsilon \leq p \leq 0, -1 \leq m \leq 1\}.$$

Seja, ainda, U_3 uma vizinhança de $A_2C_1^-$ dada por

$$U_3(\delta) = \{(p, m) \mid p(C_1^-) - \delta \leq p \leq p(A_2) - \delta, \quad 1 - \delta \leq m \leq 1\}.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e β_3 tais que $\beta > \beta_3$ implica

$$F_\beta(U_3(\delta)) \subset V_3(\varepsilon).$$

Demonstração. Como $m = +1$ para todo ponto $X \in A_2C_1^-$, temos $p(F_\beta(X)) = 0$. Assim, $F_\beta(A_2C_1^-) \subset EG$. Além disso, $F_\infty(A_2) = G$ e $F_\infty(C_1^-) = E$, então, pela continuidade de F com respeito à β , existe $\delta_3 > 0$ e β_3 tais que, tomando $\beta > \beta_3$ implica $F_\beta(U_3(\delta_3)) \subset V_3(\delta_4)$. $\square$

Lema 2.3.4 (D). *Seja $V_4 = D_1 \cup D_2$ uma vizinhança de $EA_1B_0^-$, dada por*

$$\begin{aligned} D_1(\varepsilon) &= \{(p, m) \mid p(A_1^-) \leq p \leq 0, \quad -1 \leq m \leq -1 + \varepsilon_1\}, \\ D_2(\varepsilon) &= \{(p, m) \mid p(A_1^-) - \varepsilon_1 \leq p \leq p(A_1^-) + \varepsilon_1, \quad -1 \leq m \leq 1\}. \end{aligned}$$

Considere, U_4 uma vizinhança de $A_0C_1^-$, U_5 uma vizinhança de EC_1^- e U_6 uma vizinhança de EG dadas por

$$\begin{aligned} U_4(\delta) &= \{(p, m) \mid p(A_0) - \delta \leq p \leq p(A_0) + \delta, \quad -1 \leq m \leq 1\}, \\ U_5(\delta) &= \{(p, m) \mid 0 \leq p \leq p(A_0), \quad -1 \leq m \leq -1 + \delta\}, \\ U_6(\delta) &= \{(p, m) \mid -\delta \leq p \leq \delta, \quad -1 \leq m \leq 1\}. \end{aligned}$$

Dados $\varepsilon > 0$ existe β_4 e $\delta > 0$ tal que, para $\beta > \beta_4$,

$$F_\beta(U_4(\delta) \cup U_5(\delta) \cup U_6(\delta)) \subset V_4(\varepsilon)$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, primeiro vamos mostrar que existem β_4 e $\delta > 0$ tal que para $\beta > \beta_4$, $F_\beta(U_5(\delta) \cup U_6(\delta)) \subset D_1(\varepsilon)$. Como $F_\infty(G) = F_\infty(E) = E$ e ainda $F_\infty(A_0) = A_1^-$, pela continuidade de F com relação a β segue que existe β'_4 tal que $\beta > \beta'_4$ implica $F_\beta(GEA_0) \subset V_4(\varepsilon)$. Pela continuidade de F com relação a p e m existe $\delta_1 > 0$ tal que $F_\beta(U_5(\delta_1) \cup U_6(\delta_1)) \subset D_1(\varepsilon)$.

Agora vamos analisar o caso $F_\beta(U_4(\delta)) \subset D_1 \cup D_2$. Considere o segmento $A_0^-C_1$, temos $F_\infty(A_0) = A_1^-$ e $F_\infty(C_1) = E$. Para todo $0 \leq \delta < p(A_0)$ considere agora os segmentos verticais

$$V_\delta^- = \{(p, m) \mid p = p(A_0) - \delta, -1 \leq m \leq 1\}.$$

temos, para todo $X = (p(A_0) - \delta, m_x) \in V_\delta^-$, usando que

$$\frac{b}{B} - \frac{(b^2 + bB)(1 + m_x)}{2B^2 + bB(1 + m_x)} = \frac{b(2B + b(1 + m_x)) - (b^2 + bB)(1 + m_x)}{2B^2 + bB(1 + m_x)} = \frac{b(1 - m_x)}{2B + b(1 + m_x)}$$

segue

$$\begin{aligned}
p(F_\infty(X)) &= -\frac{b(1-m_x)}{2B+b(1+m_x)}(p(A_0)-\delta) = \left(-\frac{b}{B} + \frac{(b^2+bB)(1+m_x)}{2B^2+bB(1+m_x)}\right)(p(A_0)-\delta) \\
&= p(A_1) + \frac{(b^2+bB)(1+m_x)}{2B^2+bB(1+m_x)}p(A_0) + \frac{b(1-m_x)}{2B+b(1+m_x)}\delta \\
&> p(A_1)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

assim, temos

$$\begin{aligned}
|p(X) - p(F_\infty(X))| &= \left| p(A_0) - p(A_1) - \frac{(b^2+bB)(1+m_x)}{2B^2+bB(1+m_x)}p(A_0) - \left(\frac{b(1-m_x)}{2B+b(1+m_x)} + 1\right)\delta \right| \\
&= \left| \sqrt{\frac{2C}{b}} - \frac{(b^2+bB)(1+m_x)}{2B^2+bB(1+m_x)}p(A_0) - \left(\frac{b(1-m_x)}{2B+b(1+m_x)} + 1\right)\delta \right| \\
&\leq \sqrt{\frac{2C}{b}}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

onde usamos $|p(F_\infty(X)) - p(X)| = |p(X) - p(F_\infty(X))|$ para facilitar as contas. Segue que $m(F_\infty(X)) = -1$ e a parte de $U(\delta)$ com o preço menor ou igual a $p(A_0)$ é levada no seguimento A_1E .

Agora consideramos os seguimentos verticais para $0 < \delta < p(A_0)$,

$$V_\delta^+ = \{(p, m) \mid p = p(A_0) + \delta, -1 \leq m \leq 1\}.$$

Nesse caso, para todo $X = (p_x, m_x) \in V_\delta^+$, semelhante à equação (2.31) temos

$$\begin{aligned}
p(F_\infty(X)) &= p(A_1) + \frac{(b^2+bB)(1+m_x)}{2B^2+bB(1+m_x)}p(A_0) - \frac{b(1-m_x)}{2B+b(1+m_x)}\delta \\
|p(X) - p(F_\infty(X))| &= \left| \sqrt{\frac{2C}{b}} + \left(\frac{b(1-m_x)}{2B+b(1+m_x)} + 1\right)\delta - \frac{(b^2+bB)(1+m_x)}{2B^2+bB(1+m_x)}p(A_0) \right|
\end{aligned}$$

note que, para termos $m(F_\infty(X)) = +1$, basta que

$$\left(\frac{b(1-m_x)}{2B+b(1+m_x)} + 1\right)\delta - \frac{(b^2+bB)(1+m_x)}{2B^2+bB(1+m_x)}p(A_0) > 0$$

ou equivalentemente

$$m_x < -1 + \frac{2B^2 + 2bB}{(b^2 + bB)p(A_0)} \cdot \delta \tag{2.32}$$

Assim, para todo $\delta > 0$ o salto de descontinuidade ocorre nos pontos onde houver a igualdade em (2.32). A imagem de $p(F_\infty(U(\delta)))$ assumirá seu menor valor em V_δ^+ quando $m_x = -1$, logo será $p(A_1) - b/B\delta$. Desse modo, dado $\varepsilon > 0$ tomando $\delta_2 < B/b \cdot \varepsilon$ temos $F_\infty(U(\delta_2)) \in V^-(\varepsilon)$. Pela continuidade de F_β , para tal δ_2 existe $\beta(\delta_2)$ tal que $F_{\beta(\delta_2)}(U(\delta_2)) \subset V^-(\varepsilon)$. Assim, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $\beta_4 = \max\{\beta'_4, \beta''_4\}$, segue que $\beta > \beta_4$ implica $F_\beta(U_4(\delta), U_5(\delta), U_6(\delta)) \subset V_4(\varepsilon)$. $\square$

Prova do Teorema 2.3.2. Vamos usar os lemas técnicos acima para construir uma vizinhança de $F_\beta^4(EA_0)$ invariante por F_β . Note que, pela simetria do sistema, os lemas acima continuam válidos por uma reflexão pelo eixo m . Desse modo, denotamos por $V^-(\delta) = \{(p, m) \mid (-p, m) \in V(\delta)\}$ o simétrico do conjunto $V(\delta)$.

Tomamos arbitrariamente $0 < \delta_4 < p(A_1^-) - p(A_0)$. Pelo Lema 2.3.3, para a vizinhança $V_3(\delta_4)$ de EG , existem β_3, δ_3 e uma vizinhança $U_3(\delta_3)$ de $A_2C_1^-$ tais que para $\beta > \beta_3$,

$$F_\beta(U_3(\delta_3)) \subset V_3(\delta_4).$$

Pelo Lema 2.3.2, para δ_3 e a vizinhança $V_2^-(\delta_3)$ de $A_2C_1^-A_0E$, existem δ_2, β_2 e $U_2^-(\delta_2)$ vizinhança de $A_1B_0^-$ tais que, para todo $\beta > \beta_2$,

$$F_\beta(U_2^-(\delta_2)) \subset V_2^-(\delta_3).$$

Seja $\delta = \min\{\delta_3, \delta_2\}$. Pelo Lema 2.3.1, para δ e a vizinhança $V_1(\delta)$ de $EA_1B_0^-A_2^-$, existem δ_1, β_1 e uma vizinhança $U(\delta_1)$ de EA_1^- tais que, $\beta > \beta_1$ implica

$$F_\beta(U_1(\beta_1)) \subset S_1(\delta_1) \cup S_1(\delta) \cup S_1(\delta).$$

Finalmente, pelo Lema 2.3.4, existe $\beta_4 > \beta_1$ tal que $\beta > \beta_4$ implica

$$F_\beta(U_4(\delta_3) \cup U_5(\delta_3) \cup U_6(\delta_3)) \subset D_1(\delta_1) \cup D_2(\delta_1) \subset U_1^-(\delta_1) \cup U_2^-(\delta_1).$$

Usando as definições das vizinhanças dadas pelos lemas, como $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\}$ temos

$$F_\beta(U_1(\delta_1)) \subset V_1(\delta, \delta_1) = S_1(\delta_1) \cup S_2(\delta) \cup S_3(\delta) \subset U_1^-(\delta_1) \cup U_2(\delta_2) \cup U_3(\delta_3),$$

$$F_\beta(U_2(\delta_2)) \subset V_2(\delta_3) = T_1(\delta_3) \cup T_2(\delta_3) \cup T_3(\delta_3) \subset U_3^-(\delta_3) \cup U_4^-(\delta_3) \cup U_3^-(\delta_3),$$

$$F_\beta(U_3(\delta_3)) \subset V_3(\delta_4) \subset U_6(\delta_4).$$

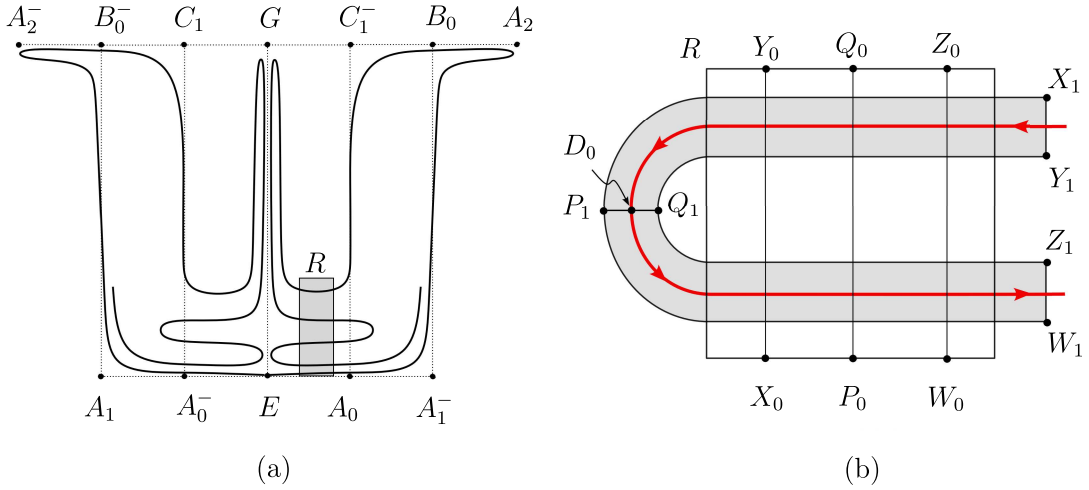
Definimos $U = U_1(\delta_1) \cup U_2(\delta_2) \cup U_3(\delta_3) \cup U_4(\delta_3) \cup U_5(\delta_3) \cup U_6(\delta_4)$. Concluimos que, para $\beta > \beta_4$, os conjuntos $U \cup U^-$ fornecem uma região invariante por F_β , $F_\beta(U \cup U^-) = U \cup U^-$. Notemos ainda que os primeiros pontos da variedade instável do ponto E estão em $U \cup U^-$. Uma vez que o autovetor na direção instável é $(1, 0)$, em alguma vizinhança do ponto E , $W_\beta^u(E)$ é linear e coincide com parte do segmento EA_0 , que está contido em $U \cup U^-$. Como $U \cup U^-$ é uma vizinhança dos conjuntos $F_\infty^4(EA_0)$ e $F_\infty^4(EA_0^-)$, invariante por F_β , segue o resultado. $\square$

Utilizando o formato geométrico de $W_\beta^u(E)$ descrito pelo Teorema 2.3.2, o próximo resultado mostrará que, à medida que β aumenta, deve existir uma bifurcação homoclínica associada aos pontos de sela periódicos dissipativos.

Teorema 2.3.3. *Suponha que $C > 0$ e $b/B > 1$. Então existe um valor $\hat{\beta}$, tal que para todo $\beta > \hat{\beta}$, a quarta iteração $F^4\beta$ exibe uma ferradura. Assim, para todo $\beta > \hat{\beta}$ o modelo é topologicamente caótico. Além disso, para $N \geq 2$ suficientemente grande, existe um valor β_h que o parâmetro β assume quando cresce de 0 à $+\infty$, para o qual ocorre uma bifurcação homoclínica entre a variedade estável e instável de um ponto de sela dissipativo periódico com período $2N$.*

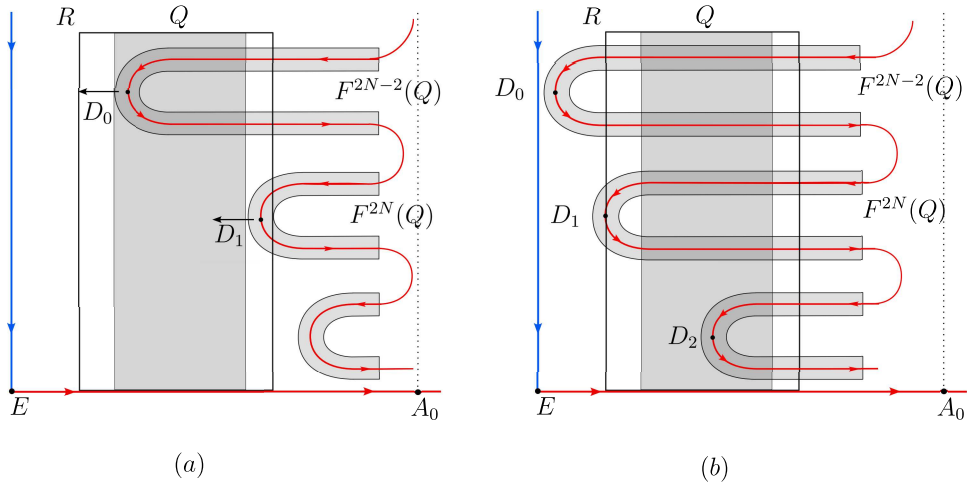
A ideia da demonstração é construir uma região R cuja imagem pela F_β seja aplicada sobre R com o formato de ferradura. Para F^4 ilustramos essa construção na Figura 12 e genericamente para $2N - 2$ e $2N$ com $N > 2$ na Figura 13.

Figura 12 – (a) O formato de $W_\beta^u(E)$ e a localização do retângulo R – (b) A região $X_0Y_0Z_0W_0$ e a ferradura induzida pela ação de F_β



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 13 – Criação de ferradura para $2N$ iterações de F_β , quando β aumenta.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Demonstração. Vamos construir uma região retangular R tal que, para algum $N > 0$, $F_\beta^N(R)$ é levado em R na forma de uma ferradura. Nesse sentido, definimos $p_{max} = p(A_0)$ e $p_{min} = (B/b)^4 \cdot p_{max}$. Tomamos ε de forma que $0 < \varepsilon < p_{min}$ e definimos o retângulo R do seguinte modo

$$R = \{(p, m) \mid p_{min} < p < p_{max}, 0 \leq m \leq \varepsilon\}.$$

No segmento EA_0 , $F_\infty(p, -1) = (-b/B \cdot p, -1)$. Assim, como

$$p_{max} = p(A_0) = B/(B+b) \cdot \sqrt{2C/b} \quad \text{e} \quad p_{min} = \left(\frac{B}{b}\right)^4 p_{max} = \left(\frac{B}{b}\right)^4 p(A_0) > 0$$

devemos ter que $F_\infty^4(p_{min}, -1) = A_0$ e $F_\infty^4(p_{max}, -1) = E$ seguindo o itinerário de $F_\infty^4(EA_0) = EA_1^- B_0 A_2 C_1^- A_0 EGEA_1^- E$. Agora, como R está ε -próximo ao segmento EA_0 , pelo Teorema 2.3.2 tomando β suficientemente grande, temos que $W_\beta^u(E)$ é ε -próxima de $F_\infty^4(EA_0)$. Logo, segue que o difeomorfismo F_β^4 leva R em uma região $F_\beta^4(R)$ que é ε -próxima de $F_\infty^4(EA_0)$. Em particular, devem existir pontos $X_0 = (p_x, -1)$, $P_0 = (p_0, -1)$ e $Z_0 = (p_w, -1)$ em R com $p_x < p_0 < p_z$, que são levados por F_β arbitrariamente próximos de A_0 , E , A_1^- , respectivamente. Do mesmo modo, com β tomado grande o suficiente, existem pontos $Y_0 = (p_x, -1 + \varepsilon)$, $Q_0 = (p_0, -1 + \varepsilon)$ e $W_0 = (p_z, -1 + \varepsilon)$ em R com $p_x < p_0 < p_w$, que são levados por F_β arbitrariamente próximos de A_0 , E , A_1^- . Assim, a região retangular R contém um retângulo menor $X_0 Y_0 Z_0 W_0$ cujos vértices estão sob os lados superiores e inferiores de R contendo o segmento vertical $P_0 Q_0$, com $Q_0 = (p_0, -1 + \varepsilon)$. Uma vez que $F_\beta(P_0 Q_0)$ está arbitrariamente próximo de E e $p_{min} > 0$ e ainda $F_\beta(W_0 Z_0)$ está próximo de A_1 e $F_\beta(X_0 Y_0)$ está além de A_0 no eixo p , segue que $F_\beta(X_0 Y_0 Z_0 W_0)$ tem o formato de uma ferradura e F_β é uma aplicação ferradura, o que conclui a primeira parte da prova.

Notemos que no caso acima, F_β é um difeomorfismo que inverte a orientação e F_β^2 um difeomorfismo que preserva a orientação. Esse fato indica que é possível generalizar a construção anterior da ferradura para os difeomorfismos F_β^{2N-2} e F_β^{2N} . Nesse sentido, para cada $N \geq 2$ definimos as regiões retangulares

$$R_N = \{(p, m) \mid ((b/B)^{2N-4} p, m) \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos fazer uma construção semelhante à feita anteriormente para R e tomar uma região Q de maneira que $F_\beta^{2N-2}(Q)$ e $F_\beta^{2N}(Q)$ sejam ferraduras contendo $W_\beta^u(E)$. Considere D_0 o ponto de $W_\beta^u(E)$ contido na região $X_1 Y_1 Z_1 W_1$ definida anteriormente que mais se aproxima do eixo m . Mais especificamente, D_0 é o ponto em que $W_\beta^u(E)$ intersecta o segmento $P_1 Q_1$. Definimos $D_{j+1} = F^2(D_j)$ para $j = 0, 1$. Assim, para β suficientemente grande, a distância entre D_{j+1} e o eixo m é aproximadamente $(b/B)^2$ vezes a distância entre D_j até o eixo m , para $j = 0, 1$. Assim, quando β aumenta, a distância entre D_j , para $j = 0, 1, 2$, e o eixo m diminui de modo que uma ferradura é formada para F^{2N} .

A criação dessas ferraduras implica na ocorrência de uma bifurcação homoclínica segundo o Teorema A.3.3. Resta mostrar que, para N grande o suficiente, os pontos de sela periódicos de período $2N$ são dissipativos. Para isso, basta que o módulo do produto dos autovalores desses pontos seja menor que 1. Mas a região R_N se move em direção à variedade estável, que está sob o eixo m . Uma vez que $E = (0, -1)$ é um ponto de sela periódico dissipativo, pois possui um autovalor nulo, para N grande o suficiente a órbita de período $2N$ também é dissipativa. Ver Palis e Takens [79] página 29, Observação 2. $\square$

Com a criação de órbitas homoclínicas no sistema, deduzimos, através do seguinte resultado, a presença de órbitas caóticas.

Teorema 2.3.4. *Para curvas de oferta e demanda genéricas suficientemente próximas na topologia C^2 das curvas de oferta e demanda lineares, o modelo cobweb com expectativas racionais e ingênuas exibe um atrator estranho para um conjunto de valores de β com medida de Lebesgue positiva.*

Demonstração. Para curvas de oferta e demanda suficientemente próximas na topologia C^2 das curvas lineares, a construção feita no Teorema 2.3.3 também se aplica e as condições genéricas para o surgimento de bifurcações homoclínicas são satisfeitas. Assim, o resultado segue diretamente do Teorema 2.3.3 e do Teorema A.5.4. $\square$

O maior ganho na interpretação da situação utilizando o modelo BH97 vem ao se variar a intensidade de escolha dos agentes. Na teoria clássica, equivalente à $\beta = 0$, o sistema se torna simplesmente o sistema clássico, cada agente com a sua expectativa que não muda. Quando a curva de oferta é mais elástica que a curva de demanda, mostramos com a Proposição 2.1.1 que o preço tende ao equilíbrio. Já o caso $\beta = +\infty$ representa a teoria neoclássica com a hipótese da racionalidade. Assim como é previsto pela teoria, o modelo tende ao estado estacionário após um certo número de iterações.

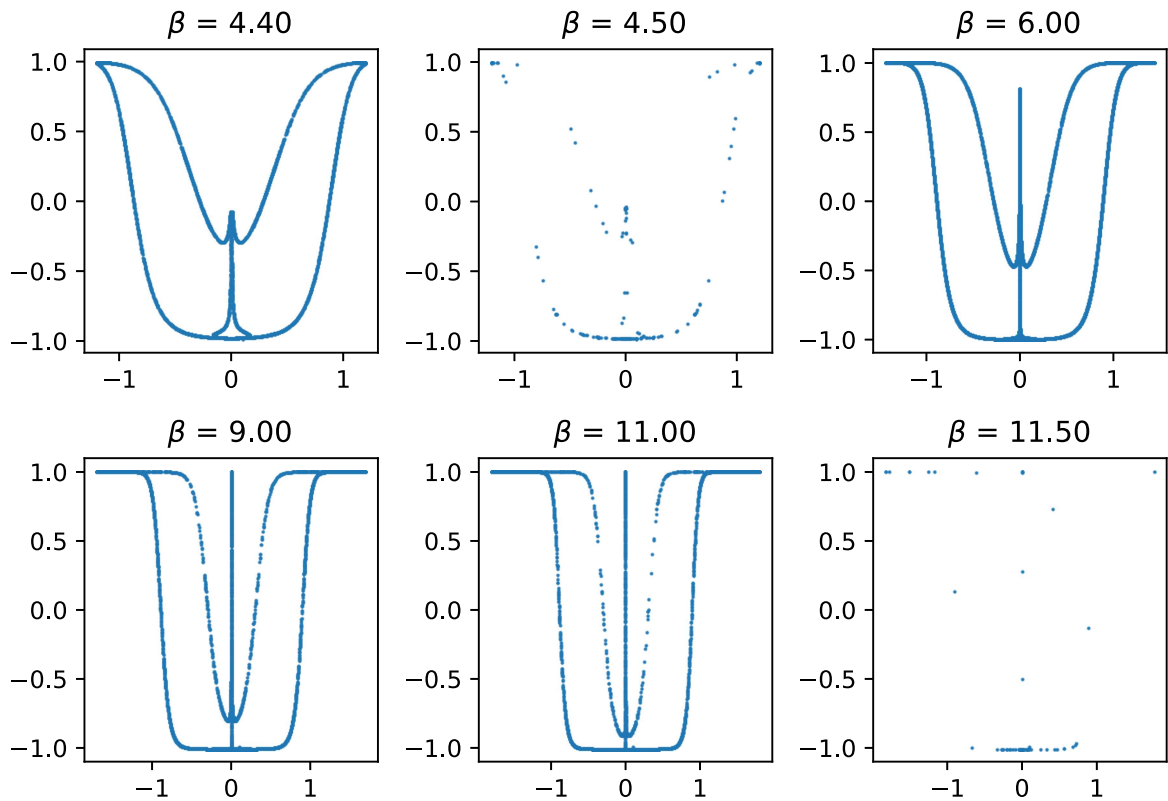
No entanto, quando a intensidade de escolha é finita, por maior que seja, mostramos que a evolução do sistema produz um emaranhado homoclínico, o que torna o sistema topologicamente caótico. Mostramos ainda que para um conjunto de valores do parâmetro β , o sistema exibe um atrator estranho com órbitas caóticas, resultando em ciclos de mercado instáveis e de difícil previsão após um certo número de iterações.

Note que, segundo o Teorema A.5.4 o atrator estranho só é formado para um conjunto com medida de Lebesgue positiva. Como o modelo só depende de um parâmetro de bifurcação, o espaço de parâmetros é a reta real positiva, $\mathbb{R}_+$, incluindo o zero. De fato, para os valores de parâmetro da Tabela 3 esse conjunto está contido em $[4.3, 11.5]$, que podemos visualizar nas simulações numéricas presentes na Figura 14. É importante destacar que, como explicado na Seção A.5 do Apêndice A, a partir de $\beta = 11.5$ não há o desaparecimento das órbitas homoclínicas criadas no Teorema 2.3.3, mas apenas o

desaparecimento do atrator estranho, de modo que, a partir desse valor, todas as soluções iniciais tendem ao estado estacionário no longo prazo.

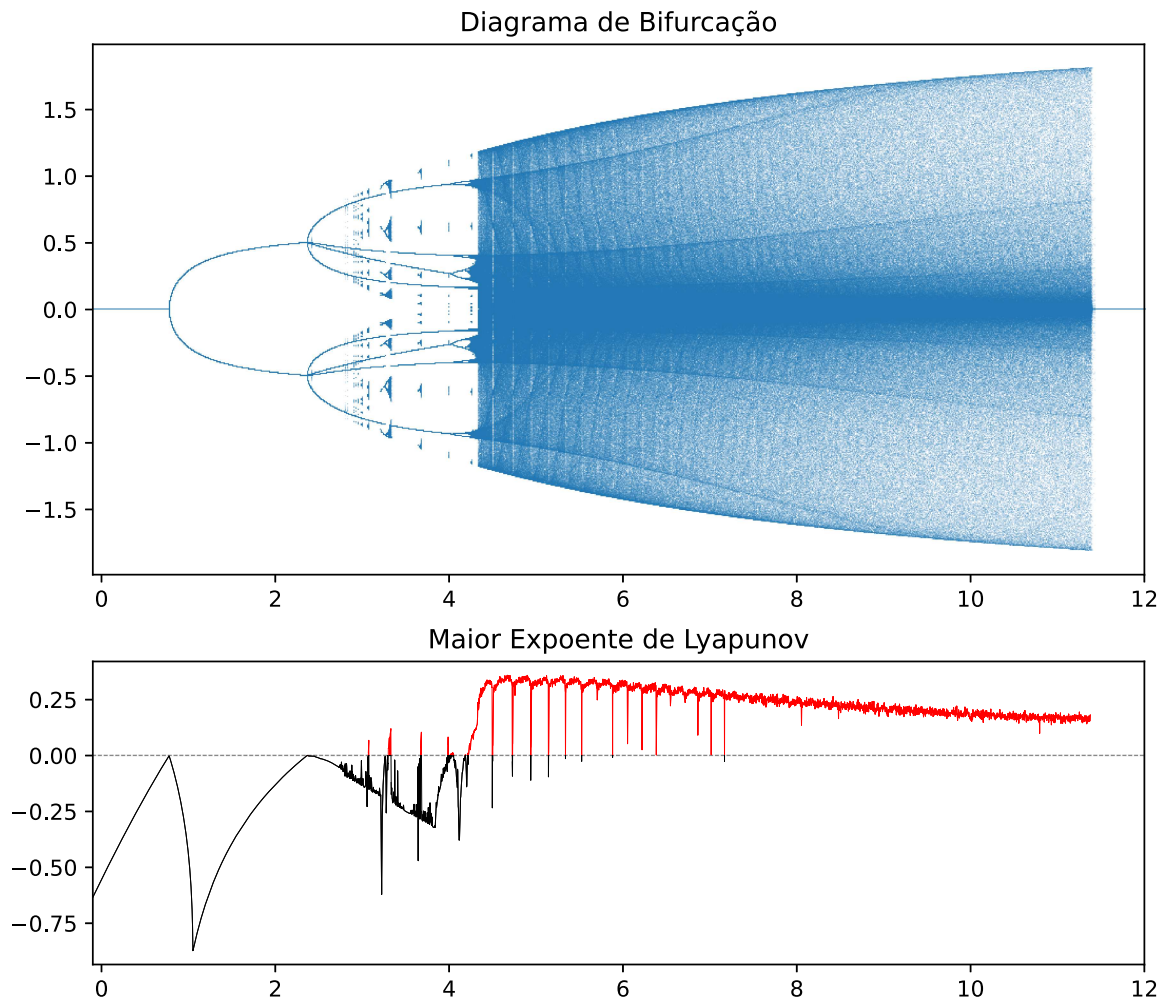
Um diagrama de bifurcação para o sistema é apresentado na Figura 15 onde podemos observar tanto as bifurcações presentes nos Teoremas 2.2.1 e 2.2.2 quanto a cascata de bifurcações de duplicação de período subsequentes à bifurcação homoclínica. Observe, pela série do maior expoente de Lyapunov em função dos valores de β exibida na Figura 15, que não é para todos os valores de β no intervalo $[4.3, 11.5]$ que o sistema exibe um atrator estranho. Esse é o caso de $\beta = 4.50$, como mostra a Figura 14.

Figura 14 – O sistema exibe atrator estranho para valores do parâmetro β no intervalo $[4.5, 11.5]$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 15 – Diagrama de bifurcação e o maior expoente de Lyapunov para o parâmetro de intensidade de escolha β e o preço p .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Podemos constatar que, como supunha Muth, a hipótese de racionalidade representa bem valores de β muito grandes, e portanto, fornece uma estimativa razoável para alguns mercados. No entanto, utilizando a estimativa de parâmetros feita em [95], verificamos que na maior parte dos mercados, β se encontra dentro do intervalo crítico. De fato, os autores concluíram que o β médio é igual a 9,535, onde foram comparados mercados de quatro classes de ativos: índice de ações, moedas estrangeiras no mercado cambial, commodities e índices macroeconômicos. Os mercados que mais apresentaram variação no β foram o monetário, variando de 1,034 para o par de moedas dólar americano–libra esterlina a 30,949 para o par de moedas dólar americano–iene japonês. O estudo conclui que, de modo geral, o parâmetro de intensidade de escolha β é um pouco menor para variáveis macroeconômicas e maior para mercados financeiros altamente líquidos. Em outras palavras, os agentes são mais reativos às diferenças de desempenho nos mercados

financeiros do que em ativos mais macroeconômicos, resultando em uma maior frequência de mudança entre estratégias em ativos financeiros.

Assim, é razoável concluir que em mercados onde o modelo cobweb é aplicável, a dinâmica caótica prevista pode cumprir um papel fundamental na compreensão de fenômenos pouco conhecidos e que foram desconsiderados por modelos sem a hipótese de agentes heterogêneos. Em contraste com a hipótese de Friedman, podemos concluir que, ao menos em um mercado onde o modelo cobweb se aplica, expectativas racionais e ingênuas tendem a co-existir no longo prazo e, devido ao custo da informação, agentes racionais não dominam o mercado como foi argumentado.

3 APREÇAMENTO DE ATIVOS EM MERCADOS HETEROGÊNEOS E MÉTODO DE ESTIMAÇÃO

Neste capítulo, nosso objetivo é apresentar uma aplicação da estrutura ARED de seleções co-evolutivas entre expectativas heterogêneas de [15], apresentada no Capítulo 2, ao contexto dos mercados financeiros. Para isso, discutiremos o modelo de precificação de ativos em um ambiente caracterizado por agentes com crenças heterogêneas, conforme desenvolvido por Brock e Hommes [16] e referido como modelo BH98.

Nas últimas três décadas, surgiram diversos modelos que buscam capturar a complexidade dos mercados financeiros por meio de estruturas relativamente simples, porém capazes de gerar dinâmicas ricas e realistas. Esses chamados modelos simples de complexidade concebem os mercados como sistemas adaptativos evolutivos compostos por agentes interativos com racionalidade limitada. Embora contenham elementos não lineares, esses modelos permanecem, em muitos casos, tratáveis do ponto de vista analítico, ao mesmo tempo em que exigem suporte de ferramentas computacionais para exploração mais profunda de suas propriedades dinâmicas.

Essas abordagens contrastam fortemente com a hipótese das expectativas racionais, segundo a qual agentes irracionais tenderiam a ser eliminados do mercado por meio de mecanismos evolutivos baseados em lucro ou riqueza, resultando em um mercado dominado por agentes plenamente racionais. No entanto, simulações computacionais de mercados artificiais, como aquelas desenvolvidas no Instituto Santa Fe por LeBaron, Arthur e Palmer [61] e Lux [65], demonstram que a convivência de múltiplas estratégias de previsão pode dar origem a regimes de preços com alternância entre estabilidade e instabilidade, episódios de volatilidade excessiva e outras irregularidades empíricas observadas nos mercados reais, como caudas pesadas e agrupamento de volatilidade.

Nesse contexto, os modelos BH97 e BH98 representam um marco na literatura por integrarem mudanças endógenas nas estratégias dos agentes com base em desempenho relativo. Tais modelos, apesar de sua simplicidade formal, revelam uma notável capacidade de replicar comportamentos complexos do mercado e têm sido empregados tanto para investigações teóricas quanto para testes empíricos, inclusive em ambientes laboratoriais com humanos.

No âmbito das finanças, o crescente interesse por modelos com agentes heterogêneos tem levado ao desenvolvimento de estruturas em que diferentes grupos de investidores, notadamente fundamentalistas e analistas técnicos, coexistem com expectativas divergentes sobre a trajetória futura dos preços dos ativos.

- Fundamentalistas formulam suas previsões com base em variáveis econômicas fundamentais como dividendos esperados ou taxas de juros, de modo que o preço do ativo se moverá na direção de seu valor fundamental e comprem ou vendem o ativo

quando seu preço está abaixo ou acima, respectivamente, desse valor fundamental.

- analistas técnicos, extraem previsões a partir de padrões históricos de preços pois acreditam que os preços dos ativos não são determinados apenas por fundamentos, mas que podem ser previstos por regras técnicas simples baseadas em padrões observados nos preços passados, como tendências ou ciclos.

Uma vez que a HME fraca resulta na variação dos preços ser representada por um passeio aleatório dirigido, fundamentalistas assumem a HME, enquanto analistas técnicos baseiam suas crenças na não validade dessa hipótese, ver Fama [28]. Desse modo, a composição da população de agentes, bem como suas estratégias, evolui ao longo do tempo com base no desempenho relativo de cada tipo, em um processo co-evolutivo de seleção adaptativa. Como resultado, os preços dos ativos apresentam dinâmicas complexas marcadas por transições irregulares entre regimes dominados por fundamentalistas (estáveis) e regimes dominados por seguidores de tendência (instáveis), com desvios persistentes em relação ao preço fundamental racional e episódios de volatilidade excessiva.

Além de sua relevância acadêmica, esses modelos têm potencial aplicabilidade prática. Seu uso por profissionais do mercado financeiro e formuladores de políticas públicas pode contribuir, por exemplo, para a avaliação da probabilidade de formação ou retomada de bolhas especulativas nos preços dos ativos.

De maneira diferente do capítulo anterior, devido à dificuldade de abordar o modelo de forma analítica, optamos por uma abordagem estatística e numérica. Todas as análises qualitativas serão feitas numericamente por meio do diagrama de bifurcações e pelo cálculo do maior expoente de Lyapunov. Essa escolha, além de apresentar outro ponto de vista, convém ao objetivo deste capítulo, uma vez que o modelo BH98 apresenta maior aplicabilidade prática pela abundância de dados disponíveis sobre séries financeiras, de modo que as principais análises partem do modelo ajustado a mercados financeiros reais.

O capítulo tem início com a apresentação de uma versão simplificada do modelo BH98, originalmente proposto por Brock e Hommes [16] e posteriormente adaptado por Hommes [41]. Inicialmente, delineamos o problema de apreçamento de ativos, definindo o conceito de preço fundamental e sua contraparte sob a hipótese de heterogeneidade comportamental dos agentes. Em seguida, discutimos brevemente a dinâmica do modelo considerando um número reduzido de tipos de agentes. Na sequência, introduzimos o método de estimação de parâmetros conhecido como Estimação por Máxima Verossimilhança Não Paramétrica Simulada, conforme proposto por Kristensen e Shin [56], e avaliamos sua aplicabilidade ao modelo BH98 por meio de experimentos de simulação de Monte Carlo. Após validarmos sua eficácia, procedemos à estimação dos parâmetros com base em séries temporais financeiras, utilizando preços de fechamento de ativos de diferentes classes e negociados em bolsas de valores de diferentes países. Concluimos o capítulo com uma

análise dos fatos estilizados estatísticos que o modelo ajustado é capaz de reproduzir.

3.1 MODELO DE CRENÇAS HETEROGÊNEAS

Sejam p_t o preço por ação do ativo com risco no instante t e y_t a variável aleatória que fornece o valor dos dividendos pagos por esse ativo no instante t . A dinâmica do patrimônio de um agente nesse mercado é dada pela equação

$$W_{t+1} = RW_t + (p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t)z_t,$$

em que $R = 1 + r$ é a taxa de retorno bruto do ativo sem risco, z_t denota o número de ações do ativo com risco compradas em t . Denotamos por $\mathbb{E}_t$ a esperança condicional e $\mathbb{V}_t$ a variância condicional baseadas na informação disponível publicamente no mercado, tais como histórico de preços e histórico de dividendos pagos. Sejam ainda, $\mathbb{E}_{h,t}$ e $\mathbb{V}_{h,t}$ a esperança condicional e a variância condicional baseadas nas crenças ou no modelo de previsão adotado pelos agentes do tipo h . Denotamos por $z_{h,t}$ a demanda por ativos de risco por agentes do tipo h . Consideremos que os agentes desejam maximizar a média-variância de seus patrimônios. Assim, optam pela demanda $z_{h,t}$ para o ativo de risco vinculada à crença h que ofereça a melhor combinação entre expectativa e variância, ajustada de acordo com o grau de aversão ao risco que será determinado pelo parâmetro a . Dessa forma, a maximização ocorre através da seguinte fórmula,

$$\max_{z_t} \{ \mathbb{E}_{h,t}[W_{t+1}] - \frac{a}{2} \mathbb{V}_{h,t}[W_{t+1}] \},$$

conforme estabelecido em [16] e [41].

Considerando a variância homogênea para todos os tipos de agentes, isto é, $\mathbb{V}_{h,t} = \sigma^2$, a demanda pelo ativo de risco do agente do tipo h pode ser expressa por,

$$z_{h,t} = \frac{\mathbb{E}_{h,t}[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t]}{a\mathbb{V}_{h,t}[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t]} = \frac{\mathbb{E}_{h,t}[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t]}{a\sigma^2}.$$

Seja s a oferta total por investidor do ativo de risco, isto é, a quantidade desse ativo disponível no mercado que cada investidor individual pode comprar. Assim, se $n_{h,t}$ denotar a fração dos agentes que no instante t adotam o comportamento h , em uma situação de equilíbrio entre oferta e demanda, obtemos a condição,

$$\sum_{h=1}^H n_{h,t} \frac{\mathbb{E}_{h,t}[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t]}{a\sigma^2} = s.$$

De forma que o preço observado no instante t fica definido por,

$$Rp_t = \sum_{h=1}^H n_{h,t} \mathbb{E}_{h,t}[p_{t+1} + y_{t+1}] - a\sigma^2 s. \quad (3.1)$$

3.1.1 Preço Fundamental.

Em um mercado perfeitamente eficiente, pode-se considerar todos os agentes idênticos pois adotam o comportamento perfeitamente racional, portanto formam a mesma expectativa. Assim, a equação de equilíbrio do mercado (3.1) pode ser escrita como

$$Rp_t = \mathbb{E}_t[p_{t+1} + y_{t+1}] - a\sigma^2 s. \quad (3.2)$$

Considere o apreçamento, ou seja, a solução da equação (3.2), dada pela soma das expectativas futuras dos dividendos descontada do prêmio de risco. A esse preço chamamos preço fundamental das expectativas racionais e que pode ser formalizado como se segue.

Definição 3.1.1. *Definimos o **preço fundamental** como o preço do ativo com risco, dado por:*

$$p_t^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}_t[y_{t+k}] - a\sigma^2 s}{R^k}.$$

Pode-se verificar que, ao se assumir a validade da condição de transversalidade, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E_t[p_{t+k}]}{R^k} = 0$, a solução da equação de equilíbrio em um mercado homogêneo, dada por (3.2), torna-se única e corresponde ao preço fundamental.

Note que o preço fundamental baseia-se somente nos fundamentos econômicos e é representado em (3.1.1) como a expectativa dos dividendos futuros. Assim, as principais características do preço fundamental são normalmente influenciadas pela natureza estocástica do processo de dividendos. O principal ponto de interesse é a situação de um processo de dividendos y_t é independente e identicamente distribuído com uma média constante $\mathbb{E}[y_t] = \bar{y}$. De modo que o preço fundamental nessa situação torna-se constante e pode ser definido como

$$p^* = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{y} - a\sigma^2 s}{R^k} = \frac{\bar{y} - a\sigma^2 s}{r}.$$

Entretanto, relaxando a condição de transversalidade, é possível obter outra forma de solução chamada 'bolha' onde os agentes, mesmo adotando uma expectativa racional e fazendo a previsão perfeita dos preços futuros, ao buscar a maximização de seu patrimônio, levam o preço observado a se desviar do preço fundamental.

Definição 3.1.2. *Uma **bolha racional** é uma solução não trivial para a equação (3.2) na forma,*

$$p_t = p_t^* + R^t(p_0 - p_0^*).$$

Em um mercado perfeitamente racional, vale a condição de transversalidade. Assim, nesse caso, podemos entender que os agentes acreditam que os preços fornecidos por bolhas duram um período de tempo limitado e, portanto, atuam de forma a controlar o preço observado, igualando-o ao preço fundamental. Portanto, de um modo geral, em um

mercado homogêneo, a única fonte de incerteza que impacta o preço observado está associada aos dividendos e aos processos econômicos associados.

3.1.2 Crenças Heterogêneas e Dinâmica Evolutiva.

Em seguida, vamos considerar um mercado heterogêneo com H tipos de agentes. Para diminuir o número de variáveis do sistema, consideramos a diferença entre o preço observado e o preço fundamental x_t , que chamaremos de *desvio* do preço fundamental. Assim,

$$x_t = p_t - p_t^*.$$

Seguindo [16] e [41], com o objetivo de formalizar a discussão acima, vamos introduzir três hipóteses básicas do modelo BH98 sobre as crenças dos agentes do tipo h , para todo h :

B1 $\mathbb{V}_{h,t}[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t] = \mathbb{V}_t[p_{t+1} + y_{t+1} - Rp_t] = \sigma^2$ para todos h e t .

B2 $\mathbb{E}_{h,t}[y_{t+1}] = \mathbb{E}_t[y_{t+1}]$ para todo t .

B3 Todas as esperanças $\mathbb{E}_{h,t}[p_{t+1}]$ são da forma

$$\mathbb{E}_{h,t}[p_{t+1}] = \mathbb{E}_t[p_{t+1}^*] + \mathbb{E}_{h,t}[x_{t+1}] = \mathbb{E}_t[p_{t+1}^*] + f_h(x_{t-1}, \dots, x_{t-L}),$$

para todo t .

A hipótese B1 significa que as crenças sobre a variância condicional são iguais e constantes para todos os tipos de agentes. A suposição B2, que todos os tipos têm expectativas corretas sobre os dividendos futuros y_{t+1} , dadas pela expectativa condicional, que é $\bar{y}$ no caso de dividendos independentes e identicamente distribuídos (i.i.d). Já a hipótese B3 indica que as crenças sobre os preços futuros consistem em duas partes: uma crença comum sobre o valor fundamental, mais uma parte heterogênea $f_{h,t}$ que difere pelo tipo de agente. Assim, cada preditor ou regra de previsão f_h representa um modelo de mercado, ou seja, uma regra técnica segundo a qual o tipo h acredita que os preços irão se desviar do preço fundamental.

Uma consequência importante e conveniente das suposições B1–B3 sobre as crenças dos agentes é que a equação de equilíbrio de mercado (3.1) pode ser reformulada em termos de desvios em relação ao preço fundamental de referência. De fato, por B3 aplicada na equação (3.1) e usando que para o preço fundamental, $R_t^p = \mathbb{E}_t[p_{t+1}^* + y_{t+1}] - a\sigma^2 s$ obtivemos a equação de equilíbrio em termos dos desvios do valor fundamental:

$$Rx_t = \sum_{h=1}^H n_{h,t} \mathbb{E}_{h,t}[x_{t+1}] = \sum_{h=1}^H n_{h,t} f_{h,t}, \quad (3.3)$$

com $f_{h,t} = f_h(x_{t-1}, \dots, x_{t-L})$. Para detalhar as estratégias de cada tipo de agente, vamos continuar adotando a abordagem de [16] e assumir preditores lineares simples que levam em consideração somente um período de defasagem. Temos explicitamente

$$f_{h,t} = g_h x_{t-1} + b_h, \quad (3.4)$$

em que, g_h é o parâmetro de **tendência** e b_h o parâmetro de **viés** de cada preditor h . Essa suposição pode ser justificada pelo seguinte. Como o modelo busca representar e generalizar uma grande quantidade de agentes que se diferenciam do comportamento racional utilizando preditores complicados ou, por vezes, somente regras heurísticas implícitas, em um curto período de tempo, uma aproximação linear pode ser suficientemente adequada. Também pode-se argumentar que o número de agentes com acesso a preditores mais elaborados não é suficiente para causar mudanças perceptíveis nos preços observados. Além disso, preditores lineares simples podem modelar os tipos mais importantes de comportamento listados abaixo:

- $g_h = b_h = 0$ modela um comportamento **racional**.
- $g_h > 0$ modela um comportamento de **seguir a tendência**.
- $g_h < 0$ modela um comportamento **contrário a tendência**.
- $b_h > 0$ modela um comportamento de viés positivo (**otimista**).
- $b_h < 0$ modela um comportamento de viés negativo (**pessimista**).

Note que o preço fundamental de referência está incluído como um caso especial dentro desta formulação geral, com todas as estratégias de previsão $f_h \equiv 0$.

A parte evolutiva do sistema detalha como os agentes ajustam suas crenças em resposta às flutuações nos preços e à gama de informações econômicas acessíveis a cada instante de tempo. Como no capítulo anterior, essa dinâmica é descrita pela fração $n_{h,t}$ de agentes assumindo cada comportamento h em um determinado instante de tempo t que, por sua vez, é expressa pelas probabilidades de Gibbs,

$$n_{h,t} = \frac{\exp(\beta U_{h,t-1})}{\sum_{h=1}^H \exp(\beta U_{h,t-1})}, \quad (3.5)$$

em que $U_{h,t-1}$ é a utilidade, publicamente avaliada no tempo t , de acordo com a performance do comportamento h no tempo $t-1$. Descrevemos a utilidade pela média ponderada dos lucros realizados no instante $t-1$,

$$\begin{aligned} U_{h,t-1} &= (p_t + y_t - R p_{t-1}) \frac{\mathbb{E}_{h,t-1}[p_t + y_t - R p_{t-1}]}{a\sigma^2} \\ &= (x_{t-1} - R x_{t-2} + a\sigma^2 s) \frac{f_{h,t-2} - R x_{t-2} + a\sigma^2 s}{a\sigma^2}. \end{aligned}$$

Assim, (3.5) fornece uma dinâmica onde os agentes tendem a adotar o comportamento que obteve melhores resultados em um passado recente, de modo que, quanto maior for a utilidade percebida do comportamento h , maior será o número de agentes que adotarão esse comportamento no futuro. O parâmetro β representa a intensidade de escolha, medindo o quão fortemente a coletividade de agentes se adapta à estratégia ótima no instante t . De onde segue que $\beta = 0$ indica um sistema onde os agentes tendem a manter seu comportamento, ou apesar da utilidade percebida ou mesmo por serem incapazes de perceber a utilidade do comportamento ótimo. De maneira contrária, $\beta = +\infty$ representa um sistema onde os agentes adotam instantaneamente o comportamento ótimo objetivando maximizar seu patrimônio.

O modelo BH98 com H tipos de agentes é dado em termos do desvio do preço fundamental pelo sistema dinâmico,

$$Rx_t = \sum_{h=1}^H n_{h,t-1} f_{h,t} + \varepsilon_t \equiv \sum_{h=1}^H n_{h,t-1} (g_h x_{t-1} + b_h) + \varepsilon_t, \quad (3.6a)$$

$$n_{h,t-1} = \frac{\exp(\beta U_{h,t-1})}{\sum_{h=1}^H \exp(\beta U_{h,t-1})}, \quad (3.6b)$$

$$U_{h,t-1} = (x_{t-1} - Rx_{t-2}) \frac{f_{h,t-2} - Rx_{t-2}}{a\sigma^2} \equiv (x_{t-1} - Rx_{t-2}) \frac{g_h x_{t-3} + b_h - Rx_{t-2}}{a\sigma^2}, \quad (3.6c)$$

em que o ruído gaussiano ε_t representa a incerteza presente no mercado. Previsões lineares com apenas um período de defasagem, conforme descrito nas equações (3.6) resultam em um sistema de terceira ordem que pode ser interpretado como um sistema dinâmico tridimensional:

$$x_t = F(x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}), \quad (3.7)$$

cujas condições de estabilidade local são relativamente simples de examinar.

Notemos que, apesar de transformações lineares de processos normalmente distribuídos resultarem em processos normalmente distribuídos, o sistema expresso nas equações 3.6 é fortemente não linear, fazendo com que o processo resultante não seja normalmente distribuído e nem mesmo estacionário. Da equação (3.7) é possível notar que o valor do desvio do preço fundamental no tempo t é influenciado por transformações não lineares dos ruídos dos últimos três períodos de tempo, $t-1, t-2, t-3$. Assim, observamos que é inviável o cálculo analítico de uma distribuição de probabilidade para o processo gerado pelo modelo BH98, como é característico de sistemas complexos em geral.

3.1.3 Dinâmica com Pouco tipos de agentes.

Com o propósito de ilustrar a dinâmica do sistema, vamos investigar um exemplo simples com dois tipos de crenças. Nesse caso, temos que o sistema (3.6) pode ser escrito na forma

$$Rx_t = n_{2,t}gx_{t-1} \quad (3.8a)$$

$$n_{1,t} = \frac{\exp[\beta((x_t - Rx_{t-1})^2 - C)]}{\exp[\beta((x_t - Rx_{t-1})^2 - C)] + \exp[\beta(x_t - Rx_{t-1})(gx_{t-2} - Rx_{t-1})]} \quad (3.8b)$$

$$n_{2,t} = \frac{\exp[\beta(x_t - Rx_{t-1})(gx_{t-2} - Rx_{t-1})]}{\exp[\beta((x_t - Rx_{t-1})^2 - C)] + \exp[\beta(x_t - Rx_{t-1})(gx_{t-2} - Rx_{t-1})]}. \quad (3.8c)$$

Podemos introduzir a diferença nas frações m_t , e um cálculo simples mostra que

$$m_t = n_{1,t} - n_{2,t} = \tanh\left(\frac{\beta}{2}\left[(x_t - Rx_{t-1})(x_t - gx_{t-2}) - C\right]\right). \quad (3.8d)$$

Como principal exemplo, considere um mercado com dois tipos de agente, fundamentalistas $f_1 = 0$ e especuladores $f_2 = g_2x_{t-1}$. Neste exemplo, os fundamentalistas precisam arcar com um custo fixo positivo $C > 0$ por período para a obtenção de informações que podem gerar incentivos para que os agentes aproveitem a informação daqueles que pagam os custos de obter expectativas racionais. No Capítulo 2 mostramos que, em um sistema de oferta e demanda do tipo cobweb com crenças adaptativas, uma alta intensidade de escolha para alternar entre um preditor de expectativas racionais custoso e um preditor ingênuo gratuito leva à instabilidade do mercado e à flutuação caótica dos preços. No modelo de precificação de ativos, dependendo da configuração dos tipos de estratégias de negociação, essa força econômica pode gerar instabilidade no estado estacionário fundamental E_1 , com $x = 0$, e a existência de estados estacionários adicionais não fundamentais E_2 e E_3 .

Exemplo 3.1.1 (Fundamentalistas e seguidores de tendência). *Quando $\beta = 0$, os dois tipos de operadores coexistem em proporções iguais no estado estacionário $n_1 = n_2 = 0.5$. No entanto, à medida que β aumenta, a fração de seguidores de tendência tende a crescer, aproximando-se de 1 no limite $\beta \rightarrow +\infty$, em razão do custo fixo de informação imposto aos fundamentalistas. Aqui, para a análise numérica, consideramos o caso específico de um mercado com agentes fundamentalistas e seguidores de tendência, com parâmetros dados pela Tabela 2.*

Tabela 2 – Valores de parâmetros utilizados nas simulações numéricas.

g	b	R	C
1.2	0.0	1.1	1.0

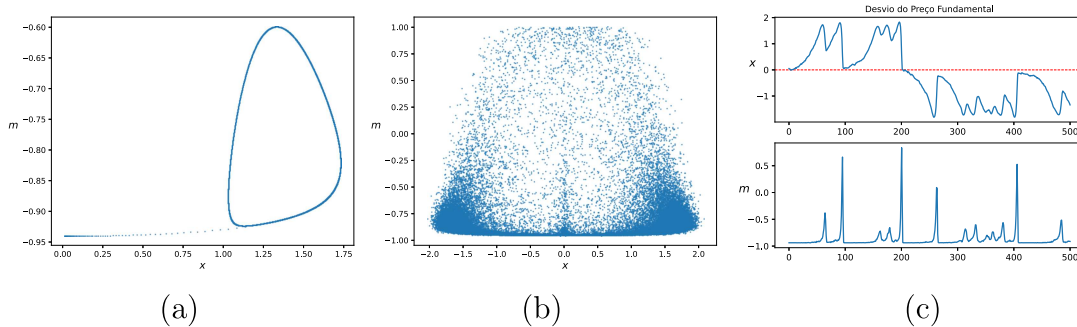
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A estabilidade do estado estacionário fundamental depende criticamente do valor de g . Para valores baixos $0 \leq g < R$, esse estado permanece estável independentemente de β . Contudo, quando $g > R$, a predominância crescente de seguidores de tendência, promovida

por altos valores de β , pode desestabilizar o sistema. Esse fenômeno está associado a uma bifurcação de Hopf, na qual dois novos estados estacionários não fundamentais surgem. O sistema pode convergir para qualquer um desses estados não fundamentais ou, na presença de ruído, alternar entre eles.

Com o aumento adicional da intensidade de escolha, os estados não fundamentais também se tornam instáveis por meio de uma bifurcação de Hopf. A partir desse ponto, surgem ciclos-limite estáveis e atratores quase periódicos ao redor dos estados não fundamentais, dando origem a dinâmicas mais complexas e irregulares. Essa sequência de bifurcações culmina em trajetórias caóticas, conforme evidenciado pelo expoente de Lyapunov positivo na Figura 17, caracterizando uma rota racional ao caos induzida por competição evolucionária entre estratégias.

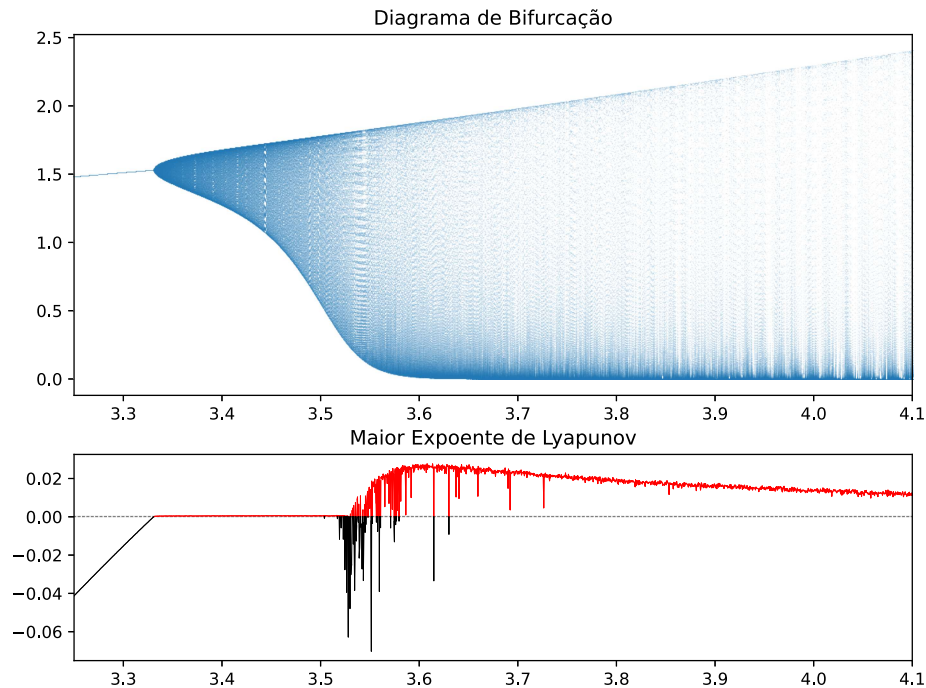
Figura 16 – Atrator no espaço de fase (x, m) para o sistema com $\beta = 3.45$. — (a) Atrator simples com solução iniciais $(0.01, 0.01, 0.01)$. — (b) Atrator apresentado em (a) perturbado por um ruído gaussiano $\varepsilon \sim N(0, 0.02)$. — (c) Séries temporais do desvio do preço fundamental e da diferença relativa da fração de agentes $m = n_1 - n_2$, para 500 observações do modelo com ruído.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Podemos interpretar economicamente a dinâmica do sistema do seguinte modo. Observe na Figura 16 (c) que os agentes adotam, na maior parte do tempo, a estratégia de seguir a tendência, quando $m = -1$, uma vez que adotar a estratégia fundamentalista é custoso. Desse modo, cria-se, com essa atitude, bolhas racionais na série de preços, de modo que, ao deixarem de perceber essa estratégia como vantajosa, buscam informação através do preditor f_1 fundamentalista e custoso. Após uma certa proporção de agentes concordarem sobre o desvio do preço, este converge rapidamente para o preço fundamental. Uma vez que o preço está estabilizado, pagar pela informação fundamentalista deixa de ser vantajoso frente ao comportamento de seguir a tendência, que é gratuito e aproveita a informação disponível no mercado. Note ainda que quando a maioria dos agentes não concorda em adotar o preditor fundamental f_1 , ou seja, quando a série dos valores m não se torna positiva, a informação disponível não é suficiente para levar o preço observado de volta ao preço fundamental e a bolha persiste.

Figura 17 – Fundamentalistas e seguidores de tendência. — (a) Diagrama de bifurcação, com duplicação de período primária e bifurcação de Hopf secundária levando a dinâmicas periódicas, quase-periódicas e, subsequentemente, também caóticas. — (b) Gráfico do maior expoente de Lyapunov, com dinâmicas quase-periódicas imediatamente após a bifurcação de Hopf secundária e caos, entremeados por ciclos estáveis para valores mais altos de β .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Exemplo 3.1.2 (Fundamentalistas e contrários à tendência). *Para agentes fortemente contrários à tendência, $g < -2R$, o aumento da intensidade de escolha gera uma bifurcação de duplicação de períodos onde o estado estacionário se transforma em dois pontos periódicos de período 2. Após uma bifurcação de Hopf, com o aumento de β , cada um desses pontos gera um ciclo denso quase-periódico. O diagrama de bifurcação e o maior expoente de Lyapunov apresentados na Figura 19 indicam que, após essa bifurcação secundária, com $\beta \rightarrow +\infty$, uma bifurcação homoclínica ocorre gerando comportamento caótico no sistema.*

Tabela 3 – Valores de parâmetros utilizados nas simulações numéricas.

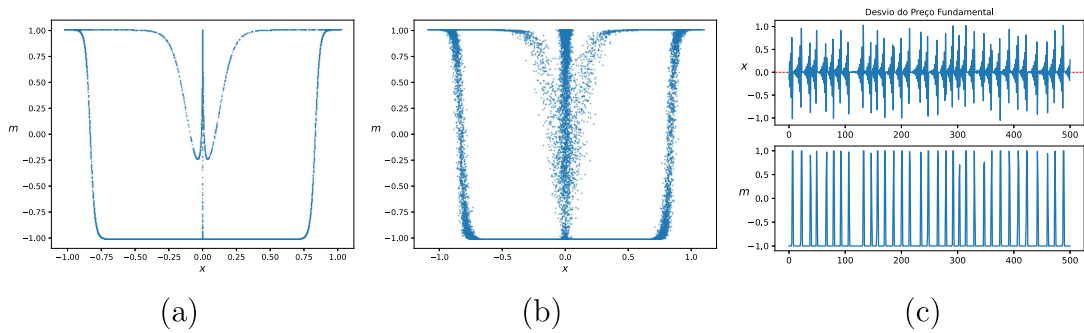
g	b	R	C
-1.5	0.0	1.1	1.0

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Note que o comportamento dinâmico caracterizado no atrator estranho exibido na Figura 18 é muito similar ao do sistema cobweb com agentes heterogêneos com expectativas ingênuas e racionais, estudado no Capítulo 2. A variedade estável $W^s(E_1)$ consiste em

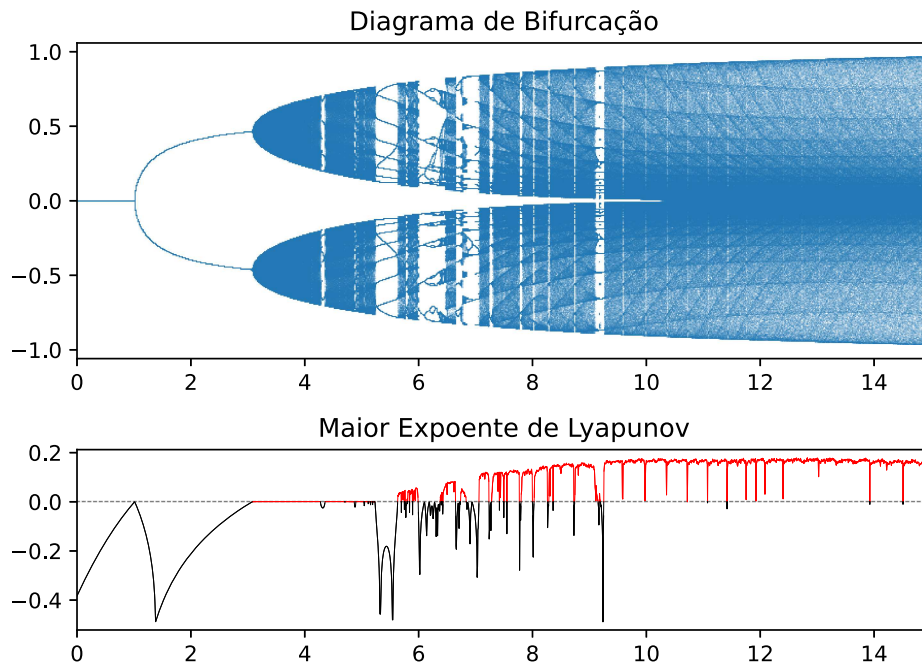
um segmento vertical, enquanto a instável $W^u(E_1)$ tem duas, uma se afastando à direita e outra à esquerda antes de retornarem em direção ao estado estacionário paralelamente a $W^s(E_1)$ e recomeçarem o ciclo.

Figura 18 – Atrator no espaço de fase (x, m) para o sistema com $\beta = 25$. — (a) Atrator com solução iniciais $(0.01, 0.01, 0.01)$. — (b) Atrator perturbado por um ruído gaussiano $\epsilon \sim N(0, 0.02)$. — (c) Séries temporais do desvio do preço fundamental e da diferença relativa da fração de agentes m , para 500 observações do modelo com ruído.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 19 – Fundamentalistas e contrários à tendência. — (a) Diagrama de bifurcação, com duplicação de período primária e bifurcação de Hopf secundária levando a dinâmicas periódicas, quase-periódicas e, subsequentemente, também caóticas. — (b) Gráfico do maior expoente de Lyapunov, com dinâmicas quase-periódicas imediatamente após a bifurcação de Hopf secundária e caos, entremeados por ciclos estáveis para valores mais altos de b .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Nos dois exemplos considerados acima, o caso mais interessante para explicações teóricas baseadas no modelo para comportamento reais estatísticos e dinâmicos, é dado pelos valores de β que estão entre a bifurcação de Hopf e a bifurcação homoclínica. De fato, note nas Figuras 17 e 19 que esse conjunto de valores de β é caracterizado por ter o expoente de Lyapunov muito próximo de zero. Dessa maneira, com a presença de ruído, a dinâmica do sistema transiciona entre atratores simples e periódicos para atratores estranhos quase-periódicos com comportamento fracamente caótico. Essa propriedade é o que permite caracterizar o modelo BH98 como um sistema complexo.

3.2 MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA NÃO-PARAMÉTRICA SIMULADA.

Nessa seção, vamos aplicar a abordagem da máxima verossimilhança não paramétrica simulada (NPSMLE)¹ proposta e formalizada por Kristensen e Shin [56] ao modelo BH98. Para estabelecer uma referência para efeito de comparação, buscamos nos basear nas hipóteses e na análise de Monte Carlo desenvolvida em [57]. Primeiramente, vamos

¹ Seguimos a abreviação do termo original em inglês, *non parametrical simulated maximum likelihood estimator*

construir o estimador, explicar suas vantagens e desvantagens e, em seguida, analisar, por meio de um estudo de Monte Carlo, sua aplicabilidade ao modelo BH98.

Seja $(y_t, \mathbf{v}_t)$, com $y_t : t \mapsto \mathbb{R}^k$, $\mathbf{v}_t : t \mapsto \Omega_t$, $t \in \mathbb{N}$ um processo estocástico, que pode ser não estacionário, com Ω_t um espaço de probabilidade que pode variar com o tempo. Suponha que temos T observações $\{(y_t, \mathbf{v}_t)\}_{t=1}^T$ desse processo, onde a série temporal $\{y_t\}_{t=1}^T$ é gerada por um modelo totalmente paramétrico dado por

$$y_t = q_t(\mathbf{v}_t, \varepsilon_t; \theta), \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.9)$$

em que $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ é um vetor de parâmetros desconhecido, e ε_t é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição F_ε conhecida, constante no tempo e independente dos parâmetros θ . Assumimos que $\mathbf{v}_t$ contenha as variáveis exógenas do modelo, que não podem ser observadas, como, por exemplo, no caso de modelos markovianos com $\mathbf{v}_t \equiv y_{t-1}$.

Assumimos ainda que o modelo possui uma densidade condicional associada $p_t(y | \mathbf{v}; \theta)$, dada por,

$$P(y_t \in A | \mathbf{v}_t = \mathbf{v}) = \int_A p_t(y | \mathbf{v}; \theta) dy, \quad t = 1, \dots, T,$$

para qualquer conjunto de Borel $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Desse modo, o maximizador da log-verossimilhança condicional é

$$\theta_{MLE} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_T(\theta), \quad L_T(\theta) = \sum_{t=1}^T \log p_t(y_t | \mathbf{v}_t; \theta), \quad (3.10)$$

Se o modelo (3.9) estiver completamente especificado, ou seja, $\mathbf{v}_t$ contiver apenas valores anteriores de y_t , então esta é a verossimilhança completa do modelo condicional ao valor inicial. Se, por outro lado, $\mathbf{v}_t$ contiver outras variáveis exógenas além de valores anteriores de y_t , então $L_T(\theta)$ é uma verossimilhança parcial.

Suponha agora que $p_t(y | \mathbf{v}; \theta)$ não possui uma forma fechada ou é muito difícil de obter uma representação analítica exata e, portanto, a estimação por máxima verossimilhança de θ em (3.10) não é viável. Nesses casos, embora $p_t(y | \mathbf{v}; \theta)$ não esteja disponível em forma analítica, ainda é possível gerar observações simuladas a partir do modelo por (3.9). Seguindo [56], vamos propor um método geral para obter uma densidade condicional simulada, que, por sua vez, será usada para obter uma versão simulada do estimador de máxima verossimilhança (MLE).

Para cada $1 \leq t \leq T$, $y_t \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{v}_t \in \Omega_t$ e $\theta \in \Theta$, geramos N amostras i.i.d. seguindo a distribuição F_ε , $\{\varepsilon^i\}_{i=1}^N$, e usamos essas amostras para calcular

$$Y_{t,i}^\theta = q_t(\mathbf{v}_t, \varepsilon^i; \theta), \quad i = 1, \dots, N.$$

Por construção, as N variáveis aleatórias i.i.d. simuladas, $\{Y_{t,i}^\theta\}_{i=1}^N$, seguem a distribuição p_t , isto é, $Y_{t,i}^\theta \sim p_t(\cdot | \mathbf{v}_t; \theta)$. Assim, as simulações podem ser utilizadas para estimar

$p_t(y \mid x; \theta)$ por meio de métodos não paramétricos como o núcleo. Dessa forma, definimos

$$\hat{p}_t(y_t \mid \mathbf{v}_t; \theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_\eta(Y_{t,i}^\theta - y_t), \quad (3.11)$$

onde $K_\eta(u) = K(u/\eta)/\eta^k$, $K : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ é um núcleo e $\eta > 0$ é uma largura de banda. Sob condições de regularidade, ver [56] condições A.2, A.4, K.1 e K.2, obtemos:

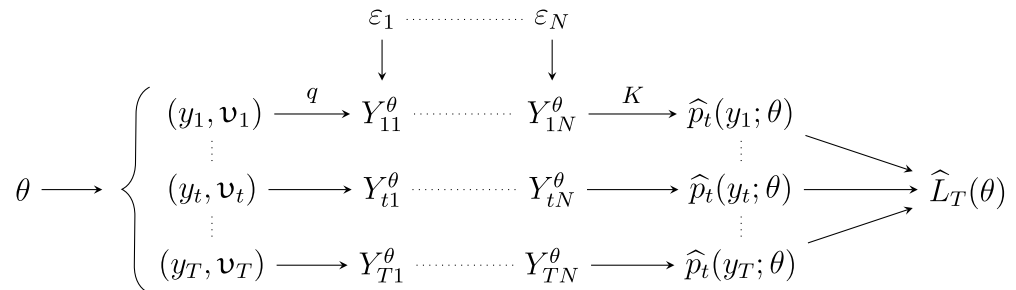
$$\hat{p}_t(y_t \mid \mathbf{v}_t; \theta) = p_t(y_t \mid \mathbf{v}_t; \theta) + O_P(1/\sqrt{N\eta^k}) + O_P(\eta^2), \quad N \rightarrow \infty.$$

De forma que o erro da aproximação pode ser reduzido à $O_P(1)$ quando $\eta \rightarrow 0$ e $N\eta^k \rightarrow \infty$. Tendo obtido a densidade condicional simulada, podemos calcular o MLE simulado de θ pela fórmula

$$\hat{\theta}_{NPSMLE} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \hat{L}_T(\theta), \quad \hat{L}_T(\theta) = \sum_{t=1}^T \log \hat{p}_t(y_t \mid \mathbf{v}_t; \theta).$$

Assim, sob as condições de regularidade citadas, $\hat{\theta}_{NPSMLE}$ mantém as mesmas propriedades do θ_{MLE} inviável, quando $T, N \rightarrow \infty$ e $\hat{p}_t(y_t \mid \mathbf{v}_t; \theta) \xrightarrow{P} p_t(y_t \mid \mathbf{v}_t; \theta)$, temos que $\hat{L}_T(\theta) \xrightarrow{P} L_T(\theta)$ quando $N \rightarrow \infty$, para um dado $T \geq 1$.

Ao buscar θ por meio de otimização numérica, utilizamos as mesmas observações para todos os valores de θ . Com o objetivo de diminuir o custo computacional, também podemos usar o mesmo conjunto de valores $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^N$ obtidos da distribuição $F_\varepsilon(\cdot)$, ao longo de cada iteração para t . No contexto da otimização numérica, a tarefa é simplificada quando $L_T(\theta)$ exibe continuidade e pode ser diferenciada em relação a θ . De acordo com a equação (3.11), esta propriedade é mantida se as funções K e $\theta \mapsto q_t(\mathbf{v}, \varepsilon; \theta)$ forem continuamente diferenciáveis $r \geq 0$ vezes. Isso é uma consequência direta da aplicação da regra da cadeia e do fato de utilizarmos a mesma realização das variáveis aleatórias $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^N$ para cada valor de θ . Assim, podemos resumir o cálculo da função de log-verossimilhança simulada no seguinte diagrama:



Listamos a seguir algumas vantagens e desvantagens do método que são discutidas com mais profundidade em [56]. Primeiro, como são utilizadas amostras i.i.d., o estimador de densidade não é fortemente afetado pela estrutura de dependência nos dados observados e é possível estimar os parâmetros independentemente de os dados observados serem i.i.d. ou não estacionários. Segundo, a densidade simulada $\hat{p}_t(y \mid x; \theta)$ perde precisão com o aumento

da dimensão do modelo, como é característico de estimadores de densidade baseados em núcleo. Contudo, é demonstrado em [56] que a soma dos logaritmos das densidades na computação de $\widehat{L}_T(\theta)$ funciona como um mecanismo adicional de suavização, de modo que a variância adicional de $\widehat{L}_T(\theta)$ devido às simulações recupera a taxa paramétrica padrão de $1/N$. Por outro lado, uma desvantagem é que, para N fixo e $\eta > 0$, a função de log-verossimilhança simulada é um estimador enviesado. Assim, para garantir consistência, será necessário fazer $N \rightarrow \infty$. Essa é uma característica comum à métodos de verossimilhança baseados em simulação para modelos não lineares. Além disso, para garantir precisão, também é necessário fazer $\eta \rightarrow 0$. Em particular, é necessário escolher η para um dado tamanho de amostra e de simulação, o que representa uma complicação adicional em relação a outros estimadores baseados em simulação.

4 ESTUDO VIA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Tendo definido o procedimento pelo qual faremos as estimativas dos parâmetros, podemos fazer a aplicação do procedimento ao modelo BH98. Identificando $y_t = x_t$ com o desvio do preço fundamental e as variáveis exógenas $\mathbf{v}_t = (x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3})$ com valores passados de x_t , obtemos uma equivalência do sistema de equações (3.6) com a equação (3.9). Desse modo, prosseguimos com um estudo de Monte Carlo para avaliar a capacidade do procedimento de recuperar os parâmetros simulados. Nesse sentido, seguimos os parâmetros utilizados nas simulações feitas em [57] para efeito de comparação. Em todas as simulações nessa seção, estamos interessados em saber quão precisamente o método NPSMLE é capaz de recuperar os valores verdadeiros e quão robusto ele é com relação a diferentes configurações. Por essa razão, apresentamos resultados baseados em 1000 execuções aleatórias, número de observações simuladas $T = 5000$, e precisão da estimação por núcleo $N = 1000$ amostras i.i.d. da distribuição fornecida.

O modelo discutido é caracterizado por sua simplicidade, com poucos parâmetros significativos que permitem a estimação simultânea de todos os coeficientes essenciais. Os parâmetros foram escolhidos em conformidade com a literatura atual, ver [38], [1] e [57], como o parâmetro-chave β , a intensidade de escolha entre os H tipos de estratégias disponíveis, e os coeficientes de crença comportamental g_h, b_h para $0 \leq h \leq H$. Os outros parâmetros, como a taxa de retorno do ativo livre de risco, a constante de aversão ao risco a e a variância condicional dos agentes, são parâmetros escalares homogêneos e compartilhados por todos os tipos de agentes e, desse modo, não afetam as proporções relativas das utilidades $U_{h,t}$. Portanto, podemos naturalmente considerar que esses parâmetros não influenciam a dinâmica do modelo e fixamos o retorno bruto do ativo livre de risco como $R = 1 + r = 1.0001$, o prêmio de risco $a\sigma^2 = 1$.

Para o cálculo da função de densidade simulada, utilizamos o núcleo gaussiano dado pela fórmula

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \quad u \in \mathbb{R}.$$

E utilizamos a largura de banda dada pela regra de Silverman, ver [89],

$$\eta_t = \left(\frac{4}{3N}\right)^{1/5} \hat{\sigma}_t,$$

em que $\hat{\sigma}_t$ é o desvio padrão de $\{Y_{t,i}^\theta\}_{i=1}^N$, que deve ser calculada para cada $1 \leq t \leq T$.

Primeiramente, avaliamos a capacidade de recuperação do parâmetro que mede a intensidade de escolha β , parâmetro este com maior importância teórica do modelo. Como discutido na Seção 3.1, β determina o tipo de equilíbrio do modelo, que pode assumir geralmente a forma de um ou múltiplos estados estacionários, ciclos ou mesmo comportamento caótico. Além disso, β possui grande importância conceitual, uma vez que modela a racionalidade limitada dos agentes.

Em cada simulação de Monte Carlo, geramos uma série de observações $\{x_t\}_{t=100}^{T+100}$ por 3.6, descartando as 100 primeiras iterações para garantir a estabilidade do modelo. Seguindo [57] consideramos com $H = 5$ tipos de agentes. Tomamos por hipótese $g_1 = b_1 = 0$, modelando os agentes fundamentalistas no mercado, e tomamos g_h da distribuição normal $N(0, 0.4)$ e b_h de $N(0, 0.3)$, para cada $h \in \{2, 3, 4, 5\}$ com o objetivo de estimar β em diferentes situações e garantir uma inferência estatística válida. Para controlarmos o custo computacional exigido pelo procedimento, vamos limitar o espaço de parâmetros à $[-0.5, 0.5]$ para $\beta = 0$ e $[-\beta, 3\beta]$ para $\beta > 0$.

Verificamos uma capacidade geral, sob diferentes tipos de crenças dadas pelos valores aleatórios de g_h e b_h , do método de recuperar com grande precisão o verdadeiro valor do parâmetro β que mede a intensidade de escolha entre essas crenças. Na Tabela 4 reportamos os valores estimados da mediana, média, desvio padrão e os percentis 0.025 e 0.975 de 1000 estimativas de séries com $T = 5000$ e precisão do núcleo $N = 1000$ para $\beta \in \{0, 0.1, 0.5, 1, 5, 10\}$. Os resultados da Tabela 4 mostram uma capacidade de estimativa com uma precisão razoável. Além disso, nota-se que a mediana fornece uma melhor aproximação do valor real quando comparada a média.

Tabela 4 – Resultados recuperados para o parâmetro β .

β	$\hat{\beta}$					σ
	mediana	média	d.p.	p 2.5%	p 97.5%	
0.0	0.000	0.001	0.053	-0.100	0.103	2
0.1	0.101	0.101	0.042	0.012	0.197	2
0.5	0.503	0.512	0.132	0.271	0.841	1
1.0	1.006	1.017	0.185	0.731	1.384	1
5.0	4.985	4.989	0.617	3.832	6.045	0.1
10.0	10.011	10.038	0.800	8.967	11.132	0.1

Resultados obtidos com 1000 simulações, $T = 5000$, $N = 1000$, e com ruído gaussiano dado por $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma)$ e $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$.

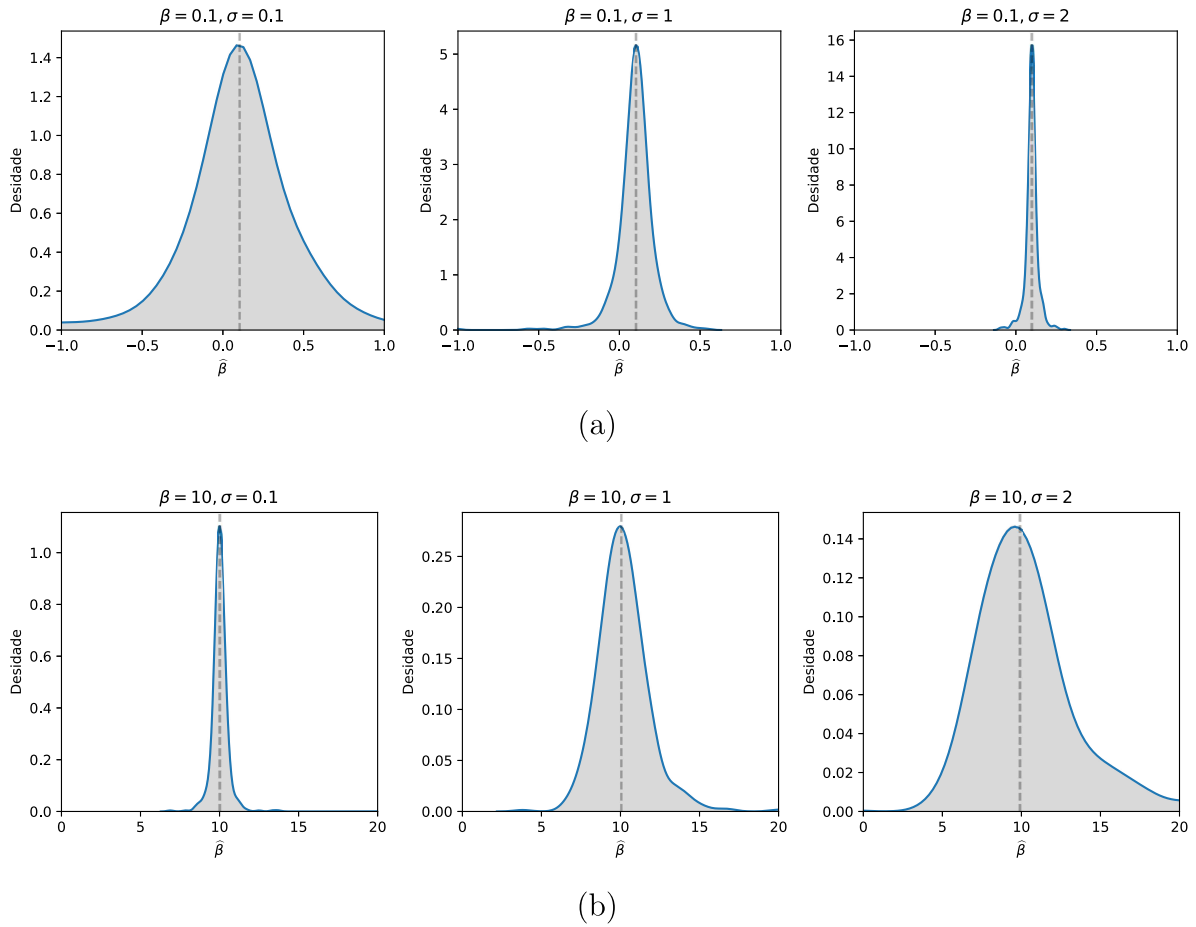
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Testamos a sensibilidade do modelo a ruídos provenientes da distribuição normal e com intensidades $\{0.1, 1, 2\}$ semelhantes às que já foram usadas em estudos relacionados na literatura como [38] e [57]. Nas simulações, adotamos a hipótese de ε_t e ε_i serem amostras da distribuição normal $N(0, \sigma)$ com intensidade, ou desvio padrão, $\sigma \in \{0.1, 1, 2\}$.

O ruído, ε_t adicionado ao modelo determinístico BH98, dado pelo sistema (3.6), tem por objetivo representar incertezas associadas ao mercado e eventos imprevisíveis. Já o ruído ε_i é utilizado no procedimento NPSMLE para a simulação da função densidade de probabilidade. Ao identificarmos esses ruídos com a mesma distribuição de probabilidade, temos por objetivo munir o método de estimação da capacidade de recuperar o ruído da série, que será de grande importância ao aplicarmos o método a dados empíricos de séries financeiras reais. Ao mesmo tempo, essa hipótese é razoável uma vez que, ademais, Kukacka e Barunik [57] mostraram que o efeito da distribuição com a mesma variância não afeta significativamente a precisão da estimativa, ao contrário da magnitude da variância.

Durante as simulações, foi notável a influência da intensidade do ruído σ nas estimativas do parâmetro β . Partindo do princípio de que os valores do ruído não devem ofuscar o efeito das variáveis em análise, na Tabela 4 reportamos em uma coluna à parte os valores de σ para os quais foram obtidas as estimativas apresentadas do parâmetro β . Assim, foram realizadas estimativas para $\beta \in \{0.1, 10\}$ com diferentes intensidades de ruído. A Tabela 5 apresenta dados obtidos de 500 simulações para diferentes valores de σ , 0.1, 1 e 2 que foram anteriormente utilizados na literatura para estimativas como em [39] e [57]. Contrariamente ao esperado, observa-se em situações onde os valores de β são próximos de zero, como na Figura 20 (a), um aumento no desvio padrão pode, na verdade, contribuir para diminuir a variância das estimativas e, assim, melhorar a precisão do processo. Esse comportamento pode ser explicado pela relação inversa do parâmetro β com a variância do erro de previsão na formação das expectativas, aqui incorporadas genericamente na incerteza de mercado. Para mais detalhes, veja [16] e [38].

Figura 20 – Densidade das estimativas do parâmetro β para diferentes intensidades de ruído para – (a) $\beta = 0.1$ – (b) $\beta = 10$.



Fonte: Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Uma vez verificada a qualidade do estimador para o parâmetro β , subsequentemente avaliaremos agora o método NPSMLE na realização de estimativas de múltiplos parâmetros. Desse modo, além do parâmetro β , buscamos determinar simultaneamente os coeficientes de crença associados aos agentes, especificamente g_h e b_h assim como a intensidade do ruído σ . Consideramos um sistema composto por duas estratégias de negociação, em que a estratégia fundamentalista aparece no mercado por padrão ($g_1 = b_1 = 0$).

Ao aplicar o método NPSMLE ao modelo BH98, não foi possível verificar analiticamente as condições de regularidade A.2, A.4, K.1 e K.2 de [56]. Essas condições impõem restrições às funções geradoras de dados e à densidade condicional que está sendo estimada com o propósito de garantir que a convergência em medida $\hat{p} \rightarrow p$ seja suficientemente rápida e, portanto, garantir a equivalência assintótica dos parâmetros ótimos obtidos pelo estimador de máxima verossimilhança simulada, $\hat{\theta}$, com o obtido pelo estimador de máxima verossimilhança clássico, θ . Não sendo viável a verificação analítica de tais condições, Kukacka e Barunik [57] optaram, ao aplicar o método ao modelo BH98, por uma

Tabela 5 – Resultados recuperados para o parâmetro β .

β	σ	$\hat{\beta}$				
		mediana	média	d.p.	p 2.5%	p 97.5%
0.1	0.1	0.103	0.119	0.491	-0.872	0.929
	1	0.104	0.098	0.117	-0.129	0.302
	2	0.099	0.099	0.041	-0.002	0.177
10.0	0.1	10.016	10.043	0.691	9.054	11.105
	1	10.063	10.272	1.880	7.543	14.285
	2	9.895	10.54	3.849	5.751	20.265

Resultados obtidos com 500 simulações, $T = 5000$, $N = 1000$, e com ruído gaussiano dado por $\varepsilon \sim N(0, \sigma)$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

abordagem numérica verificando que as curvas de máxima verossimilhança simuladas para os parâmetros β , g_2 e b_2 são suficientemente suaves, côncavas e possuem um único máximo global. No entanto, ao adicionarmos ao processo de estimação o parâmetro que mede a intensidade do ruído, perdemos a característica da suavidade da função. Observe que este não é um problema que podemos evitar, pois, para que o modelo se ajuste adequadamente aos dados reais, será necessário também estimar a intensidade do ruído.

Assim, o problema de otimização passa a ter uma camada a mais de dificuldade, uma vez que qualquer método numérico nessas condições conduzirá a um máximo local devido a não suavidade da função objetivo. Realizamos testes variando o método de otimização, prezando pela velocidade de convergência e pela consistência dos resultados. Podemos concluir que métodos de otimização baseados em subgradiente, como o BFGS, e também os métodos de ponto interior, ambos descritos em [101], apresentaram baixa consistência nos resultados, uma vez que convergiram rapidamente para diferentes máximos locais. Testamos ainda métodos de otimização estocástica como 'Stochastic Gradient Descent', ver [82] e [11] que foram descartados pela baixa velocidade de convergência. Dessa forma, optamos pelo método COBYLA, baseado no método simplex, que, pela simplicidade, permite adotarmos a estratégia de múltiplos pontos iniciais sugerida por [57], que consiste em, durante um mesmo processo de estimação, escolher entre um conjunto aleatório limitado um número fixo de soluções iniciais, as quais, após a otimização, levaram

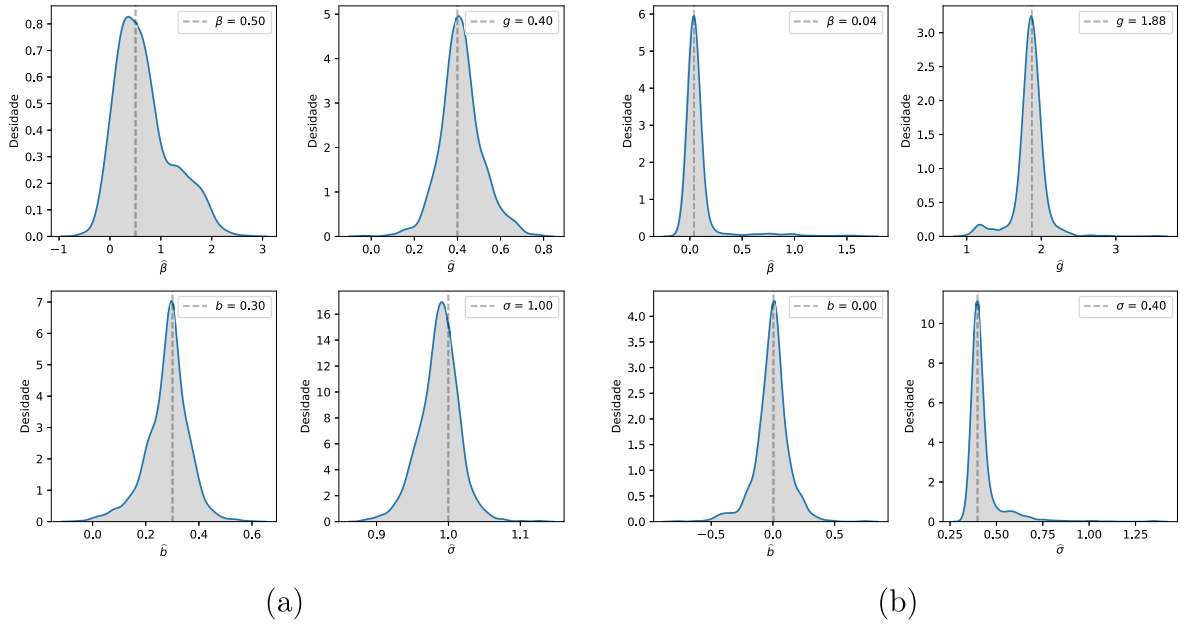
a máximos locais e comparar esses máximos pelo valor da função de verossimilhança para obter uma aproximação do máximo global. Para esse processo, verificamos que 8 soluções iniciais são suficientes para garantir pouca divergência entre os máximos obtidos dentro de uma mesma estimação.

Além disso, com base nas discussões anteriores sobre a intensidade do ruído e sua influência no processo de otimização, para obter menor variância no processo de estimação, realizamos 100 pré-estimativas com $N = 100$, aproveitando seu baixo custo computacional. O objetivo é identificar regiões no espaço de parâmetros de β, g, b , mas principalmente, de σ em que a função de verossimilhança assume os menores valores possíveis. Após essa pré-estimativa, o algoritmo faz uma restrição para a escolha aleatória da solução inicial no processo de otimização. Deve-se observar que, nesse experimento, não restringimos o espaço de parâmetros, somente o conjunto onde as soluções iniciais são obtidas. Após esse passo, o algoritmo está livre para buscar a solução ótima para cada parâmetro em toda a reta real. Para essas estimativas, mantivemos os valores da intensidade de ruído como os previamente considerados, $\sigma \in \{0.1, 1, 2\}$.

Reportamos, na Tabela 6, o resultado obtido por 1000 estimações para o modelo com 2 tipos de agentes. Para manter um número razoável de combinações e a clareza dos resultados, optamos por fazer o estudo considerando os seguintes valores para os parâmetros $\beta \in \{0, 0.5, 10\}$, $g_2 \in \{-0.4, 0.4\}$, representando os contrários e os seguidores de tendências, $b_2 \in \{-0.3, 0.3\}$ representando os pessimistas e otimistas. Acrescentamos, por fim, um conjunto de parâmetros $\beta = 0.040$, $g_2 = 1.875$, $b_2 = 0.001$ e $\sigma = 0.357$, baseados nos resultados obtidos por [57] para a série S&P 500, que consideramos uma boa representação dos dados reais que o modelo deve ser capaz de estimar.

A Figura 21 (a) mostra que a densidade do conjunto de valores estimados para o modelo com dois tipos de agentes tende a ser aproximadamente simétrica em relação aos valores verdadeiros, indicados pela linha pontilhada. Essa característica torna-se ainda mais evidente na Figura 21 (b), possivelmente devido à maior similaridade dos parâmetros utilizados com séries reais, uma vez que essa escolha de parâmetros foi baseada nos resultados de [57], bem como a uma melhor adequação da intensidade do ruído à magnitude dos parâmetros. Esse fato garante maior precisão, como discutido anteriormente.

Figura 21 – Densidade das estimativas dos parâmetros β , g_2 , b_2 e σ na Tabela 6 para – (a) $\beta = 0.5$, $g_2 = 0.4$, $b_2 = 0.3$ e $\sigma = 1$ – (b) $\beta = 0.04$, $g_2 = 1.875$, $b_2 = 0.001$ e $\sigma = 0.387$.



Fonte: Fonte: elaborado pelo autor (2025).

Já na Tabela 7 reportamos o resultado obtido por 1000 estimações para o modelo com 2 tipos de agentes. Consideramos os valores de parâmetros $\beta \in \{0.5, 10\}$, $g_2 \in \{0.8, -0.8\}$, $b_2 = -0.4$, $g_3 \in \{-0.6, 0.6\}$, $b_3 = 0.3$ e $\sigma \in \{2, 0.1\}$ para representar diferentes combinações e intensidades entre seguidores de tendência e contrários a tendência. Novamente acrescentamos um conjunto de parâmetros $\beta = 0.007$, $g_2 = 2.674$, $g_3 = -0.032$ e $\sigma = 0.403$, baseados nos resultados obtidos por [57] para o modelo com 3 tipos de agentes ajustado a série S&P 500 ao qual acrescentemos os parâmetros de viés $b_2 = -0.02$ e $b_3 = 0.01$ para uma estimação completa.

Podemos observar que o método foi capaz de recuperar com precisão próxima a apresentada na Tabela 4 os quatro parâmetros do modelo BH98 com 2 tipos de agentes e os seis parâmetros para o modelo com 3 tipos de agentes. Ressaltamos a capacidade de estimar a intensidade do ruído σ , que, como discutimos anteriormente, influencia a precisão durante a estimação dos parâmetros restantes.

Com base nos resultados, podemos concluir que o método NPSMLE é eficaz para o ajuste do modelo a séries temporais, desde que essas apresentem uma estrutura compatível com a dinâmica que o modelo busca capturar. Ademais, identificamos que o principal desafio na aplicação do NPSMLE reside na estimação da intensidade do ruído. No entanto, esse obstáculo pode ser mitigado por meio de uma etapa prévia de estimação, que forneça boas condições iniciais ao processo de otimização, aumentando assim a robustez e a eficiência do ajuste.

Tabela 6 – Resultados recuperados para o modelo com 4 parâmetros

β, g, b, σ	$\hat{\beta}$			$\hat{g}$			$\hat{b}$			$\hat{\sigma}$		
	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.
0.0, 0.4, 0.3, 2	0.004	0.036	0.321	0.380	0.366	0.068	0.296	0.298	0.112	1.972	1.968	0.046
0.5, 0.4, 0.3, 1	0.568	0.673	0.547	0.414	0.418	0.097	0.293	0.282	0.080	0.989	0.987	0.028
10, 0.4, 0.3, 0.1	10.372	10.427	0.602	0.411	0.471	0.248	0.297	0.283	0.054	0.098	0.099	0.005
0.0, -0.4, -0.3, 2	0.008	0.002	0.233	-0.378	-0.371	0.070	-0.298	-0.283	0.107	1.982	1.973	0.044
0.5, -0.4, -0.3, 1	0.631	0.695	0.456	-0.392	-0.386	0.057	-0.297	-0.288	0.053	0.991	0.99	0.019
10, -0.4, -0.3, 0.1	10.383	10.442	0.607	-0.403	-0.365	0.199	-0.299	-0.293	0.032	0.098	0.099	0.004
0.040, 1.875, 0.001, 0.397	0.042	0.087	0.200	1.861	1.847	0.208	0.001	-0.007	0.135	0.401	0.427	0.094

Parâmetros estimados com 1000 iterações, T = 5000, N = 1000.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Tabela 7 – Resultados recuperados para o modelo com 6 parâmetros.

$\beta, g_2, b_2, g_3, b_3, \sigma$	$\hat{\beta}$			$\hat{g}_2$			$\hat{b}_2$			$\hat{g}_3$			$\hat{b}_3$			$\hat{\sigma}$		
	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.
0.5, 0.8 , -0.4 , -0.6, 0.3, 2	0.566	0.549	0.185	0.805	0.792	0.411	-0.404	-0.398	0.164	-0.644	-0.621	0.391	0.303	0.304	0.167	1.997	1.999	0.029
10, -0.8 , -0.4, 0.6 , 0.3, 0.1	10.012	10.004	0.193	-0.801	-0.752	0.394	-0.392	-0.385	0.114	0.581	0.562	0.341	0.303	0.301	0.107	0.103	0.102	0.031
0.007, 2.674, -0.02 , -0.032, 0.01, 0.403	0.086	0.086	0.103	2.678	2.676	0.286	-0.025	-0.022	0.057	-0.046	-0.039	0.289	0.01	0.009	0.057	0.403	0.403	0.03

Parâmetros estimados com 1000 iterações, $T = 5000$, $N = 1000$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

5 APLICAÇÃO A SÉRIES DE DADOS FINANCEIROS

Levando em conta o método de estimação de parâmetros por máxima verossimilhança simulada e o estudo numérico via simulações de Monte Carlo apresentados na seção anterior, nosso próximo objetivo é aplicá-los a dados financeiros reais para calibrar o modelo BH98 com diferentes classes de ativos e daí tirar conclusões sobre como a presença ou a ausência de racionalidade dos agentes impacta a variação dos preços. Além disso, discutiremos até que ponto é necessária a modelagem de diferentes tipos de agentes para representar suficientemente bem os mercados trabalhados. Para aplicar a metodologia NPSMLE precisamos primeiro fazer uma estimativa do preço fundamental, uma vez que o modelo é descrito em termos do desvio do preço observado com relação ao preço fundamental x_t . Outra questão importante é que, devido à estrutura dos dados reais ser diferente da estrutura dos dados simulados, ao estimarmos os parâmetros devemos lidar com curvas de verossimilhança um pouco menos suaves do que testamos na Seção 3.2.

Para prosseguirmos com a análise, devemos primeiro fazer uma aproximação do preço fundamental. Na literatura existente, existem muitos estudos que propõem e analisam o preço fundamental, que é aproximado como uma Média Móvel (MM), como em [39], [100], [20] e [57]. Por exemplo, Winker, Gilli e Jeleskovic [100] assumem como aproximação do preço fundamental uma média móvel das últimas 200 observações da série temporal da taxa de câmbio DM/USD, Marco alemão para Dólar, para o período de 11/11/1991 a 09/11/2000. Além disso, médias móveis de curto e longo prazo são ferramentas comuns usadas por analistas técnicos para detectar divergências no valor fundamental das ações. Estimativas feitas por esses profissionais tentam avaliar se uma ação está sobre ou subvalorizada e se é provável uma correção do preço observado na direção do preço fundamental. Assim, consideramos o filtro MM como um pilar da análise técnica em negociação, como mostram Taylor e Allen [94], de modo que, uma vez que o modelo BH98 assume como hipótese que todos os tipos de agentes possuem conhecimento sobre o valor do preço fundamental, é natural adotarmos a média móvel como uma boa aproximação.

Em seu estudo, Kukacka e Barunik [57] consideraram médias móveis com janelas de 61 e 241 e mostraram que janelas maiores tendem a representar melhor o preço fundamental uma vez que períodos mais longos capturam tendências fundamentais mais persistentes, enquanto mantêm variações de curto prazo na série x_t , o que melhora a precisão da estimação do coeficiente de tendência g_2 . Dessa forma, para a configuração da MM nesta análise, vamos aproximar o preço fundamental por uma média móvel com janela de 252, sinalizando uma média móvel anual. Além disso, em vez da MM ‘histórica’ usual, que considera apenas as informações passadas até o tempo dado, utilizamos a MM ‘centralizada’, que leva em conta o mesmo número de observações anteriores e posteriores, indicada por reduzir o atraso no fluxo de informações. Adicionalmente, uma característica

vantajosa da MM centralizada segue do fato de que, por definição, ela atua como um ponto de convergência para os preços que tendem a aproximar-se dela ao longo do tempo.

Para a análise, utilizamos os preços diários de fechamento das diferentes classes de ativos; índice de ações, ações individuais, commodities, criptomoedas e taxas de câmbio. Os dados foram obtidos da plataforma Yahoo Finance através da API yfinance. Abaixo, estabelecemos uma breve descrição dos ativos considerados, separados por classes.

1. Índices de Ações: Cada um dos índices é ponderado pelo valor de mercado e cobre diversos setores, como finanças, tecnologia, imóveis e energia. Portanto, são amplamente utilizados como indicadores do mercado acionário de seu país de origem.
 - O Ibovespa (Índice Bovespa), apresentado na Figura 22, é o principal índice da Bolsa de Valores do Brasil (B3). Ele mede o desempenho das ações mais negociadas e representativas do mercado acionário brasileiro.
 - O índice S&P 500 (*Standard & Poor's 500*), apresentado na Figura 23 junto com a série de volatilidade disponível para esse índice, é um dos principais índices do mercado financeiro dos Estados Unidos. Ele mede o desempenho das 500 maiores empresas de capital aberto dos EUA, listadas nas bolsas NYSE e Nasdaq.
 - O HSI (*Hang Seng Index*) é o principal índice da Bolsa de Valores de Hong Kong. Ele acompanha o desempenho das maiores e mais líquidas empresas listadas em Hong Kong, incluindo muitas companhias chinesas.
2. Ações individuais: Colocamos sob análise também o preço de fechamento da maior empresa brasileira negociada na B3, Petrobrás (PETR4.SA) e que compõe o índice Ibovespa.
3. Commodities: consideramos o preço do ouro físico e o preço do petróleo bruto.
 - O ouro físico é um ativo financeiro de referência global, cotado em dólares, com alta liquidez e utilizado amplamente como ativo de **reserva de valor** e *hedge* contra inflação, instabilidade geopolítica e volatilidade de mercados financeiros.
 - Consideramos o petróleo bruto tipo WTI (*West Texas Intermediate*) negociado na bolsa NYMEX. Seu preço é influenciado por múltiplos fatores, incluindo oferta e demanda globais, níveis de estoque nos EUA, decisões da OPEP+, condições geopolíticas em regiões produtoras, dados macroeconômicos e taxas de câmbio, especialmente do dólar.
4. Criptomoedas: Consideramos o Bitcoin (BTC), uma criptomoeda criada em 2009. É cotado em dólares por unidade de Bitcoin e apresenta alta volatilidade. Apesar disso é frequentemente descrito como um ativo digital escasso, comparável ao ouro,

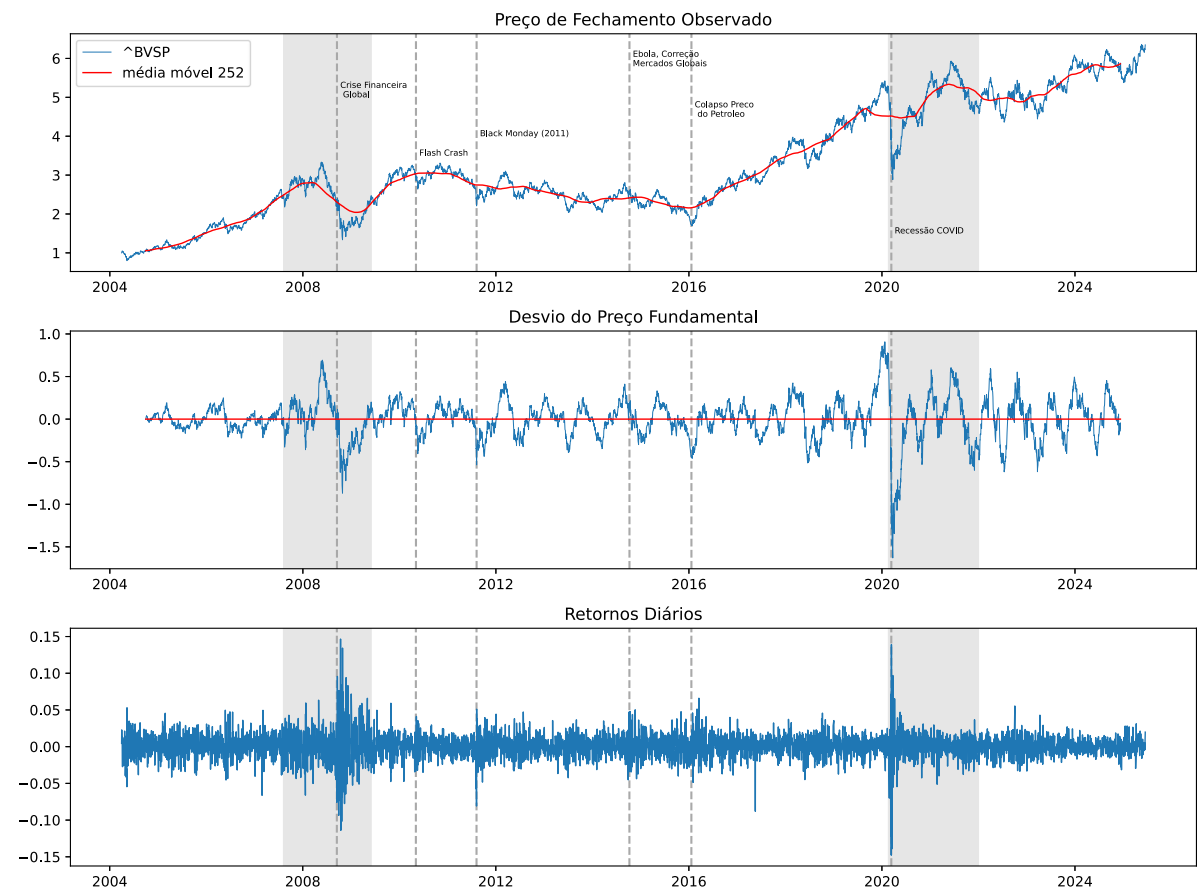
e é utilizado tanto como instrumento de especulação quanto como reserva de valor em contextos de incerteza.

5. Cambio: Consideramos a taxa de conversão Dólar-Real (USD/BRL). O preço do dólar em reais é influenciado por uma combinação de fatores internos e externos, como: taxas de juros no Brasil e nos EUA, fluxos de capital, termos de troca, risco-país, situação fiscal brasileira, além do cenário político e econômico global. O par USD/BRL é amplamente utilizado como referência para decisões econômicas e financeiras no Brasil e serve como instrumento de *hedge* para empresas e investidores expostos à variação cambial.

Os preços dos ativos foram coletados com datas finais 30/11/2024 de modo a totalizar 5000 observações mais 252 para o cálculo da média móvel, onde devem ser levados em conta os dias comerciais de cada país de origem onde as bolsas de valores funcionam. Desse modo, a data inicial de ativos sediados no Brasil é 20/08/2004, dos ativos sediados nos Estados Unidos é 23/12/2004 e para os ativos sediados na China é 16/07/2004. Como o Bitcoin foi criado em 2009, só foi possível obter 1746 observações de seus preços de fechamento e bolsa de valores.

Para tornar as séries comparáveis, realizamos uma normalização pelo primeiro valor e apresentamos na Tabela uma descrição estatística dos dados. Apresentamos nas Figuras 22 e 23 o processo de cálculo da média móvel e obtenção do desvio do preço fundamental, adicionalmente o retorno dos ativos em questão. Nos dados históricos, é interessante notar que períodos de crise financeira com grandes quedas nos preços se refletem em um aumento local da volatilidade que podemos perceber como uma maior variância nas séries de preços e de retorno. Este fenômeno será melhor apresentado na Seção 5.1. Na Figura 23 apresentamos também o índice VIX, calculado pela Cboe (Chicago Board Options Exchange), que mede a expectativa de volatilidade do mercado de ações dos EUA para os próximos 30 dias, com base nos preços das opções do índice S&P 500.

Figura 22 – Série histórica de preços e série de retornos para os índices, Ibovespa. Em vermelho a média móvel das séries calculada para a janela de 252 dias.



Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da plataforma Yahoo Finance (2025).

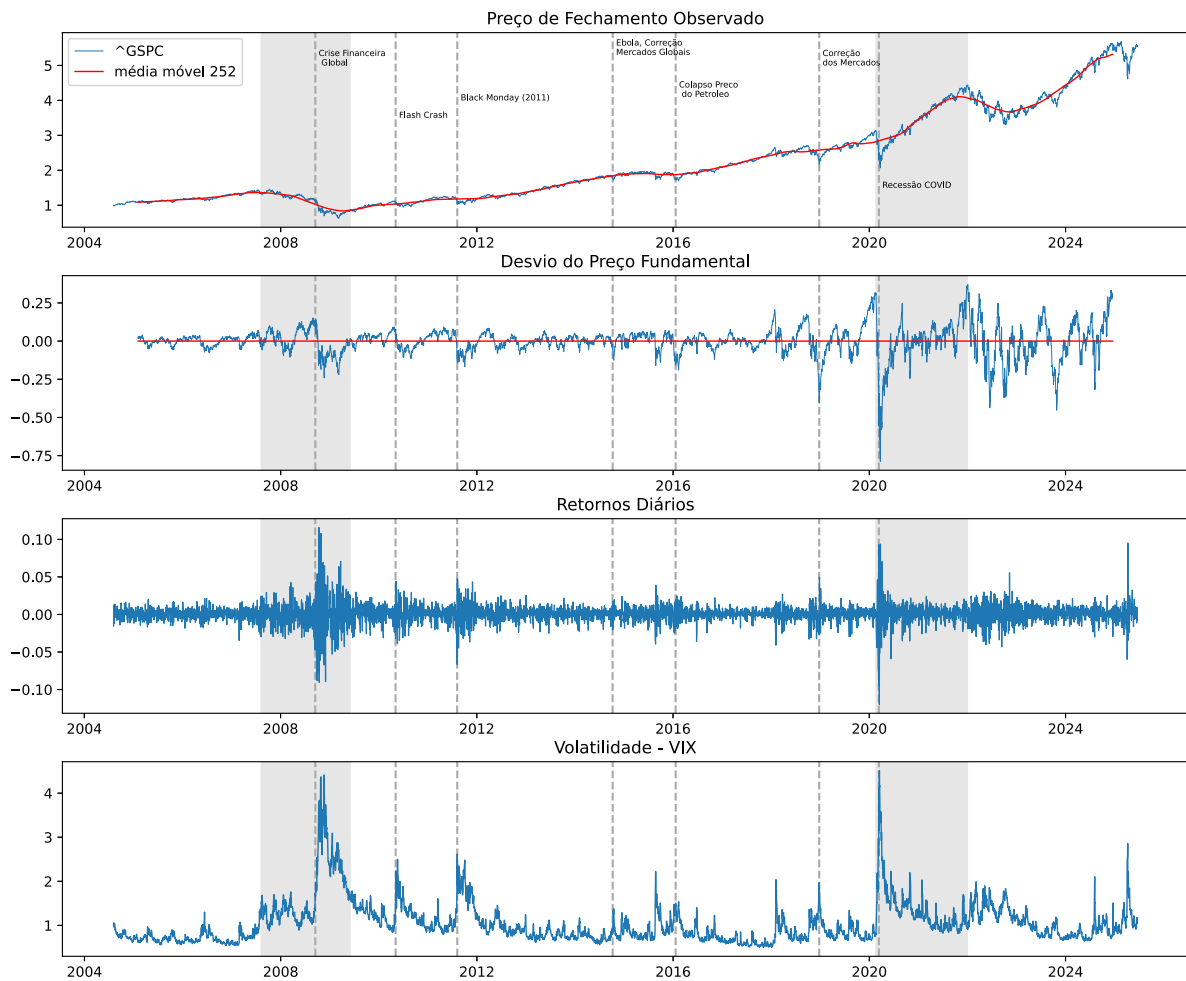
Tabela 8 – Estatística Descritiva das Séries Financeiras

		mediana	média	máximo	mínimo	d.p.	assimetria	curtose
Ibovespa	p_t	2.835	3.236	6.328	0.795	1.399	0.47	2,114
	x_t	0.013	0.003	0.904	-1.623	0.236	-0.68	7.211
	r_t	0.001	0.0	0.147	-0.148	0.017	-0.136	11.792
S&P 500	p_t	1.799	2.172	5.579	0.614	1.225	0.996	2,944
	x_t	0.006	-0.001	0.364	-0.773	0.093	-1.061	10.057
	r_t	0.001	0.000	0.116	-0.12	0.012	-0.202	15.992
HSI	p_t	1.679	1.661	2.544	0.842	0.347	-0.126	2,508
	x_t	-0.004	-0.000	0.55	-0.512	0.105	0.138	4.534
	r_t	0.000	0.000	0.143	-0.132	0.015	0.105	11.884
PETR4	p_t	2.775	3.662	13.871	0.551	2.837	2.034	6.568
	x_t	-0.011	-0.003	1.859	-1.784	0.401	-0.030	5.234
	r_t	0.001	0.001	0.222	-0.297	0.027	-0.274	11.556
Ouro	p_t	3.214	3.356	8.480	0.962	1.353	0.547	3.796
	x_t	-0.010	-0.003	0.676	-0.508	0.144	0.273	3.983
	r_t	0.000	0.000	0.090	-0.094	0.011	-0.220	8.162
Petróleo	p_t	1.56	1.59	3.24	-0.839	0.475	0.288	2,813
	x_t	-0.002	0.001	1.04	-1.783	0.188	0.046	8.234
	r_t	0.001	-0.0	0.377	-3.06	0.053	-39.752	2226.052
Bitcoin	p_t	1.282	1.7	5.835	0.165	1.429	1.037	3.234
	x_t	-0.057	-0.016	1.311	-1.105	0.389	0.839	4.329
	r_t	0.0	0.002	0.249	-0.235	0.043	0.215	7.556
USD/BRL	p_t	1.07	1.132	2.155	0.525	0.477	0.428	1,733
	x_t	-0.004	-0.0	0.301	-0.22	0.056	0.459	5.114
	r_t	0.0	0.0	0.102	-0.27	0.012	-2.003	58.431

Estatística dos dados utilizados para a estimativa dos parâmetros do modelo ajustado a respectiva série de ativos. Dados normalizados pelo primeiro dia para efeito comparativo. p_t indica o preço normalizado, x_t o desvio estimado do preço fundamental e r_t o retorno líquido de p_t .

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 23 – Série histórica de preços e série de retornos para o preço de fechamento do S& P 500. Em vermelho a média móvel das séries calculada para a janela de 252 dias. Seguindo da série VIX que calcula a volatilidade do índice.



Fonte: Elaborado pelo autor com base nos dados da plataforma Yahoo Finance (2025).

Tabela 9 – Resultados empíricos para o modelo com 2 tipos de agentes.

Ativo	$\hat{\beta}$			$\hat{g}_2$			$\hat{b}_2$			$\hat{\sigma}$			L		
	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.
Ibovespa	0.013	0.172	0.495	1.889	1.862	0.223	-0.011	-0.013	0.037	0.072	0.076	0.016	-6449	-6109	841
S&P 500	0.080	0.456	0.803	1.878	1.876	0.265	-0.002	-0.003	0.022	0.034	0.036	0.008	-10116	-9884	769
HSI	0.786	1.148	0.576	1.932	1.927	0.071	-0.001	-0.001	0.005	0.027	0.027	0.002	-11331	-11324	122
PETR4.SA	0.313	0.303	0.103	1.857	1.855	0.052	-0.001	-0.002	0.014	0.112	0.113	0.007	-4305	-4296	127
Ouro	1.167	1.136	0.699	1.879	1.886	0.118	-0.000	-0.001	0.008	0.043	0.044	0.004	-8662	-8640	187
Petróleo	0.613	0.613	0.084	1.922	1.919	0.044	-0.000	-0.000	0.004	0.047	0.047	0.003	-8016	-8013	90
Bitcoin*	-0.100	-0.079	0.083	1.937	1.934	0.044	-0.000	0.001	0.009	0.088	0.089	0.005	-1779	-1778	34
USD/BRL	11.814	11.936	0.578	1.869	1.875	0.047	-0.000	-0.000	0.002	0.016	0.016	0.001	-13298	-13299	81

Parâmetros estimados com 1000 iterações, $T = 5000$, $N = 1000$. *A estimação feita para o preço do fechamento do Bitcoin teve como base apenas $T = 1746$ observações.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Tabela 10 – Resultados empíricos para o modelo com 3 tipos calibrados pela serie do Ibovespa.

$\hat{\beta}$			$\hat{g}_2$			$\hat{b}_2$			L		
mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.
-0.066	-0.069	0.066	3.168	3.183	0.183	0.000	-0.001	0.022	-6873.38	-6847.251	162.22
$\hat{\sigma}$			$\hat{g}_3$			$\hat{b}_3$					
mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.			
0.063	0.064	0.007	-0.237	-0.242	0.173	0.001	-0.000	0.021			

Parâmetros estimados com 1000 iterações, T = 5000, N = 1000.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Dessa forma, realizamos a estimativa dos parâmetros para o modelo com dois tipos de agentes ajustados às séries de dados e a estimação dos parâmetros para o modelo com três tipos de agentes ajustado pela série do Ibovespa. Os resultados são apresentados nas Tabelas 9 e 10.

A análise para o modelo com dois tipos de agentes, sintetizada na Tabela 9, mostra resultados consistentes entre os 3 diferentes índices financeiros. Um aspecto que se destaca de maneira notável é que os parâmetros β e b_2 , que representam o viés da estratégia, não apresentaram significativa expressividade no modelo para o processo de estimação considerado, no sentido de que se aproximam muito do valor nulo. Esse fenômeno de b_2 é esperado, dado que não há fundamento teórico claro para assumir que exista viés em estratégias especulativas ao considerarmos a variação dos preços no longo prazo. Já para o parâmetro β é mais surpreendente pois implica a não adaptatividade e a falta de racionalidade dos agentes nas formações das expectativas. Ainda assim, esse fato está em conformidade com estudos como os de Kukacka e Barunik [57], Boswijk, Hommes e Manzan [10], Ter Ellen, Hommes e Zwinkels [95], os quais ressaltam que, em modelos não lineares com mudança de regime, parâmetros de transição como β são notoriamente difíceis de estimar com precisão, uma vez que pequenas variações no valor de β tendem a provocar alterações modestas na proporção de agentes que adotam cada comportamento, o que reduz a sensibilidade da estimação.

Em contraste, as estimativas do coeficiente de tendência g_2 são bastante expressivas, indicando forte heterogeneidade nos mercados. O resultado obtido indica que, em média, estratégias de seguir a tendência superam estratégias de agir contrárias à tendência nos mercados analisados. Aqui destacamos um aspecto importante, que os valores estimados de g_2 , entre 1.7 e 1.9, podem parecer elevados à primeira vista, mas sua influência efetiva sobre os preços é atenuada pela baixa relevância de β . Isso mantém a distribuição das estratégias relativamente estável em torno de 50% para cada tipo.

Percebemos pelos valores estimados na Tabela 9 que os mercados considerados, de forma geral, apresentam heterogeneidade forte com $g_2 > R$ com o comportamento de seguir tendências dos preços. Podemos observar que o maior coeficiente de heterogeneidade foi identificado para o índice HSI. Como consequência, podemos inferir que esse mercado tende a ser mais instável, no sentido de apresentar maior probabilidade de ocorrência de bolhas especulativas. Em contrapartida, entre os índices, HSI apresenta uma maior intensidade de escolha que possibilita uma correção de possíveis bolhas.

Observa-se que o comportamento oposto ocorre no caso do Ibovespa, que apresenta a menor intensidade de escolha entre os ativos analisados. Esse resultado pode estar relacionado a um padrão cíclico identificado na sua série de preços de fechamento (Figura 22). De modo geral, a intensidade de escolha tende a ser mais baixa tanto para os índices quanto para a ação individual da Petrobras, quando comparadas ao Ouro ou ao Câmbio

(USD/BRL). Esse achado está em consonância com os resultados de Ter Ellen, Hommes e Zwinkels [95], que também identificaram, no caso do Ouro, uma maior intensidade de escolha acompanhada de menor heterogeneidade.

No entanto, diferentemente do que observamos, Baur e Glover [7] encontraram, a partir de uma especificação de modelo baseada em retornos, com dados mensais e uma função de mudança orientada pelo desempenho, que os analistas técnicos no mercado de ouro atuam como contrários à tendência, ao passo que os fundamentalistas se mostram desestabilizadores. Vale ressaltar que a comparação direta com estudos anteriores é dificultada pelo fato de que grande parte da evidência empírica sobre heterogeneidade comportamental no mercado de câmbio é baseada em dados de alta frequência e em fundamentos exógenos, o que limita a equivalência entre metodologias e resultados.

A Tabela 9 também revela variações relevantes na intensidade do ruído entre os mercados. O Ibovespa apresenta os maiores níveis de ruído estimado, ao passo que os menores são observados para o índice HSI. A diferença pode chegar a cerca de 30%. Essas variações podem refletir a quantidade de ativos que compõem o índice, de forma que o risco de um índice com mais ativos é mais aproximado do risco sistemático, pois tende a anular os efeitos de riscos específicos de poucas ações individuais. Esse argumento é reforçado quando observamos que a ação individual PETR4.SA apresenta maior variação de ruído e esta se aproxima da variação estimada para o Ibovespa.

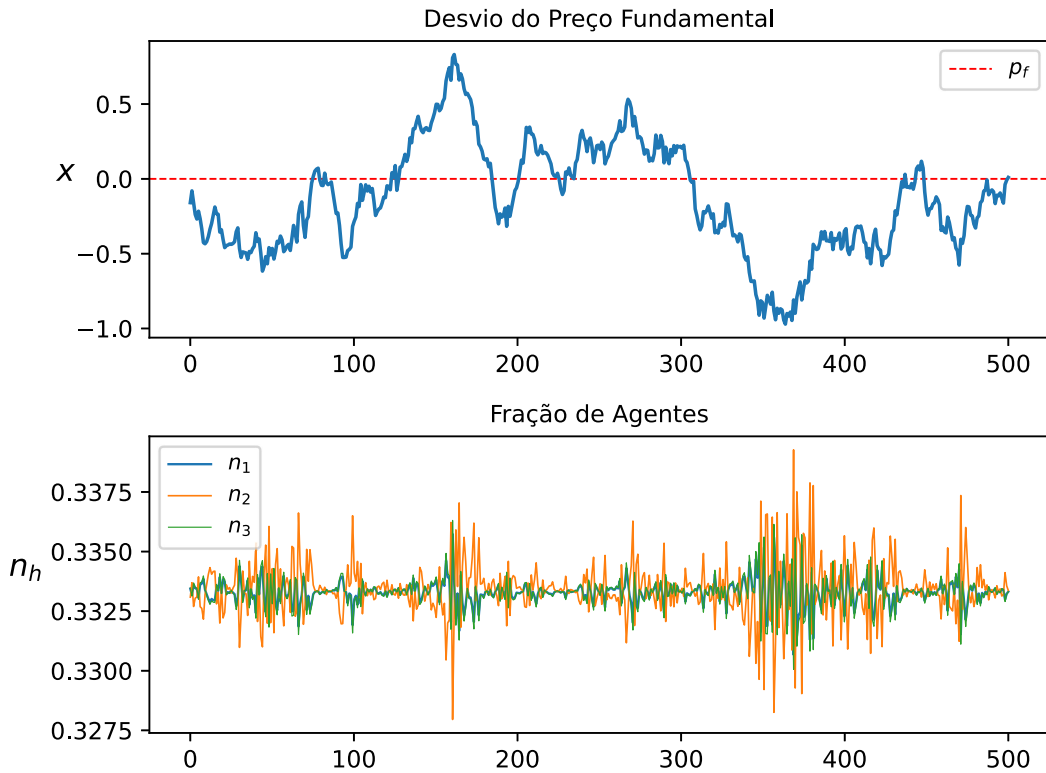
As características das estimativas para mercados com dois tipos de agentes são confirmadas com o ajuste do modelo com três tipos de agentes à série histórica do Ibovespa, Tabela 10. Notamos que, além do valor próximo de zero estimado para o parâmetro β , esse valor tende a ser negativo assim como o estimado para o Bitcoin com 2 tipos de agentes. Valores negativos para o parâmetro de intensidade de escolha são considerados no trabalho original [16] com a ausência de importância econômica prática, pois implicariam uma predisposição dos agentes a escolherem as estratégias contrárias às percebidas como as mais vantajosas. Mas, em um contexto tão próximo de zero, é possível interpretar esse resultado como a incapacidade dos agentes em momentos de incerteza.

Percebemos, também nesse caso, a relevância dos parâmetros de crença g_2 e g_3 , além da forte influência da estratégia de seguir a tendência dada pelo parâmetro g_2 . Nesse contexto, estudos como os de Huisman, Maliepaard e Zwinkels [42] apontam que a expressividade de β não é essencial para que a estrutura de mudança de regime melhore o ajuste do modelo. Mesmo com β próximo de zero, a presença de heterogeneidade comportamental, confirmada por g_2 e g_3 , garante que o modelo capte a coexistência de estratégias distintas ao longo do tempo. Nesse caso, devido a β assumir valores próximos de zero, temos uma distribuição quase homogênea entre 33% para cada tipo de estratégia.

Na Figura 24 apresentamos uma simulação do modelo com parâmetros da Tabela 10. É possível verificar visualmente a proporção entre as estratégias disponíveis, assim

como essas proporções se alteram levemente com o desvio do preço observado do preço fundamental. A simulação ilustra como valores pequenos de β , mas não nulos, são capazes de influenciar a dinâmica do sistema. Pois, por menor que seja a razão de agentes que mudam de estratégia ao perceber uma bolha, essas mudanças são de tal maneira intensas que são capazes de corrigir o preço na direção do preço fundamental.

Figura 24 – Série do desvio do preço fundamental simulada com os parâmetros ajustados pela Tabela 10. Em vermelho tracejado o preço fundamental. Seguida da série das frações entre os agentes, em azul a fração n_1 , em amarelo n_2 e em verde n_3 .



Fonte: Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Por fim, outro ponto importante que os resultados dessa seção ajudam a esclarecer é como poucos tipos de estratégias são capazes de representar suficientemente bem a heterogeneidade dos mercados. Essa hipótese já é bem estabelecida na literatura como, por exemplo, Chen, Chang e Du [18]. Nos resultados apresentados nas Tabelas 9 e 10, observa-se uma forte expressividade do coeficiente de tendência $g_2 > R$ associado aos agentes seguidores de tendência. Em contraste, ao introduzir um terceiro tipo de agente, os contrários à tendência, o coeficiente correspondente g_3 aproxima-se daquele atribuído aos agentes fundamentalistas $g_1 = 0.0$. Esse comportamento é ilustrado na Figura 24, onde as frações n_1 (em azul) e n_3 (em verde) permanecem próximas ao longo do tempo. Isso indica que os agentes tendem a adotar comportamentos fundamentalistas ou contrários à tendência apenas como forma de oposição à estratégia de seguir a tendência. Dessa forma, os tipos f_1 e f_3 exercem papéis bastante semelhantes na dinâmica do modelo, o que sugere

que há pouca vantagem em considerar um número elevado de tipos de agentes.

5.1 FATOS ESTATÍSTICOS ESTILIZADOS

Nessa seção, investigamos algumas propriedades estatísticas do modelo de apreçamento de ativos BH98 perturbado por ruídos gaussianos calibrado pelos resultados obtidos na primeira parte do Capítulo 5. O propósito dessa seção é observar como o modelo com ruído pode reproduzir alguns fatos estatísticos que são observados em séries financeiras, onde se destacam o agrupamento de volatilidade, simetria dos retornos apresentando cauda pesada, além do efeito de memória. Para uma explicação mais extensa e abrangente sobre essas características, é possível recorrer à [61], [22] e [66]. Boa parte desta seção é inspirada na trajetória de desenvolvimento das ideias apresentadas ao longo desta dissertação, conforme esboçado no Capítulo 1 de introdução. O principal objetivo agora é, portanto, demonstrar que o modelo analítico proposto, baseado na hipótese de heterogeneidade dos agentes, é capaz de capturar efeitos que a literatura clássica baseada nas HER e HME não consegue representar adequadamente.

Vamos começar caracterizando os modelos ajustados que representam os mercados reais como sistemas complexos. A Tabela 11 apresenta o cálculo do maior expoente de Lyapunov para o modelo BH98 ajustado pelos parâmetros das Tabelas 9 e 10. Conforme discutido no Apêndice A, o maior expoente de Lyapunov, χ mede o quão rapidamente duas trajetórias inicialmente infinitesimalmente próximas divergem ao longo do tempo, com a taxa de divergência dada por

$$|\delta x_t| = e^{\chi t} |\delta x_0| \quad (5.1)$$

em que $|\delta x_t|$ é a distância entre as trajetórias no tempo t . Portanto, se χ é positivo, o sistema é chamado de caótico e fortemente misturador. Se χ é negativo, o sistema com trajetórias infinitamente separadas converge a um atrator simples. No entanto, quando χ está próximo de zero, ele pode ser estável ou fracamente caótico, de modo que pequenas perturbações podem alterar qualitativamente suas soluções. De fato, um sistema com χ próximo de zero, quando munido de um ruído aleatório, transiciona de fases estáveis para fases levemente caóticas, de maneira que pequenas perturbações podem recuperar novamente a estabilidade.

Assim, o estudo realizado até aqui permite caracterizar por meio do modelo BH98 mercados financeiros como sistemas complexos. Além disso, os fatos estatísticos que esperamos encontrar são provenientes de leis de potência associadas à caracterização do modelo ajustado como um sistema complexo.

Tabela 11 – Maior Expoente de Lyapunov do Modelo Ajustado.

Ibovespa 3 tipos	Ibovespa 2 tipos	S&P 500	HSI	PETR4.SA
-0.021	-0.057	-0.063	-0.035	-0.074
	Ouro	Petróleo	Bitcoin	USD/BRL
	-0.064	-0.040	-0.032	-0.068

Calculo baseado nos valores estimados pela mediana apresentados nas Tabelas 10 e 9.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

5.1.1 Agrupamento de Volatilidade

Os retornos gerados pela simulação da série de preços observados do modelo ajustado apresentam agrupamento de volatilidade, como mostra a Figura 25. O agrupamento de volatilidade em economia é um conceito utilizado para caracterizar a heterocedasticidade condicional persistente, isto é, o fato de que a variância dos retornos não é constante ao longo do tempo, mas sim dependente de condições passadas. Além disso, a característica persistente implica que períodos de alta volatilidade são seguidos por períodos de alta volatilidade, e períodos de baixa volatilidade são seguidos por períodos de baixa volatilidade. Desse modo, a volatilidade dos retornos não é aleatória, mas tende a se agrupar ao longo do tempo. Esse comportamento errático e imprevisível pode ser interpretado como a presença de bolhas especulativas, ver [16] e [17].

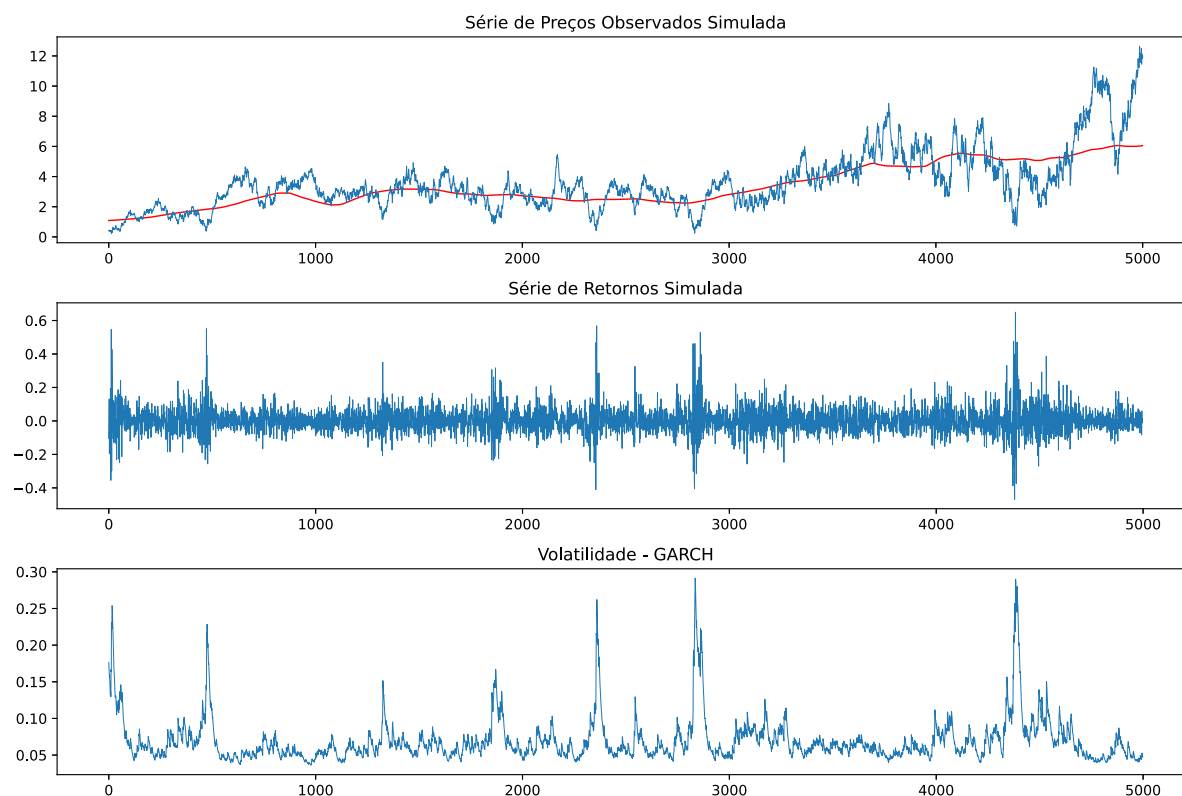
Para caracterizar o efeito do agrupamento de volatilidade, introduzimos o modelo GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), proposto por Bollerslev [9], que surge como uma extensão do modelo ARCH, visando superar sua limitação relacionada à necessidade de muitos parâmetros para capturar adequadamente a dinâmica da volatilidade condicional. Enquanto modelos ARCH frequentemente requerem ordens elevadas para representar a persistência da volatilidade, o GARCH permite uma descrição mais parcimoniosa e eficiente ao incorporar termos autorregressivos na variância condicional. Formalmente, uma série de inovações a_t segue um modelo GARCH(m, s) se

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, 1),$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

com $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ e $\sum(\alpha_i + \beta_i) < 1$ garantindo a existência de variância incondicional finita.

Figura 25 – Simulações para o modelo com 3 tipos de agentes ajustado à série do Ibovespa, com $\beta = -0.066$ e parâmetros dados pela mediana na Tabela 10 – (a) Série de preços observados com base no preço fundamental do Ibovespa (vermelho). – (b) Série de retornos diários apresentando agrupamento de volatilidade – (c) Volatilidade calculada pelo modelo GARCH(1,1).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

O modelo GARCH é especialmente eficaz para capturar o fenômeno de agrupamento de volatilidade, comum em séries financeiras, no qual choques grandes tendem a ser seguidos por maior incerteza. Apresentamos na Figura 25 o caso mais simples, o GARCH(1,1), da série de retornos simulada. Já nesse caso, a variância condicional depende diretamente do quadrado do retorno defasado e da variância condicional passada, o que permite descrever a persistência da volatilidade de maneira dinâmica. Note que a volatilidade apresentada na Figura 25 não apresenta picos repentinos, mas sim uma certa acumulação em determinados períodos, como ocorre na série de volatilidade calculada pelo índice VIX, apresentada na Figura 23.

5.1.2 Expoente de Hurst

Outra propriedade importante que o sistema é capaz de reproduzir é o efeito de memória, especificamente a série de desvios do preço fundamental simulada e apresentada

na Figura 25 é uma série anti-persistente. Para concluir esse fato, introduzimos o índice de Hurst, introduzido por Mandelbrot e Van Ness [69], em homenagem ao hidrólogo britânico Harold Hurst, que apresentou a análise R/S para investigar as variações anuais dos níveis de água em rios e lagos, especialmente no sistema do rio Nilo [45]. O índice de Hurst ou expoente de Hurst é uma constante $0 < H < 1$ e mede a estrutura fractal e a memória de longo prazo de séries temporais e é calculado com base na relação entre o reescalonamento da amplitude de variações e o tamanho da amostra da série temporal. Para uma abordagem mais aprofundada, ver [81] e [69].

As características da série temporal relacionadas a este índice podem ser interpretadas da seguinte maneira:

1. $H = 0.5$: A série é um **processo de passeio aleatório** (*random walk*) puro, sem memória. Não há correlação entre os valores passados e futuros; o comportamento é puramente estocástico.
2. $0 < H < 0.5$: Indica **antipersistência**. Valores futuros tendem a se mover na direção oposta aos valores passados. Por exemplo, se houve um aumento no passado, há maior probabilidade de ocorrer uma redução no futuro.
3. $0.5 < H < 1$: Indica **persistência**. Valores futuros tendem a seguir a mesma tendência dos valores passados. Por exemplo, se houve um aumento no passado, é mais provável que continue aumentando no futuro.

Algoritmo 1 Cálculo do Expoente de Hurst via DFA

```

1: Procedimento DFA(num_escalas, serie)
2:   serie  $\leftarrow$  soma cumulativa de serie
3:    $N \leftarrow$  comprimento de serie
4:   intervalo  $\leftarrow [0.01 \cdot N, 0.2 \cdot N]$ 
5:   escalas  $\leftarrow$  valores logaritmicamente espaçados dentro de intervalo
6:   RMS  $\leftarrow$  vetor de zeros com tamanho num_escalas
7:   Para  $i = 1$  até num_escalas faça
8:      $s \leftarrow escalas[i]$ 
9:      $n \leftarrow \lfloor N/s \rfloor$ 
10:    Divida serie em  $n$  janelas de tamanho  $s$ 
11:    Remova a tendência linear de cada janela
12:    Calcule a flutuação média quadrática (RMS) de cada janela
13:     $RMS[i] \leftarrow$  média das flutuações
14:   Fim Para
15:   Faça regressão linear de  $\log_{10}(RMS)$  em função de  $\log_{10}(escalas)$ 
16:    $H \leftarrow$  coeficiente angular da reta ajustada
17:   Retorne  $H$ 
18: Fim Procedimento

```

Desse modo, uma análise baseada no índice de Hurst é capaz de identificar tendências em séries temporais, prever padrões e avaliar a eficiência de sistemas complexos. Além disso, ele encontra aplicação no campo das finanças, onde é utilizado para identificar possíveis ciclos econômicos ou bolhas especulativas em mercados financeiros. Para calcular numericamente esse índice, vamos utilizar o método chamado "*detrending fluctuation analysis*" (DFA) baseado em Kantelhardt et al. [51] que foi sumarizado em pseudo-código no Algoritmo 1. Utilizamos esse método para calcular os índices de Hurst das séries financeiras consideradas neste trabalho, e obtemos os valores apresentados na Tabela 12. Esses valores indicam consistentemente em vários mercados que, no longo prazo, a flutuação tende a apresentar uma leve antipersistência, com H menor que 0.5. Desse modo, um passeio aleatório simples, com $H = 0.5$, não é capaz de representar completamente o comportamento dessas séries.

No Algoritmo 1, linha 12, RMS abrevia "*root mean square*" e deve ser entendido nesse contexto pela fórmula

$$RMS(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(Y(k) - \hat{Y}(k) \right)^2},$$

em que $Y(k) - \hat{Y}(k)$ denota a diferença entre a série e sua tendência na janela k .

Tabela 12 – Valores do índice de Hurst calculados para as séries financeiras.

Ibovespa	S&P 500	HSI	PETR4.SA	Ouro	Petróleo	Bitcoin*	USD/BRL
0.458	0.445	0.480	0.422	0.404	0.533	0.539	0.521

Cálculo baseado nos 5000 valores considerados das séries empíricas. *Exceto para a série de preço do fechamento do Bitcoin que possui 1746 observações.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A Tabela 13 mostra uma simulação de Monte Carlo para cálculo de expoentes de Hurst para diferentes ajustes do modelo realizados na primeira parte desse capítulo. Notemos que os resultados obtidos representam bem os índices calculados para as séries reais na Tabela 12, destacando-se o modelo ajustado ao Ibovespa com 3 tipos de agentes que apresenta um índice 0.03 pontos maior que a série real. Esse maior valor calculado pode ser explicado pela capacidade da série simulada apresentar eventos raros, reflexo do maior expoente de Lyapunov estar próximo de se tornar positivo, veja Tabela 11, quando a série de retornos produz 'outliers' que aparentemente estão descorrelacionados com os valores anteriores, o que contribui para aproximar H calculado de 0.5.

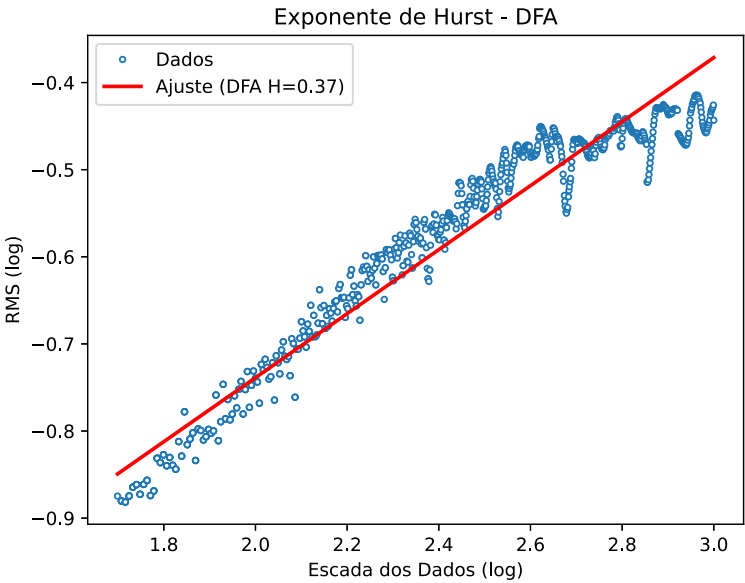
Tabela 13 – Valores do índice de Hurst calculados sobre simulações do modelo ajustado.

Ibovespa 3 Tipos			Ibovespa 2 Tipos			S&P 500		
mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.
0.479	0.479	0.044	0.442	0.444	0.042	0.441	0.441	0.041
HSI			PETR4.SA			Ouro		
mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.
0.473	0.474	0.045	0.424	0.426	0.04	0.44	0.439	0.041
Petróleo			Bitcoin			USD/BRL		
mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.	mediana	média	d.p.
0.468	0.469	0.044	0.474	0.473	0.044	0.438	0.437	0.042

DFA calculados sobre 1000 séries simuladas com $T = 5000$ observações.

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 26 – Expoente de Hurst calculado por DFA da série de desvio do preço fundamental apresentada da Figura 25



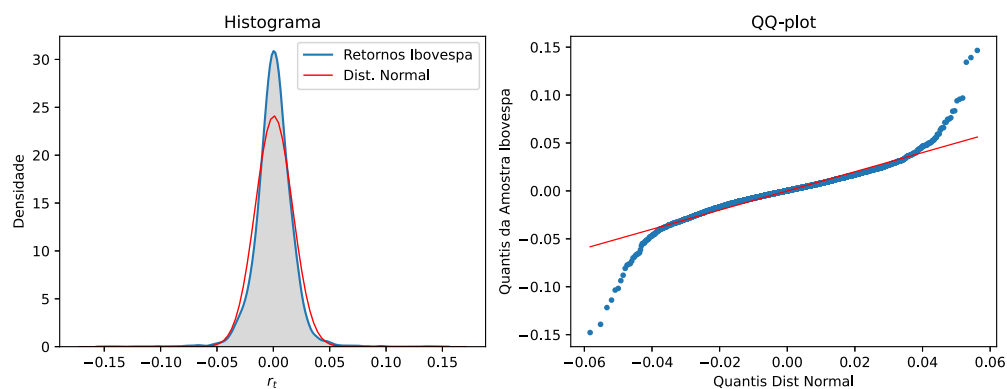
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Entretanto, temos que o modelo ajustado ao Ibovespa com 3 tipos de agentes ainda é capaz de produzir observações com valores do índice de Hurst menores, como é o caso da série exibida na Figura 25 que apresenta um H de 0.37. Com isso, concluímos, aplicando o método DFA, que o modelo BH98 ajustado é capaz de reproduzir e modelar bem o efeito de memória presente em séries financeiras reais.

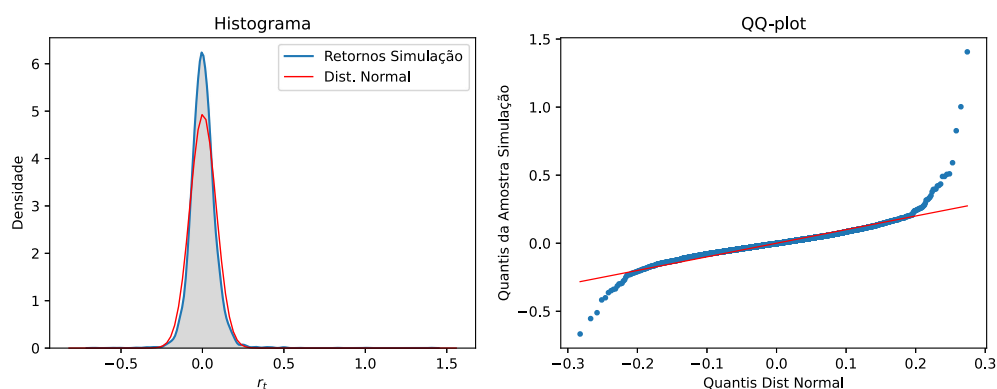
5.1.3 Caudas Pesadas

Por fim, a série de desvios apresenta uma distribuição de probabilidade simétrica e com cauda pesada, como mostra o histograma e o QQ-plot apresentados na Figura 27. Em estatística, o termo "cauda pesada" refere-se a distribuições de probabilidade cujo decaimento nas extremidades da distribuição é mais lento do que o da distribuição normal. Isso significa que distribuições de cauda pesada têm uma probabilidade maior de gerar valores extremos em comparação com a distribuição normal. Essa é mais uma evidência de que o modelo munido de um ruído gaussiano gera uma série que a distribuição normal não modela completamente, pois subestima eventos raros, que na distribuição dos retornos significam grandes perdas ou grandes lucros e, portanto, devem ser considerados.

Figura 27 – Histograma e QQ-plot das séries de retornos – (a) Série empírica do Ibovespa, apresentadas na Figura 22 – (b) Série simulada apresentada na Figura 25. Ambos comparados com a distribuição normal.



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

6 CONCLUSÃO

O trabalho apresentou uma abordagem ao problema de agentes heterogêneos denominada dinâmica de equilíbrio racional adaptativo (ARED). Destacamos a relevância e versatilidade na análise de dinâmicas econômicas com agentes heterogêneos, tendo como base resultados estabelecidos na teoria matemática e estatística. Além disso, sublinhamos que os sistemas econômicos frequentemente apresentam dinâmicas intrincadas que não aderem a padrões previsíveis. Ao contrário de se acomodarem em um ponto fixo ou de se desenvolverem em ciclos regulares, esses sistemas podem manifestar comportamentos caóticos que resultam em desfechos imprevistos. Esta característica ressalta a importância de aprofundar a compreensão dos mecanismos fundamentais que governam tais comportamentos.

A abordagem *ARED* consiste em representar a racionalidade de agentes pela escolha do preditor, ou estratégias, que adotam com o objetivo de otimizar sua função expectativa. Dessa forma, um mercado com H agentes foi representado por H preditores. Exploramos mais a fundo o caso com expectativas racionais versus ingênuas, utilizando o modelo cobweb. Dessa forma, o modelo possui dois preditores: um com custo associado positivo e um gratuito. Nossa abordagem concentrou-se em curvas de demanda e oferta lineares, evidenciando como a seleção de preditores pode gerar não linearidades, que, por sua vez, implicam no surgimento de um atrator estranho e trajetórias caóticas.

No contexto do modelo cobweb, a não linearidade presente no sistema obtido assume um papel de suma importância ao influenciar, de maneira significativa, a complexidade e a dinâmica econômica associada a esse modelo. Para altos valores de intensidade de escolha, a competição entre esses dois tipos de preditores pode produzir instabilidades locais, órbitas homoclínicas e dinâmicas caóticas, refletindo um conflito intrínseco entre previsões de custo reduzido e sofisticação. Quando a adaptatividade dos agentes cresce, representada no modelo pelo parâmetro β que mede a intensidade de escolha entre os preditores, foram observadas as seguintes mudanças qualitativas:

1. **Bifurcação Primária:** o ponto fixo atrator $E = (0, \tanh(-\beta C/2))$ perde estabilidade em uma bifurcação de duplicação de período supercrítica. Como resultado, o ponto fixo E torna-se um ponto de sela e um ciclo de período dois estável e simétrico com relação ao eixo m se fora.
2. **Bifurcação Secundária:** O sistema passa por uma bifurcação de Hopf com ressonância forte de ordem 2, de forma que o ciclo de período dois torna-se quatro ciclos de período quatro, dois ciclos estáveis e dois ciclos tipo sela, cada um desses pares são simétricos em relação ao eixo m . Além disso, a relação de ressonância durante a bifurcação gera uma bifurcação heteroclítica entre os dois ciclos tipo sela.

3. **Surgimento de um Atrator Estranho:** Uma bifurcação homoclínica de pontos dissipativos periódicos gera um atrator estranho no sistema, tornando as órbitas caóticas.
4. **Desaparecimento do Atrator Estranho:** Com β assumindo valores cada vez maiores atrator estranho deixa de existir e as trajetórias tendem ao ponto fixo E que continua sendo um ponto fixo hiperbólico de sela.

Consequentemente, foi possível afirmar que a inclusão de agentes heterogêneos e interativos dentro dos modelos econômicos aumenta substancialmente sua complexidade intrínseca. As interações ocorrendo entre os diversos agentes são responsáveis pela gênese de comportamentos emergentes que desafiam previsões lineares ou simplistas, o que reforça a noção de que os modelos econômicos tradicionais talvez precisem ser reconsiderados para adequadamente incorporar essas complexas dinâmicas interativas. Neste estudo, os fatores primordiais que induzem instabilidade foram identificados como causados pela:

1. utilização predominante de preditores simples e baratos, que levam à instabilidade do estado estacionário e à amplificação de erros de previsão,
2. adoção exclusiva de preditores sofisticados, que promove a convergência ao equilíbrio estacionário único.

Para exemplificar a complexidade da dinâmica, considere um mercado diversificado com os preditores sofisticados H_1 , com custo informativo, e um simples H_2 gratuito. Com preços próximos ao equilíbrio e quase todos usando H_2 , os preços se desviam, aumentando o erro de H_2 . Mais agentes, então, optam por pagar por H_1 . Se as crenças mudam rapidamente, quando H_1 se torna mais lucrativo, quase todos adotam H_1 . Isso estabiliza os preços ao equilíbrio por um tempo. Com preços equilibrados, o erro de H_2 cai e o lucro de H_1 se torna negativo devido ao custo. Quando a troca de crenças é intensa, a maioria dos agentes retorna a H_2 , reiniciando o ciclo.

Adicionalmente, aplicamos a estrutura evolucionária do modelo BH97 para obter um modelo de precificação de ativos com crenças adaptativas nomeado BH98. Como demonstrado, o modelo BH98 é adequado para capturar a interação entre dois grupos principais de investidores: os fundamentalistas, que utilizam fundamentos econômicos, e os analistas técnicos, que se baseiam em padrões históricos de preços.

A partir de um abrangente experimento de simulação e estimação, demonstramos que o método NPSMLE, proposto por Kristensen e Shin [56], quando aplicado ao modelo de Brock e Hommes (1998), é capaz de estimar com precisão os parâmetros de diferentes configurações do modelo. A abordagem de máxima verossimilhança simulada mostrou-se particularmente eficaz para lidar com estruturas não lineares complexas, geralmente incompatíveis com métodos tradicionais de estimação. Um dos principais méritos do

NPSMLE é sua capacidade de operar mesmo na ausência de uma forma analítica explícita da função objetivo, viabilizando a recuperação satisfatória dos parâmetros por meio de procedimentos não paramétricos baseados em simulação. Esse avanço se torna ainda mais promissor à luz do crescimento contínuo da capacidade computacional disponível.

Do ponto de vista empírico, o resultado mais relevante refere-se à ausência de significância estatística no coeficiente de mudança de estratégias entre os principais índices de mercado globais. Embora esse achado esteja alinhado com parte da literatura existente, ele contrasta com estudos que relatam coeficientes significativos em contextos específicos. Ao estimarmos um modelo com dois tipos de agentes, identificamos parâmetros de tendência claramente distintos, refletindo a existência de comportamentos heterogêneos nos mercados considerados, nos quais estratégias de seguimento de tendência se destacam em relação às estratégias contrárias.

As propriedades mais interessantes surgem quando perturbamos o sistema com um ruído gaussiano. O modelo confirma que, ao longo do tempo, os preços e seus retornos tendem a seguir distribuições que são essencialmente simétricas e com caudas pesadas, resultado do efeito de memória e do agrupamento de volatilidade. No paradigma do equilíbrio de mercado, concluímos, através do cálculo do expoente de Lyapunov para o modelo ajustado, que os principais fatos estatísticos estilizados que as séries financeiras apresentam estão intrinsecamente ligados a não linearidade do sistema, exibindo um comportamento fracamente caótico, ou "na fronteira do caos"¹, que, quando é munido de volatilidade e incerteza caracterizadas no ruído aleatório, apresenta dinâmicas complexas. É interessante notar que o modelo é estável na ausência de ruído, sendo a aleatoriedade responsável por trazer a tona a complexidade observada. Por outro lado, a aleatoriedade, separadamente, é incapaz de gerar as características obtidas. Portanto, é possível concluir que as principais forças que moldam os resultados observados nos preços dos ativos e seus retornos são construídas pela interação entre características periódicas e quase-periódicas, geradas nas interações heterogêneas dos agentes, antes do sistema exibir um comportamento caótico pelo surgimento de órbitas homoclínicas, causadas pela racionalidade suficientemente elevada dos agentes.

Os resultados apresentados neste trabalho abrem caminho para diversas linhas de investigação futuras. Uma possibilidade promissora é o refinamento sugerido em You, Kostelich e Yorke [102] do algoritmo SegPlot para simular órbitas das variedades estável e instável de pontos hiperbólicos. Esse procedimento permitiria gerar imagens ε -próximas das órbitas reais, possibilitando concluir a bifurcação homoclínica por meio de demonstrações baseadas em computador, utilizando o lema de sombreamento conforme descrito por Coomes, Koçak e Palmer [23].

¹ Termo utilizado na literatura de Sistemas Complexos para caracterizar essa propriedade dinâmica, ver [96] e [72].

O modelo BH97 também possui aplicabilidade em cenários variados, como demonstram estudos recentes. Por exemplo, Schmitt e Westerhoff [88] propõe estratégias de tomada de decisão baseadas no modelo BH97, e nas características que foram exploradas nesse trabalho, para que políticos sejam capazes de gerir rotas racionais para a aleatoriedade ajustando os impostos sobre os lucros. Além disso, houve extensões, como a proposta por Branch [12] que analisou o modelo do cobweb com múltiplas regras de expectativas, enquanto Lasselle, Svizzero e Tisdell [60] exploraram expectativas racionais versus adaptativas. Além da extensão do modelo BH98 realizada por Brock, Hommes e Wagener [17] que introduziu um sistema limite capaz de incorporar múltiplos tipos de agentes, ampliando significativamente a abrangência e relevância do modelo para mercados financeiros com maior heterogeneidade comportamental. Essas extensões não apenas comprovam a flexibilidade do modelo, mas também revelam a riqueza de fenômenos dinâmicos que podem ser investigados em diferentes contextos econômicos.

As contribuições recentes, como as de Goldbaum [33], destacam a relevância do modelo BH98 para compreender a interação entre múltiplos preditores e o impacto das escolhas estratégicas em mercados com incerteza. Estudos como o de Branch e Evans [13], que exploram o aprendizado adaptativo de parâmetros combinado com dinâmicas de replicação baseadas em desempenho, abrem novas possibilidades para o estudo de sistemas econômicos complexos.

Com relação ao ajuste do modelo às séries de dados empíricos, ressaltamos que mesmo o método NPSMLE garantindo uma precisão adequada, essa precisão se mostra limitada quando consideramos os retornos das séries. Nesse ponto de vista, é interessante investigar futuramente uma calibração pela série de retornos ao invés da série de desvios, como apresentados por He [36]. Além disso, considerando a dificuldade causada pela não suavidade da função objetivo, quando consideramos o sistema com ruído, uma abordagem integrada do método NPMLE com uma suavização por meio de um Filtro de Kalman tem o potencial de garantir um resultado mais preciso, levando em consideração os resultados obtidos por Majewski, Ciliberti e Bouchaud [68] para o modelo de Chiarella [19].

Por fim, a categorização das bifurcações primárias e das rotas que levam ao caos permanece um desafio teórico de grande importância. Combinando ferramentas analíticas e computacionais, futuras pesquisas podem aprofundar a compreensão sobre como essas dinâmicas surgem em sistemas com crenças heterogêneas, contribuindo para o avanço da teoria econômica e sua aplicação em contextos práticos.

REFERÊNCIAS

- [1] Simone Alfarano, Thomas Lux e Friedrich Wagner. “Estimation of agent-based models: the case of an asymmetric herding model”. Em: *Computational Economics* 26 (2005), pp. 19–49.
- [2] Simon P Anderson, Andre De Palma e Jacques-Francois Thisse. *Discrete choice theory of product differentiation*. MIT press, 1992.
- [3] Vladimir Igorevich Arnold. “Loss of stability of self-oscillations close to resonance and versal deformations of equivariant vector fields”. Em: *Funktsional’nyi Analiz i ego Prilozheniya* 11.2 (1977), pp. 1–10.
- [4] W Brian Arthur et al. “Asset pricing under endogenous expectations in an artificial stock market”. Em: *The economy as an evolving complex system II*. CRC Press, 2018, pp. 15–44.
- [5] Ray Ball. “The global financial crisis and the efficient market hypothesis: what have we learned?” Em: *Journal of Applied Corporate Finance* 21.4 (2009), pp. 8–16.
- [6] John Banks et al. “On Devaney’s definition of chaos”. Em: *The American mathematical monthly* 99.4 (1992), pp. 332–334.
- [7] Dirk G Baur e Kristoffer J Glover. “Heterogeneous expectations in the gold market: Specification and estimation”. Em: *Journal of Economic Dynamics and Control* 40 (2014), pp. 116–133.
- [8] Michael Benedicks e Lennart Carleson. “The dynamics of the Hénon map”. Em: *Annals of Mathematics* 133.1 (1991), pp. 73–169.
- [9] Tim Bollerslev. “Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity”. Em: *Journal of Econometrics* 31.3 (1986), pp. 307–327.
- [10] H Peter Boswijk, Cars H Hommes e Sebastiano Manzan. “Behavioral heterogeneity in stock prices”. Em: *Journal of Economic dynamics and control* 31.6 (2007), pp. 1938–1970.
- [11] Léon Bottou, Frank E Curtis e Jorge Nocedal. “Optimization methods for large-scale machine learning”. Em: *SIAM review* 60.2 (2018), pp. 223–311.
- [12] William A Branch. “Local convergence properties of a cobweb model with rationally heterogeneous expectations”. Em: *Journal of Economic Dynamics and Control* 27.1 (2002), pp. 63–85.
- [13] William A Branch e George W Evans. “Intrinsic heterogeneity in expectation formation”. Em: *Journal of Economic theory* 127.1 (2006), pp. 264–295.
- [14] William A Brock. “Pathways to randomness in the economy: emergent nonlinearity and chaos in economics and finance”. Em: *Estudios Economicos* (1993), pp. 3–55.

- [15] William A Brock e Cars H Hommes. “A rational route to randomness”. Em: *Econometrica: Journal of the Econometric Society* (1997), pp. 1059–1095.
- [16] William A Brock e Cars H Hommes. “Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model”. Em: *Journal of Economic dynamics and Control* 22.8-9 (1998), pp. 1235–1274.
- [17] William A Brock, Cars H Hommes e Florian OO Wagener. “Evolutionary dynamics in markets with many trader types”. Em: *Journal of Mathematical Economics* 41.1-2 (2005), pp. 7–42.
- [18] Shu-Heng Chen, Chia-Ling Chang e Ye-Rong Du. “Agent-based economic models and econometrics”. Em: *The Knowledge Engineering Review* 27.2 (2012), pp. 187–219.
- [19] Carl Chiarella. “The dynamics of speculative behaviour”. Em: *Annals of operations research* 37.1 (1992), pp. 101–123.
- [20] Carl Chiarella e Xue-Zhong He. “Heterogeneous beliefs, risk and learning in a simple asset pricing model”. Em: *Computational Economics* 19 (2002), pp. 95–132.
- [21] Vaughn Climenhaga e Daniel J Thompson. “Equilibrium states beyond specification and the Bowen property”. Em: *Journal of the London Mathematical Society* 87.2 (2013), pp. 401–427.
- [22] Rama Cont. “Volatility clustering in financial markets: empirical facts and agent-based models”. Em: *Long memory in economics*. Springer, 2007, pp. 289–309.
- [23] Brian A Coomes, Hüseyin Koçak e Kenneth J Palmer. “Homoclinic shadowing”. Em: *Journal of Dynamics and Differential Equations* 17 (2005), pp. 175–215.
- [24] Werner FM De Bondt e Richard H Thaler. “Do security analysts overreact?” Em: *The American economic review* (1990), pp. 52–57.
- [25] Pedro Demo. “Complexidade e aprendizagem: a dinâmica não linear do conhecimento”. Em: *Complexidade e aprendizagem: a dinâmica não linear do conhecimento*. 2011, pp. 195–195.
- [26] Robert Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. CRC press, 2018.
- [27] Eugene F Fama. “Efficient capital markets”. Em: *Journal of finance* 25.2 (1970), pp. 383–417.
- [28] Eugene F Fama. “Random walks in stock market prices”. Em: *Financial analysts journal* 51.1 (1995), pp. 75–80.
- [29] Eugene F Fama. “The behavior of stock-market prices”. Em: *The journal of Business* 38.1 (1965), pp. 34–105.
- [30] J Doyne Farmer. “Market force, ecology and evolution”. Em: *Industrial and Corporate Change* 11.5 (2002), pp. 895–953.

- [31] Milton Friedman. *The Case for Flexible Exchange Rates*. Essays in Positive Economics/University of Chicago Press, 1953.
- [32] Andrea Gaunersdorfer, Cars H Hommes e Florian OO Wagener. “Bifurcation routes to volatility clustering under evolutionary learning”. Em: *Journal of Economic Behavior & Organization* 67.1 (2008), pp. 27–47.
- [33] David Goldbaum. “Market efficiency and learning in an endogenously unstable environment”. Em: *Journal of Economic Dynamics and Control* 29.5 (2005), pp. 953–978.
- [34] Sanford J Grossman e Joseph E Stiglitz. “On the impossibility of informationally efficient markets”. Em: *The American economic review* 70.3 (1980), pp. 393–408.
- [35] John Guckenheimer e Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Vol. 42. Springer Science & Business Media, 2013.
- [36] Xue-Zhong He. “Recent developments in asset pricing with heterogeneous beliefs and adaptive behaviour of financial markets”. Em: *Global Analysis of Dynamic Models in Economics and Finance: Essays in Honour of Laura Gardini* (2013), pp. 3–34.
- [37] Michel Hénon. “A two-dimensional mapping with a strange attractor”. Em: *Communications in Mathematical Physics* 50 (1976), pp. 69–77.
- [38] Cars Hommes. *Behavioral rationality and heterogeneous expectations in complex economic systems*. Cambridge University Press, 2013.
- [39] Cars Hommes et al. “Booms, busts and behavioural heterogeneity in stock prices”. Em: *Journal of Economic Dynamics and Control* 80 (2017), pp. 101–124.
- [40] Cars Hommes. “Heterogeneous Agent Models: two simple examples”. Em: *Nonlinear Dynamical Systems in Economics*. Ed. por Marji Lines. Vienna: Springer Vienna, 2005, pp. 131–164. ISBN: 978-3-211-38043-7. DOI: 10.1007/3-211-38043-4_5.
- [41] Cars H Hommes. “Heterogeneous agent models in economics and finance”. Em: *Handbook of computational economics* 2 (2006), pp. 1109–1186.
- [42] Ronald Huisman, Raquelle AF Maliepaard e Remco CJ Zwinkels. “Heterogeneous agents in electricity forward markets”. Em: *Technical Report*. Erasmus University Rotterdam, 2010.
- [43] Emery K. Hunt e Mark Lautzenheiser. *History of economic thought: A critical perspective*. Routledge, 2015.
- [44] John D. Hunter. “Matplotlib: A 2D Graphics Environment”. Em: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (mai. de 2007), pp. 90–95.
- [45] Harold Edwin Hurst. “Long-term storage capacity of reservoirs”. Em: *Transactions of the American society of civil engineers* 116.1 (1951), pp. 770–799.

- [46] Gérard Iooss. *Bifurcation of maps and applications*. Vol. 36. Elsevier, 1979.
- [47] Michael C Jensen. “Some anomalous evidence regarding market efficiency”. Em: *Journal of financial economics* 6.2/3 (1978), pp. 95–101.
- [48] Daniel Kahneman. “Maps of bounded rationality: Psychology for behavioral economics”. Em: *American economic review* 93.5 (2003), pp. 1449–1475.
- [49] Daniel Kahneman e Amos Tversky. “On the psychology of prediction.” Em: *Psychological review* 80.4 (1973), p. 237.
- [50] Nicholas Kaldor. “A classificatory note on the determinateness of equilibrium”. Em: *The review of economic studies* 1.2 (1934), pp. 122–136.
- [51] Kantelhardt et al. “Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series”. Em: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 316.1-4 (2002), pp. 87–114.
- [52] Ioannis Karatzas e Steven Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Vol. 113. Springer Science & Business Media, 1991.
- [53] Anatole Katok. “Lyapunov exponents, entropy and periodic orbits for diffeomorphisms”. Em: *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 51 (1980), pp. 137–173.
- [54] John M. Keynes. *The general theory of unemployment, interest and money*. Harcourt, Brace e World, 1936.
- [55] Bernd Krauskopf. “Strong resonances and Takens’s Utrecht preprint”. Em: *Global analysis of dynamical systems*. CRC Press, 2001, pp. 97–119.
- [56] Dennis Kristensen e Yongseok Shin. “Estimation of dynamic models with nonparametric simulated maximum likelihood”. Em: *Journal of Econometrics* 167.1 (2012), pp. 76–94.
- [57] Jiri Kuckacka e Jozef Barunik. “Estimation of financial agent-based models with simulated maximum likelihood”. Em: *Journal of Economic Dynamics and Control* 85 (2017), pp. 21–45.
- [58] Yuri Kuznetsov e Meijer Hil GE. *Numerical bifurcation analysis of maps*. Vol. 34. Cambridge University Press, 2019.
- [59] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Vol. 112. Springer, 2023. DOI: 10.1007/978-3-031-22007-4.
- [60] Laurence Lasselle, Serge Svizzero e Clement Allan Tisdell. “Heterogeneous expectations, dynamics, and stability of markets”. Em: *Royal Economic Society Annual Conference*. 130. 2003.
- [61] Blake LeBaron, W Brian Arthur e Richard Palmer. “Time series properties of an artificial stock market”. Em: *Journal of Economic Dynamics and control* 23.9-10 (1999), pp. 1487–1516.

- [62] Tien-Yien Li e James A Yorke. “Period Three Implies Chaos”. Em: *The American Mathematical Monthly* 82.10 (1975), pp. 985–992.
- [63] Elon Lages Lima. *Curso de análise*. Vol. 1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2009.
- [64] Elon Lages Lima. *Espaços métricos*. 6. ed. Vol. 4. IMPA, Coleção Projeto Euclides, 2020.
- [65] Thomas Lux. “Herd behaviour, bubbles and crashes”. Em: *The economic journal* 105.431 (1995), pp. 881–896.
- [66] Thomas Lux. “Stochastic behavioral asset-pricing models and the stylized facts”. Em: *Handbook of financial markets: Dynamics and evolution*. Elsevier, 2009, pp. 161–215.
- [67] Thomas Lux e Michele Marchesi. “Volatility clustering in financial markets: a microsimulation of interacting agents”. Em: *International journal of theoretical and applied finance* 3.04 (2000), pp. 675–702.
- [68] Adam A Majewski, Stefano Ciliberti e Jean-Philippe Bouchaud. “Co-existence of trend and value in financial markets: Estimating an extended Chiarella model”. Em: *Journal of Economic Dynamics and Control* 112 (2020), p. 103791.
- [69] Benoit B. Mandelbrot e John. Van Ness. “Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications”. Em: *SIAM Review* 10. (1968), pp. 422–437.
- [70] Mariana Mazzucato. *The value of everything: Making and taking in the global economy*. Hachette UK, 2018.
- [71] Steven W McDonald et al. “Fractal basin boundaries”. Em: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 17.2 (1985), pp. 125–153.
- [72] Robert A Meyers. *Complex systems in finance and econometrics*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [73] Paul Milgrom e Nancy Stokey. “Information, trade and common knowledge”. Em: *Journal of economic theory* 26.1 (1982), pp. 17–27.
- [74] Leonardo Mora e Marcelo Viana. “Abundance of strange attractors”. Em: *Acta Mathematica* 171 (1993), pp. 1–71.
- [75] John F Muth. “Rational expectations and the theory of price movements”. Em: *Econometrica: journal of the Econometric Society* (1961), pp. 315–335.
- [76] Jean-Pierre Nadal et al. “A formal approach to market organization: choice functions, mean field approximation and maximum entropy principle”. Em: *Advances in self-organization and evolutionary economics* 149 (1998).
- [77] Yurii Isaakovich Neimark. “Motions close to a doubly asymptotic motion”. Em: *Doklady Akademii Nauk*. Vol. 172. 5. Russian Academy of Sciences. 1967, pp. 1021–1024.

- [78] Jacob Palis e Welington De Melo. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.
- [79] Jacob Palis e Floris Takens. *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations: Fractal dimensions and infinitely many attractors in dynamics*. Vol. 35. Cambridge University Press, 1995.
- [80] Ole Peters. “The ergodicity problem in economics”. Em: *Nature Physics* 15.12 (2019), pp. 1216–1221.
- [81] Vladas Pipiras e Murad S Taqqu. *Long-range dependence and self-similarity*. Vol. 45. Cambridge university press, 2017.
- [82] Herbert Robbins e Sutton Monro. “A stochastic approximation method”. Em: *The annals of mathematical statistics* (1951), pp. 400–407.
- [83] Clark Robinson. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. CRC press, 1998.
- [84] David Ruelle. “Ergodic theory of differentiable dynamical systems”. Em: *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques* 50.1 (1979), pp. 27–58.
- [85] David Ruelle e Floris Takens. “On the nature of turbulence”. Em: *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25* 12 (1971), pp. 1–44.
- [86] Robert John Sacker. *On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations*. New York University, 1964.
- [87] Paul A Samuelson. “Proof that properly discounted present values of assets vibrate randomly”. Em: *The Bell Journal of Economics and Management Science* (1973), pp. 369–374.
- [88] Noemi Schmitt e Frank Westerhoff. “Managing rational routes to randomness”. Em: *Journal of Economic Behavior & Organization* 116 (2015), pp. 157–173.
- [89] B. W. Silverman. *Density estimation for statistics and data analysis*. Chapman e Hall, 1986.
- [90] Herbert A. Simon. “A Behavioral Model of Rational Choice”. Em: *Models of Man, Social and Rational: Mathematical Essays on Rational Human Behavior in a Social Setting/Wiley* (1957).
- [91] Herbert A. Simon. “Rational decision making in business organizations”. Em: *The American economic review* 69.4 (1979), pp. 493–513.
- [92] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- [93] Floris Takens. “Forced oscillations and bifurcations”. Em: *Global analysis of dynamical systems*. CRC Press, 2001, pp. 11–71.

- [94] Mark P Taylor e Helen Allen. “The use of technical analysis in the foreign exchange market”. Em: *Journal of international Money and Finance* 11.3 (1992), pp. 304–314.
- [95] Saskia Ter Ellen, Cars H Hommes e Remco CJ Zwinkels. “Comparing behavioural heterogeneity across asset classes”. Em: *Journal of Economic Behavior & Organization* 185 (2021), pp. 747–769.
- [96] Stefan Thurner, Rudolf Hanel e Peter Klimek. *Introduction to the theory of complex systems*. Oxford University Press, 2018.
- [97] Marcelo Viana e José M Espinar. *Differential equations: a dynamical systems approach to theory and practice*. Vol. 212. American Mathematical Society, 2021.
- [98] Yieh-Hei Wan. “Bifurcation into invariant tori at points of resonance”. Em: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 68 (1978), pp. 343–357.
- [99] David Whitley. “Discrete dynamical systems in dimensions one and two”. Em: *Bulletin of the London Mathematical Society* 15.3 (1983), pp. 177–217.
- [100] Peter Winker, Manfred Gilli e Vahidin Jeleskovic. “An objective function for simulation based inference on exchange rate data”. Em: *Journal of Economic Interaction and Coordination* 2 (2007), pp. 125–145.
- [101] Stephen J Wright. *Numerical optimization*. 2006.
- [102] Zhiping You, Eric J Kostelich e James A Yorke. “Calculating stable and unstable manifolds”. Em: *International Journal of Bifurcation and Chaos* 1.03 (1991), pp. 605–623.

A APÊNDICE A – SISTEMAS DINÂMICOS.

Nesse capítulo faremos uma revisão de alguns conceitos básicos de sistemas dinâmicos discretos, assim como uma apresentação dos resultados mais relevantes nessa teoria para o desenvolvimento do trabalho. Na seção A.1 estabelecemos as definições iniciais de sistemas dinâmicos discretos, como ponto fixo, ponto periódico e estabilidade. A seção A.2 trata de conjuntos invariantes hiperbólicos, assim como suas variedades estável e instável. Já a seção A.3 ocupa-se do caso em que essas variedades se interceptam transversalmente. Definimos a ferradura de Smale e exploramos alguns aspectos de como órbitas homoclínicas são criadas através de uma bifurcação global. Na seção A.4 descrevemos brevemente alguns casos de bifurcações locais de codimensão 1 e os casos de ressonância forte (1:2) e (1:4) de codimensão 2. Finalmente, a seção A.5 definirá o conceito de caos que interligará os conceitos apresentados anteriormente. As referências principais usadas para a elaboração do texto foram Robinson [83], Kuznetsov [59] e Palis e Takens [79].

A.1 DEFINIÇÕES INICIAIS

Definição A.1.1. *Seja X um espaço métrico completo. Um **sistema dinâmico** consiste de uma tripla $(X, f^t, \mathbb{T})$, onde X é chamado de **espaço de fase**, $\mathbb{T}$ é um conjunto, podendo ser discreto ou contínuo e $f^t : X \rightarrow X$, chamada de **aplicação de transição**, é uma família de operadores indexados por $t \in \mathbb{T}$ satisfazendo as propriedades abaixo:*

1. $f^0 = id_X$,
2. $f^{t+s} = f^t \circ f^s$.

Na Definição A.1.1 acima, o espaço de fase X consiste em todas as possibilidades de posições que o sistema pode assumir em algum instante de tempo. Além disso, a primeira propriedade de uma aplicação de transição garante que o sistema não muda de estado espontaneamente. Já a segunda garante que a evolução em $t + s$ unidade de tempo do sistema, partindo do ponto x , é idêntica a tomar a evolução de x em s unidades e, então, tomar a evolução de $f^s x$ em t unidades de tempo. Assim, as propriedades de f na Definição A.1.1 garantem que as leis que governam o sistema não mudam com o tempo. Dizemos, nesse caso, que o sistema é autônomo.

Exemplo A.1.1 (Dinâmica Simbólica). *Tomamos $X = \Sigma_2$ como o espaço de sequência de dois símbolos $\{0, 1\}$.*

$$\Sigma_2 = \{(s_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid s_j \in \{1, 2\}, \forall j \in \mathbb{Z}\}.$$

Assim, cada ponto no espaço de fases $s \in \Sigma_2$ é uma sequência

$$s = \{\cdots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \cdots\}$$

onde $s_j \in \{1, 2\}$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Podemos definir uma distância no espaço Σ_2 :

$$d(s, t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(s_j, t_j)}{4^{|j|}}, \quad \text{onde} \quad \delta(a, b) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } a = b \\ 1 & , \text{ se } a \neq b. \end{cases}$$

Dessa forma, (Σ_2, d) é um espaço métrico completo.

Considere a aplicação $\sigma : X \rightarrow X$, que transforma uma sequência $s \in X$ em uma sequência $\sigma(s) = s^1$ tal que $(\sigma(s))_k = s_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Isto é

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \{\cdots, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, s_3, \cdots\} \\ &:= \{\cdots, s_{-2}^1, s_{-1}^1, s_0^1, s_1^1, s_2^1, \cdots\} \end{aligned}$$

A aplicação σ é chamada de **shift** pois ela simplesmente desloca a sequência original em uma unidade. Considerando σ^i como i iteradas de σ , notemos que σ é invertível, com σ^{-1} sendo o shift à direita, e que $\sigma^0(s) = s$ e que $(\sigma^{t+s}(s))_k = s_{k+t+s} = (\sigma^t(\sigma^s(s)))_k$, logo σ possui as propriedades de uma aplicação de transição, presente na Definição A.1.1, e $(X, \sigma, \mathbb{Z})$ é um sistema dinâmico em tempo discreto.

As sequências no espaço de fases que diferem somente por um shift, como s e s^1 , podem ser tomadas como equivalentes. Assim, obtemos um espaço $\tilde{\Sigma}_2$ formado por classes de equivalência dessas sequências.

Definição A.1.2. Dado um sistema dinâmico $(X, f, \mathbb{T})$, uma **órbita** partindo do ponto $x_0 \in X$ é um subconjunto ordenado do espaço de estados X dado por,

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x \in X \mid x = f^t(x_0), \text{ para algum } t \in \mathbb{T}\}.$$

Assim, órbitas de um sistema de tempo contínuo são curvas parametrizadas por t em X partindo do ponto x_0 , enquanto órbitas em um sistema de tempo discreto são sequências de pontos em X . Órbitas também podem ser chamadas **trajetórias**.

Definição A.1.3. Dado um sistema dinâmico $(X, f^t, \mathbb{T})$, um ponto $x \in X$ é chamado de **ponto fixo**, se $f^t(x) = x$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Um ponto x é um **ponto periódico** de período T se $f^T(x) = x$ e $f^j(x) \neq x$ para $0 < j < T$. Um **ciclo** é uma órbita periódica, isto é, um conjunto $\mathcal{O}(x_0)$ tal que para cada ponto $x \in \mathcal{O}(x_0)$ existe $T > 0 \in \mathbb{T}$ tal que

$$f^{t+T}(x) = f^t(x),$$

para todo $t \in \mathbb{T}$.

Note, na Definição A.1.3 que T é o menor período. Se x tem período um, então x é um ponto fixo. Além disso, qualquer ponto em uma órbita periódica é um ponto periódico.

Definição A.1.4. Um **conjunto invariante** de um sistema dinâmico $(X, f^t, \mathbb{T})$ é um subconjunto S de X tal que, se $x \in S$ então $f^t(x) \in S$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Denotamos esse fato escrevendo, $f^t(S) = S$

Notemos que toda órbita é um conjunto invariante, assim como todo ponto fixo. Notemos ainda que dado um conjunto invariante S , podemos tomar a restrição $f = f|_S$ por abuso de linguagem, de forma que, obtemos um novo sistema dinâmico (S, f^t, T) .

Definição A.1.5. Dado (X, f^t, T) um sistema dinâmico, dizemos que um conjunto invariante S é **estável** se satisfaz a condição

1. Para todo aberto, suficientemente pequeno, $U \supset S$ existe um aberto $V \supset S$ tal que $f^t(x) \in U$ para todo $x \in V$ e todo $t > 0$;

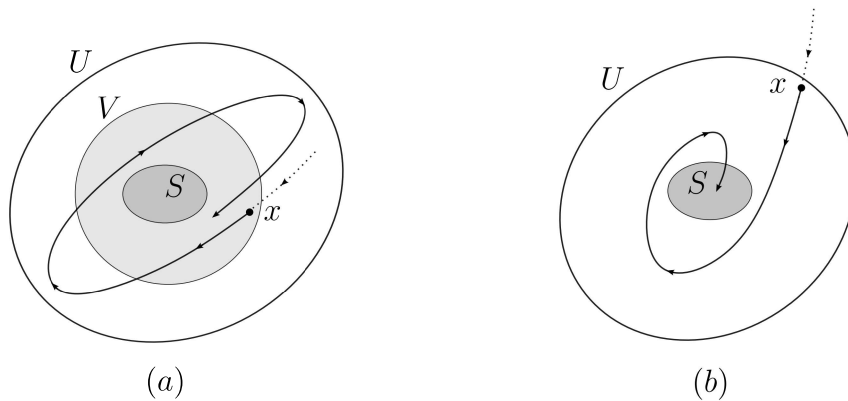
Dizemos que o conjunto invariante S é **assintoticamente estável** se é estável e satisfaz:

2. Existe um aberto $U \supset S$ onde, para todo $x \in U$ existe $T \in T$ tal que $t > T$ implica $f^t(x) \in S$.

Se o conjunto S não cumpre a propriedade 1. então dizemos que ele é **instável**.

Na Definição A.1.5 a propriedade 1. é normalmente chamada de **estabilidade de Lyapunov**, e pode ser interpretada como: órbitas em uma vizinhança pequena o suficiente de um conjunto S estável no sentido de Lyapunov, não deixam essa vizinhança, como na Figura 28 (a). Já a propriedade 2. é chamada **estabilidade assintótica**, significando que órbitas em uma vizinhança pequena o suficiente de um conjunto S assintoticamente estável tendem a S , como na Figura 28 (b).

Figura 28 – (a) Um conjunto invariante estável no sentido de Lyapunov – (b) Um conjunto invariante assintoticamente estável



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Existem conjuntos invariantes que são estáveis no sentido de Lyapunov mas não são assintoticamente estáveis, basta que alguma órbita em V seja periódica e não intercepta S . Por outro lado, é possível que para toda vizinhança U de S existam órbitas que comecem em U mas somente tendem a S depois de uma excursão em uma vizinhança fixa U_0 de S . Assim, tal conjunto S cumpre a propriedade 2. mas não é estável, portanto, não é

assintoticamente estável no sentido da Definição A.1.5. Para um exemplo no caso contínuo, veja [97], exemplo 8.3.

Definição A.1.6. *Sejam M e N espaços métricos com métrica d_M e d_N respectivamente. Dizemos que uma função $f : M \rightarrow N$ é uma **contração** quando existe uma constante c , com $0 \leq c < 1$, tal que*

$$d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_M(x, y)$$

para quaisquer $x, y \in M$.

Teorema A.1.1 (Ponto fixo de Banach para contrações). *Seja M um espaço métrico completo com métrica d . Então, toda contração $f : M \rightarrow M$ possui um ponto fixo estável em M .*

Demonstração. Ver [64], Proposição 23, página 196. □

Como um conjunto fechado de um espaço métrico completo também é um espaço métrico completo, tomando um subconjunto S fechado invariante de M e f uma contração em M , temos que $f|_S$ é uma contração em S e pelo Teorema A.1.1 contém o ponto fixo de f .

Teorema A.1.2. *Considere o sistema dinâmico $(\mathbb{R}^n, f)$ com tempo discreto, onde f é uma aplicação suave. Seja p um ponto periódico, de período k , para esse sistema.*

1. *Se todos os autovalores λ_n da matriz jacobiana Df_p avaliada no ponto p satisfazem $|\lambda_n| < 1$, então o ponto p é assintoticamente estável.*
2. *Se algum dos autovalores λ_n da matriz jacobiana Df_p avaliada no ponto p satisfaz $|\lambda_n| > 1$, então o ponto p é instável.*

Demonstração. Ver [83], Teorema 9.1, página 118. □

Observação A.1.1. *Dado que o interesse deste estudo se concentra em sistemas dinâmicos discretos, tomaremos medidas para simplificar a notação utilizada. A partir dessa consideração, substituiremos o uso completo da notação $(X, f^t, \mathbb{Z})$, por uma forma mais compacta, onde apenas a função de transição $f : X \rightarrow X$ será mencionada.*

Definição A.1.7. *Sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ duas aplicações. Uma aplicação $h : X \rightarrow Y$ é chamada de **semi-conjugação topológica** de f para g se satisfizer:*

1. *h é contínuo,*
2. *h é sobrejetivo,*
3. *$h \circ f = g \circ h$.*

Também dizemos que f é **semi-conjugado topologicamente** a g por h . Uma semi-conjugação pode ser ilustrada como a comutatividade do seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

A aplicação h é chamada de **conjugação topológica** se for uma semi-conjugação e, além disso, vale,

4. h é injetivo e possui inversa contínua (ou seja, h é um homeomorfismo).

Nesse caso, também dizemos que f e g são **conjugados topologicamente** por h , ou às vezes, apenas que f e g são **conjugados**.

Sistemas que são conjugados topologicamente exibem identidade no comportamento dinâmico ao longo do tempo: ambos apresentam características caóticas ou ordenadas, manifestando dinâmicas periódicas similares com propriedades idênticas. Assim, a conjugação topológica desempenha um papel fundamental na categorização de sistemas que apresentam comportamentos dinâmicos que são equivalentes.

A.2 HIPERBOLICIDADE E VARIEDADES INVARIANTES

Definição A.2.1. Dada uma matriz $A \in M(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ com autovalores $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ reais, seja $\text{Aut}_A(\lambda)$ o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado por todos os autovetores associados ao autovalor λ . Definimos o autoespaço estável E^s e o autoespaço instável E^u , respectivamente, do seguinte modo.

$$E_A^s = \langle \{v \in \text{Aut}_A(\lambda) ; |\lambda| < 1\} \rangle$$

$$E_A^u = \langle \{v \in \text{Aut}_A(\lambda) ; |\lambda| > 1\} \rangle$$

Sejam M uma variedade compacta em $\mathbb{R}^n$, $f \in \text{Dif}^k(M)$ e $\Lambda \subset M$ um subconjunto fechado invariante por f , isto é, $f(\Lambda) = \Lambda$. Dizemos que Λ é **hiperbólico** para f se:

1. Para todo $p \in \Lambda$, o fibrado tangente à M em p , $T_p M$ se decompõe em uma soma direta contínua invariante por f ,

$$T_p M = E_{Df_p}^s \oplus E_{Df_p}^u.$$

2. Existem uma métrica e um número $0 < \nu < 1$ tais que, para quaisquer $p \in \Lambda$,

$$\|Df_p \cdot e^s\| \leq \nu \|e^s\|, \quad \text{com } e^s \in E_{Df_p}^s, \quad (\text{A.1})$$

$$\|(Df^{-1})_p \cdot e^u\| \leq \nu^{-1} \|e^u\|, \quad \text{com } e^u \in E_{Df_p}^u. \quad (\text{A.2})$$

Definição A.2.2. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^k em uma variedade suave compacta sem borda de dimensão arbitrária. Para $x \in M$ definimos os conjuntos ω -**limite** e α -**limite** como*

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \{y \in M \mid \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ com } n_k \rightarrow +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \rightarrow y\}, \\ \alpha(x) &= \{y \in M \mid \exists (n_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ com } n_k \rightarrow -\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \rightarrow y\}.\end{aligned}$$

Definimos os conjuntos **limite positivo** $L^+(f)$ e **limite negativo** $L^-(f)$ de f como

$$L^+(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \omega(x)} \quad L^-(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \alpha(x)}$$

Definimos o **conjunto limite** $L(f)$ como a união dos conjuntos $L^+(f)$ e $L^-(f)$.

Notemos que $L^+(f)$ e $L^-(f)$ são conjuntos invariantes com respeito à aplicação f . Assim, $(L^+(f), f|_{L^+(f)})$ e $(L^-(f), f|_{L^-(f)})$ descrevem o comportamento assintótico das órbitas de (M, f) .

Definição A.2.3. *Sejam M uma variedade em $\mathbb{R}^n$ e $f \in \text{Dif}(M)$. Uma **bacia de atração** $\mathcal{B}$ de um conjunto Λ invariante por f é o conjunto*

$$\mathcal{B} = \{x \in M \mid \omega(x) \in \Lambda\}$$

e tal que $f(\mathcal{B}) \in \text{int}(\mathcal{B})$. Assim, é o conjunto de todos os estados iniciais que convergem para Λ . O conjunto de pontos x tais que qualquer bola de raio ε ao redor de x contiver pontos da bacia e de seu complementar é chamado **fronteira da bacia de atração**. Dizemos que Λ é um **atrator** para $f : M \rightarrow M$ se

1. Sua bacia de atração tem medida de Lebesgue positiva.
2. Não existe um subconjunto $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que a bacia de atração de Λ' coincida com a de Λ a menos de um conjunto com medida de Lebesgue zero, ou a menos que f seja transitiva em Λ .

Dessa forma, para qualquer atrator Λ de f , temos $\Lambda \subset L^+$. É amplamente reconhecido que, dentro do contexto de sistemas dinâmicos não lineares, a fronteira de uma bacia de atração pode manifestar-se como uma configuração altamente complexa, exibindo características de uma estrutura fractal. Veja McDonald et al. [71].

A Definição A.2.1 pode ser aplicada para pontos fixos ou pontos periódicos. Nesse caso, segundo essa definição, um ponto periódico p de período k é chamado de **hiperbólico** se todos os autovalores λ de Df_p^k satisfaçam $|\lambda| \neq 1$. Ainda para esse caso, temos as seguintes definições:

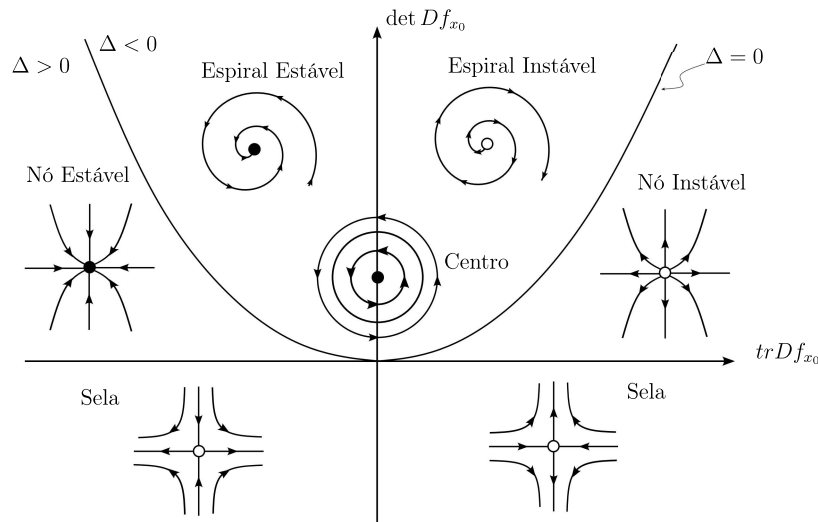
Definição A.2.4. Um ponto fixo hiperbólico p é chamado de **nó estável** se todos os autovalores de Df_p^k forem menores que 1 em valor absoluto, $|\lambda| < 1$, ou seja, ambos $E_p^u = \{0\}$. Da mesma forma, um ponto fixo hiperbólico é chamado de **nó instável** se todos os autovalores forem maiores que um em valor absoluto, $|\lambda| > 1$, ou seja, ambos $E_p^s = \{0\}$. Finalmente, um ponto fixo hiperbólico é uma **sela**, ou é **de tipo sela**, se $E_p^u \neq \{0\}$ e $E_p^s \neq \{0\}$, isto é, existem autovalores λ_1, λ_2 com $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| > 1$.

Exemplo A.2.1. Sejam $x_{t+1} = f(x_t)$ um sistema bidimensional onde $x_t = (x_{1t}, x_{2t}) \in \mathbb{R}^2$ e f uma função suave. Presuma que x_0 representa um ponto de equilíbrio hiperbólico. A matriz Jacobiana Df_{x_0} de f no ponto x_0 possui dois autovalores, λ_1 e λ_2 , que são determinados como as raízes correspondentes da equação característica, formulada por

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + D = 0,$$

onde σ é o traço de Df_{x_0} , $\text{tr } Df_{x_0}$, e D é o determinante de Df_{x_0} , $\det Df_{x_0}$. A estabilidade de f no ponto x_0 fica então completamente determinada pelo par (σ, D) . Além disso, $\Delta = \sqrt{\sigma^2 - 4D}$ traça uma curva no plano (σ, D) separando pontos fixos hiperbólicos com autovalores associados puramente reais de pontos fixos hiperbólicos com autovalores complexos. A Figura 29, muitas vezes chamada de diagrama de Poincaré, ilustra os resultados clássicos nesta área.

Figura 29 – Diagrama de Poincaré, uma classificação do retrato de fase no plano $(\text{tr } Df_{x_0}, \det Df_{x_0})$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Um dos resultados mais importantes para a teoria de sistemas dinâmicos é o Teorema de Hartman-Grobman, que trata da linearização local de sistemas não lineares. Essencialmente, o teorema afirma que um sistema dinâmico pode ser aproximado por seu sistema linearizado na vizinhança de um ponto fixo hiperbólico. Essa aproximação permite a análise qualitativa do comportamento do sistema não linear, estudando seu equivalente linear potencialmente mais simples.

Teorema A.2.1 (Hartman-Grobman para aplicações). *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo C^k com um ponto fixo hiperbólico p . Então, existem vizinhanças U de p e V de 0 e um homeomorfismo $h : V \rightarrow U$ tal que $f(h(x)) = h(Df_p \cdot x)$ para todo $x \in V$.*

Demonstração. Ver [83], seção 5.7.1, página 166 e [97] página 332. $\square$

Definição A.2.5. *Seja p um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ de classe C^k de uma variedade nela mesma. Definimos a **conjunto estável** e a **conjunto instável** de f em p respectivamente como*

$$W^s(p) = \{x \in M \mid f^i(x) \rightarrow p, \text{ quando } i \rightarrow +\infty\},$$

$$W^u(p) = \{x \in M \mid f^i(x) \rightarrow p, \text{ quando } i \rightarrow -\infty\}.$$

*De maneira semelhante, definimos o **conjunto estável local** e o **conjunto instável local** de f em p respectivamente como*

$$W_\varepsilon^s(p) = \{x \in M \mid f^n(x) \in B(p, \varepsilon) \text{ para todo } n \geq 0, \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), p) = 0\},$$

$$W_\varepsilon^u(p) = \{x \in M \mid f^{-n}(x) \in B(p, \varepsilon) \text{ para todo } n \geq 0, \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), p) = 0\},$$

Também denotamos as variedades locais, respectivamente, por $W_\varepsilon^s(p)$ e $W_\varepsilon^u(p)$ quando substituímos a bola $B(p, \varepsilon)$ por uma vizinhança qualquer U de p .

Proposição A.2.1. *Se ε é pequeno o suficiente, temos:*

1. *Pontos de uma vizinhança de p cujas órbitas positivas, respectivamente negativas, permanecem na bola $B(p, \varepsilon)$ tem p como ω -limite, respectivamente α -limite. Isto é,*

$$W_\varepsilon^s(p) \subset W^s(p), \quad W_\varepsilon^u(p) \subset W^u(p).$$

2. *$W_\varepsilon^s(p)$ e $W_\varepsilon^u(p)$ são discos topológico mergulhados em M cuja dimensão é igual, respectivamente, à do subespaço estável E^s e à do subespaço instável E^u de $(Df)_p$.*
3. *Existem imersões topológicas biunívocas $\iota_s : E^s \rightarrow M$ e $\iota_u : E^u \rightarrow M$ cuja imagem é $W^s(p)$ e $W^u(p)$ respectivamente. Além disso,*

$$W^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_\varepsilon^s(p)) \quad W^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_\varepsilon^u(p)).$$

Demonstração. Ver [78]. $\square$

Definição A.2.6. *Sejam S e S' subvariedades C^k de M e $\varepsilon > 0$. Sejam ainda, $i : S \rightarrow M$ e $i' : S' \rightarrow M$ as respectivas inclusões. Dizemos que S e S' são εC^k -**próximas**¹ se existe um difeomorfismo C^k , $h : S \rightarrow S' \subset M$, tal que a distância de $i'h$ a i é menor ou igual a ε na topologia C^k .*

¹ Utilizamos a notação presente em Palis e De Melo [78].

O seguinte Teorema garante que o conjunto estável de f em um ponto hiperbólico p possui estrutura de uma variedade diferenciável. Esse resultado é essencial para entender como soluções de sistemas dinâmicos se organizam no espaço de fases, assim como implica algumas propriedades essenciais das órbitas de pontos hiperbólicos que serão estudadas neste trabalho. Omitimos o resultado análogo para conjunto instável; para mais detalhes ver [83]. A partir de então, falaremos apenas em **variedade estável** e **variedade instável** de f no ponto p .

Teorema A.2.2 (Variedade Estável). *Sejam $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^k em uma variedade de Banach com $k \geq 1$, $p \in M$ um ponto fixo hiperbólico para f e E^s o subespaço estável de $(Df)_p$. Então,*

1. $W^s(p)$ é uma variedade de classe C^k imersa biunivocamente em M e o subespaço tangente a $W^s(p)$ no ponto M é E^s .
2. Seja $D \subset W^s(p)$ um disco mergulhado contendo o ponto p . Considere um aberto $\mathcal{V} \subset \text{Dif}^r(M)$ tal que cada $\psi \in \mathcal{V}$ tenha um único ponto fixo hiperbólico p_ψ , contido em uma vizinhança U de p . Então, dado $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$ tal que, para todo $\psi \in \tilde{\mathcal{V}}$, existe um disco $D_\psi \subset W^s(p_\psi)$ que é εC^k -próximo de D .

Demonstração. Ver [83], seção 5.10.1, além de [78] página 83 e [97] página 355. $\square$

Lema A.2.1 (λ -Lema). *Sejam $B^s \subset E^s$ uma bola contida em $W_{Loc}^s(0)$, $B^u \subset E^u$ uma bola contida em $W_{Loc}^u(0)$ e $V = B^s \times B^u$. Considere D^u de dimensão $\dim E^u$, transversal a $W_{Loc}^s(0)$ em um ponto $q \in W_{Loc}^s(0)$ e D_n^u a componente conexa de $f^n(D^u) \cap V$ que contém $f^n(q)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então D_n^u está εC^1 -próximo de B^u .*

Demonstração. Ver [78], página 90. $\square$

Definição A.2.7. *Dizemos que um ponto $x \in M$ é **não-errante** se para toda vizinhança U de x existe um inteiro n tal que*

$$f^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

*Denotamos por $\Omega(f)$ o conjunto dos pontos não errantes por f . Dizemos que f satisfaz o **Axioma A** se Ω é hiperbólico para f e $\Omega = \overline{\text{Per}(f)}$. Isto é, os pontos periódicos de f são densos em Ω .*

A.3 CRIAÇÃO DE ÓRBITAS HOMOCLÍNICAS E A FERRADURA DE SMALE

O comportamento global das variedades estáveis e instáveis $W^s(p)$ e $W^u(p)$ de um ponto fixo hiperbólico de sela p pode ser extremamente complexo. Por exemplo, em um sistema de tempo discreto genérico, as variedades podem se cruzar transversalmente, isto

é, em um ângulo não nulo. Uma única interseção transversal, se ocorrer, implica em um número infinito de interseções transversais. Devido à sua importância, temos a seguinte definição.

Definição A.3.1. *Seja p um ponto periódico hiperbólico de sela com período n para um difeomorfismo f . Sejam*

$$W^s(\mathcal{O}(p)) = \bigcap_{j=0}^{n-1} W^s(f^j(p)), \quad W^u(\mathcal{O}(p)) = \bigcap_{j=0}^{n-1} W^u(f^j(p))$$

$$\hat{W}^s(\mathcal{O}(p)) = W^s(\mathcal{O}(p)) \setminus \mathcal{O}(p), \quad \hat{W}^u(\mathcal{O}(p)) = W^u(\mathcal{O}(p)) \setminus \mathcal{O}(p).$$

Um ponto $q \in \hat{W}^s(\mathcal{O}(p)) \cap \hat{W}^u(\mathcal{O}(p))$ é chamado **ponto homoclínico** de p . Se $\hat{W}^s(\mathcal{O}(p))$ e $\hat{W}^u(\mathcal{O}(p))$ têm interseção transversal não vazia em q , dizemos que q é um **ponto homoclínico transversal**.

Suponha que q seja um ponto homoclínico de um ponto fixo de sela p . Assim, por definição, q pertence a ambas as variedades invariantes. Então, a órbita que começa nesse ponto converge para o ponto de sela p sob repetidas iterações de f ou f^{-1} . Obtemos, assim, uma sequência de pontos dada pelas iterações de forma que $f^k(q) \rightarrow p$ com $k \rightarrow \pm\infty$. Entretanto, note que essa sequência nunca pode alcançar p , uma vez que esse ponto é um ponto fixo. Além disso, cada ponto dessa órbita é um ponto de interseção de $W^s(p)$ e $W^u(p)$ uma vez que $f^k(q) \in W^s(p) \cap W^u(p)$ para todo k por definição. Esse número infinito de interseções faz com que as variedades se interceptem de maneira complexa se acumulando perto do ponto p devido ao λ -lema A.2.1. O desenho resultante é chamado de **emaranhado homoclínico** ou estrutura homoclínica de Poincaré.

Exemplo A.3.1. *Considere o sistema bidimensional*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-k)x + kx^2 + y \\ -kx + kx^2 + y \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

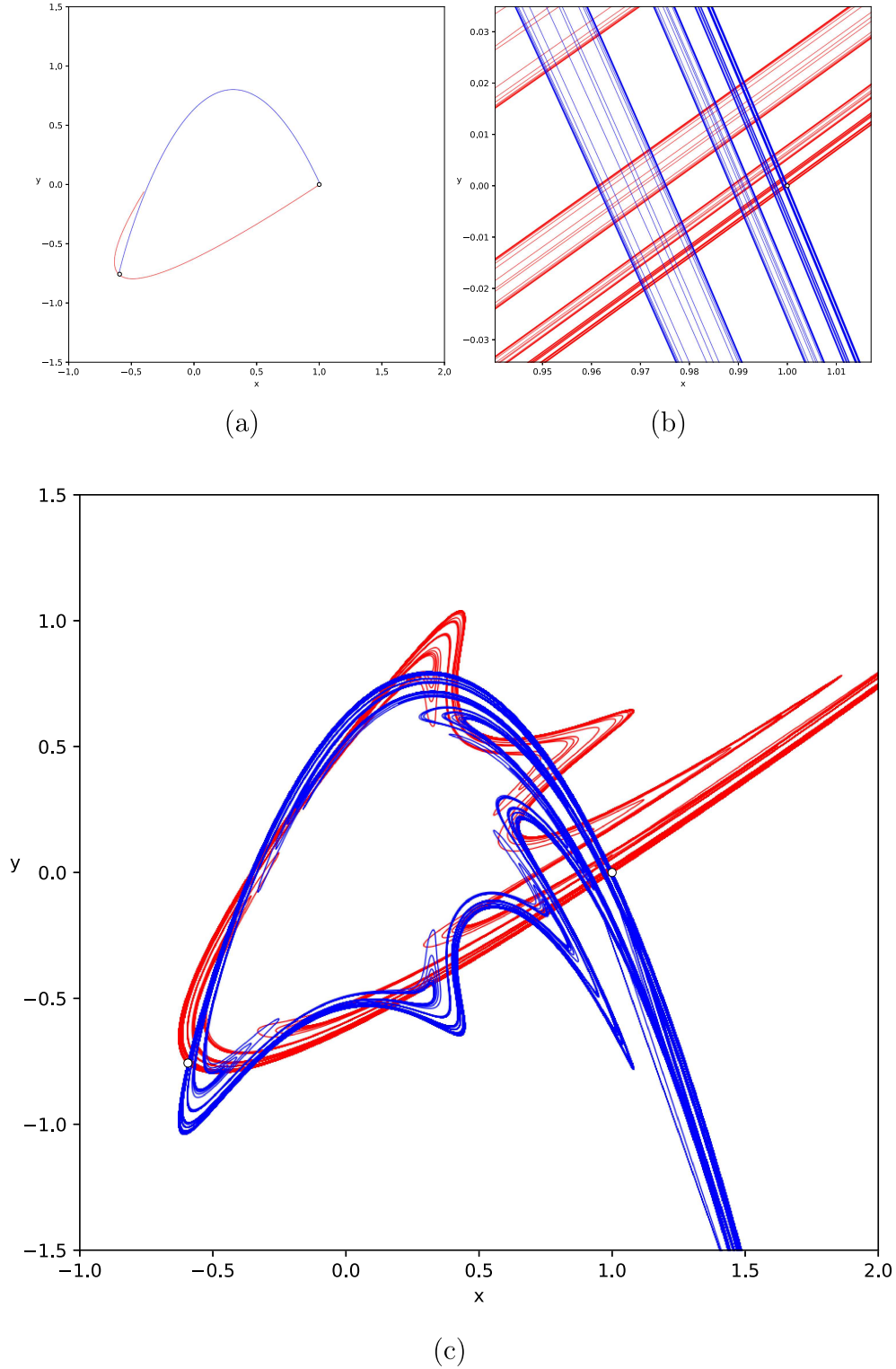
Fazendo $(x, y) = F(x, y)$ obtemos que o sistema (A.3) apresenta ponto fixo em $p = (1, 0)$, calculando a jacobiana nesse ponto obtemos:

$$DF_{(1,0)} = \begin{pmatrix} k+1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

Logo, os autovalores de Df em $(1, 0)$ são

$$\lambda_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4k}}{2} + 1 \quad e \quad \lambda_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4k}}{2} + 1$$

Figura 30 – Simulação não rigorosa das variedades estável, em azul, e instável, em vermelho, do ponto fixo hiperbólico p . — (a) Primeira interseção transversal entre $W^s(p)$ e $W^u(p)$. — (b) Acúmulo das orbitas perto do ponto fixo. — (c) Emaranhado homoclínico criado no sistema.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Notemos que para todo $k > 0$, $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ de modo que p é um ponto hiperbólico

de sela. Simulando não rigorosamente as variedades invariantes de (A.3) com $k = 1.6$, obtemos a Figura 30, ver Observação A.3.1.

A Figura 30 (a) mostra a primeira interseção q entre a variedade estável e instável, calculada numericamente como $q \approx (-0.593667, -0.756875)$ quando $k = 1.6$. A partir de então, a Figura 30 (c) mostra o emaranhado homoclínico decorrente do surgimento de inúmeros pontos homoclínicos transversais após q que se acumulam perto do ponto fixo hiperbólico p como mostra a Figura 30 (b) consequência do λ -lema, Lema A.2.1.

Observação A.3.1. Nesse trabalho, utilizamos uma versão adaptada para a linguagem de programação Python 3.8.20 do algoritmo SegPlot, apresentado em [102] em linguagem C. O algoritmo fornece uma aproximação não rigorosa das variedades invariantes de um sistema. Uma aproximação é considerada **rigorosa** se produzir órbitas arbitrariamente próximas das órbitas reais. Esse ajuste, através de um parâmetro ε , permite que a diferença entre a órbita simulada e a órbita real seja menor do que um pixel e, portanto, indistinguível.

Como as imagens das variedades invariantes, exibidas ao longo do texto, têm um papel apenas ilustrativo, isto é, nenhum argumento além de interpretações sobre a dinâmica é baseada nas imagens simuladas, não nos preocupamos em apresentar imagens rigorosas. Mesmo o SegPlot não produzindo tal aproximação arbitrária, esse algoritmo traça iterações com uma distância específica mínima entre os pontos para uma pequena reta na direção do autovetor instável da matriz jacobiana no estado estacionário. Conforme estabelecido pelo λ -Lema A.2.1, desta maneira, torna-se possível aproximar suficientemente bem segmentos finitos do conjunto instável.

Além disso, seguindo o procedimento descrito em [102] é possível modificar o algoritmo para que produza imagens rigorosas.

Teorema A.3.1. Seja q um ponto homoclínico para um ponto fixo hiperbólico p pelo difeomorfismo f . Então

$$\Lambda_q = \mathcal{O}(p) \cap \mathcal{O}(q)$$

é um conjunto invariante hiperbólico. Além disso, se V é uma vizinhança pequena o suficiente de Λ_q , então seu conjunto invariante maximal

$$\Lambda_V = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(V)$$

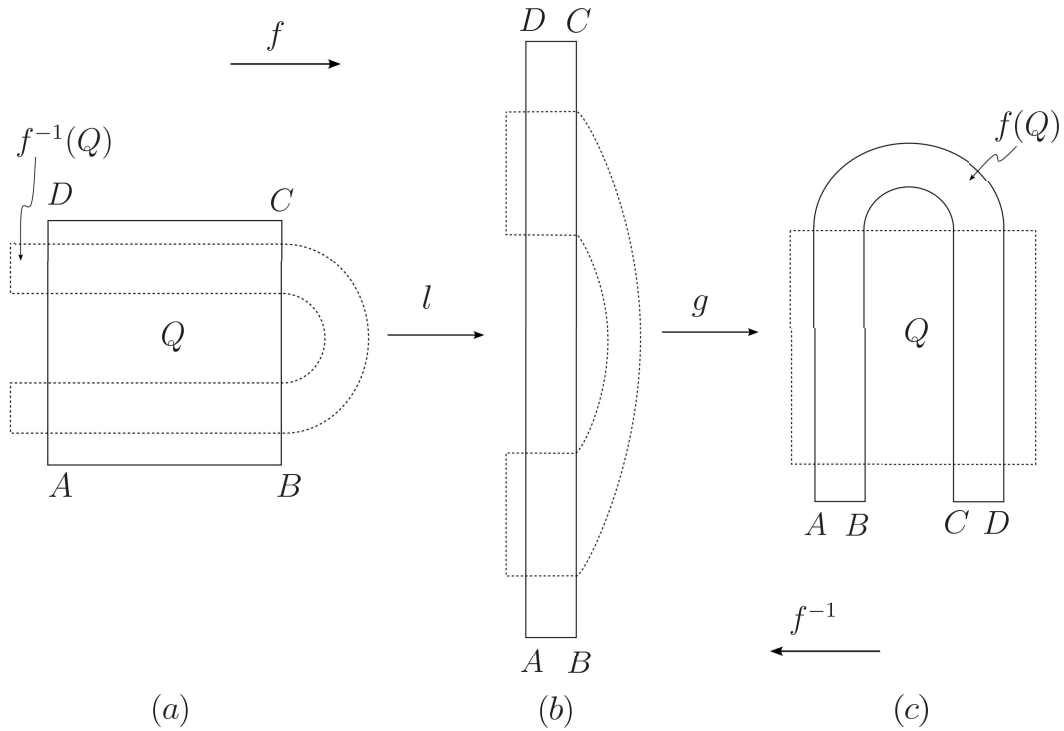
tem estrutura hiperbólica.

Demonstração. Ver [83], Teorema 4.5, página 286. □

Nosso próximo objetivo é descrever um difeomorfismo f que satisfaça o Axioma A, veja Definição A.2.7, a condição de transversalidade e tal que $\Omega(f)$ seja composto por um conjunto Ω_1 de nós instáveis, um conjunto Ω_3 de nós estáveis e um conjunto de Cantor Ω_3 invariante em que as selas periódicas sejam densas.

A maior contribuição nesse objetivo veio de Smale, que introduziu uma ideia topológica dessa aplicação e é um dos primeiros exemplos importantes com dinâmica caótica em um conjunto invariante, trata-se do **modelo geométrico da ferradura de Smale**. Considere uma aplicação $f = g \circ l : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$ composta por uma aplicação l que toma o quadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ no plano, contrai horizontalmente com um fator de compressão $0 \leq \lambda < 1/4$ e expande verticalmente com um fator de expansão $\mu < 4$, e uma aplicação g que entorta o retângulo $l(Q)$ em partes iguais formando uma ferradura F , como ilustrado na Figura 31.

Figura 31 – Em linha sólida, a descrição geométrica da aplicação f . Em pontilhado, na direção oposta, a descrição geométrica de f^{-1} .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

O formato exato da aplicação f não é relevante, mas podemos assumir por hipótese que f seja invertível e tanto f quanto sua inversa sejam diferenciáveis. Temos que $Q \cap f(Q) = V_1 \cap V_2$ tem duas componentes retangulares verticais V_1 e V_2 . Do mesmo modo, $Q \cap f^{-1}(Q) = H_1 \cap H_2$ tem duas componentes retangulares horizontais H_1 e H_2 . Assim, da definição de f podemos escrever $f(H_1) = V_1$ e $f(H_2) = V_2$, de onde segue que $f|_{H_1 \cup H_2}$ é um difeomorfismo linear e para todo $p \in H_1 \cup H_2$,

$$Df_p = \begin{pmatrix} a_p & 0 \\ 0 & b_p \end{pmatrix}$$

com $|a_p| = \lambda$ e $|b_p| = \mu$. Assim, como $Q \cap f(Q) = V_1 \cap V_2$ tem duas componentes retangulares, $Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) = V_{11} \cap V_{12} \cap V_{21} \cap V_{22}$ onde

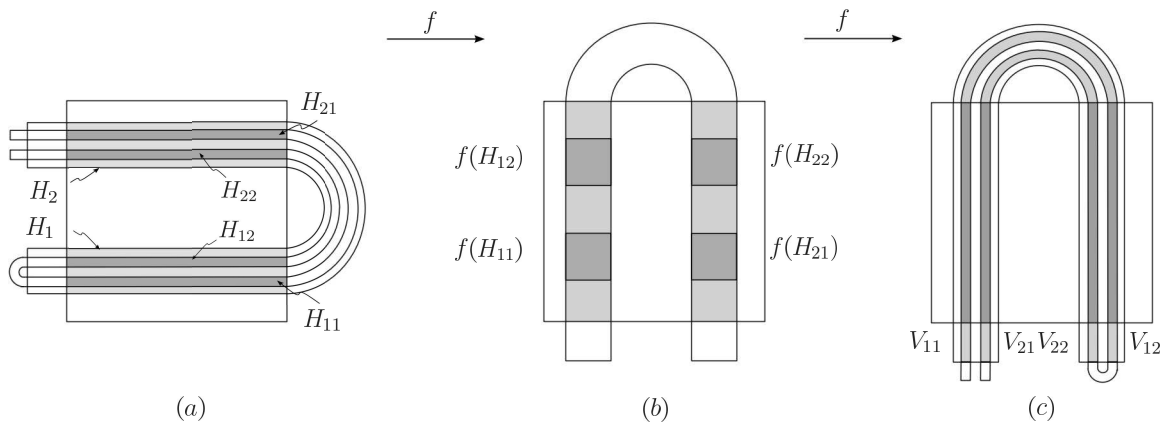
1. $f(V_1) \cap Q = V_{11} \cup V_{12}$ e $f(V_2) \cap Q = V_{21} \cup V_{22}$,
2. $V_{11} \subset V_1$ e $V_{12} \cap V_1 = \emptyset$,
3. $V_{22} \subset V_2$ e $V_{21} \cap V_2 = \emptyset$.

Em geral, $Q \cap (\bigcap_n f^n(Q)) = \bigcup_n V_{s_1, \dots, s_n}$ possui 2^n componentes retangulares verticais. Os índices $s_i \in \{1, 2\}$ dos retângulos são colocados de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

1. $V_{i, \dots, i} \subset V_i$, onde o primeiro conjunto tem n elementos
2. $V_{s_1, \dots, s_n, s_{n+1}} \subset f(V_{s_1, \dots, s_n})$
3. $V_{s_1, \dots, s_n, s_{n+1}} \subset V_{s_1, \dots, s_n}$ se $s_n = s_{n+1}$
4. $V_{s_1, \dots, s_n} \cap V_{s_1, \dots, s_n, s_{n+1}} = \emptyset$ se $s_n \neq s_{n+1}$.

A descrição acima para cada retângulo vertical V criado pelas iterações do difeomorfismo f também será adotada para os retângulos horizontais criados pelas iterações de f^{-1} . Assim, do mesmo modo que $f(H_s) = V_s$, teremos $f^n(H_{s_1, \dots, s_n}) = V_{s_1, \dots, s_n}$ e assim por diante, onde $s_i \in \{1, 2\}$ para todo $i \leq n$, como ilustra a Figura 32.

Figura 32 – H_{s_1, s_2} sendo iterado duas vezes por f .

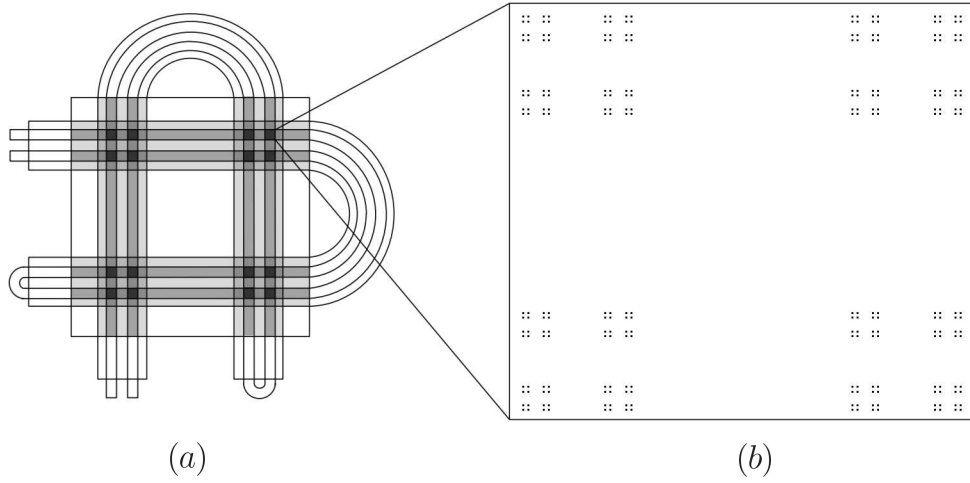


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Vamos considerar agora o conjunto Λ dos pontos que permanecem no quadrado Q após infinitas iterações de f^{-1} e f . Isto é,

$$\Lambda = \{x \in Q \mid f^n(x) \in S, \forall n \in \mathbb{Z}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q)$$

Figura 33 – (a): Os quadrados pretos representam a interseção $f^{-2}(Q) \cap f^{-1}(Q) \cap Q \cap f(Q) \cap f^2(Q)$ – (b): Aproximação iterada 5 vezes de um conjunto de cantor bidimensional, junto com a figura (a) representa os pontos em $\bigcap_{j=-7}^7 f^j(Q)$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Lema A.3.1. *Existe uma correspondência de um para um, dada pela aplicação $h : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$, entre pontos de Λ e as sequências bi-infinitas de dois símbolos que é uma conjugação topológica entre as aplicações $f|_\Lambda$ e σ , e podemos escrever*

$$h(f(x)) = \sigma(h(x)),$$

para todo $x \in \Lambda$.

Demonstração. Dado $x \in \Lambda$, para cada j existe $s_j \in \{1, 2\}$ tal que $f^j(x) \in H_{s_j}$. Tomamos, então, a sequência $s = \{\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots\}$ em Σ_2 e definimos a aplicação h como $h(x) = s$. Podemos definir sua inversa h^{-1} da seguinte maneira, a cada sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ em Σ_2 , associamos o ponto $x = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(H_{s_{-n}})$ em Λ . Vamos verificar que h^{-1} está de fato bem definida. Afirmamos que para cada $n > 0$ inteiro, $\bigcap_{j=1}^n f^j(H_{s_{-j}})$ é um retângulo com largura λ^n . De fato, quando $n = 1$ temos $f(H_{s_{-1}}) = V_{s_{-1}}$ que tem largura λ . Supondo válido para $n - 1$ temos

$$\begin{aligned} \bigcap_{j=1}^n f^j(H_{s_{-j}}) &= \bigcap_{j=2}^n f^j(H_{s_{-j}}) \cap f(H_{s_{-1}}) = f \left(\bigcap_{j=2}^n f^{j-1}(H_{s_{-j}}) \right) \cap f(H_{s_{-1}}) \\ &= f \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} f^j(H_{s_{-j-1}}) \right) \cap f(H_{s_{-1}}) \end{aligned}$$

como $\bigcap_{j=1}^{n-1} f^j(H_{s_{-j-1}})$ é um retângulo de largura λ^{n-1} , segue que $f(\bigcap_{j=1}^{n-1} f^j(H_{s_{-j-1}}))$ tem largura λ^n . Assim, fazendo n tender a $+\infty$, teremos que $\bigcap_{j=1}^\infty f^j(H_{s_{-j}})$ é uma linha vertical. Da mesma forma, $\bigcap_{j=-\infty}^0 f^j(H_{s_{-j}})$ é uma linha horizontal. De onde concluímos que $\bigcap_{j=-\infty}^\infty f^j(H_{s_{-j}})$ é um único ponto $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q) = \Lambda$ com $h(x) = s$. Além disso,

suponha que para um dado $x \in \Lambda$, $h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(s) = y$, então para cada inteiro j , $x, y \in f^j(H_{s_{-j}})$, logo $x = y = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} f^j(H_{s_{-j}})$.

Para mostrar que h é contínua, considere que uma vizinhança $\mathcal{V}$ aberta de $s = h(x)$ é dada na topologia de Σ_2 por

$$\mathcal{V}_{n_0} = \{(t_n)_{n \in \mathbb{Z}} \mid t_n = s_n \text{ para todo } -n_0 \leq n \leq n_0\}.$$

Então, dado n_0 , como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in \Lambda$ com $|y - x| \leq \delta$, $f^j(y) \in H_{s_j}$. Assim, dado $t = h(y)$, se $|x - y| \leq \delta$ então $t \in \mathcal{V}_{n_0}$ e h é contínua.

Para ver que h é um conjugação, tomamos $h(x) = s$ e $h(f(x)) = t$. Então para todo $j \in \mathbb{Z}$, $f^{j+1}(x) \in H_{s_{j+1}}$ e também $f^j(f(x)) = f^{j+1}(x) \in H_{t_j}$. Segue que $s_{j+1} = t_j$, ou ainda, $\sigma(s_j) = t_j$. Então concluímos que $\sigma(h(x)) = h(f(x))$. $\square$

Como consequência imediata do Lema A.3.1 temos o seguinte resultado.

Teorema A.3.2 (Smale). *A aplicação da ferradura f possui um conjunto invariante fechado Λ que contém um conjunto enumerável de órbitas periódicas de período arbitrariamente longo e um conjunto não enumerável de órbitas não periódicas que admite órbitas passando arbitrariamente próximas de qualquer ponto de Λ .*

Para mais detalhes sobre esse resultado, ver Robinson [83].

Nosso próximo objetivo será mostrar que todo ponto homoclínico transversal implica na existência de uma ferradura, permitindo assim, o estudo dessa parte da teoria ao mesmo tempo que evidencia a complexidade dinâmica de sistemas que admitem pontos homoclínicos. A formalização desse resultado pode ser estabelecida pelo seguinte teorema.

Teorema A.3.3. *Seja q um ponto homoclínico transversal para um ponto fixo hiperbólico p de um difeomorfismo f . Para cada vizinhança U de $\{p, q\}$ existe um inteiro N tal que f^N possui um conjunto invariante hiperbólico $\Lambda \subset U$ com $p, q \in \Lambda$ e no qual f^N é topologicamente conjugada à aplicação shift σ em $(\mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}}$. Assim,*

$$\Lambda \subset \overline{\text{Per}(f)} \subset \Omega(f).$$

Para demonstrar esse fato, vamos construir uma representação geométrica para o conjunto dos pontos invariantes de f^N . Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^2 de uma superfície M e $p \in M$ um ponto fixo de sela p . Assim $(Df)_p$ possui dois autovalores λ_1 e λ_2 com $0 < |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. Pelo Teorema A.2.2, $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são variedades de classe C^2 . Pelo Teorema A.2.1 de Hartman-Grobman, existe uma linearização C^1 em uma vizinhança U de p , dada pelas coordenadas (x_1, x_2) tal que

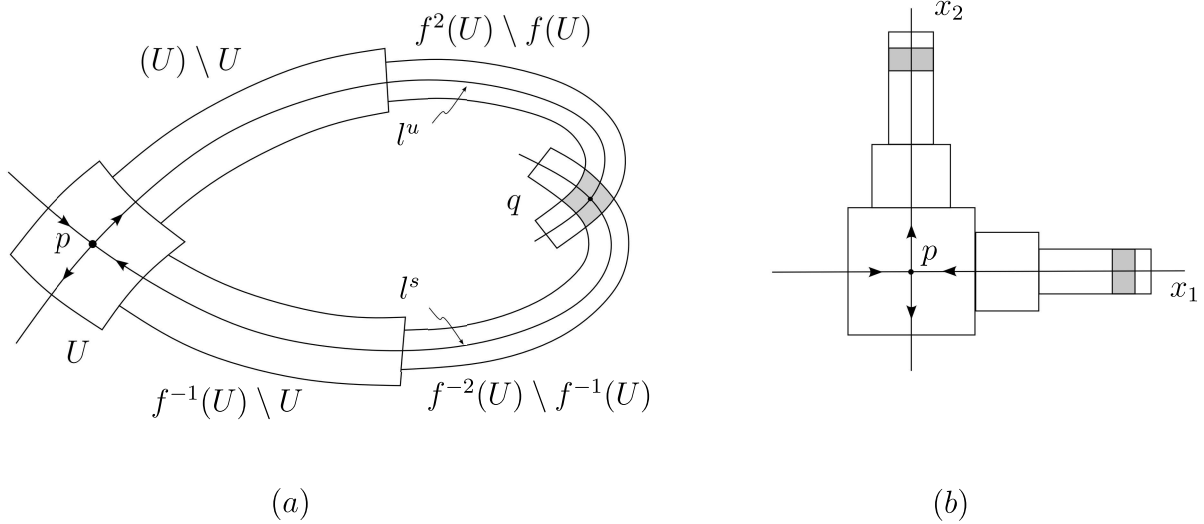
$$p = (0, 0) \quad e \quad f(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2).$$

Tomamos U de forma que a sua imagem nas coordenadas (x_1, x_2) seja o quadrado $(-1, 1) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$. Correspondendo os pontos de U com sua imagem em $\mathbb{R}^2$ se $f^{-1}([\lambda, 1) \times (-1, 1)) \cap U \neq \emptyset$ podemos estender o domínio à $f^{-1}([\lambda, 1) \times (-1, 1))$ usando as fórmulas

$$x_1 = \lambda_1^{-1} \cdot (x_1 \circ f), \quad x_2 = \lambda_2^{-1} \cdot (x_2 \circ f).$$

Repetindo esse argumento, é possível estender o domínio ao longo das variedades W^s e W^u . Seja q um ponto homoclínico transversal primário para p . Assim, os arcos l^s e l^u que ligam p à q formam uma curva fechada sem pontos duplos. Desse modo, a extensão do domínio dessa linearização fica bem definida através desses arcos a menos de uma vizinhança de q , onde ela fica duplamente definida, como indicado na Figura 34.

Figura 34 – (a) Dupla definição das coordenadas linearizadas em uma vizinhança um ponto homoclínico q . – (b) A representação dessa linearização em $\mathbb{R}^2$, as áreas sombreadas mostram os conjuntos que são equivalente à vizinhança do ponto q em (a).



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Agora, vamos nomear de R o retângulo obtido pela extensão de coordenadas contendo o arco l^s em $W^s(p)$;

$$R = \{-a_1 \leq x_1 \leq b_1, -a_2 \leq x_2 \leq b_2 \mid a_1, a_2, b_1, b_2 > 0\},$$

tal que tomando n e N suficientemente grandes com $0 < n < N$, temos

1. $R \cap f^n(R)$ é o retângulo contendo p .
2. $R \cap f^N$ consiste de duas componentes conexas, V_1 e V_2 , uma contendo p e outra contendo q como indicado na Figura 35 (a).
3. R é fino o bastante para que o subconjunto de R invariante sob f^N

$$\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{N \cdot i}(R) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{N \cdot i}(R \cap f^N(R)) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{N \cdot i}(V_1 \cup V_2)$$

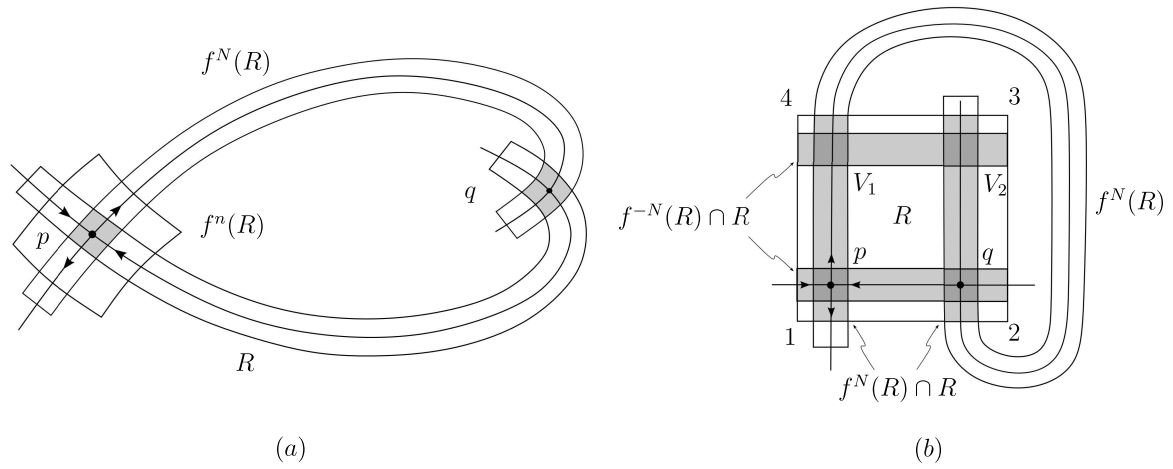
seja hiperbólico pelo Teorema A.3.1.

De fato, notemos que $\text{int } R$ é uma vizinhança para $\Lambda_q = \mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$. Sendo V a vizinhança de Λ_q fornecida pelo Teorema A.3.1, podemos tomar $R \subset V$ e N tal que

$$\left| \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right|^N \cdot A < \min(B, B').$$

Veja Palis e Takens [79] para mais detalhes.

Figura 35 – (a) Descrição geométrica de R , em cinza o conjunto $R \cap f^n(R)$. – (b) A figura (a) interpretada como uma ferradura.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Prova do Teorema A.3.3. Considere a aplicação $h : \Lambda \rightarrow (\mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}}$, que associa a cada $r \in \Lambda$ uma sequência (s_i) tal que $f^{N \cdot i}(r) \in V_{s_i}$.

Para a sobrejetividade, dado $(s_i) \in (\mathbb{Z}_2)_{\mathbb{Z}}$, podemos construir uma sequência de faixas verticais encaixadas dada por

$$S_0^{m-1} = \bigcap_{i=0}^{m-1} f^{N \cdot i}(V_{s_i}).$$

Notemos que para cada $r \in S_0^\infty$, $f^{N \cdot (-i)}(r) \in V_{s_{-i}}$, para $i \geq 0$. Similarmente, podemos construir uma sequência de faixas horizontais dada por

$$S_{-m}^{-1} = \bigcap_{i=-m}^{-1} f^{N \cdot i}(V_{s_i}).$$

De modo que para cada $r \in S_{-m}^{-1}$, $f^{N \cdot i}(r) \in V_{s_i}$, para $i \geq 1$. Combinando as interseções, obtemos um conjunto

$$S_{-m}^{m-1} = \bigcap_{i=-m}^{m-1} f^{N \cdot i}(V_{s_i}) \quad (\text{A.4})$$

Fazendo m tender à $+\infty$ temos $S_{-\infty}^\infty \neq \emptyset$. De fato, se existisse $k > 0$ tal que S_{-k}^k , a linha vertical contida em S_0^k ligando os lados $\overline{12}$ ao lado $\overline{34}$ do quadrado presente na Figura 35 e a linha horizontal contida em S_{-k}^{-1} ligando o lado $\overline{14}$ ao lado $\overline{23}$ do mesmo quadrado não poderia se intersectar, o que é absurdo uma vez que essas linhas estão no interior de R . Assim, obtemos o ponto $r \in \Lambda$ a partir da sequência (s_i) .

Além disso, o fato de h ser uma aplicação bijetora segue da construção de R que admite uma estrutura hiperbólica para o conjunto Λ pelo Teorema A.3.3. Considere δ_s o tamanho máximo da componente da variedade estável ligando p à q . Pelo Teorema A.2.2 existe uma constante $\nu > 1$ tal que

$$\|Df_\Lambda(e^u)\| \geq \nu \|e^u\|$$

$$\|Df_\Lambda(e^s)\| \leq \nu^{-1} \|e^s\|$$

onde e^s e e^u são vetores unitários respectivamente em $\mathbb{E}^s$ e $\mathbb{E}^u$. Assim, o diâmetro de cada bloco S_{-m}^m , entendido como o supremo das distâncias em $\mathbb{R}^2$ entre pontos de S_{-m}^m , é menor ou igual à $(2 \cdot \delta_s \cdot \nu^{-m})$. Assim, o diâmetro dos blocos tende à zero quando m tende a ∞ de onde concluímos que S_0^∞ e $S_{-\infty}^{-1}$ são retas e $S_{-\infty}^\infty$ contem um único ponto na interseção dessas retas.

Por argumentos semelhantes aos utilizados na demonstração do Lema A.3.1 segue a comutatividade de h com f^n e σ ; $h \circ f^N|_\Lambda = \sigma \circ h$. $\square$

Dessa forma, fica evidente que a complexidade dinâmica, decorrente da presença de pontos homoclínicos transversais no sistema, deve-se ao fato de f apresentar um conjunto invariante que contém uma quantidade enumerável de pontos periódicos com período tão grande quanto se queira, de acordo com o Teorema de Smale A.3.2. Quando consideramos um difeomorfismo f que varia continuamente com relação a um parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$ é possível que para diferentes valores desse parâmetro o sistema definido por f apresente ou não pontos homoclínicos transversais. Como a variação de μ é contínua, na mudança de um sistema livre de pontos homoclínicos para um sistema que exhibe pontos homoclínicos deve existir um valor de μ onde as variedades se tocam sem se cruzarem. Essa é a ideia de uma tangência homoclínica, apresentada abaixo, que será muito importante ao longo do texto.

Definição A.3.2. *Considere uma família de aplicações (f_μ) em um parâmetro com um ponto fixo de sela dependendo do parâmetro μ , p_μ . Dizemos que f_μ exhibe **tangência homoclínica** quando as variedades estável e instável de p_μ se tangenciam em um ponto diferente de p_μ . Dizemos que f_μ exhibe uma **bifurcação homoclínica**, associada ao ponto p_μ , em $\mu = \mu_0$ se*

1. Para algum $\mu < \mu_0$, $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ não tem pontos de interseção.
2. Para $\mu = \mu_0$, $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ apresentam pontos de tangência homoclínica.

3. Para algum $\mu > \mu_0$, $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ tem pontos de interseção transversal.

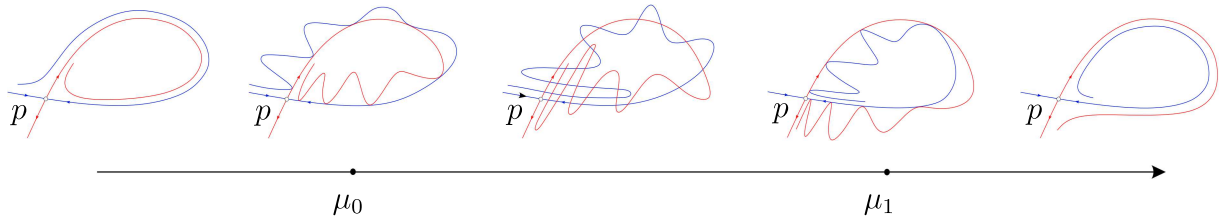
ou se

1. Para algum $\mu < \mu_0$, $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ tem pontos de interseção transversal.

2. Para $\mu = \mu_0$, $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ apresentam pontos de tangência homoclínica.

3. Para algum $\mu > \mu_0$, $W^s(p_\mu)$ e $W^u(p_\mu)$ não tem pontos de interseção.

Figura 36 – Bifurcações homoclínicas para aplicações. Em μ_0 o sistema apresenta uma tangência homoclínica responsável pelo surgimento de orbitas homoclínicas transversais. Em μ_1 o sistema sofre outra bifurcação homoclínica responsável pelo desaparecimento das órbitas homoclínicas transversais criadas em μ_0 .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando a variedade estável associada a um ponto periódico hiperbólico intersecta a variedade instável de um ponto periódico hiperbólico diferente do primeiro, um novo ponto é gerado naquela região de interseção, e tal ponto é normalmente designado como ponto heteroclínico.

Definição A.3.3. Sejam p_1 e p_2 dois pontos periódicos hiperbólicos de período n para um difeomorfismo f . Sejam

$$\hat{W}^s(\mathcal{O}(p_1)) = W^s(\mathcal{O}(p_1)) \setminus \mathcal{O}(p_1), \quad \hat{W}^u(\mathcal{O}(p_2)) = W^u(\mathcal{O}(p_2)) \setminus \mathcal{O}(p_2).$$

Um ponto $q \in \hat{W}^s(\mathcal{O}(p_1)) \cap \hat{W}^u(\mathcal{O}(p_2))$ é chamado **ponto heteroclínico** de p_1 e p_2 . Se $\hat{W}^s(\mathcal{O}(p_1))$ e $\hat{W}^u(\mathcal{O}(p_2))$ têm interseção transversal não vazia em q , dizemos que q é um **ponto heteroclínico transversal**.

Ao contrário de um ponto homoclínico transversal, o surgimento de um ponto heteroclínico transversal entre diferentes pontos fixos hiperbólicos de sela não assegura por si só a ocorrência de dinâmicas complexas. Entretanto, quando existe um conjunto de tais pontos que possuam a configuração geométrica adequada, pode-se concluir que dinâmicas complexas estão presentes.

O caso mais importante é a existência de pontos homoclínicos em uma órbita periódica. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, um difeomorfismo com uma órbita periódica de sela com

período k dada por $\{p_0, p_1, \dots, p_{k-1}\}$ de modo que $f(p_i) = f(p_{i+1}) \pmod{k}$. Se houver uma interseção heteroclínica entre as variedades estável $W^s(p_i)$ de p_i com a variedade instável $W^u(p_j)$ de p_j com $j - i = t > 0$, então $W^s(p_j)$ e $W^u(p_{j+t})$ também se intersectam e assim por diante. Assim, obtemos um ciclo heteroclínico com período l tal que $l \cdot t$ é um múltiplo de k . Se a interseção entre $W^s(p_i)$ e $W^u(p_j)$ for transversal, então todas as outras no ciclo de período l serão. Pelo λ -lema, Lema A.2.1, $W^s(p_i)$ se acumula em $W^s(p_j)$ e assim intersecta $W^u(p_{j+t})$ transversalmente, dessa forma $W^s(p_i)$ se acumula em $W^s(p_{j+t})$ e assim intersecta $W^u(p_{j+2t})$ transversalmente. Esse processo continua até que $W^s(p_i)$ intersecte transversalmente $W^u(p_i)$ gerando um ponto homoclínico transversal associado a cada ponto fixo no ciclo. Portanto, nesse caso, dinâmicas equivalentes ao shift estarão presentes nas proximidades de um ciclo heteroclínico transversal.

A.4 BIFURCAÇÕES LOCAIS

Considere uma família de sistemas dinâmicos

$$x_{t+1} = f(x_t, \mu) = f_\mu(x_t), \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (\text{A.5})$$

onde $f_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dependendo de um parâmetro real $\mu \in \mathbb{R}$.

Definição A.4.1. *O sistema dinâmico definido em (A.5) é dito **estruturalmente estável** para $\mu = \mu_0$ se existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo μ_1 com $|\mu_1 - \mu_0| < \varepsilon$, existe uma conjugação topológica entre os sistemas dinâmicos $f(x_t, \mu_0)$ e $f(x_t, \mu_1)$. Se o sistema dinâmico (A.5) não é estruturalmente estável para $\mu = \mu_0$, dizemos que esse sistema tem uma **bifurcação** no parâmetro μ e dizemos que μ_0 é um **ponto crítico** ou **ponto de bifurcação**.*

Assim, uma bifurcação ocorre sempre que a variação de um dos parâmetros induz uma mudança qualitativa das órbitas do sistema. O conjunto de pontos de bifurcação divide o espaço de parâmetros em diferentes regiões que são caracterizadas pelo mesmo comportamento qualitativo.

O surgimento de uma bifurcação local está relacionado com os pontos fixos do sistema. De fato, se algum ponto fixo for alterado durante a variação do parâmetro μ , então as trajetórias associadas à esse ponto fixo também o serão. Portanto, se o sistema A.5 apresenta um valor $\mu = \mu_0$ para o qual essa mudança ocorra, então toda vizinhança desse valor no espaço de parâmetros contém um μ_1 para o qual uma conjugação topológica não pode existir.

Nos casos mais simples, o espaço de parâmetros é dividido em um número finito de regiões em $\mathbb{R}^n$. Por definição, em cada região, os espaços de fases são topologicamente equivalentes. Essas regiões são separadas por fronteiras de bifurcação, que são subvariedades suaves em $\mathbb{R}^n$, isto é, curvas, superfícies ou variedades. Por exemplo, as bifurcações

apresentadas na Figura 37 (a) e (b) dividem o espaço de parâmetros, nesse caso a reta real, em duas semirretas.

As fronteiras de bifurcação podem se intersectar subdividindo as regiões em sub-regiões e assim por diante. A codimensão de uma bifurcação no sistema $f_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ é a diferença entre a dimensão do espaço de parâmetros e a dimensão da correspondente fronteira de bifurcação. Assim, a codimensão é o número de condições independentes que determinam a bifurcação. Para esse trabalho, são importantes as bifurcações de codimensão 1 e 2 devido ao número de parâmetros influenciando na bifurcação. Consequentemente, concentraremos nossa atenção nesses casos.

Considere x_0 um ponto fixo hiperbólico de (A.5) para o qual a matriz jacobiana Df_{x_0} possui n autovalores, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, que podemos considerar como funções contínuas do parâmetro μ . O Teorema A.1.2 implica que mudanças de estabilidade do ponto fixo x_0 só podem ocorrer se, para algum valor crítico μ_0 , esse ponto deixar de ser hiperbólico. Isto é, se um dos autovalores, digamos $\lambda_1(\mu_0)$, tiver valor absoluto igual a 1, indicando que está deixando ou entrando no círculo unitário no plano complexo com a variação do parâmetro μ . De maneira geral, para bifurcações de codimensão 1, há três formas principais pelas quais a condição de hiperbolicidade pode ser alterada. Quando o autovalor λ_1 passa pelo círculo unitário por valores reais $+1$ ou -1 ou por valores complexos.

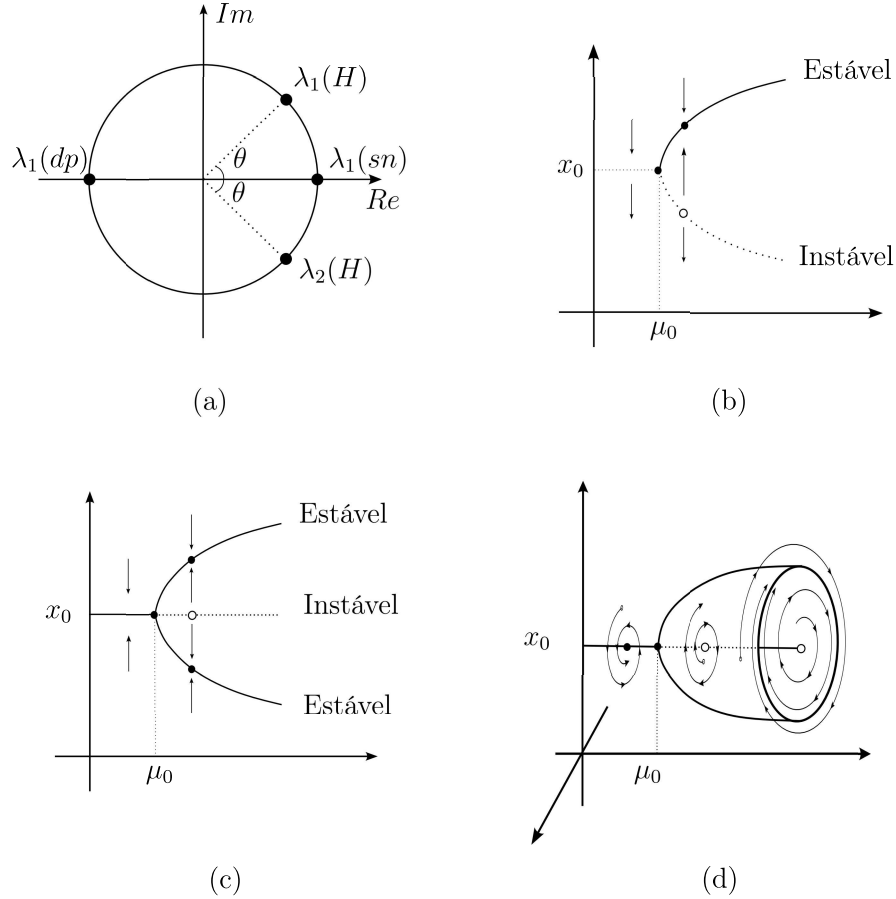
Definição A.4.2.

1. A bifurcação associada ao aparecimento de $\lambda_1(\mu_0) = +1$ é chamada de **bifurcação sela-nó**.
2. A bifurcação associada ao aparecimento de $\lambda_1(\mu_0) = -1$ é chamada de **bifurcação de duplicação de período**.
3. A bifurcação correspondente à presença de $\lambda_1(\mu_0), \lambda_2(\mu_0) = e^{\pm i\theta}$, $0 < \theta < \pi$, é chamada de **bifurcação de Hopf** (ou de *Neimark-Sacker*).

Observe que as bifurcações sela-nó e duplicação de período são possíveis se $n \geq 1$, mas para que ocorra a bifurcação de Hopf é necessário que $n \geq 2$. Nesse caso, há dois autovalores com valor absoluto igual a 1, pois o conjugado complexo $e^{-i\theta}$ também é necessariamente um autovalor. Naturalmente, pode acontecer que vários autovalores tenham valor absoluto igual a 1 simultaneamente em configurações diferentes das listadas acima, mas esses casos são atípicos em sistemas com um parâmetro.

Duas técnicas fundamentais para a análise de bifurcações em sistemas discretos são a redução à variedade central, que permite diminuir a dimensão do sistema para a dimensão de sua variedade central, e a equivalência topológica local do sistema com a chamada forma normal de Poincaré para o mesmo; esta torna possível reescrever o sistema original em sua forma mais simples.

Figura 37 – (a) *Círculo unitário no plano complexo indicando algumas das possíveis configurações de autovalores para que um ponto fixo deixe de ser hiperbólico.* – (b) *Diagrama de bifurcação para a bifurcação sela-nó.* – (c) *Diagrama de bifurcação para a bifurcação de duplicação de período.* – (d) *Diagrama de bifurcação para a bifurcação de Hopf.*



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

No que se segue, buscamos analisar as três bifurcações de codimensão 1, assim como os casos de ressonância forte de ordem dois e quatro. Essa seção é uma apresentação simples de resultados que tornam essa análise possível, portanto, não apresentaremos nenhuma demonstração, sendo o leitor direcionado às referências [58], [59], [83] e [35] nas quais essa seção é fortemente baseada.

A.4.1 Variedade central e Forma Normal

Considere uma aplicação suave da forma

$$f : x \mapsto Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.6})$$

onde A é uma matriz $n \times n$ inversível e $F(x) = O(x^2)$ é uma função polinomial com grau maior ou igual a 2. Mais geralmente, denotamos uma função polinomial com grau maior ou igual a n por $O(x^n)$. Esta aplicação possui um ponto fixo em $x = 0$, e gostaríamos de estudar a estrutura das órbitas próximas à origem. Agora, suponha que $x = 0$ seja um

ponto fixo não hiperbólico, de modo que, em geral, existam $n_c > 0$ autovalores críticos de A satisfazendo $|\lambda| = 1$, n_s autovalores estáveis com $|\lambda| < 1$, e n_u autovalores instáveis com $|\lambda| > 1$. Contando esses autovalores com suas multiplicidades algébricas, temos $n_c + n_s + n_u = n$.

Sejam E^c , E^s e E^u os espaços invariantes generalizados de A correspondentes aos autovalores críticos, estáveis e instáveis, respectivamente. A seguinte decomposição em soma direta é válida:

$$\mathbb{R}^n = E^c \oplus E^s \oplus E^u. \quad (\text{A.7})$$

Tendo em vista a decomposição (A.7), a aplicação (A.6) é linearmente equivalente à aplicação

$$\begin{pmatrix} \xi \\ u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_0\xi + F_0(\xi, u, v) \\ A_1u + F_1(\xi, u, v) \\ A_2v + F_2(\xi, u, v) \end{pmatrix},$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^{n_c}$ são coordenadas em E^c , $u \in \mathbb{R}^{n_s}$ são coordenadas em E^s e $v \in \mathbb{R}^{n_u}$ são coordenadas em E^u .

Teorema A.4.1 (Teorema da Variedade Central). *Seja x_μ um ponto fixo de f_μ que é não hiperbólico quando $\mu = \mu_0$. Para μ suficientemente próximo de μ_0 , existe uma família de variedades invariantes W_μ^c , que depende de forma diferenciável de μ , tal que $W_{\mu_0}^c$ é tangente ao espaço próprio associado aos autovalores não hiperbólicos em $\mu = \mu_0$. Assim, variedade W_0^c pode ser representada localmente como o gráfico de uma aplicação suave*

$$H : \mathbb{R}^{n_c} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_u}, \quad H(0) = 0, \quad H_\xi(0) := DH(0) = 0.$$

Demonstração. Ver Robinson [83], Teorema 10.15, página 200. □

Chamamos W_μ^c de **Variedade Central** que, portanto, não é única.

A complexidade completa de uma bifurcação é preservada se a aplicação f for restrita à variedade central W_μ^c .

Teorema A.4.2 (Princípio de Redução). *Em uma vizinhança da origem, a aplicação (A.6) é topologicamente equivalente à*

$$\begin{pmatrix} \xi \\ u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_0\xi + H(\xi, H(\xi)) \\ A_1u \\ A_2v \end{pmatrix}$$

Demonstração. Ver [59]. □

Para o restante da seção, estabelecemos a seguinte notação. Assumindo que f é suficientemente suave, escrevemos sua expansão de Taylor em torno de x_0 em $\mu = \mu_0$ como

$$f(x_0 + x, \mu_0) = x_0 + Ax + B(x, x) + C(x, x, x) + \cdots,$$

onde todas as funções são formas multilineares de seus argumentos, e os pontos indicam termos de ordem superior em x . Os componentes das funções multilineares B e C são dados por

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i(x_0, \mu_0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} x_j y_k, \quad C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3 f_i(x_0, \mu_0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} x_j y_k z_l, \quad (\text{A.8})$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Denotamos por I_n a matriz identidade $n \times n$ e $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, onde $\langle u, v \rangle = \bar{u}^T v$ é o produto interno padrão em $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$.

Quando analisamos uma aplicação suave próxima a um ponto fixo, como a restrição de uma aplicação a sua variedade central, é possível simplificar sua forma usando transformações não lineares. Um método sistemático que permite simplificar ao máximo a expansão de Taylor dessa aplicação é chamado de **normalização de Poincaré**. Vamos fornecer uma breve explicação da ideia. Uma exposição completa pode ser encontrada em [59]. Nesse contexto, é muito importante a ideia de relação de ressonância entre autovalores.

Definição A.4.3. *Dada uma aplicação $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ expressa em forma de série de Taylor como*

$$F(x) = Ax + B(x, x) + C(x, x, x) + \dots$$

*dizemos que os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ do operador linear A são **ressonantes** se entre eles existir um autovalor λ_s cumprindo uma relação da forma*

$$\lambda_s = \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{m_n}, \quad m_k \geq 0, \sum m_k \geq 2. \quad (\text{A.9})$$

*Essa relação é chamada de **ressonância** e o número $\sum m_k$ é chamado **ordem** da ressonância.*

Considere o espaço linear H_k , que é composto por funções vetoriais cujos componentes são polinômios homogêneos de grau k . Agora, suponha uma aplicação suave da forma:

$$x \mapsto Ax + f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x) + \dots, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.10})$$

onde $f^{(k)} \in H_k$ para $k \geq 2$. Vamos introduzir novas coordenadas, $y \in \mathbb{R}^n$, por meio da substituição:

$$x = y + h^{(m)}(y), \quad (\text{A.11})$$

em que $h^{(m)}$ é uma função, inicialmente arbitrária, em H_m , com $m \geq 2$ fixo. Essa substituição é próxima da identidade em uma vizinhança da origem e, portanto, é localmente invertível, com a transformação inversa dada por:

$$y = x - h^{(m)}(x) + O(\|x\|^{m+1}),$$

que também é uma função suave. Nas novas coordenadas y , a aplicação (A.10) pode ser reescrita como:

$$y \mapsto Ay + \sum_{k=2}^{m-1} f^{(k)}(y) + [f^{(m)}(y) - (M_A h^{(m)})(y)] + O(\|y\|^{m+1}), \quad (\text{A.12})$$

onde o operador linear M_A é definido como,

$$(M_A h)(y) = h(Ay) - Ah(y).$$

É importante notar que, se $h \in H_m$, então $M_A h \in H_m$ para todo $m \geq 2$.

Na nova forma (A.12), os termos de ordem inferior a m são iguais aos da forma original (A.10). Porém, os termos de ordem m mudam e sua diferença de $f^{(m)}(y)$ é $-(M_A h^{(m)})(y)$. Para remover os termos de ordem m , estabelecemos a **equação homológica linear** em H_m :

$$M_A h^{(m)} = f^{(m)}.$$

Se $f^{(m)}$ pertence à imagem de $M_A(H_m)$, então existe uma solução $h^{(m)}$ para a equação homológica acima. Isso significa que existe uma transformação (A.11) capaz de eliminar todos os termos homogêneos de ordem m na aplicação original (A.10). No entanto, em geral, $f^{(m)}$ pode ser decomposto como:

$$f^{(m)} = g^{(m)} + r^{(m)},$$

onde $g^{(m)} \in M_A(H_m)$ e $r^{(m)}$ pertencem a um complemento $H_m^\perp$ de $M_A(H_m)$ no espaço H_m . Assim, apenas a parte $g^{(m)}$ de $f^{(m)}$ pode ser eliminada pela transformação (A.11). Os termos restantes, $r^{(m)}$, são conhecidos como **termos ressonantes** de ordem m . Um termo ressonante ocorre quando há uma relação de ressonância, expressa por (A.9). Nesse caso, o monômio correspondente não pertence à imagem de M_A . Assim, ele define um termo ressonante. Além disso, como o complemento $H_m^\perp$ não é único, os termos ressonantes também não são definidos de maneira única.

O procedimento de eliminação descrito pode ser aplicado iterativamente para $m = 2, 3, 4, \dots$. Como resultado, obtemos o seguinte teorema, originalmente desenvolvido por Poincaré.

Teorema A.4.3 (Forma Normal de Poincaré). *Dado um sistema dinâmico suave, é possível realizar uma mudança de coordenadas polinomial da forma:*

$$x = y + h^{(2)}(y) + h^{(3)}(y) + \dots + h^{(m)}(y), \quad h^{(k)} \in H_k,$$

que transforma a aplicação

$$x \mapsto Ax + f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.13})$$

em um novo sistema dinâmico equivalente, escrito como

$$y \mapsto Ay + r^{(2)}(y) + r^{(3)}(y) + \cdots + r^{(m)}(y) + O(\|y\|^{m+1}), \quad (\text{A.14})$$

onde cada $r^{(k)}$ contém apenas os termos ressonantes de ordem k , isto é, $r^{(k)} \in H_k^\perp$ para $k = 2, 3, \dots, m$.

Demonstração. Ver [59] e [58]. □

O sistema (A.14) é chamado de **forma normal de Poincaré** do sistema original (A.13). Esse resultado também é válido para o caso complexo, quando $x, y \in \mathbb{C}^n$ e a matriz A possui n autovalores distintos. Neste caso, as mesmas ideias podem ser aplicadas para obter a forma normal.

A.4.2 Bifurcação Sela-Nó

Teorema A.4.4 (Bifurcação Sela-Nó). *Considere um sistema unidimensional definido pela aplicação*

$$x \mapsto f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \quad (\text{A.15})$$

de classe C^r em ambas as variáveis, com $r \geq 2$. Seja x_0 o ponto fixo do sistema quando $\mu = \mu_0$ tal que a derivada de f em x_0 é $f'(x_0, \mu_0) = 1$. Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\text{A1. } \alpha = \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0,$$

$$\text{A2. } b(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \neq 0.$$

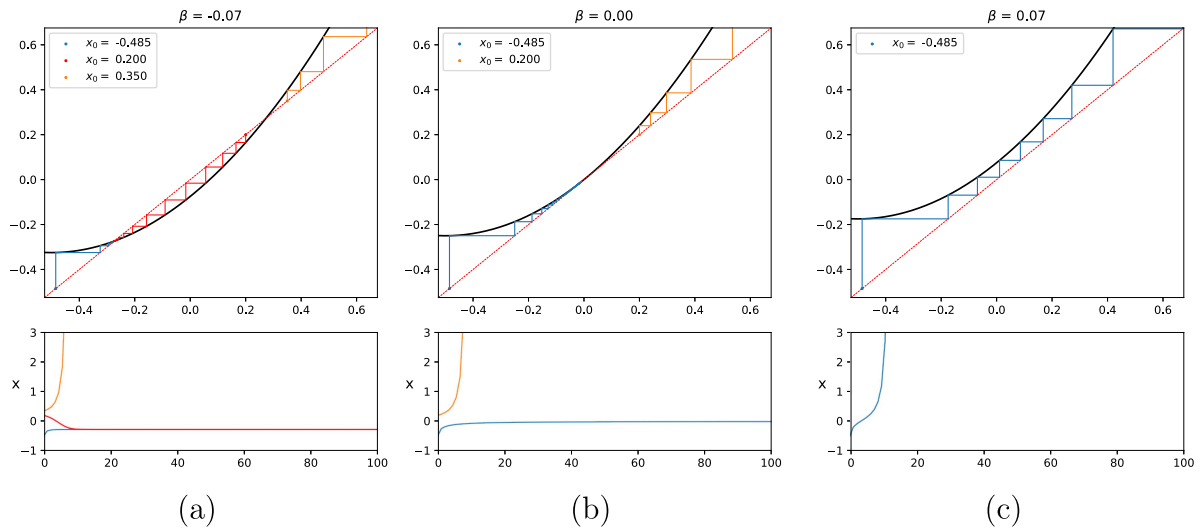
Então, existem intervalos I contendo x_0 e N contendo μ_0 e uma função C^r , $m : I \rightarrow N$, tais que $f(x, m(x)) = x$, $m(x_0) = \mu_0$, com derivadas satisfazendo, $m'(x_0) = 0$ e $m''(x_0) = -b(0)/\alpha \neq 0$. E ainda, o gráfico de m , chamado **diagrama da bifurcação sela-nó**, contém todos os pontos fixos em $I \times N$. Esses pontos fixos são atrativos de um lado de x_0 e repulsivos do outro. Além disso, existe uma mudança de parâmetros, respectivamente η e β , que transforma o sistema (A.15) em

$$\eta \mapsto \beta + \eta \pm \eta^2 + O(\|\eta^3\|)$$

onde o sinal do termo quadrático é definido pelo sinal do coeficiente $b(0)$.

Demonstração. Ver [83], Teorema 1.1 e [59], Teorema 4.1. □

Figura 38 – Simulações do diagrama cobweb para a forma normal $\eta \mapsto \beta + \eta + \eta^2$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

No diagrama, a localização dos pontos fixos é representada como uma função do parâmetro μ , o ramo de pontos fixos estáveis é indicado pela curva sólida, enquanto a curva tracejada indica a localização dos pontos fixos instáveis. Em $\mu = 0$, os dois ramos se encontram e há exatamente um ponto fixo; para $\mu < 0$, não há pontos fixos.

Após introduzir novas variáveis apropriadas, a restrição à variedade central unidimensional associada assume a forma

$$\eta \mapsto \beta + \eta + b(\beta)\eta^2 + O(\eta^3). \quad (\text{A.16})$$

De fato, é suficiente considerar a forma normal

$$\eta \mapsto \beta + \eta + b(\beta)\eta^2. \quad (\text{A.17})$$

Essa afirmação pode ser demonstrada verificando, através de uma conjugação, que a família (A.17) possui basicamente a mesma dinâmica que (A.16). Para resultados nesse sentido, ver Kuznetsov [59] e [58].

A.4.3 Bifurcação de duplicação de período

Teorema A.4.5 (Bifurcação de Duplicação de Período). *Considere um sistema unidimensional definido pela aplicação*

$$x \mapsto f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \quad (\text{A.18})$$

de classe C^r em ambas as variáveis, com $r \geq 3$. Seja x_0 o ponto fixo do sistema quando $\mu = \mu_0$ e a derivada de f_{μ_0} em x_0 é $f'(x_0, \mu_0) = -1$. Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(B1.) A derivada de $f_\mu(x(\mu))$ em relação a μ é diferente de zero (a derivada varia ao longo da família de pontos fixos):

$$\alpha = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] \bigg|_{(x_0, \mu_0)} \neq 0.$$

(B2.) O gráfico de $f_{\mu_0}^2$ possui termo cúbico diferente de zero em sua tangência com a diagonal (o termo quadrático é zero):

$$c(0) = \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, \mu_0) \right)^2 + \left(\frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, \mu_0) \right) \neq 0. \quad (\text{A.19})$$

Então, existe uma curva diferenciável de pontos fixos, $x(\mu)$, passando por x_0 em μ_0 , de forma que a estabilidade do ponto fixo muda em μ_0 . O lado em que x_0 é atrator depende do sinal de α . Há também uma curva diferenciável γ passando por (x_0, μ_0) de modo que $\gamma \setminus \{(x_0, \mu_0)\}$ é a união da órbita hiperbólica de período 2. A curva γ é tangente à reta $R \times \{\mu_0\}$ em (x_0, μ_0) , então γ é o gráfico de uma função de $x, \mu = m(x)$ com $m(x_0) = 0$ e $m'(x_0) = -2c(0)/\alpha = 0$. Chamamos γ de **diagrama de bifurcação de duplicação de período**. O tipo de estabilidade da órbita de período 2 depende do sinal de $c(0)$, de modo que, se $c(0) > 0$, então a órbita de período 2 é atratora e se $c(0) < 0$ é repulsora. Além disso, existe uma mudança suave e invertível de coordenadas e parâmetros, respectivamente η e β , transformando o sistema (A.18) em,

$$\eta \mapsto -(1 + \beta)\eta \pm \eta^3 + O(\eta^4). \quad (\text{A.20})$$

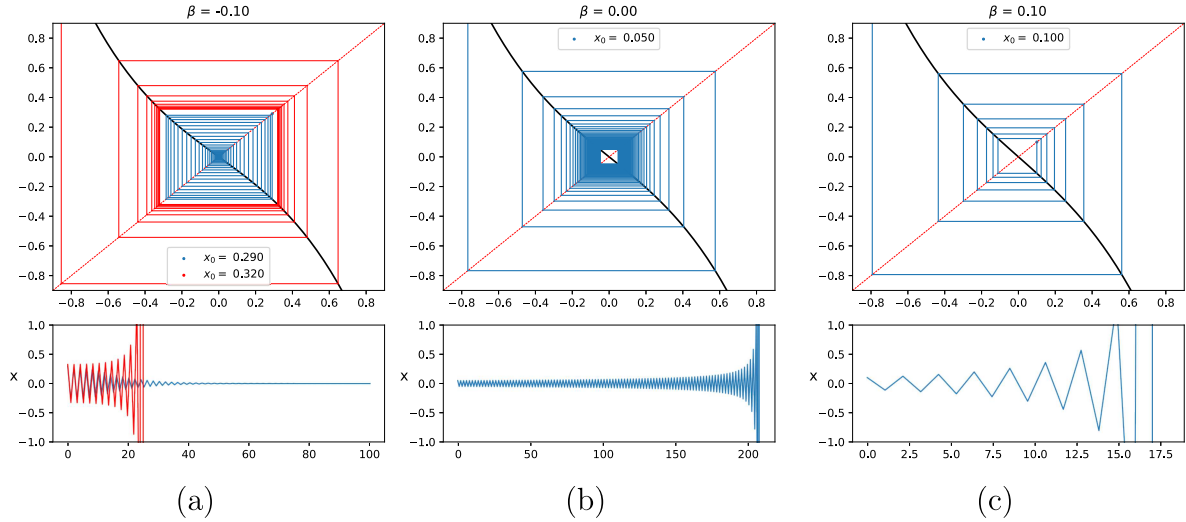
onde o sinal do termo ao cubo é definido pelo sinal de $c(0)$.

Demonstração. Ver [83], Teorema 3.1, página 244 e [59] Teorema 4.3, página 140.

□

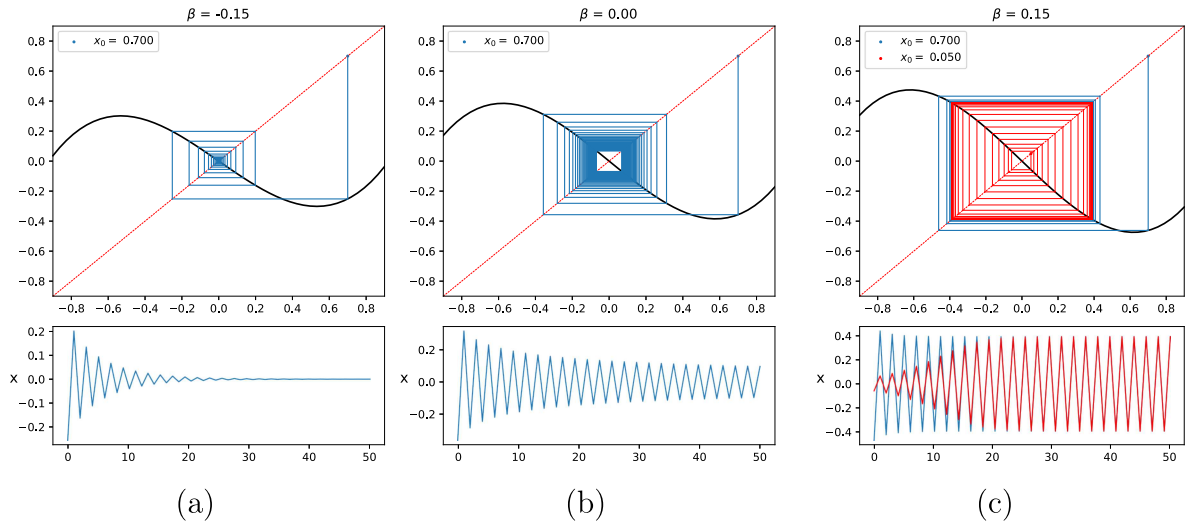
Uma ilustração do diagrama de bifurcação para a duplicação de período é apresentada na Figura 37 (c). A equação (A.20) define a forma normal para a duplicação de período, assim, o Teorema implica que todo sistema unidimensional sofrendo uma bifurcação desse tipo é topologicamente equivalente ao sistema definido por (A.20). Dessa forma é possível ilustrar numericamente como o sinal de $c(0)$ influencia na estabilidade do ciclo de período 2 criado na bifurcação, veja as figuras 39 e 39. Dizemos que a bifurcação é **supercrítica** se $c(0) > 0$ e **subcrítica** se $c(0) < 0$.

Figura 39 – Diagrama cobweb do sistema $\eta \mapsto -(1 - \beta)\eta - \eta^3$ com β passando pelo ponto crítico $\beta_0 = 0$. Cores diferentes representam orbitas de soluções iniciais diferentes. A simulação da série da evolução temporal de η plotada abaixo é interrompida quando o valor de $|\eta_t|$ ultrapassa 100.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 40 – Diagrama cobweb do sistema $\eta \mapsto -(1 - \beta)\eta + \eta^3$ com β passando pelo ponto crítico $\beta_0 = 0$. Cores diferentes representam orbitas de soluções iniciais diferentes.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Para aplicações com domínio em $\mathbb{R}^n$ precisamos considerar a forma normal da redução à variedade central. Para isso, temos o seguinte resultado.

Lema A.4.1. *Se o ponto fixo x_0 no valor crítico do parâmetro μ_0 possui um autovalor simples $\lambda_1 = -1$ e nenhum outro autovalor no círculo unitário, então a restrição de (A.5) a uma variedade central unidimensional no ponto μ_0 é equivalente, em uma vizinhança de*

x_0 , à forma normal

$$\eta \mapsto -\eta + c_0\eta^3 + O(\eta^4),$$

onde

$$c_0 = \frac{1}{6} \langle p, C(q, q, q) \rangle + 3 \langle B(q, (I_n - A)^{-1} B(q, q)) \rangle, \quad (\text{A.21})$$

com $Aq = -q$ e $A^\top p = -p$ satisfazendo (2.5).

Demonstração. Ver [59], seção 5.4.2, páginas 183–185. $\square$

Aqui η é uma coordenada local na variedade central no ponto crítico, selecionada de forma que a restrição de (2.2) em β_0 a esta variedade não tenha termo quadrático, o que é sempre possível no caso da bifurcação de duplicação de período.

O Lema A.4.1 fornece uma maneira prática de aplicar os resultados obtidos no Teorema A.4.5 a um sistema com dimensão maior que uma vez que subespaço próprio e a variedade central correspondente são novamente unidimensionais. Pode-se mostrar que a forma normal truncada, neste caso, é dada por

$$\eta \mapsto -(1 - \beta)\eta + c(\beta)\eta^3. \quad (\text{A.22})$$

onde os termos de ordem maiores que 3, $O(\eta^4)$ não influenciam na equivalência topológica em uma certa vizinhança do ponto crítico, ver [59].

Exemplo A.4.1 (Aplicação Quadrática). *Considere a família de aplicações*

$$f(x, r) = rx(1 - x), \quad r \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.23})$$

Essas aplicações dão origem a um sistema dinâmico $x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$ que foi usado em 1976 pelo biólogo Robert May, como uma versão em tempo discreto do modelo demográfico da equação logística proposta por Pierre François Verhulst entre 1838 e 1847. A partir de então também ficou conhecida como equação ou aplicação logística². Segundo esse modelo, t está em escala de gerações, a variável x_t representa a fração da população na geração t de uma certa espécie pela população máxima dessa espécie suportada pelo ambiente. Assim, temos $x \in [0, 1]$, se $x=0.5$ indica que a população atual é 50% da capacidade máxima sustentável. O parâmetro r representa a taxa de crescimento dessa espécie. Para atender a restrição, $x \in [0, 1]$ vamos supor que $r \in [0, 4]$.

Como o título do artigo de May indica, a família de aplicações quadráticas é conhecida na literatura como um exemplo simples para realizar cálculos e ao mesmo tempo apresenta muitas das características que são de interesse da teoria de sistemas dinâmicos não-lineares. Desse modo, as aplicações quadráticas fornecerão uma fonte de exemplos para essa seção. Vamos começar calculando o ponto fixo do sistema dinâmico $x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$,

$$x_*(r) = rx_*(r)(1 - x_*(r)) \Rightarrow 1 = r(1 - x_*(r)) \Rightarrow x_*(r) = \frac{r-1}{r}.$$

² Do inglês, logistic map.

A derivada de f é $f'(x, r) = r - 2rx$, assim, no ponto fixo temos

$$|f'(x_*(r))| \geq 1 \Rightarrow \left| r - 2r \left(\frac{r-1}{r} \right) \right| \geq 1 \Rightarrow |2-r| \geq 1$$

de modo que

$$r \leq 1 \quad \text{ou} \quad 3 \leq r.$$

Isto é, 1 e 3 são pontos de bifurcação para o parâmetro r . Notemos que para $r \in [1, 3]$ o ponto fixo x_* é estável e o ponto $x_t = 0$, que também é ponto fixo do sistema pois de (A.23) $x_t = 0$ implica $x_{t+1} = 0$, é um ponto instável. Analisando a derivada de f no ponto fixo quando $r = 1$ e $r = 3$ temos

$$f'(x_*(1), 1) = 1 - 2 \cdot x_*(0) = +1, \quad f'(x_*(3), 3) = 3 - 6 \cdot x_*(3) = -1.$$

Assim, segue que o sistema $f_r(x)$ sofre uma bifurcação do tipo sela-nó quando r passa pelo valor 1 e uma bifurcação de duplicação de período quando r passa pelo valor 3. Vamos analisar essas bifurcações utilizando o Teorema A.4.4 e o Teorema A.4.5. Quando $r = 1$ o ponto fixo é $x_0(1) = 0$. Então,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) = -2 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r}(0, 1) = (x - x^2)|_{(0,1)} = 0. \quad (\text{A.24})$$

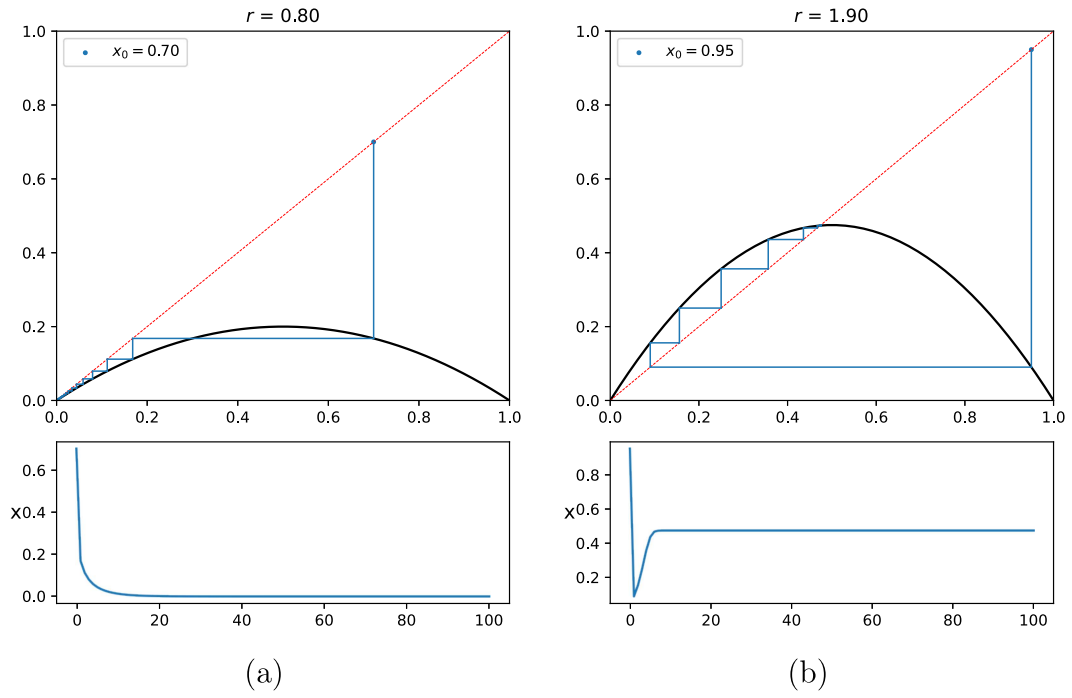
Quando $r = 3$, o ponto fixo é $x_0(3) = 2/3$. Então

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] \bigg|_{(\frac{2}{3}, 3)} = [1 - 2x - r(x - x^2)] \bigg|_{(\frac{2}{3}, 3)} = -\frac{2}{3} \neq 0.$$

$$\left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{2}{3}, 3 \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \left(\frac{2}{3}, 3 \right) \right) = (-3)^2 + 0 = 9 \neq 0.$$

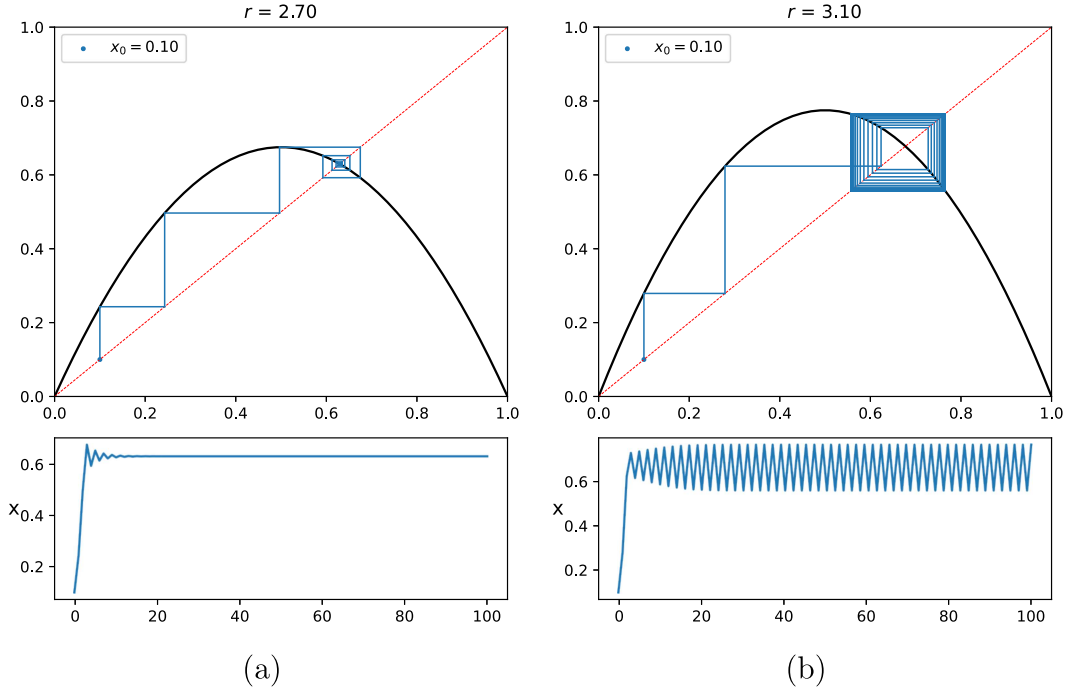
As figuras mostram as bifurcações locais para a aplicação quadrática com r entre 0 e 3.2. Os valores x_0 apresentados são soluções iniciais arbitrárias.

Figura 41 – Bifurcação de sela-nó, o ponto $x = 0$ que é atrator em (a) perde estabilidade e é criado um ponto fixo $x_*(r)$ atrator, simulado em (b). Os valores x_0 são soluções iniciais arbitrárias.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 42 – Bifurcação de duplicação de período, o ponto fixo $x_*(r)$ que é atrator em (a) perde estabilidade e é criado um ciclo de período 2 atrator, simulado em (b). Os valores x_0 são soluções iniciais arbitrárias.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A.4.4 Bifurcação de Hopf

Considere um sistema bidimensional em tempo discreto dado por

$$x \mapsto f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.25})$$

com f suave, apresentando um ponto fixo $x_0 = 0$ quando $\mu_0 = 0$ e autovalores λ_1 e λ_2 . Caso o ponto fixo não se encontre na origem, para facilitar a notação, podemos fazer uma translação via mudança de variáveis tal que $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$. Se $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ então o sistema sofre uma bifurcação de Hopf. Ao impor condições adicionais nas derivadas, uma curva fechada invariante homeomorfa a um círculo emerge do ponto fixo. O movimento ao longo dessa curva corresponde a uma rotação, com o número de rotação iniciando próximo ao valor associado ao autovalor.

Podemos escrever o sistema original em coordenadas complexas do seguinte modo. Sejam $q(\mu) \in \mathbb{C}^2$ um autovetor de $Df_{x_0}(\mu)$ correspondente ao autovalor $\lambda_1(\mu)$ e $p(\mu) \in \mathbb{C}^2$ um autovetor da matriz transposta $Df_{x_0}^T(\mu)$ correspondente ao autovalor $\bar{\lambda}_1(\mu)$. É sempre possível normalizar p em relação a q de modo que

$$\langle p, q \rangle = 1.$$

Qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^2$ pode ser representado de forma única, para qualquer α pequeno, como

$$x = zq(\mu) + \bar{z}\bar{q}(\mu), \text{ com } z = \langle p(\mu), x \rangle$$

onde z é um escalar complexo e $\bar{z}$ é seu conjugado. Considere (A.25) tal que, para toda vizinhança de μ suficientemente pequena, a jacobiana Df calculada no ponto fixo $x = x_0$ possui autovalores

$$\lambda_{1,2}(\mu) = r(\mu)e^{\pm i\theta(\mu)},$$

onde $r(0) = 1$ e $\theta(0) = \theta_0$. Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$(C.1) \quad r'(0) = 0;$$

$$(C.2) \quad e^{ik\theta_0} \neq 1, \text{ para } k = 1, 2, 3, 4.$$

É possível mostrar que existem mudanças suaves e invertíveis de coordenadas e de parâmetros que transformam o sistema na forma

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \mapsto (1 + \beta) \begin{pmatrix} \cos \theta(\beta) & -\sin \theta(\beta) \\ \sin \theta(\beta) & \cos \theta(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d(\beta) & -b(\beta) \\ b(\beta) & d(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} (z^2 + \bar{z}^2) + O(\|z\|^4), \quad (A.26)$$

onde $\theta(0) = \theta_0$ e $d(0) = \text{Re}(e^{-i\theta_0}c_1(0))$, sendo $c_1(0)$ dado pela fórmula

$$c_1(0) = \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(1 - r_0)}{2(r_0^2 - r_0)} + \frac{|g_{11}(0)|^2}{1 - \bar{r}_0} + \frac{|g_{02}(0)|^2}{2(r_0^2 - \bar{r}_0)} + \frac{g_{21}(0)}{2}.$$

Veja [59], Teorema 145, página 154.

Temos o seguinte resultado que foi provado por Neimark [77], Sacker [86] e Ruelle e Takens [85].

Teorema A.4.6 (Bifurcação de Hopf). *Considere uma família suave de aplicações suaves dada pela equação (A.26) por*

$$\eta \mapsto e^{i\theta(\beta)}(1 + \beta)\eta + c_1(\beta)\eta|\eta|^2 + O(\|\eta\|^4),$$

onde $\theta(0) = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi$, e suponha a condição de não degenerescência adicional,

$$(C.3) \quad d(0) = \text{Re}(e^{-i\theta_0}c_1(0)) \neq 0.$$

Se $d(0) < 0$, então (2.21) possui uma curva fechada invariante estável única ao redor do ponto fixo $\eta = 0$, que bifurca em $\beta = 0$ desse ponto e existe para $\beta > 0$ suficientemente pequeno.

Se $d(0) > 0$, então (2.21) possui uma curva fechada invariante instável única ao redor do ponto fixo trivial $\eta = 0$, que encolhe em $\beta = 0$ para esse ponto e existe para $\beta < 0$ suficientemente pequeno.

Demonstração. Ver seção 4.7 de [59]. $\square$

(C.1) é a condição de não transversalidade e a condição (C.2) $e^{ik\theta_0} \neq 1$ para $k = 1, 2, 3, 4$ significa que o sistema não sofre ressonância forte. Caso essas condições, em adição à condição de não degenerescência (C.3), não sejam satisfeitas, a curva fechada invariante pode nem sequer aparecer ou pode haver várias curvas invariantes bifurcando do ponto fixo. Para facilitar o cálculo de $d(0)$, introduzimos a função

$$G(z, \bar{z}) = \langle p, g(x_0 + zq + \bar{z}\bar{q}, \mu_0) - x_0 \rangle,$$

e consideramos seus coeficientes de Taylor:

$$g_{jk} = \frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} \langle p, g(x_0 + zq + \bar{z}\bar{q}, \mu_0) - x_0 \rangle \Big|_{z=\bar{z}=0}.$$

Então podemos obter uma expressão para $d(0)$ como

$$d(0) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\theta_0} g_{21}}{2} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - 2e^{i\theta_0})e^{-2i\theta_0}}{2(1 - e^{i\theta_0})} g_{20} g_{11} \right) - \frac{1}{2} |g_{11}|^2 - \frac{1}{4} |g_{02}|^2.$$

Em uma bifurcação de Hopf, a variedade central associada é bidimensional. A forma normal no ponto crítico pode ser expressa de acordo com o seguinte lema.

Lema A.4.2. *Se o ponto fixo x_0 no valor crítico do parâmetro α_0 possui autovalores críticos simples*

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$$

e nenhum outro autovalor no círculo unitário, enquanto

$$e^{ik\theta_0} - 1 \neq 0, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{sem ressonâncias fortes}),$$

então a restrição de (2.2) a uma variedade central crítica bidimensional no valor crítico do parâmetro α_0 equivale localmente à forma

$$\eta \mapsto e^{i\theta_0} \eta + c_1(0) \eta |\eta|^2 + O(|\eta|^4),$$

onde w é uma variável complexa e c_{01} é um número complexo dado por

$$c_1(0) = \frac{1}{2} \langle p, C(q, q, \bar{q}) + 2B(q, (I_n - A)^{-1} B(q, \bar{q})) + B(\bar{q}, (e^{2i\theta_0} I_n - A)^{-1} B(q, q)) \rangle,$$

com $(Df)q = e^{i\theta_0} q$ e $(Df)^T p = e^{-i\theta_0} p$ satisfazendo (2.5).

Demonstração. Ver [58], Lema 2.7, página 35. $\square$

Exemplo A.4.2 (Aplicação Quadrática com Atraso). *Considere a seguinte equação representando o modelo logístico com influencia de duas gerações,*

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_{t-1}).$$

Se introduzirmos $x_{2,t} = x_{1,t-1}$, a equação pode ser reescrita como o sistema dinâmico bidimensional em tempo discreto:

$$F : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} rx_1(1 - x_2) \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

A aplicação F tem o ponto fixo $(0,0)$ para todos os valores de r . Para $r > 1$, surge um ponto fixo positivo não trivial (x_1^0, x_2^0) , onde,

$$x_1^0(r) = x_2^0(r) = 1 - \frac{1}{r}.$$

A matriz jacobiana da aplicação F avaliada no ponto fixo não trivial é dada por:

$$DF_{x_0}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - r \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e possui os autovalores:

$$\lambda_{1,2}(r) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4} - r}.$$

Se $r > \frac{5}{4}$, os autovalores são complexos. O ponto fixo x^0 perde estabilidade quando

$$|\lambda_{1,2}|^2 = \lambda_1 \lambda_2 = r - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 2,$$

e ocorre uma bifurcação de Hopf. Os autovalores da matriz DF no valor crítico são:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\pm i \frac{\pi}{3}}.$$

Fica claro que as condições (C.1) e (C.2) são satisfeitas.

Para verificar a condição de não degenerescência (C.3), devemos calcular $d(0)$. A matriz jacobiana crítica $DF_{(x^0, r_0)}$ e sua transpostas possuem os autovetores:

$$A_0 q = e^{i\theta_0} q, \quad A_0^T p = e^{-i\theta_0} p,$$

onde:

$$q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para normalizar $\langle p, q \rangle = 1$, podemos tomar, por exemplo:

$$q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} i\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -i\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}.$$

Agora compomos:

$$x = x_0 + zq + \bar{z}\bar{q},$$

e avaliamos a função:

$$\begin{aligned} G(z, \bar{z}) &= \langle p, F(x_0 + zq + \bar{z}\bar{q}, r_0) - x_0 \rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} i\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -i\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}, F\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \bar{z}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, 2\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Expandindo $G(z, \bar{z})$ em série de Taylor em $(z, \bar{z}) = (0, 0)$:

$$G(z, \bar{z}) = e^{i\theta_0} z + \sum_{2 \leq j+k \leq 3} \frac{1}{j!k!} g_{jk} z^j \bar{z}^k + O(\|z\|^4),$$

obtemos:

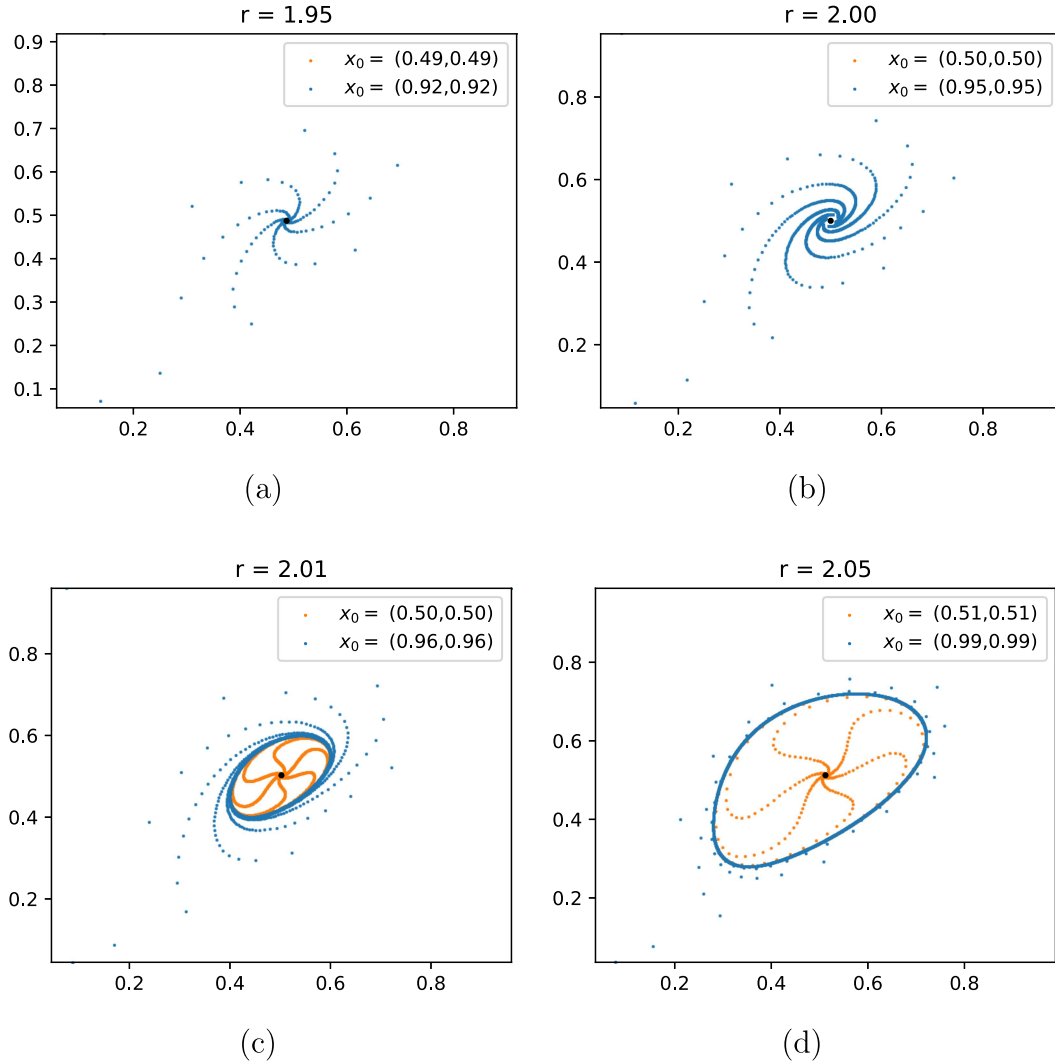
$$g_{20} = -2 + i\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad g_{11} = i\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad g_{02} = 2 + i\frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad g_{21} = 0,$$

o que permite calcular a parte real crítica:

$$\begin{aligned} d(0) &= -\operatorname{Re} \left(\frac{(1 - 2e^{i\frac{\pi}{3}})e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{2(1 - e^{i\frac{\pi}{3}})} \left(-i\frac{4\sqrt{3}}{3} - \frac{4}{3} \right) \right) - \frac{8}{9} - \frac{4}{9}. \\ &= -2 < 0. \end{aligned}$$

Portanto, uma curva invariante fechada única e estável bifurca do ponto fixo não trivial para $r > 2$, ver Figura 43.

Figura 43 – O sistema (A.27) sofre uma bifurcação de Hopf quando $r = 2$, o ponto fixo $x^0(r)$ que é atrator em (a) perde estabilidade e é criado um ciclo atrator. Os valores x_0 são duas soluções iniciais arbitrárias próxima e distante, respectivamente do ponto fixo $x_{1,2}^0$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A.4.5 Ressonâncias Fortes em Bifurcações de Codimensão 2

Para compreender a dinâmica emergente de uma família de aplicações após a ocorrência de uma bifurcação de Hopf que fogem à hipótese (C.3) no Teorema A.4.6, é preciso realizar uma análise dos cenários em que os autovalores atravessam o círculo unitário nas raízes da unidade, dadas por: $\lambda = e^{2\pi ip/q}$, onde p/q está em sua fração irredutível. Esses cenários se classificam em duas categorias distintas. O par (p, q) recebe a denominação de **ressonância forte** quando q assume valores de 1, 2, 3 ou 4; caso os valores sejam diferentes, temos uma **ressonância fraca**. Neste contexto, para não fugir do escopo desse trabalho, focamos na situação das ressonâncias fortes de ordem 2 e 4. As ressonâncias fortes trazem à tona certos problemas ainda não solucionados no contexto

das bifurcações homoclínicas e heteroclínicas, que apenas apresentaremos a seguir.

Uma técnica frequentemente usada ao lidar com ressonâncias fortes, é a aproximação de difeomorfismos próximos aos seus pontos fixos por deslocamentos ao longo das órbitas de certos sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas. O diagrama de bifurcação para a família apropriada de campos vetoriais pode, então, ser estudado e interpretado como um diagrama de bifurcação para a família de aplicações. Deixamos para as referências [59], [3] e [93]. Essa abordagem permite estudar bifurcações globais de curvas invariantes fechadas que ocorrem nas aplicações próximas a bifurcações homoclínicas e heteroclínicas dessas equações diferenciais aproximadas. Embora a estrutura exata de bifurcação seja diferente para aplicações e para as equações diferenciais aproximadas, seu uso fornece informações valiosas que dificilmente poderiam ser alcançadas apenas por meio da análise direta dos difeomorfismos.

No entanto, surgem problemas porque esses diagramas incluem elementos que são estruturalmente instáveis quando considerados como parte do retrato de fase de um difeomorfismo, veja [55]. Por exemplo, no caso $q = 1$, a família apropriada de campos vetoriais inclui a sequência de bifurcações homoclínicas em que dois ramos das variedades estável e instável do ponto de sela se cruzam. No campo vetorial, devido à unicidade das soluções, esses ramos devem coincidir. Entretanto, em um difeomorfismo, espera-se que eles primeiro se tornem tangentes, depois se cruzem transversalmente e, finalmente, se tornem tangentes novamente. Considerações semelhantes surgem no caso $q = 2$, onde os retratos de fase para o campo vetorial contêm ciclos homoclínicos e de sela. Para $q = 4$, ainda não se conhece uma descrição completa do comportamento do campo vetorial associado, veja [59] e [99]. Apesar disso, nesse último caso, é possível calcular a forma normal. Tendo em vista a dificuldade dos cálculos explícitos, discutiremos a seguir um método para estimar os coeficientes da forma normal.

Considere a família de aplicações indexadas pelo parâmetro μ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto F_\mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\mu(x, y) \\ g_\mu(x, y) \end{pmatrix}, \quad x, y, \mu \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.28})$$

Suponha que o ponto fixo se encontra na origem, e que λ_1 e λ_2 são autovalores próximos do círculo unitário. Aplicando uma reparametrização podemos escrever os autovalores em função de sua distância à origem e do ângulo que faz com o eixo horizontal. Temos

$$\lambda = (1 + r)e^{i\theta},$$

onde r passa a ser mais um parâmetro de bifurcação e θ é um ângulo constante. Assim, λ está fora do círculo unitário se $r > 0$ e dentro se $r < 0$, de modo que $r = 0$ é ponto crítico para a bifurcação.

Como estamos interessados em uma formulação que aproxime a forma normal de (A.28), fazendo uma substituição de variáveis, tomando $f(x, y)$ como a nova variável y ,

podemos escrever essa aplicação da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ Ax + By + \sum_{j+k \geq 2} g_{jk} x^j y^k \end{pmatrix}, \quad (\text{A.29})$$

onde, $A = -\lambda\bar{\lambda}$ e $B = \lambda + \bar{\lambda}$. Assim, podemos introduzir coordenadas complexas dadas por

$$z = ix\bar{\lambda} - iy, \quad \bar{z} = -ix\lambda + iy$$

Desse modo, o sistema (A.29) fica expresso como

$$z \mapsto \lambda z + \sum_{j+k \geq 2} a_{jk} z^j \bar{z}^k \quad (\text{A.30})$$

Onde, usando as aproximações $2x \sin \theta \approx z + \bar{z}$ e $2y \sin \theta \approx ze^{i\theta} + \bar{z}e^{-i\theta}$ podemos obter estimativas para os coeficientes a_{jk} a partir dos coeficientes g_{jk} , que são dadas por

$$\begin{cases} 4ia_{20} \sin^2 \theta \approx g_{20} + g_{11}e^{i\theta} + g_{02}e^{2i\theta}, \\ 2ia_{11} \sin^2 \theta \approx g_{20} + g_{11} \cos(\theta) + g_{02}, \\ 4ia_{02} \sin^2 \theta \approx g_{20} + g_{11}e^{-i\theta} + g_{02}e^{-2i\theta}, \\ 8ia_{30} \sin^2 \theta \approx g_{30} + g_{21}e^{i\theta} + g_{12}e^{2i\theta} + g_{03}e^{3i\theta}, \\ 8ia_{21} \sin^2 \theta \approx 3g_{30} + g_{21}(e^{-i\theta} + e^{i\theta}) + g_{12}(2e^{-2i\theta} + e^{2i\theta}) + g_{03}(2e^{-3i\theta} + 2e^{3i\theta}). \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

Para os casos da ressonância (1:4) a forma normal correspondente é

$$z \mapsto \lambda z + Qz^2\bar{z} + R\bar{z}^3 + O(\|z\|^5) \quad (\text{A.32})$$

onde

$$Q = \frac{(1-i)|a_{11}|^2}{2} + \frac{(1+3i)a_{11}a_{20}}{2} - (1+i)|a_{02}|^2 + a_{21} \quad (\text{A.33})$$

e

$$R = -\frac{(1-i)(a_{11} + 2i\bar{a}_{20})a_{02}}{2} + a_{03}. \quad (\text{A.34})$$

Uma vez calculadas aproximações para os coeficientes, o seguinte teorema é estabelecido por Whitley [99] e que, por sua vez, foi baseado em resultados de Iooss [46] e Wan [98] e fornece informações importantes sobre a estrutura da bifurcação.

Teorema A.4.7. *Considere uma aplicação com dois parâmetros r e θ dadas por (A.32). Definimos $Q = q_1 + iq_2$ e $R = r_1 + ir_2$ e $\mu = r - 1$. Então,*

1. *Se $|Q| < |R|$ e seguimos um caminho uniparamétrico no plano dos parâmetros que passa por $\mu = \theta = 0$, então uma sela de período quatro bifurca da origem em ambos os lados de $\mu = \theta = 0$.*
2. *Se $|Q| > |R|$.*

- a) Se $q_2 < 0$ (ou $q_2 > 0$, respectivamente) e seguimos um caminho através de $\mu = \theta = 0$ que está na região onde

$$(q_1\mu + q_2\theta)^2 > (r_1^2 + r_2^2)(\mu^2 + \theta^2),$$

então um círculo invariante atrator (repulsor) bifurca da origem para $\mu > 0$ (ou $\mu < 0$, respectivamente). Nenhuma órbita de período quatro bifurca da origem neste caso.

- b) Se $q_2 < 0$ (ou $q_2 > 0$, respectivamente) e seguimos um caminho através de $\mu = \theta = 0$ que entra na região onde

$$(q_1\mu + q_2\theta)^2 < (r_1^2 + r_2^2)(\mu^2 + \theta^2)$$

e $\mu > 0$ (ou $\mu < 0$, respectivamente), então duas órbitas de período quatro bifurcam da origem. Se $q_2 < 0$, uma órbita é um atrator e a outra é uma sela. Se $q_2 > 0$, uma órbita é uma sela e a outra é uma fonte repulsora.

Demonstração. Ver [46] para pontos periódicos e [98] para ciclos invariantes. $\square$

A.5 DINÂMICAS SENSÍVEIS AO CAOS

O estudo de sistemas dinâmicos determinísticos caracterizados como caóticos é fundamental para compreender diversos sistemas naturais, como o clima, o movimento planetário e circuitos eletrônicos, e é uma área ativa de pesquisa em física, matemática e engenharia. A compreensão dos sistemas caóticos tem implicações significativas para o desenvolvimento de modelos preditivos e controle de sistemas na ciência e na indústria.

Como mencionamos no Capítulo 1. de introdução, essa característica de sistemas não lineares ganhou evidência com o avanço da computação. Sua característica determinística garante que em uma simulação capaz de representar os pontos do sistema com precisão infinita, dada uma solução inicial, toda a sua trajetória futura é determinada somente pela dinâmica do sistema. No entanto, sistemas caóticos são fenômenos que exibem um comportamento extremamente sensível a mínimas mudanças nas condições iniciais. Logo, uma vez que aproximações devem ser feitas nas simulações, o resultado obtido normalmente são trajetórias imprevisíveis. Desse modo, é importante destacar que, apesar de sua aparente aleatoriedade, sistemas caóticos obedecem a regras determinísticas e são regidos por equações não lineares.

Existem algumas definições não equivalentes para caos na literatura. Uma frequentemente usada foi apresentada por Devaney em seu livro [26] a qual, seguindo a notação de Brock e Hommes, ver [15], [38] chamaremos de caos topológico e é apresentada a seguir.

Definição A.5.1. Dado um conjunto X , seja $f : X \rightarrow X$. Dizemos que f é **topologicamente transitiva** se, para quaisquer dois conjuntos abertos $U, V \subset X$, existe $k > 0$ tal que

$$f^k(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Dizemos que f possui **dependência sensível às condições iniciais** em X se existem uma métrica em d e um número $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$ e qualquer vizinhança U de x , existe $y \in U$ e $n \geq 0$ tal que

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

Dado um subconjunto $V \subset X$, dizemos que $f : V \rightarrow V$ é **topologicamente caótica** em V se f satisfaz as seguintes três propriedades:

1. Os pontos periódicos de f são densos em V .
2. f é topologicamente transitiva.
3. f possui dependência sensível às condições iniciais.

A primeira propriedade indica que um sistema caótico possui um número infinito de pontos periódicos com diferentes períodos, o que indica que as trajetórias podem seguir muitos padrões periódicos diferentes. De acordo com a segunda propriedade, para muitos estados iniciais, os caminhos do tempo não convergem para uma órbita periódica, mas continuam vagando. A terceira propriedade, a dependência sensível das condições iniciais, implica a imprevisibilidade inerente a longo prazo.

Como relata Devaney [26], a terceira condição na definição A.5.1 é consequência direta da primeira e da segunda. Esse resultado foi demonstrado em [6]. Como destaca Devaney, o resultado é interessante, pois as propriedades (1.) e (2.) são ambas propriedades topológicas, enquanto a propriedade (3.) é uma propriedade geométrica e depende da métrica do espaço X .

Contudo, é possível que um sistema seja topologicamente caótico mas o conjunto de soluções iniciais S para o qual apresenta dependência sensível tenha medida de Lebesgue igual a zero. O que implica que essas soluções iniciais são praticamente "inobserváveis" em simulações computacionais. Este fato nos conduz a considerar uma segunda definição de caos, que se mostra mais rigorosa e robusta.

Definição A.5.2. Dizemos que $f : X \rightarrow X$ é **caótica**³ se f for topologicamente caótica e existir um conjunto com medida de Lebesgue positiva S , tal que f tenha dependência sensível às condições iniciais em relação a S .

³ Brock e Hommes, utilizam o termo "truly chaotic", ver [38], mas também encontramos na literatura a expressão "thick chaotic".

Uma medida capaz de quantificar, em um sistema discreto n -dimensional, a taxa média exponencial de divergência em n direções diferentes de estados iniciais próximos chama-se expoente de Lyapunov.

Definição A.5.3. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo em uma variedade de dimensão m . Seja $|\cdot|$ a norma em vetores tangentes induzida por uma métrica Riemanniana em M . Para cada $x \in M$ e $v \in T_x M$, definimos*

$$\lambda(x, v) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log(|Df_x^k v|), \quad (\text{A.35})$$

sempre que esse limite existir. Seja $s(x)$ o número de valores distintos de $\lambda(x, v)$ em x para $v \in T_x M$, com vetores tangentes $v_j \in T_x M$ para $1 \leq j \leq s(x)$, fornecendo valores distintos,

$$\lambda_j(x) = \lambda(x, v_j),$$

com

$$\lambda_1(x) < \lambda_2(x) < \cdots < \lambda_{s(x)}(x).$$

*Esses valores são chamados de **expoentes de Lyapunov** de f no ponto x .*

O Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledec, enunciado abaixo, afirma que para quase todos os pontos x o limite existe para todos os vetores tangentes $v \in T_x M$ e existem no máximo m valores distintos de $\lambda(x, v)$ para um ponto x .

Teorema A.5.1 (Teorema Ergódico Multiplicativo). *Seja M uma variedade compacta de dimensão m , B a σ -álgebra gerada pelos subconjuntos de Borel de M , e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^2 . Então, existe um conjunto invariante $B_f \in B$ de medida total para toda medida μ no conjunto de medidas de probabilidade invariantes por f , tal que os expoentes de Lyapunov existem para todos os pontos $x \in B_f$.*

Demonstração. Ver Ruelle [84]. □

Para aplicações f n -dimensionais (A.35) envolve o produto $Df_x^k = Df_{f^{k-1}(x)} \cdots Df_{f(x)} \cdot Df_x$, que depende da ordem. Assim, tomando a norma espectral, temos a desigualdade $\|Df_x^k\| \leq \|Df_{f^{k-1}(x)}\| \cdots \|Df_x\|$. De forma que

$$\frac{1}{k} \log \|Df_x^k\| \leq \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \log \|Df_{f^j(x)}\| \quad (\text{A.36})$$

Caso f seja unidimensional, pela regra da cadeia, ver [63], a desigualdade (A.36) se torna uma igualdade. Ou seja, o expoente de Lyapunov quando f tem dimensão 1 é a média dos logaritmos dos valores absolutos da derivada ao longo da órbita. Já no caso de dimensão n , para um dado estado inicial x_0 , cada um dos n diferentes expoentes de Lyapunov

$\lambda_1(x_0) \geq \lambda_2(x_0) \geq \cdots \geq \lambda_n(x_0)$ mede uma expansão ou contração média em uma das n direções possíveis.

De forma geral, temos que, para um estado inicial x_0 convergindo para um nó estável, o expoente de Lyapunov é o logaritmo do valor absoluto da derivada no nó estável. Para uma solução inicial x_0 convergindo para uma órbita periódica, com período k , o expoente de Lyapunov é o logaritmo do valor absoluto da derivada de f^k , no ponto periódico, dividido por k . Consequentemente, para um estado inicial convergindo para um nó estável ou um ciclo k estável, o expoente de Lyapunov correspondente é negativo. Em contraste, uma dinâmica caótica é caracterizada por um expoente de Lyapunov positivo, medindo o quão rápido, em média, estados iniciais próximos divergem uns dos outros. Essas conclusões são formalizadas no teorema seguinte.

Teorema A.5.2. *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo C^2 em uma variedade compacta M . Suponha que f é ergódico para alguma medida de probabilidade de Borel invariante m_0 , que não está concentrada em uma única órbita periódica e tal que os expoentes de Lyapunov são não nulos m_0 -quase sempre. Então, f possui uma ferradura, Λ . Isto é, um subconjunto fechado, invariante e uniformemente hiperbólico $f|_\Lambda$ é topologicamente conjugado a um shift de tipo finito.*

Demonstração. Ver [53]. □

Discutiremos agora, seguindo Palis e Takens [79], como a criação de uma ferradura é capaz de gerar bifurcações de duplicação de período em cascata e a subsequente criação em cascata de nós estáveis para diferentes valores de parâmetros de bifurcação. Seja R um retângulo em $\mathbb{R}^2$ e $\{f_\mu\}$ uma família de difeomorfismos de R para $\mathbb{R}^2$ tais que.

1. $f_{-1}(R) \cap R = \emptyset$,
2. $f_\mu|_R$ é dissipativa, ou seja, uma contração de área, para $\mu \in [-1, 1]$, isto é, $|\det(Df_\mu)| < 1$ para pontos em R .
3. f_1 tem pontos periódicos que são todos de sela.
4. Considere as regiões S_1 e S_2 respectivamente à esquerda e a direita das fronteiras de R , então $f_\mu(R) \cap S_1 = \emptyset$ e $f_\mu(R) \cap S_2 = \emptyset$.
5. Considere T_1 e T_2 as regiões acima e abaixo das fronteiras de R , então $f_\mu(R) \cap T_1 = \emptyset$ e $f_\mu(R) \cap T_2 = \emptyset$.
6. f_μ tem no máximo uma órbita periódica não hiperbólica para cada valor de $\mu \in [-1, 1]$ e cada uma dessas orbitas correspondem à uma bifurcação sela-nó ou uma bifurcação de duplicação de período. ⁴

⁴ Como f_μ é uma contração de área não há possibilidade dessa órbita estar relacionada com uma bifurcação de Hopf.

Como explica Palis e Takens [79], por mais que essa família não seja uma ferradura completa como definida na seção A.3, f_μ é uma ferradura para iterações positivas, "forward". Seja $P = \{(x, \mu) \mid x \in \text{Per}(f_\mu)\}$. Definimos o espaço topológico $\tilde{P} = P / \sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência identificando pontos da mesma órbita. Cada componente $(\mathcal{O}(x), \mu)$ de $\tilde{P}$, onde x é um ponto periódico, é uma curva contínua, exceto na duplicação de período. Temos o seguinte resultado

Teorema A.5.3. *Seja $f_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma família de difeomorfismos preservando a orientação e satisfazendo as condições (1.) – (6.). Então, cada $(\mathcal{O}(x), 1) \in \tilde{P}$ tem uma componente contendo órbitas periódicas atratoras de período $2^n k$ para cada $n \geq 0$, onde k é o período de x por f_1 .*

Demonstração. Ver Palis e Takens [79], Teorema 1, página 42. □

Assim, utilizando o Teorema A.3.3 observamos que o Teorema A.5.3 estabelece que, para uma família suave de difeomorfismos planares que preservam a orientação e que possui em $\mu = \mu_0$ uma órbita homoclínica para um ponto fixo hiperbólico p , existem duas sequências infinitas de valores do parâmetro convergindo (de um lado) para $\mu = 0$, correspondendo a bifurcações de duplicação de período localizadas próximas à órbita homoclínica crítica.

Exemplo A.5.1. *A família quadrática $f_r(x) = rx(1-x)$ é um exemplo simples de sistema caótico. Já mostramos no Exemplo A.4.1 que essa família sofre uma bifurcação de sela-nó quando $r = 1$ e uma bifurcação de duplicação de período quando $r = 3$ vamos mostrar que quando r assume valores maiores f_r exibe caos topológico, veja Figura 44.*

O Teorema de Li-Yorke, presente em [62], fornece uma condição suficiente para o caos topológico em sistemas unidimensionais $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, veja [26] para uma demonstração. Essa condição é dada por

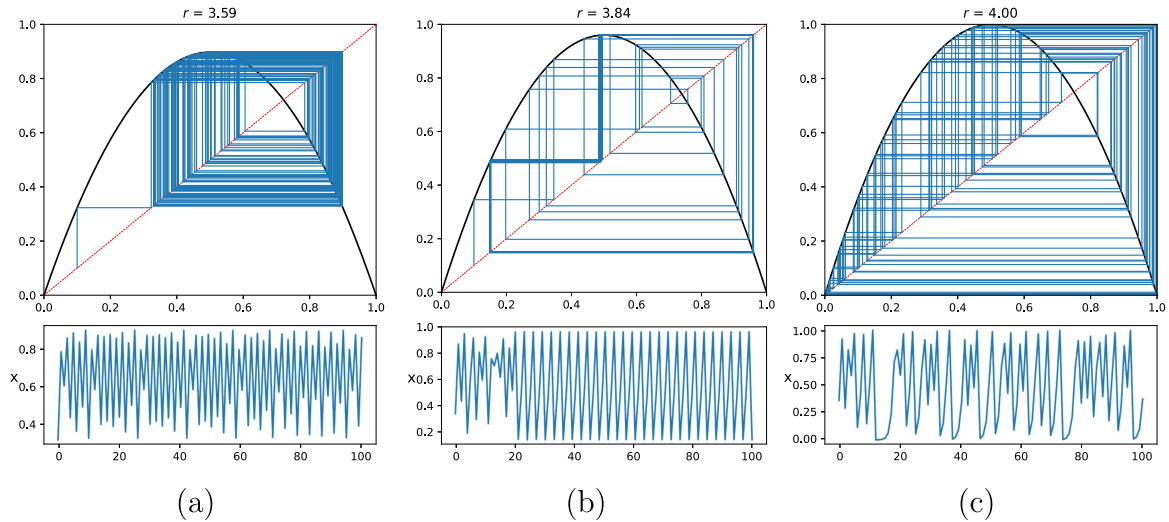
$$\varphi^3(x_0) \leq x_0 < \varphi(x_0) < \varphi^2(x_0). \quad (\text{A.37})$$

Ao considerar a possibilidade de substituir a desigualdade $\leq$ presente no teorema por uma igualdade $=$, observa-se que a relação $\varphi^3(x_0) = x_0 < \varphi(x_0) < \varphi^2(x_0)$ resulta em (A.37), indicando que x_0 é um ponto de período 3. Portanto, o teorema de Li-Yorke implica que uma função contínua unidimensional com um ponto de período 3 inevitavelmente exibe um comportamento dinâmico caracterizado por caos topológico.

O Teorema de Li-Yorke é amplamente aplicado em áreas como economia, pois oferece uma condição suficiente simples e verificável para identificar o caos topológico. No caso da aplicação quadrática, basta verificar um ponto $x_0 < 0.5$, tal que $f(x_0) = 0.5$ cumpre a condição (A.37). De fato podemos tomar $x_0 = \frac{1-\sqrt{0.5}}{2}$ e teremos $f_4^3(0.5) = 0.0 < x_0 < 0.5 < 1.0$. A simulação apresentada na Figura 44 (b) mostra que para $r \sim 3.84$, no

longo prazo todas as soluções iniciais tendem para o ciclo de período 3 caracterizado por $f(x_0) = 0.5$.

Figura 44 – Aplicações quadráticas para diferentes valores de r exibindo comportamento caótico.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

O caos topológico exibido pela família quadrática está relacionado com a cascata de duplicação de período, isto é, novos períodos aparecem conforme r aumenta e nunca desaparecem, Figura 45. O limite r_∞ para r_n , que marca o início de órbitas de período 2^n ocorre em $r_\infty = 3.5699456$.

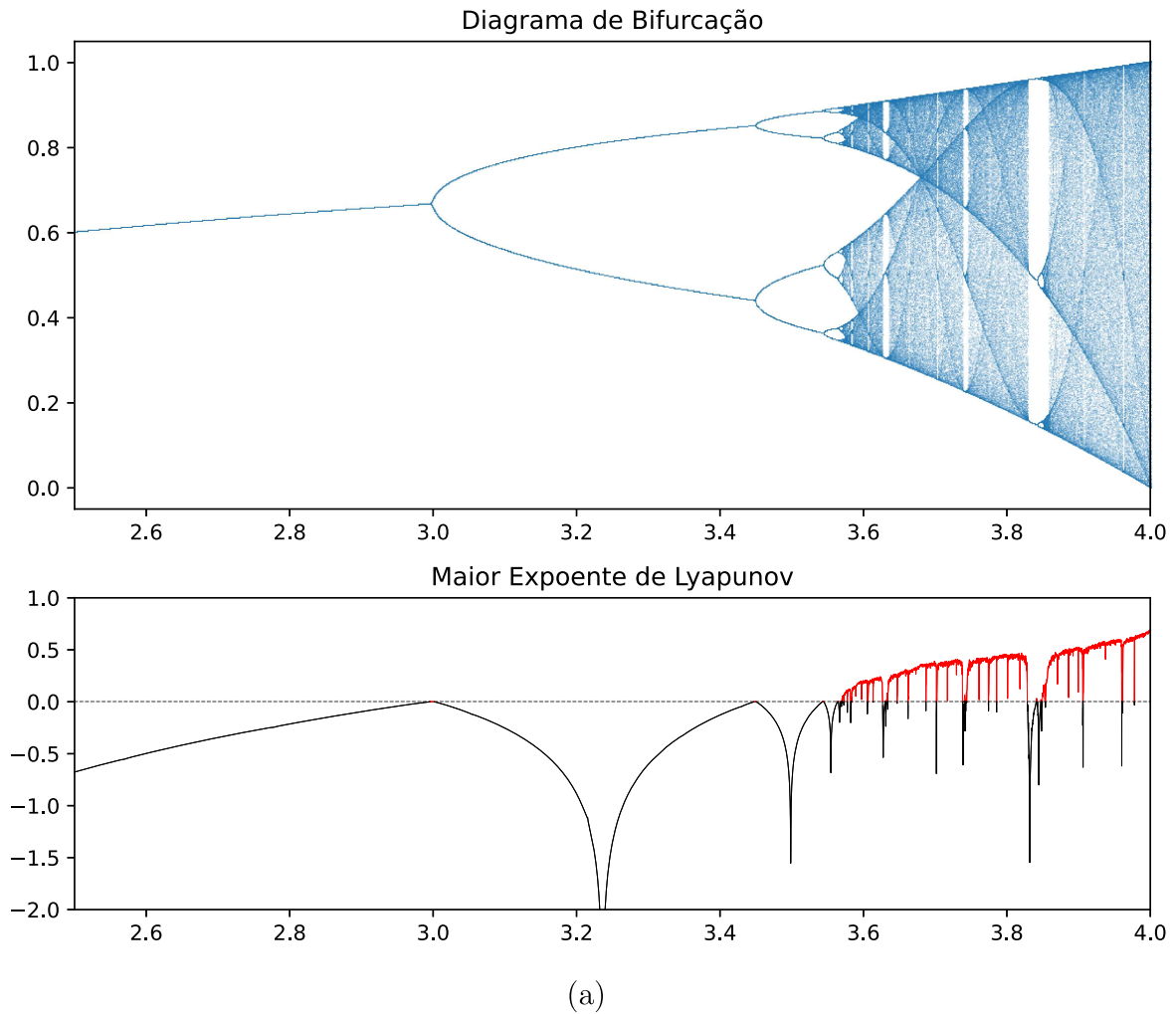
Embora o teorema forneça uma condição suficiente, ela não é necessária. Para aplicações quadráticas com parâmetro $r > r_\infty$ a dinâmica é caótica mesmo que a condição de Li-Yorke não seja diretamente satisfeita. No entanto, existe algum $N \geq 1$ para o qual o N -ésimo iterado f_λ^N satisfaz a condição. O teorema é geral para aplicações unidimensionais contínuas, mas não se aplica a aplicações descontínuas unidimensionais nem a aplicações contínuas de dimensões superiores.

A sequência de bifurcações, chamada de rota de duplicação de período ao caos, apresenta órbitas periódicas que passam de atratoras a repulsoras conforme r aumenta. O valor r_n converge geometricamente para r_∞ com taxa dada pela constante de Feigenbaum, dada por $\delta \approx 4.669202$, que é universal para funções unidimensionais sujeitas a duplicações de período, veja [26],[83].

Observe na Figura 45 como o maior expoente de Lyapunov está associado com as bifurcações iniciais e com a cascata de duplicação de período. Essa correlação é consequente do Teorema A.5.2. Um estudo mais aprofundado sobre a criação de órbitas homoclínicas nesse exemplo pode ser encontrado em Palis e Takens [79]. Robinson [83] demonstra, como exemplo, que quando $r = 4$, o valor do expoente de Lyapunov é calculado como $\lambda(x) = \log(2)$ mas como não é passível de generalização para todos os valores de r , uma

análise sobre a dinâmica caótica de um sistema através dos expoentes de Lyapunov é, na maioria das vezes, feita numericamente. Para a Figura 45 utilizamos o algoritmo descrito por Katok [53].

Figura 45 – O diagrama de bifurcação para a aplicação quadrática com o parâmetro r no eixo horizontal e pontos de equilíbrio no eixo vertical. Abaixo, a variação do maior expoente de Lyapunov pelo parâmetro r , em vermelho indica valores da série para os quais o expoente de Lyapunov é positivo.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Observe que a presença de um ponto homoclínico transversal, embora induza uma dinâmica intrincada caracterizada pela existência de uma ferradura e, portanto, de caos topológico no sistema, essa condição por si só não garante que o sistema seja caótico no sentido da Definição A.5.2. No entanto, a partir da década de 90, trabalhos como [8] e [74] significaram avanços consideráveis ao provarem que, após uma bifurcação homoclínica, existe um conjunto com medida de Lebesgue positiva no espaço de parâmetros para os quais o sistema exibe um atrator estranho e, desse modo, um comportamento caótico.

Comecemos por dar uma definição para atrator estranho. Como observa Palis e Takens [79], a noção de atrator, dada pela Definição A.2.3, é de fundamental importância uma vez que um conjunto de medida de Lebesgue total de pontos, ou seja, a grande maioria dos pontos, tem atratores como seu conjunto ω -limite. Assim, uma boa compreensão dos atratores presentes no sistema torna possível uma boa compreensão do comportamento da "maioria" das órbitas.

Definição A.5.4. *Um conjunto invariante Λ é chamado de **atrator estranho** se for um atrator e se f for sensivelmente dependente das condições iniciais em Λ . Um atrator Λ com estrutura hiperbólica é chamado de um **atrator hiperbólico**.*

Proposição A.5.1. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo com um ponto fixo hiperbólico de sela p tal que,*

1. $W^s(p)$ e $W^u(p)$ tem uma interseção homoclínica $q \neq p$.
2. p é um ponto dissipativo, isto é, $|\det(Df)| < 1$ em quase todo ponto.
3. $W^u(p)$ está contida em uma região limitada de $\mathbb{R}^2$.

Então existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ não vazio, tal que para cada $x \in U$, $\omega(x) \subset \overline{W^u(p)}$. Isto é, a distância de $f^n(x)$ à $W^u(p)$ tende a zero quando n tende a infinito.

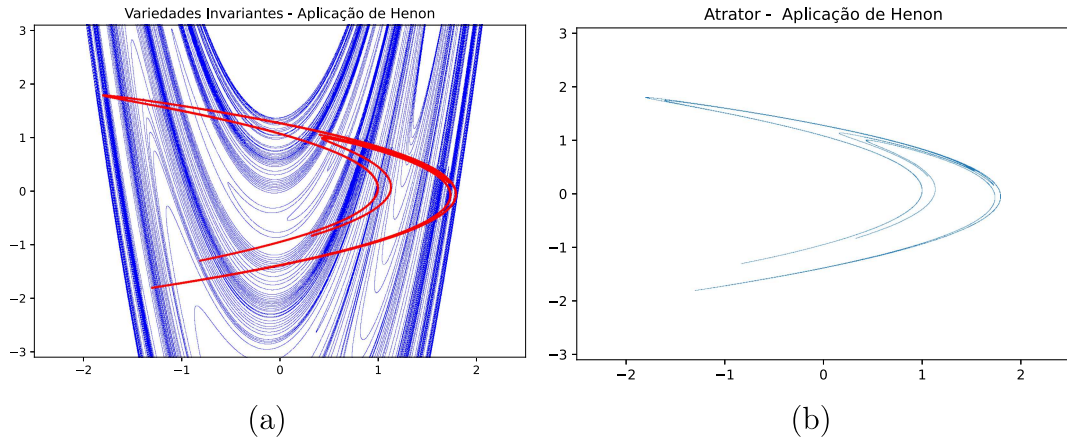
Demonstração. Ver Palis e Takens [79], página 178. □

Exemplo A.5.2. *Considere a aplicação $F_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ conhecida como aplicação de Hénon, ou em inglês, Henon Map;*

$$F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y \\ bx \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

Essa aplicação foi introduzida por Michel Hénon como um modelo simplificado da seção de Poincaré do modelo de Lorenz em 1976, ver [37]. Através de simulações computacionais, Hénon encontrou evidências numéricas de que a família (A.38) exibiu um atrator estranho para os valores de parâmetro $a = 1.4$ e $b = 0.3$. Benedicks e Carleson [8] mostraram que, para cada $b > 0$ fixo, existe um conjunto com medida de Lebesgue positiva de valores para a , E_b tal que, se $a \in E_b$ então $f_{a,b}$ tem um atrator estranho que é o fecho da variedade instável de algum ponto de sela $p_{a,b}$ e cuja bacia de atração contém um conjunto aberto. Podemos visualizar esse fato na Figura 46.

Figura 46 – (a) Simulação não rigorosa da variedade estável, em azul, e a da variedade instável, em vermelho, para a aplicação de Hénon para $a = 1.4$ e $b = 0.3$. – (b) Atrator estranho exibido pela aplicação de Hénon para $a = 1.4$ e $b = 0.3$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Com base no resultado obtido por Benedicks e Carleson [8], Mora e Viana [74] foram capazes de generalizá-lo para qualquer família de difeomorfismos com um parâmetro sofrendo uma tangência homoclínica.

Teorema A.5.4 (Mora– Viana). *Se uma família de aplicações de um parâmetro exibindo bifurcação homoclínica em $\alpha = \alpha_0$ associada a um ponto periódico de sela p_α dissipativo, então existe um conjunto de valores de α em um intervalo $(\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon)$ de medida de Lebesgue positiva, para os quais F_α tem um atrator estranho.*

Demonstração. Ver Mora e Viana [74].

□

B APÊNDICE B – CÁLCULO DOS COEFICIENTES g_{ik} .

$$g_{20} = b^2 \beta_2 y \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) \left(-4B\beta_2 y^2 + \frac{4b^2 \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} \right. \\ \left. + b \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \left(-4B\beta_2 y^2 + \frac{4b^2 \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} + 1 \right) \right) / \left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right) + 1 \Bigg) \\ / \left(2 \left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right) \right).$$

$$g_{11} = -2Bb^3 \beta_2^2 y^3 \left(\frac{B}{b} + 1 \right) \left(-\frac{B^2}{b^2} + 1 \right) / \left(2B + b \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \right)^2 \\ - 2Bb^2 \beta_2^2 y^3 \left(-\frac{B^2}{b^2} + 1 \right) / \left(2B + b \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \right) \\ + 2b^5 \beta_2^2 y^3 \left(\frac{B}{b} + 1 \right) \left(-\frac{B^2}{b^2} + 1 \right)^2 / \left(2B + b \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \right)^3 \\ + 2b^4 \beta_2^2 y^3 \left(-\frac{B^2}{b^2} + 1 \right)^2 / \left(2B + b \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \right)^2 \\ - \frac{3b^3 \beta_2 y \left(\frac{B}{b} + 1 \right) \left(-\frac{B^2}{b^2} + 1 \right)}{2 \left(2B + b \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \right)^2} \\ - \frac{3b^2 \beta_2 y \left(-\frac{B^2}{b^2} + 1 \right)}{2 \left(2B + b \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \right)}.$$

$$g_{02} = b^2 \beta_2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) \left[\frac{2b^2 \beta_2 y^3 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} \right. \\ \left. + \frac{by \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \left(-4B\beta_2 y^2 + \frac{4b^2 \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} + 1 \right)}{2 \left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right)} \right. \\ \left. + \frac{2by \left(-\frac{B}{b} + 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} \right. \\ \left. + \frac{y \left(-4B\beta_2 y^2 + 1 \right)}{2} + 2y \right] / \left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right).$$

$$\begin{aligned}
g_{30} = & b^3 \beta_2^2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{8B^2 \beta_2 y^2}{b} - \frac{6B}{b} + 4b \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) \right. \\
& + \frac{b \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \left(\frac{8B^2 \beta_2 y^2}{b} - \frac{24Bb \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} - \frac{6B}{b} + \frac{12b^3 \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)^2}{\left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right)^2} \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} \\
& \left. + \frac{3b \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) (-4B \beta_2 y^2 + 1)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} + \frac{3b \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) \left(-4B \beta_2 y^2 + \frac{4b^2 \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} + 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} \right) \Bigg/ \left(2 \left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{03} = & b^2 \beta_2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) \left(-24B \beta_2 y^2 + \frac{2b^2 \beta_2 y^2 \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \left(\frac{8B^2 \beta_2 y^2}{b} - \frac{24Bb \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} - \frac{6B}{b} + \frac{12b^3 \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)^2}{\left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right)^2} + 4b \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{6b \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} \right. \\
& + \frac{6b^2 \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) (-4B \beta_2 y^2 + 1)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} + \frac{6b^2 \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) \left(-4B \beta_2 y^2 + \frac{4b^2 \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} + 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} \\
& + \frac{24b^2 \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} + 2b \beta_2 y^2 \left(\frac{8B^2 \beta_2 y^2}{b} - \frac{6B}{b} + 4b \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) \right) \\
& \left. + \frac{6b \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \left(-4B \beta_2 y^2 + \frac{4b^2 \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} + 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} + 6 \right) \Bigg/ \left(4 \left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{21} = & Bb^2\beta_2^2y^2\left(-\frac{B^2}{b^2}+1\right)\frac{-4B\beta_2y^2+\frac{4b^2\beta_2y^2\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}+\frac{b\left(-\frac{B}{b}+1\right)\left(-4B\beta_2y^2+\frac{4b^2\beta_2y^2\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}+1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}+1 \\
& -\frac{b^4\beta_2^2y^2\left(-\frac{B^2}{b^2}+1\right)\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)\left(-4B\beta_2y^2+\frac{4b^2\beta_2y^2\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}+\frac{b\left(-\frac{B}{b}+1\right)\left(-4B\beta_2y^2+\frac{4b^2\beta_2y^2\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}+1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}+1\right)}{2\left(2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)\right)^2} \\
& +b^2\beta_2y\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{8Bb^2\beta_2^2y^3\left(-\frac{B^2}{b^2}+1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}-4B\beta_2y-\frac{4b^4\beta_2^2y^3\left(-\frac{B^2}{b^2}+1\right)\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)}{\left(2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)\right)^2}\right. \\
& -\frac{b^3\beta_2y\left(-\frac{B}{b}+1\right)\left(-\frac{B^2}{b^2}+1\right)\left(-4B\beta_2y^2+\frac{4b^2\beta_2y^2\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}+1\right)}{\left(2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)\right)^2} \\
& -4b^2\beta_2^2y^3\left(-\frac{B^2}{b^2}+1\right)-\frac{b^2\beta_2y\left(-\frac{B^2}{b^2}+1\right)\left(-4B\beta_2y^2+\frac{4b^2\beta_2y^2\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}+1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)} \\
& +\frac{4b^2\beta_2y\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}+\frac{b\left(-\frac{B}{b}+1\right)\left(8Bb^2\beta_2^2y^3\left(-\frac{B^2}{b^2}+1\right)-4B\beta_2y-\frac{4b^4\beta_2^2y^3\left(-\frac{B^2}{b^2}+1\right)\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)}{\left(2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)\right)^2}\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)} \\
& \left./\left(2\left(2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)\right)\right)+\frac{b^2\beta_2\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)\left(-4B\beta_2y^2+\frac{4b^2\beta_2y^2\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}+\frac{b\left(-\frac{B}{b}+1\right)\left(-4B\beta_2y^2+\frac{4b^2\beta_2y^2\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}+1\right)}{2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)}+1\right)}{2\left(2B-b\left(-\frac{B}{b}-1\right)\right)}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{12} = & b^2 \beta_2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) \left(\frac{4B^2 b \beta_2^2 y^4 \left(-\frac{B}{b} + 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} + 4B^2 \beta_2^2 y^4 \right. \\
& - \frac{12Bb^3 \beta_2^2 y^4 \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{\left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right)^2} - \frac{12Bb^2 \beta_2^2 y^4 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} \\
& - \frac{7Bb \beta_2 y^2 \left(-\frac{B}{b} + 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} - 7B \beta_2 y^2 + \frac{6b^5 \beta_2^2 y^4 \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)^2}{\left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right)^3} \\
& + \frac{6b^4 \beta_2^2 y^4 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)^2}{\left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right)^2} + \frac{2b^3 \beta_2^2 y^4 \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} \\
& + \frac{7b^3 \beta_2 y^2 \left(-\frac{B}{b} + 1 \right) \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{\left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right)^2} + 2b^2 \beta_2^2 y^4 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right) \\
& \left. + \frac{7b^2 \beta_2 y^2 \left(\frac{B^2}{b^2} - 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} + \frac{b \left(-\frac{B}{b} + 1 \right)}{2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right)} + 1 \right) \Bigg/ \left(2B - b \left(-\frac{B}{b} - 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|Q| - |R| = & \frac{g_{03}g_{21}}{32} + \frac{g_{03}g_{02}^2}{16} + \frac{g_{03}g_{02}g_{11}}{32} + \frac{g_{03}g_{02}g_{20}}{16} + \frac{3g_{03}g_{11}g_{20}}{32} + \frac{g_{12}^2}{8} + \frac{g_{21}g_{02}g_{11}}{64} + \frac{g_{21}g_{02}g_{20}}{32} \\
& + \frac{g_{21}g_{11}^2}{64} + \frac{g_{30}^2}{8} + \frac{g_{30}g_{02}g_{20}}{8} + \frac{g_{30}g_{11}^2}{16} + \frac{g_{30}g_{11}g_{20}}{16} + \frac{g_{30}g_{20}^2}{4} + \frac{g_{02}^3g_{11}}{16} + \frac{g_{02}^3g_{20}}{8} + \frac{3g_{02}^2g_{11}g_{20}}{16} + \frac{g_{02}^2g_{20}^2}{8} + \frac{g_{02}g_{11}^2g_{20}}{16} \\
& + \frac{3g_{02}g_{11}g_{20}^2}{16} + \frac{g_{02}g_{20}^3}{8} + \frac{g_{11}^2g_{20}^2}{16} + \frac{g_{11}g_{20}^3}{16} + \frac{g_{20}^4}{8} \\
& - \frac{g_{03}g_{11}^2}{32} - \frac{g_{12}g_{30}}{4} - \frac{g_{12}g_{02}g_{20}}{8} - \frac{g_{12}g_{11}^2}{16} - \frac{g_{12}g_{11}g_{20}}{16} - \frac{g_{12}g_{20}^2}{4} - \frac{g_{21}^2}{64} - \frac{g_{21}g_{02}^2}{32} - \frac{3g_{21}g_{11}g_{20}}{64}
\end{aligned}$$