

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Guilherme Corrêa Silva

Solução geral das equações de Euler - Poisson de um corpo com simetria axial

Juiz de Fora

2025

Guilherme Corrêa Silva

Solução geral das equações de Euler - Poisson de um corpo com simetria axial

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Alexei A. Deriglazov

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Silva, Guilherme Corrêa.

Solução geral das equações de Euler - Poisson de um corpo com simetria axial / Guilherme Corrêa Silva. – 2025.

102 f. : il.

Orientador: Alexei A. Deriglazov

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2025.

1. Sistemas vinculados. 2. Problema variacional. 3. Formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano. 4. Corpo em rotação. 5. Equações de Euler - Poisson. 6. Soluções exatas.

Guilherme Corrêa Silva

Solução geral das equações de Euler - Poisson de um corpo com simetria axial

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 08 de agosto de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexei Anatolevich Deriglazov - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Walberto Guzmán Ramírez

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)

Prof. Dr. Andrey M. Pupasov-Maksimov

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Juiz de Fora, 04/08/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Alexei Anatolevich Deriglazov, Membro**, em 08/08/2025, às 18:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andrey Pupasov Maksimov, Professor(a)**, em 11/08/2025, às 07:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Walberto Guzmán Ramírez, Usuário Externo**, em 11/08/2025, às 10:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Uffj (www2.uffj.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2528096** e o código CRC **A7137AAA**.

AGRADECIMENTOS

O trabalho foi financiado pela fundação brasileira CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil).

RESUMO

As equações de Euler-Poisson descrevem a evolução temporal da orientação de um corpo rígido por meio da matriz de rotação e dos componentes da velocidade angular, regidas por equações diferenciais de primeira ordem. De acordo com o teorema de Cauchy-Kovalevskaya, essas equações podem ser resolvidas expressando suas soluções como séries de potências no parâmetro de evolução. Neste trabalho, obtemos a solução geral deste sistema de 12 equações em funções elementares por meio de um cálculo direto, derivando a soma dessas séries para o caso de um corpo rígido simétrico livre, sem utilizar os ângulos de Euler. Esses resultados foram recentemente publicados em revista internacional: Guilherme Corrêa Silva, *General solution to Euler - Poisson equations of a free symmetric rigid body by direct summation of power series*, Archive of Applied Mechanics (2025) 96:68, <https://doi.org/10.1007/s00419-025-02774-y>. Os resultados são consistentes com estudos anteriores, oferecendo uma nova perspectiva (a última em ênfase) sobre a resolução das equações de Euler-Poisson. Além disso, fornecemos uma análise detalhada da dinâmica de um corpo rígido, tratando-o como um sistema sujeito a vínculos cinemáticos. Derivamos todas as quantidades e propriedades fundamentais de um corpo rígido, junto com suas equações de movimento e quantidades conservadas, por meio de cálculos diretos e claros do problema variacional, utilizando as técnicas estabelecidas da mecânica clássica.

Palavras-chave: Sistemas vinculados, Problema variacional, Formalismo Lagrangiano e Hamiltoniano, Corpo em rotação, Equações de Euler - Poisson, Soluções exatas.

ABSTRACT

Euler-Poisson equations describe the temporal evolution of a rigid body's orientation through the rotation matrix and angular velocity components, governed by first-order differential equations. According to the Cauchy-Kovalevskaya theorem, these equations can be solved by expressing their solutions as power series in the evolution parameter. In this work, we obtain the general solution to this system in elementary functions by direct computation, deriving the sum of these series for the case of a free symmetric rigid body, without using euler angles. This results are recently published in an international journal: Guilherme Corrêa Silva, *General solution to Euler - Poisson equations of a free symmetric rigid body by direct summation of power series*, Archive of Applied Mechanics (2025) 96:68, <https://doi.org/10.1007/s00419-025-02774-y>. The results are consistent with previous studies, offering a new perspective (the last one in emphasis) on solving the Euler-Poisson equations. In addition, we provide a thorough analysis of the dynamics of a rigid body, treating it as a system subject to kinematic constraints. We derive all the fundamental quantities and properties of a rigid body, along with its equations of motion and conserved quantities, through direct and clear calculations from the variational problem, using the established techniques of classical mechanics.

Keywords: Constrained systems, Variational Problem, Lagrangian and Hamiltonian formalism, Euler - Poisson equations, rotationing body, Exact Solutions.

LISTA DE SÍMBOLOS

Notação. Vetores são denotados por letras em negrito. Por exemplo: $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^3$. Letras maiúsculas do alfabeto latino $N, P, A, B, \dots$ ou letras gregas $\alpha, \beta, \dots$ são usadas para rotular partículas. Por exemplo: $\mathbf{y}_N, \mathbf{x}_\alpha, \dots$ são pontos (partículas) em $\mathbb{R}^3$. Letras latinas $i, j, k, \dots$ usadas para rotular coordenadas. Por exemplo: y_N^i são as coordenadas do vetor $\mathbf{y}_N$.

A soma sobre partículas é sempre declarada explicitamente: $\sum_{N=1}^n m_N \mathbf{y}_N$. Os índices latinos repetidos são somados, salvo indicação em contrário: $\epsilon_{ijk} y_N^j y_P^k = \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} y_N^j y_P^k$.

Notação para o produto escalar: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_i b_i$. Notação para o produto vetorial: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$, onde ϵ_{ijk} é o símbolo Levi-Chivita em três dimensões, com $\epsilon_{123} = +1$.

Lembre-se de que os conjuntos de três vetores e matrizes antissimétricas 3×3 são equivalentes, dado o isomorfismo que existe entre os dois espaços. Em particular dada $\hat{\omega} \in \text{Ant}[M_{3 \times 3}(\mathbb{R})]$ (definimos $\text{Ant}[M_{3 \times 3}(\mathbb{R})]$ com o conjunto das matrizes 3×3 antissimétricas) correspondente a $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$, então para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, temos $\hat{\omega} \mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}]$. A relação entre $\hat{\omega}$ e $\boldsymbol{\omega}$ são explicitadas abaixo:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Para as componentes, obtemos

$$\hat{\omega}_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega_k, \quad \omega_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kij} \hat{\omega}_{ij}. \quad (2)$$

Pela definição $\det B = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} B_{ia} B_{jb} B_{kc} \epsilon_{abc}$, nós obtemos a útil identidade

$$\epsilon_{abc} = (\det B)^{-1} \epsilon_{ijk} B_{ia} B_{jb} B_{kc}. \quad (3)$$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	Metodologia	19
3	Problema variacional inicial, graus de liberdade translacional e rotacional.	25
4	Base ortonormal rigidamente conectada ao corpo em movimento.	31
5	Velocidade angular, matriz de massa e tensor de inércia. . . .	35
6	Problema variacional e Equações Lagrangianas de segunda ordem para graus de liberdade rotacionais.	43
7	Forma de primeira ordem das equações de movimento e as equações de Euler-Poisson.	49
8	Imagem qualitativa do movimento de acordo com Poincaré. . .	55
9	Discussão sobre equações de movimento.	59
10	Exemplos de soluções em funções elementares.	63
11	Peão livre de Lagrange via ângulos de Euler	71
12	Notação e equações básicas do problema	79
13	Solução geral para equações de Poisson usando integrais de movimento	81
14	Solução geral para equações de Poisson por soma direta de séries para todos R_{ij}	87
15	Conclusão.	91
	APÊNDICE A – Propriedades das séries $e^{th^k(z_0^j)\frac{\partial}{\partial z_0^k}}z_0^i$	93
	REFERÊNCIAS	99

1 INTRODUÇÃO

A descrição da dinâmica de corpos rígidos, com equações de movimento formuladas em termos de graus de liberdade independentes, foi desenvolvida por Euler, Lagrange e Poisson nos primeiros passos da mecânica clássica (1, 2, 3). Hoje, esse tema faz parte dos capítulos tradicionais nos livros de mecânica clássica (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). Ainda assim, construir uma apresentação didática e sistemática dessas equações permanece uma tarefa difícil (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18). Como afirmam J. E. Marsden, D. D. Holm e T. S. Ratiu em 1998 (19): "Já estava claro no século passado que certos sistemas mecânicos resistem ao formalismo canônico usual, seja hamiltoniano ou lagrangiano, apontado no primeiro parágrafo. O corpo rígido fornece um exemplo elementar disso." O movimento de corpos rígidos é um dos temas clássicos mais ricos e elegantes da mecânica. Mesmo sendo um modelo idealizado, em que se assume que as distâncias entre quaisquer dois pontos do corpo permanecem constantes ao longo do tempo, ele fornece uma descrição extremamente útil e precisa para o comportamento de muitos sistemas físicos reais, tais como o movimento de um peão em um campo gravitacional, o de uma bola carregada sob efeito de um campo magnético ou até mesmo um cilindro pesado girando no plano. Essa rigidez interna impõe restrições que reduzem os graus de liberdade do sistema, tornando possível uma formulação matemática clara e bem definida do seu movimento.

Neste trabalho, interessam-nos os corpos rígidos em movimento livre, isto é, sem a ação de forças ou torques externos. Nessa situação, o sistema evolui unicamente de acordo com suas condições iniciais e com as restrições impostas pela rigidez. A análise desse caso revela aspectos fundamentais da dinâmica, em especial no que diz respeito ao movimento do corpo em torno do seu centro de massa. Como não há interação externa, tanto o momento linear quanto o momento angular do sistema são conservados, e essas leis de conservação orientam toda a sua trajetória no espaço.

A posição e orientação de um corpo rígido podem ser descritas, respectivamente, pelo vetor do centro de massa e por uma rotação no espaço, geralmente representada por uma matriz do grupo $SO(3)$. No caso livre, o centro de massa simplesmente se move em linha reta com velocidade constante, o que torna a parte rotacional do movimento a mais interessante e desafiadora de analisar. O movimento do corpo é então regida pelas chamadas equações de Euler, que descrevem a variação do momento angular no referencial que gira com o próprio corpo e envolvem o tensor de inércia, um objeto central nesta teoria.

Dentre os corpos rígidos, aqueles que possuem simetrias geométricas particulares, como um eixo de simetria, ocupam um papel especial. Quando o tensor de inércia apresenta dois ou três momentos principais iguais, o comportamento rotacional se simplifica de maneira notável, revelando padrões como rotações estáveis em torno de certos eixos ou

movimentos de precessão em torno de outros, como veremos nessa dissertação. O estudo desses casos simétricos, além de fornecer soluções mais acessíveis, ajuda a iluminar os princípios gerais que regem o movimento rotacional.

No caso de um *corpo rigidamente esférico*, isto é, com os três momentos de inércia principais iguais, o movimento rotacional é particularmente simples. A isotropia do tensor de inércia implica que o momento angular é sempre paralelo ao vetor velocidade angular, independentemente da orientação do corpo. Como consequência, a rotação ocorre em torno de um eixo fixo no espaço, e o corpo mantém sua orientação relativa a esse eixo ao longo do tempo. Não há precessão espontânea nem instabilidade dinâmica, e o movimento é puramente uniforme se não houver torques externos. Essa configuração idealizada é matematicamente conveniente e serve como referência para entender casos mais gerais.

Para um *corpo simétrico*, caracterizado por dois momentos de inércia principais iguais e um diferente (por exemplo, $I_1 = I_2 \neq I_3$), o movimento rotacional exibe características mais ricas. Se o corpo gira em torno de seu eixo de simetria (o eixo associado ao momento de inércia distinto), o movimento é uniforme e estável. No entanto, se a rotação ocorre em torno de um dos eixos perpendiculares, o corpo apresenta precessão: o eixo de rotação descreve um cone ao redor do momento angular. Esse tipo de corpo, como um pião simétrico, pode exibir movimentos como precessão regular e nutação, dependendo das condições iniciais e da presença de forças externas.

Já um *corpo assimétrico*, em que os três momentos de inércia principais são distintos ($I_1 \neq I_2 \neq I_3$), apresenta a dinâmica rotacional mais complexa entre os três casos. O movimento espontâneo de rotação pode ser instável, especialmente se o corpo gira em torno do eixo intermediário (associado ao valor médio dos momentos de inércia). Essa instabilidade é dita no sentido que pequenas perturbações no eixo de rotação podem causar grandes variações no comportamento rotacional ao longo do tempo. O vetor momento angular deixa de ser fixo no corpo e no espaço, e a trajetória do vetor velocidade angular sobre a esfera de energia pode apresentar comportamentos não triviais, como movimentos quase periódicos ou caóticos em certos regimes.

Comparando esses três tipos de corpos, a principal diferença está na *estrutura do tensor de inércia* e em como isso influencia a *estabilidade e a complexidade do movimento rotacional*. Enquanto o corpo esférico apresenta o comportamento mais simples, com rotação estável e uniforme, o corpo simétrico já admite movimentos como precessão e nutação, mesmo na ausência de torques externos. No caso do corpo assimétrico, o movimento é sensível às condições iniciais, podendo ser instável e intrinsecamente mais complexo. Assim, a simetria do tensor de inércia desempenha um papel central na caracterização qualitativa e quantitativa da dinâmica de um corpo rígido.

O objetivo desta dissertação é explorar a dinâmica de corpos rígidos em movimento livre, com ênfase na estrutura geométrica do sistema e nos princípios de conservação que

emergem da ausência de interações externas. A abordagem será baseada em métodos variacionais e procurará destacar o papel da simetria, do tensor de inércia e do momento angular na determinação da evolução do sistema. O caso de corpos simétricos será analisado em maior detalhe, tanto pelo interesse teórico quanto pela clareza com que ilustra os aspectos fundamentais do problema.

2 Metodologia

Neste trabalho, adotamos como ponto de partida a formulação variacional da mecânica clássica, cujo arcabouço matemático é estabelecido a partir do cálculo das variações (38). Para isso, consideramos um sistema mecânico com um conjunto de coordenadas generalizadas $q^A(t)$, onde o índice A varia sobre um conjunto finito de graus de liberdade do sistema. Suponha que a dinâmica seja governada por uma função lagrangiana $L(q^A, \dot{q}^A)$, definida sobre o fibrado tangente do espaço de configurações. Essa lagrangiana incorpora toda a informação dinâmica relevante, normalmente representando a diferença entre a energia cinética e a energia potencial do sistema.

As equações de movimento que descrevem a trajetória física do sistema no espaço de configurações são dadas pelas equações de Euler–Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^A} = 0. \quad (2.1)$$

Essas equações são derivadas a partir de um princípio variacional, o princípio de Hamilton, segundo o qual a trajetória real de um sistema físico entre dois instantes fixos de tempo é aquela que torna estacionário um funcional chamado de ação.

De um ponto de vista mais formal, esse princípio surge da seguinte forma: consideramos o espaço das curvas suaves $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ da forma $\gamma(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t))$ onde estão definidas funções $q^i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Um funcional Φ será entendido, neste contexto, como uma aplicação que associa a cada curva diferenciável γ um número real. No caso específico da mecânica lagrangiana, esse funcional é a ação do sistema, dada por

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q^A, \dot{q}^A) dt, \quad (2.2)$$

onde $q^A(t)$ representa genericamente as coordenadas de configuração ao longo do tempo e $\dot{q}^A(t)$ suas derivadas temporais. Supomos que a função lagrangiana L seja de classe C^∞ em todas as suas variáveis, garantindo a diferenciabilidade do funcional.

A variação da curva γ é modelada por uma perturbação infinitesimal $\gamma + h$, onde h é também uma curva diferenciável com a mesma regularidade, chamada de variação admissível. Para que a variação da ação Φ seja bem definida e interpretável como diferencial funcional, assumimos que Φ seja diferenciável no seguinte sentido: Diz-se que um funcional Φ é diferenciável se, para toda curva suave γ , existe uma decomposição da variação $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F(h^A) + R(h^A, \gamma)$, onde $F(h^A)$ é linear para cada h^A e o termo de erro $R(h^A, \gamma)$ é de ordem superior, isto é, $R = O(h^2)$. De maneira mais precisa, para variações suficientemente pequenas, satisfazendo $|h| < \epsilon$ e $\left| \frac{dh}{dt} \right| < \epsilon$, existe uma constante $C > 0$ tal que $|R| < C\epsilon^2$, para ϵ dado arbitrariamente.

Sob essas hipóteses, a primeira variação da ação, ou seja, a diferencial funcional, é

dada pela seguinte expressão:

$$F(h^A) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^A} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \right) h^A dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} h^A \right) \Big|_{t_0}^{t_1}. \quad (2.3)$$

A obtenção dessa expressão envolve dois passos essenciais: primeiro, a linearização do funcional Φ em torno da curva γ , utilizando a regularidade da lagrangiana L ; e segundo, a aplicação da fórmula de integração por partes para isolar os termos que dependem da derivada de h . Esse processo permite separar os termos que dependem apenas da variação no interior do intervalo de tempo daqueles associados às extremidades t_0 e t_1 .

A equação de Euler–Lagrange (2.1) surge naturalmente ao impormos as chamadas variações fixas: $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Com essa condição, o termo de contorno na expressão da primeira variação desaparece. Aplicando o princípio da mínima ação, ou seja, exigindo que a primeira variação da ação se anule para todas as variações admissíveis, concluímos que o integrando deve ser identicamente nulo, o que conduz diretamente à equação (2.1).

Esse procedimento representa o tratamento tradicional de sistemas mecânicos regulares, onde o hessiano da lagrangiana em relação às velocidades, $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B}$, é não degenerado ($\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^A \partial \dot{q}^B} \neq 0$). Em contextos mais gerais, como ocorre em sistemas com vínculos ou com simetrias locais, essa condição de regularidade pode falhar, tornando necessário um tratamento alternativo baseado em técnicas geométricas e diferenciais.

Sistemas com vínculos e lagrangianas degeneradas. Em muitos problemas da mecânica clássica, os sistemas não estão completamente livres para se mover em qualquer direção: eles obedecem a certos vínculos, que limitam suas configurações ou suas velocidades. Quando esses vínculos estão presentes, a lagrangiana do sistema pode se tornar *degenerada*, no sentido de que não é possível obter diretamente as equações de movimento apenas usando a forma tradicional das equações de Euler–Lagrange. Nessas situações, dizemos que o sistema é *singular*, e uma abordagem mais geral se faz necessária.

Neste trabalho, seguimos a formulação geométrica proposta por V. I. Arnold em (9). Em vez de tratarmos a dinâmica apenas com coordenadas generalizadas, consideramos que o espaço das configurações do sistema, chamado de Q , é uma variedade diferenciável. A lagrangiana é, então, interpretada como uma função suave definida no fibrado tangente¹ TQ , que é o espaço das velocidades admissíveis. Ou seja,

$$L : TQ \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(q, \dot{q}) = L(q^A, \dot{q}^A), \quad (2.4)$$

onde $(q^A, \dot{q}^A)$ representam coordenadas locais no fibrado tangente. A evolução do sistema corresponde, então, a curvas nesse fibrado tangente que satisfazem certas condições derivadas da lagrangiana.

¹ O fibrado tangente é o espaço onde vivem as posições e velocidades de um sistema mecânico, ponto a ponto da variedade de configurações.

Quando há vínculos, eles podem ser representados por uma subvariedade $C \subset TQ$, que reúne todos os vetores tangentes (ou velocidades) que são compatíveis com as restrições impostas. No caso de vínculos holonômicos, que dependem apenas da posição, essa subvariedade corresponde às soluções dos vínculos $f^\alpha(q) = 0$. Já para vínculos não holonômicos, que envolvem também as velocidades, os vínculos são escritos na forma $\chi_\alpha(q, \dot{q}) = 0$, $\alpha = 1, \dots, r$. Essas equações definem um subconjunto do espaço TQ onde o movimento é possível, mas, diferentemente do caso holonômico, esse conjunto geralmente não é integrável.

Para incorporar os vínculos no cálculo variacional, introduzimos multiplicadores de Lagrange no funcional ação. Assim, a ação modificada toma a forma (9, 22):

$$S = \int dt \ L(q^A, \dot{q}^A) - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \chi_{\alpha}(q^A). \quad (2.5)$$

onde as funções $\lambda_{\alpha}(t)$ são determinadas junto com a solução da trajetória, quando possível. Em todos os cálculos eles devem ser tratados em pé de igualdade com $q^A(t)$. A variação em relação a λ_{α} implica $\chi_{\alpha}(q^A) = 0$, ou seja, as restrições surgem como parte de condições de extremo do funcional de ação. Portanto a presença de λ_{α} permite que q^A sejam tratados como variáveis independentes, que devem ser variadas independentemente na obtenção das equações de movimento. A exigência de que esse funcional seja estacionário, considerando apenas variações compatíveis com os vínculos, leva a um sistema aumentado de equações diferenciais, que descrevem completamente a evolução do mesmo.

Essa maneira de lidar com sistemas singulares também se conecta com a formulação hamiltoniana para sistemas com vínculos, desenvolvida por Dirac (20, 21, 22). No entanto, neste trabalho nos concentramos apenas na abordagem lagrangiana, que é suficiente para descrever os sistemas de interesse, especialmente corpos rígidos com vínculos.

Essa formulação mais geral, baseada em geometria diferencial e cálculo variacional, nos permite tratar de forma unificada tanto sistemas regulares quanto sistemas com vínculos. Ela fornece uma base conceitual sólida para analisar o movimento de corpos rígidos com simetria ou restrições, que é justamente o foco desta dissertação.

Neste trabalho seguimos a metodologia acima para o caso de um corpo rígido, considerado como um sistema com restrições. Será mostrado que todas as quantidades básicas, equações de movimento e integrais de movimento decorrem deste formalismo de uma forma sistemática e natural. Isto pode ser comparado com a abordagem padrão (5, 6, 8, 7), onde uma série de postulados devem ser assumidos: sobre o comportamento do centro de massa, bem como sobre a conservação da energia e do momento angular. Embora este trabalho seja principalmente de natureza pedagógica, na Conclusão elencamos uma série de propriedades específicas da teoria do corpo rígido, que nem sempre são levadas em consideração na literatura, na formulação das leis do movimento e na sua aplicação.

Corpo Rígido. De acordo com o teorema da rotação de Euler (30, 9, 31, 8, 7, 32),

a evolução temporal de um ponto $\mathbf{y}(t)$ do corpo rígido em movimento livre pode ser apresentada da seguinte forma

$$y^i(t) = y_c^i + v_c^i t + R_{ij}(t)x^j(0). \quad (2.6)$$

Nesta expressão, o termo $y_c^i + v_c^i t$ descreve o movimento retilíneo do centro de massa, $R_{ij}(t)$ é uma matriz ortogonal e $x^j(0)$ são coordenadas do ponto em relação ao centro de massa em $t = 0$. O teorema de Euler reduz assim o problema de descrever o movimento de um corpo à busca da dependência do tempo da matriz de rotação $R_{ij}(t)$. Ela contém todas as informações sobre a evolução do corpo no referencial do Laboratório (fixo no espaço), no qual o corpo é observado.

A evolução temporal da matriz de rotação pode ser obtida a partir das equações de Euler-Poisson

$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = [I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}], \quad (2.7)$$

$$\dot{R}_{ij} = -\epsilon_{jkm}\Omega_k R_{im}, \quad (2.8)$$

onde I é o tensor de inércia, e as variáveis dinâmicas $\Omega_i(t)$ acabam sendo componentes da velocidade angular no referencial fixo ao corpo. A fórmula (2.6) implica (31) que as equações de Euler-Poisson devem ser resolvidas com dados iniciais universais para a matriz de rotação: $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Soluções com outras condições iniciais não descrevem os movimentos do corpo rígido. Os dados iniciais para $\Omega_i(t)$ podem ser quaisquer três números: $\Omega_i(0) = \Omega'_i = \text{const.}$ Eles determinam a velocidade angular inicial do corpo.

Em vários estudos recentes, a dinâmica da rotação de corpos rígidos sob a influência de forças externas e internas é explorada através de vários sistemas e condições físicas (55). Esses sistemas incluem corpos sujeitos a torques girostáticos, campos eletromagnéticos, forças externas constantes e variáveis no tempo e efeitos resistivos de meios viscosos. Soluções analíticas para parâmetros-chave, como velocidades angulares, ângulos de Euler e critérios de estabilidade, são derivadas, com diagramas de fase e simulações numéricas usadas para avaliar o movimento e a estabilidade desses corpos. Além disso, é abordado o impacto das forças aplicadas no equilíbrio e na periodicidade do movimento do corpo, com particular relevância para aplicações práticas em sistemas mecânicos, naves espaciais e tecnologia de satélites. Essas investigações fornecem informações valiosas sobre o comportamento de corpos rígidos em movimento rotacional, contribuindo para avanços em campos como aeroespacial, engenharia mecânica e astrofísica.

Neste trabalho consideramos um corpo simétrico com momentos de inércia principais $I_1 = I_2 \neq I_3$. Sabe-se que, neste caso, o movimento mais geral do corpo é uma precessão regular: um corpo simétrico gira uniformemente em torno do terceiro eixo de inércia enquanto este eixo precessa com velocidade angular uniforme em torno do eixo do momento angular conservado. Existem diversas possibilidades para chegar a esse resultado. A

maneira tradicional é resolver as equações (2.7) e (2.8) reescrevendo-as através dos ângulos de Euler, e no referencial do Laboratório com um terceiro eixo direcionado ao longo do vetor de momento angular conservado (7). Algumas características específicas da dinâmica de corpos rígidos, que devem ser levadas em consideração neste método, são discutidas em trabalhos recentes (33, 34).

Outra possibilidade foi apresentada em (35), onde a forma explícita da matriz de rotação através de funções elementares foi obtida pela resolução das equações (2.7) e (2.8) sem assumir qualquer tipo de parametrização como ângulos de Euler. Isto foi conseguido reduzindo o problema original ao problema do movimento de um oscilador harmônico unidimensional sob a ação de uma força externa constante. Este método também permite encontrar soluções particulares em funções elementares em diversos problemas mais complexos, incluindo os casos de pião dançante (36), peão de Lagrange (33) e corpo simétrico livre em campos elétricos e magnéticos estacionários e homogêneos (37).

No presente trabalho exploramos mais uma possibilidade baseada em uma fórmula notável (2.10), que, em nossa opinião, é injustamente esquecida e ignorada nos estudos sobre dinâmica de corpos rígidos. As equações de Euler-Poisson pertencem à seguinte classe de equações diferenciais autônomas

$$\dot{z}^i = h^i(z^j), \quad i, j = 1, 2, \dots, p, \quad (2.9)$$

para determinar linhas integrais $z^i(t)$ de um determinado campo vetorial $h^i(z^j)$. Sabe-se (38, 39, 40, 41, 42, 43, 44) que a seguinte família de funções:

$$z^i(t, z_0^j) = e^{th^k(z_0^j)\frac{\partial}{\partial z_0^k}} z_0^i, \quad \text{onde} \quad e^{th^k(z_0^j)\frac{\partial}{\partial z_0^k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(h^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k} \right)^n, \quad (2.10)$$

parametrizada pelos n parâmetros z_0^i , representa sua solução geral. Esta é uma consequência imediata das seguintes propriedades do operador diferencial $e^{th^k(z_0^j)\frac{\partial}{\partial z_0^k}}$:

$$e^{th^k\frac{\partial}{\partial z_0^k}} f(z_0^i) = f(e^{th^k\frac{\partial}{\partial z_0^k}} z_0^i) = f(z^i(t, z_0^j)), \quad (2.11)$$

$$\dot{z}^i(t, z_0^j) = \frac{d}{dt} \left(e^{th^k\frac{\partial}{\partial z_0^k}} z_0^i \right) = e^{th^k\frac{\partial}{\partial z_0^k}} \left[\left(h^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k} \right) z_0^i \right] = e^{th^k\frac{\partial}{\partial z_0^k}} h^i(z_0^j), \quad (2.12)$$

onde $f(z_0^i)$ é uma função analítica. Além disso, o teorema de Cauchy-Kovalevskaya (42, 39, 40, 41, 43) garante a convergência da série (2.10) em alguma vizinhança de $t = 0$.

Portanto, não é necessário resolver diretamente o sistema (2.7) e (2.8) de uma ou de outra forma. Em vez disso, podemos calcular a forma explícita dos termos da série (2.10) e então tentar somá-los. Como mostraremos a seguir, para o caso de um corpo simétrico livre isso acaba sendo possível, levando à sua matriz de rotação em termos de funções elementares. Mais detalhes sobre (2.10) podem ser vistos no apêndice A.

3 Problema variacional inicial, graus de liberdade translacional e rotacional.

Considere um sistema de $n \geq 4$ partículas, cujas posições são descritas pelos vetores $\mathbf{y}_N(t) = (y_N^1(t), y_N^2(t), y_N^3(t))$, com massas m_N , onde $N = 1, 2, \dots, n$, e que não estão todas contidas em um mesmo plano. Chamamos esse sistema de corpo rígido quando as distâncias e os ângulos entre as partículas permanecem constantes no tempo, ou seja,

$$(\mathbf{y}_N(t) - \mathbf{y}_K(t), \mathbf{y}_P(t) - \mathbf{y}_M(t)) = \text{constante}. \quad (3.1)$$

Nosso objetivo é determinar as equações de movimento que governam as trajetórias $\mathbf{y}_N(t)$ de todas as partículas, assumindo que suas posições e velocidades iniciais são conhecidas. Denotamos as posições iniciais por $\mathbf{y}_N(0) = \mathbf{c}_N$, em que os componentes c_N^i formam um conjunto de $3n$ números dados, e indicamos por $\mathbf{v}_N$ as velocidades iniciais das partículas.

Número de graus de liberdade independentes de um corpo rígido. Nem todos os vínculos da equação (3.1) são independentes entre si — muitos são consequência de outros. Podemos selecionar um subconjunto de vínculos independentes que impõe $3n - 6$ restrições, o que nos permite reescrever as trajetórias $\mathbf{y}_N(t)$ em termos de apenas seis funções, que não estão sujeitas a vínculos adicionais. Isso significa que, para descrever completamente a dinâmica do corpo rígido, basta conhecer a evolução temporal dessas seis funções. Por esse motivo, dizemos que um corpo rígido possui seis graus de liberdade independentes.

Para tornar essa representação mais concreta, escolhamos quatro partículas $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ e $\mathbf{y}_4$ que não estão em um mesmo plano. Assim, os vetores $\mathbf{z}_2 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_3 = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1$ e $\mathbf{z}_4 = \mathbf{y}_4 - \mathbf{y}_1$ são linearmente independentes (ver Figura 1).

Apresentamos agora o conjunto de vetores formado por $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{z}_N = \mathbf{y}_N - \mathbf{y}_1$, para $N = 2, 3, \dots, n$. Com essa mudança de variáveis, os vínculos da equação (3.1) podem ser reescritos como:

$$(\mathbf{z}_N, \mathbf{z}_P) = \text{constante}, \quad (\mathbf{z}_N - \mathbf{z}_K, \mathbf{z}_P - \mathbf{z}_M) = \text{constante}. \quad (3.2)$$

Vamos considerar o subconjunto dos vínculos que envolvem apenas os vetores $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ e $\mathbf{z}_4$:

$$(\mathbf{z}_A, \mathbf{z}_B) = a_{AB}, \quad A, B = 2, 3, 4, \quad (3.3)$$

$$(\mathbf{z}_A, \mathbf{z}_\alpha) = a_{A\alpha}, \quad \alpha = 5, 6, \dots, n. \quad (3.4)$$

Os vetores $\mathbf{z}_A$ são linearmente independentes, de modo que $\det a \neq 0$. As equações (3.3) impõem as restrições sobre os comprimentos dos três vetores $\mathbf{z}_A$ e os ângulos entre eles, totalizando 6 vínculos. Já as equações (3.4) determinam os produtos escalares

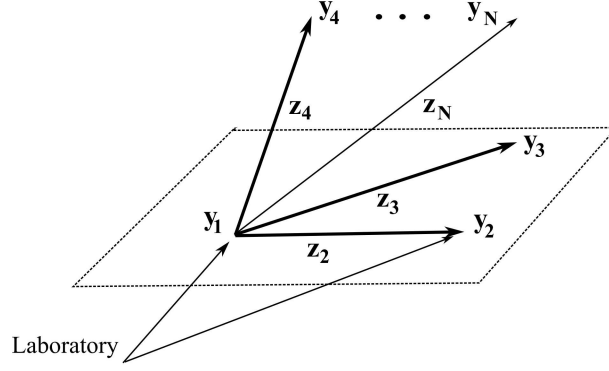


Figura 1 – Vetores linearmente independentes $\mathbf{z}_2(t)$, $\mathbf{z}_3(t)$ and $\mathbf{z}_4(t)$ conectando quatro pontos do corpo.

entre cada um dos $n - 4$ vetores $\mathbf{z}_\alpha$ e os vetores $\mathbf{z}_A$, fornecendo $3(n - 4)$ vínculos adicionais. Assim, temos ao todo $3(n - 4) + 6 = 3n - 6$ vínculos independentes.

Por construção, os vínculos restantes na equação (3.2) não impõem restrições adicionais aos vetores $\mathbf{z}_A$, e tampouco há vínculos sobre o vetor $\mathbf{y}_1$. Podemos então escrever cada vetor $\mathbf{z}_\alpha$ como combinação linear da base $\{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$:

$$\mathbf{z}_\alpha = k_\alpha^2 \mathbf{z}_2 + k_\alpha^3 \mathbf{z}_3 + k_\alpha^4 \mathbf{z}_4. \quad (3.5)$$

Ao tomarmos os produtos escalares da equação (3.5) com $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$ e $\mathbf{z}_4$, obtemos um sistema linear cujas soluções nos fornecem os coeficientes k_α^A em termos dos produtos escalares conhecidos a_{AB} e $a_{A\alpha}$. Especificamente,

$$k_\alpha^A = a_{AB}^{-1} a_{B\alpha}.$$

Com isso, todos os vetores $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ podem ser expressos em termos de $\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ e $\mathbf{z}_4$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2 &= \mathbf{y}_1 + \mathbf{z}_2, \\ \mathbf{y}_3 &= \mathbf{y}_1 + \mathbf{z}_3, \\ \mathbf{y}_4 &= \mathbf{y}_1 + \mathbf{z}_4, \\ \mathbf{y}_\alpha &= \mathbf{y}_1 + k_\alpha^A \mathbf{z}_A. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Note que há 6 vínculos da forma (3.3) sobre as 9 componentes dos vetores $\mathbf{z}_A$, o que implica a existência de $9 - 6 = 3$ graus de liberdade independentes associados à orientação do triângulo rígido definido por $\mathbf{z}_A$. Esses três parâmetros independentes podem, por exemplo, ser representados pelos ângulos de Euler. Além disso, há mais três graus de liberdade associados às componentes do vetor $\mathbf{y}_1$, que define a posição do sistema no espaço. Portanto, o sistema possui ao todo seis graus de liberdade independentes.

Problema variacional inicial. Vamos formular o problema variacional Lagrangiano para um corpo rígido. Para isso, reescrevemos as restrições independentes dadas em

(3.3) e (3.4) utilizando as variáveis iniciais, da seguinte forma:

$$(\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_B - \mathbf{y}_1) = a_{AB}, \quad A, B = 2, 3, 4, \quad (3.7)$$

$$(\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_\alpha - \mathbf{y}_1) = a_{A\alpha}, \quad \alpha = 5, 6, \dots, n. \quad (3.8)$$

Essas relações definem uma variedade de dimensão seis no espaço $\mathbb{R}^{3n}$; o corpo rígido é, portanto, representado por um ponto que se move livremente sobre essa superfície.

De acordo com os princípios clássicos da mecânica (9, 22), a ação Lagrangiana associada a esse sistema é dada por

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} \sum_{N=1}^n m_N \dot{\mathbf{y}}_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{A=2}^4 \sum_{N=2}^n \lambda_{AN} ((\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_N - \mathbf{y}_1) - a_{AN}) \right]. \quad (3.9)$$

O primeiro termo representa a energia cinética total das partículas, enquanto o segundo incorpora as restrições impostas à dinâmica. As variáveis auxiliares $\lambda_{AN}(t)$ são os multiplicadores de Lagrange, que devem ser tratados como variáveis dinâmicas em pé de igualdade com os vetores $\mathbf{y}_N(t)$. Ao se derivar as equações de movimento, realizam-se variações tanto com relação a $\mathbf{y}_N$ quanto a λ_{AN} .

O bloco λ_{AB} dos multiplicadores λ_{AN} , correspondente aos índices $A, B = 2, 3, 4$, é escolhido como uma matriz simétrica 3×3 , graças à simetria do produto interno $(\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_B - \mathbf{y}_1)$. As variações da ação com respeito aos multiplicadores λ_{AN} reproduzem as restrições (3.7) e (3.8). Já as variações em relação às coordenadas $\mathbf{y}_N(t)$ conduzem às equações dinâmicas:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{y}}_1 &= - \sum_{AB} \lambda_{AB} (\mathbf{y}_B - \mathbf{y}_1) - \frac{1}{2} \sum_{A\alpha} \lambda_{A\alpha} (\mathbf{y}_A + \mathbf{y}_\alpha - 2\mathbf{y}_1), \\ m_A \ddot{\mathbf{y}}_A &= \sum_B \lambda_{AB} (\mathbf{y}_B - \mathbf{y}_1) + \frac{1}{2} \sum_\alpha \lambda_{A\alpha} (\mathbf{y}_\alpha - \mathbf{y}_1), \\ m_\alpha \ddot{\mathbf{y}}_\alpha &= \frac{1}{2} \sum_A \lambda_{A\alpha} (\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_1). \end{aligned} \quad (3.10)$$

O sistema de coordenadas inercial do centro de massa. Naturalmente, as $3n$ equações obtidas anteriormente para apenas seis graus de liberdade independentes são excessivamente complexas para propósitos práticos de cálculo e análise. Assim, buscamos um conjunto de variáveis mais conveniente para descrever esses seis graus de liberdade.

O primeiro passo consiste em identificar uma função vetorial cuja dinâmica seja simples. Ao somarmos todas as equações em (3.10), obtemos

$$\sum_{N=1}^n m_N \ddot{\mathbf{y}}_N = 0. \quad (3.11)$$

Isso sugere a introdução de um ponto especial — o centro de massa do corpo — definido por

$$\mathbf{y}_0(t) = \frac{1}{M} \sum_{N=1}^n m_N \mathbf{y}_N(t), \quad \text{com } M = \sum_{N=1}^n m_N, \quad \text{de modo que } \ddot{\mathbf{y}}_0 = 0. \quad (3.12)$$

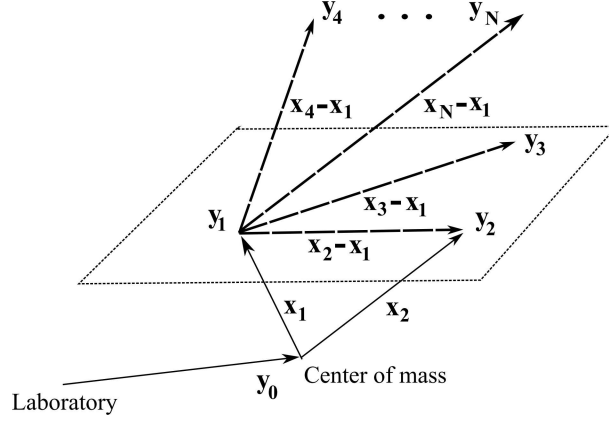


Figura 2 – Posições das partículas com respeito ao Laboratório e ao centro de massa.

Independentemente do tipo de movimento que o corpo realiza livremente, seu centro de massa se move em linha reta com velocidade constante. Como as posições e velocidades iniciais das partículas são conhecidas, podemos determinar as condições iniciais do centro de massa: sua posição inicial é $\mathbf{C}_0 = (\sum m_N \mathbf{c}_N)/M$ e sua velocidade inicial é $\mathbf{V}_0 = (\sum m_N \mathbf{v}_N)/M$. A equação (3.12) então determina a evolução temporal do centro de massa:

$$\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t. \quad (3.13)$$

É vantajoso agora realizar uma mudança de variáveis que introduza explicitamente a posição do centro de massa como uma das coordenadas fundamentais do problema:

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) \longrightarrow \left(\mathbf{y}_0 = \frac{1}{M} \sum_{N=1}^n m_N \mathbf{y}_N(t), \quad \mathbf{x}_P = \mathbf{y}_P - \mathbf{y}_0 \right), \quad P = 1, \dots, n-1. \quad (3.14)$$

As novas variáveis $\mathbf{x}_P$ representam os vetores de posição de $n-1$ partículas em relação ao centro de massa do corpo, conforme ilustrado na Figura 2. A transformação inversa que recupera as posições absolutas $\mathbf{y}_N$ é

$$(\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \longrightarrow \left(\mathbf{y}_P = \mathbf{y}_0 + \mathbf{x}_P, \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{y}_0 - \frac{1}{m_n} \sum_{N=1}^{n-1} m_N \mathbf{x}_N \right), \quad P = 1, \dots, n-1. \quad (3.15)$$

Uma mudança invertível de variáveis pode ser realizada em uma Lagrangiana, e isso é conhecido por fornecer uma formulação equivalente ao problema original (9, 7, 22). Ao expressar a Lagrangiana (3.9) em termos das novas variáveis introduzidas em (3.15), obtemos:

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{y}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{N=1}^n m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{A=2}^4 \sum_{N=2}^n \lambda_{AN} [(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1) - a_{AN}], \quad (3.16)$$

onde adotamos a notação

$$\mathbf{x}_n \equiv -\frac{1}{m_n} \sum_{N=1}^{n-1} m_N \mathbf{x}_N, \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \sum_{N=1}^n m_N \mathbf{x}_N = 0. \quad (3.17)$$

Dessa forma, introduzimos a variável auxiliar $\mathbf{x}_n$ como uma variável independente, e impomos a condição (3.17) como uma restrição adicional, incorporando-a à ação por meio de um multiplicador de Lagrange associado a cada componente de (3.17). De acordo com os resultados clássicos da mecânica, isso conduz a uma Lagrangiana equivalente:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{y}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{N=1}^n m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{A=2}^4 \sum_{N=2}^n \lambda_{AN} [(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1) - a_{AN}] + \boldsymbol{\lambda} \cdot \left(\sum_{N=1}^n m_N \mathbf{x}_N \right), \quad (3.18)$$

a qual envolve $3n + 3$ variáveis dinâmicas independentes: $\mathbf{y}_0$ e os vetores $\mathbf{x}_N$, com $N = 1, 2, \dots, n$, além de $3n - 3$ variáveis auxiliares: os multiplicadores λ_{AN} e $\boldsymbol{\lambda}$.

Observa-se que o centro de massa $\mathbf{y}_0$ aparece apenas no primeiro termo da Lagrangiana. Por isso, a variação da ação com respeito a $\mathbf{y}_0$ reproduz a equação (3.12), cuja solução já é conhecida, conforme a equação (3.13). Costuma-se dizer que as três funções $y_0^i(t)$ descrevem os graus de liberdade translacionais do corpo rígido. Como sua evolução já foi determinada, o primeiro termo de (3.18) será omitido nas análises posteriores.

As demais variáveis $\mathbf{x}_N$ admitem uma interpretação geométrica bastante clara. Consideremos o sistema de coordenadas cuja origem coincide com o centro de massa¹ e cujos eixos permanecem paralelos aos do laboratório. Esse sistema é denominado sistema do centro de massa. Os vetores $\mathbf{x}_N$ definidos na equação (3.14) são precisamente os vetores de posição das partículas do corpo em relação a esse sistema de referência, como ilustrado na Figura 2.

A variação da ação (3.18) em relação às variáveis $\mathbf{x}_N$ fornece as equações dinâmicas:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1^i &= - \sum_{A,B=2}^4 \lambda_{AB} (x_B^i - x_1^i) - \frac{1}{2} \sum_{A,\alpha} \lambda_{A\alpha} (x_A^i + x_\alpha^i - 2x_1^i) + m_1 \lambda^i, \\ m_A \ddot{x}_A^i &= \sum_{B=2}^4 \lambda_{AB} (x_B^i - x_1^i) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=5}^n \lambda_{A\alpha} (x_\alpha^i - x_1^i) + m_A \lambda^i, \\ m_\alpha \ddot{x}_\alpha^i &= \frac{1}{2} \sum_{A=2}^4 \lambda_{A\alpha} (x_A^i - x_1^i) + m_\alpha \lambda^i. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Essas equações são acompanhadas pelas restrições obtidas a partir da variação da ação (3.18) com respeito aos multiplicadores de Lagrange:

$$\sum_{N=1}^n m_N \mathbf{x}_N = 0, \quad (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1) = a_{AN}. \quad (3.20)$$

Integrais de movimento. Para obter uma primeira integral, multiplicamos escalarmente cada equação do sistema (3.19) por $\dot{\mathbf{x}}_N$ e somamos os resultados sobre todos os índices $N = 1, 2, \dots, n$. O lado direito da soma se anula identicamente, o que implica que a

¹ De acordo com a Eq. (3.13), este sistema é inercial.

quantidade

$$E = \frac{1}{2} \sum_{N=1}^n m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2, \quad (3.21)$$

representando a energia cinética rotacional do corpo, permanece constante ao longo do tempo. Ou seja, $\frac{dE}{dt} = 0$.

De maneira análoga, ao tomarmos o produto vetorial das equações com os respectivos vetores $\mathbf{x}_N$ e somarmos sobre N , obtemos a conservação do momento angular do corpo em relação ao centro de massa:

$$\mathbf{m} = \sum_{N=1}^n m_N [\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N], \quad (3.22)$$

satisfazendo $\frac{d\mathbf{m}}{dt} = 0$.

Nota: De acordo com o primeiro teorema de Noether, essas integrais de movimento também podem ser obtidas a partir das simetrias da ação (3.18). A conservação da energia decorre da invariância sob translações no temporais, enquanto a conservação do momento angular está associada à invariância sob rotações. Já a constância da velocidade do centro de massa está relacionada à invariância sob boosts de Galileu. Para mais detalhes, ver seção 7.10 em (22).

4 Base ortonormal rigidamente conectada ao corpo em movimento.

Vamos demonstrar que as distâncias dos pontos do corpo ao centro de massa permanecem constantes ao longo do tempo, isto é,

$$|\mathbf{x}_N(t)| = \text{const.} \quad (4.1)$$

Essa condição significa que o centro de massa (o qual, em geral, não corresponde a um ponto material do corpo) acompanha rigidamente o deslocamento do corpo no espaço. Além disso, a equação (4.1) implica que os ângulos entre os vetores $\mathbf{x}_N(t)$ são preservados.

Com efeito, considere dois vetores quaisquer $\mathbf{x}_N(t)$ e $\mathbf{x}_P(t)$ associados a pontos do corpo, bem como o vetor diferença $\mathbf{x}_N(t) - \mathbf{x}_P(t)$, que, juntamente com os anteriores, forma um triângulo. De acordo com (3.1) e (4.1), os comprimentos dos lados desse triângulo são invariantes no tempo. Logo, os ângulos internos também permanecem constantes. Em particular, temos:

$$(\mathbf{x}_N(t), \mathbf{x}_P(t)) = \text{const.} \quad (4.2)$$

Essas duas propriedades nos fornecem uma intuição clara sobre a natureza do movimento do corpo em torno do centro de massa. O movimento pode ser visualizado como semelhante ao de um pião inclinado: o corpo gira em torno de um eixo, cuja extremidade inferior está fixada no centro de massa, enquanto a extremidade superior descreve uma trajetória no espaço. A formulação matemática precisa dessa descrição será apresentada adiante.

Para verificar a validade de (4.1), consideremos a derivada temporal da quantidade $|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P|^2 = \text{const.}$ Isso leva a:

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P|^2 = 2(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_N - \dot{\mathbf{x}}_P) = 0.$$

Expandindo o produto escalar, obtemos:

$$(\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N) + (\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P) - (\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_P) - (\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_N) = 0.$$

Multiplicando essa expressão por m_P e somando sobre todos os índices P , e utilizando a condição do centro de massa dada por (3.17), resulta:

$$M(\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N) + \sum_{P=1}^n m_P(\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P) = 0, \quad (4.3)$$

válida para qualquer índice N .

Da igualdade acima, concluímos que $(\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N)$ é independente de N , ou seja, existe uma função $c(t)$ tal que

$$(\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N) = c(t), \quad \forall N.$$

Substituindo essa relação em (4.3) e lembrando que $\sum m_P = M$, obtemos $M\dot{c}(t) + Mc(t) = 0$, o que implica $c(t) = 0$. Portanto,

$$(\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) = 0,$$

o que mostra que $(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) = \text{const}$, como afirmado. Assim, as distâncias de cada ponto do corpo ao centro de massa são invariantes no tempo, o que é compatível com a definição de corpo rígido.

Obtemos agora a fórmula básica que nos permitirá nos livrar da maioria dos vínculos e apresentar o problema variacional (3.18) de uma forma conveniente para análises posteriores. Suponha que os vetores básicos do sistema do centro de massa sejam as colunas $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$. Então

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{e}_i x_N^i(t), \quad \mathbf{x}_N(0) = \mathbf{e}_i x_N^i(0). \quad (4.4)$$

Como $|\mathbf{x}_N(t)| = \text{const}$, os vetores $\mathbf{x}_N(t)$ e $\mathbf{x}_N(0)$ têm o mesmo comprimento, então eles estão relacionados por alguma rotação: $x_N^i(t) = R_{Nij}(t)x_N^j(0)$, onde $R_N^T R_N = \mathbf{1}$ é uma matriz ortogonal. Mostraremos que esta matriz é a mesma para todas as partículas, ou seja,

$$x_N^i(t) = R_{ij}(t)x_N^j(0). \quad (4.5)$$

Esta é a fórmula básica utilizada para escrever o teorema de rotação de Euler. Combinando-a com as Eqs. (3.13) e (3.15), a evolução de qualquer ponto do corpo pode ser apresentada da seguinte forma

$$\mathbf{y}_N(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{x}_N(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t + R(t)\mathbf{x}_N(0). \quad (4.6)$$

A igualdade (4.6) é conhecida como teorema de Euler. Ou seja, nossa tarefa se resume a encontrar as equações de movimento para três variáveis dinâmicas independentes contidas na matriz ortogonal $R(t)$. Eles são chamados de graus de liberdade rotacionais do corpo rígido. Enfatizamos que, de acordo com a Eq. (4.5), as condições iniciais para a matriz de rotação na teoria de um corpo rígido são fixadas de uma vez por todas por

$$R_{ij}(0) = \delta_{ij}. \quad (4.7)$$

Geometricamente, isso significa que neste instante as colunas da matriz R coincidem com os vetores básicos do sistema de centro de massa.

Para demonstrar a equação (4.5), selecionamos três vetores linearmente independentes $\mathbf{x}_A(t)$ dentre os vetores $\mathbf{x}_N(t)$ e construímos uma base ortonormal $\mathbf{R}_i(t)$, rigidamente ligada a $\mathbf{x}_A(t)$ em cada instante t . Por exemplo, podemos definir $\mathbf{R}_1(t)$ ao longo da direção de $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{R}_2(t)$ no plano formado por $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$, e $\mathbf{R}_3(t) = [\mathbf{R}_1(t), \mathbf{R}_2(t)]$, o produto

vetorial entre $\mathbf{R}_1(t)$ e $\mathbf{R}_2(t)$. Por construção, os vetores $\mathbf{R}_i$ formam uma base ortonormal que acompanha rigidamente o corpo em movimento.

Como base fixa do corpo, poderíamos alternativamente usar os vetores

$$\mathbf{R}'_j(t) = \mathbf{R}_i(t)U_{ij},$$

onde U é uma matriz ortogonal constante no tempo, isto é, $UU^T = \mathbf{1}$.

Sem perda de generalidade, assumimos que os vetores da base do sistema de referência do laboratório coincidem com $\mathbf{R}_i(0)$, ou seja, $\mathbf{e}_i = \mathbf{R}_i(0)$. Assim, podemos escrever as expansões

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{R}_i(t)k_N^i, \quad \mathbf{x}_N(0) = \mathbf{R}_i(0)k_N^i = \mathbf{e}_i k_N^i. \quad (4.8)$$

Note que, em virtude das equações (4.1) e (4.2), esses dois vetores distintos possuem as mesmas coordenadas k_N^i . Comparando essas expressões com a equação (4.4), concluimos que $k_N^i = x_N^i(0)$. Portanto, as relações (4.8) e (4.4) implicam que

$$\mathbf{e}_j x_N^j(t) = \mathbf{x}_N(t) = \mathbf{R}_i(t)x_N^i(0).$$

Duas bases ortonormais $\mathbf{R}_i(t)$ e $\mathbf{e}_i$ estão relacionadas por uma matriz ortogonal $R(t)$ da seguinte forma:

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{e}_j R_{ji}(t). \quad (4.9)$$

Substituindo essa expressão para $\mathbf{R}_i(t)$ na equação anterior, obtemos a fórmula desejada (4.5).

Tanto as colunas quanto as linhas da matriz R_{ij} possuem interpretações simples. De fato, a última equação indica que as colunas da matriz R_{ji} coincidem com os vetores $\mathbf{R}_i(t)$ da base fixa ao corpo, ou seja,

$$R = (\mathbf{R}_1 \mid \mathbf{R}_2 \mid \mathbf{R}_3), \quad \text{ou} \quad (\mathbf{R}_j)_i = R_{ij}. \quad (4.10)$$

Contraindo a equação (4.5) com $\mathbf{e}_i$, podemos escrevê-la na forma vetorial

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{R}_j(t)x_N^j(0). \quad (4.11)$$

Isso significa que os pontos do corpo estão em repouso em relação à base $\mathbf{R}_j(t)$.

A interpretação das linhas da matriz R_{ij} torna-se clara se invertermos a equação (4.9), obtendo

$$\mathbf{e}_i = R_{ij}(t)\mathbf{R}_j(t).$$

Assim, as linhas

$$R = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \mathbf{G}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

representam os vetores da base de laboratório $\mathbf{e}_i$ expressos na base do corpo rígido. Por exemplo, os números $\mathbf{G}_1(t) = (R_{11}, R_{12}, R_{13})$ são as componentes do vetor base $\mathbf{e}_1$ na base $\mathbf{R}_i(t)$.

Em termos das linhas $\mathbf{G}_i(t)$, a equação (4.5) pode ser escrita como

$$x_N^i(t) = (\mathbf{G}_i(t), \mathbf{x}_N(0)), \quad (4.13)$$

isto é, as coordenadas $x_N^i(t)$ de um ponto do corpo correspondem às projeções do vetor posição inicial nos vetores $\mathbf{G}_i(t)$.

5 Velocidade angular, matriz de massa e tensor de inércia.

Obtemos agora as consequências *cinemáticas* da fórmula (4.5) e introduzimos algumas quantidades úteis para a descrição de um corpo rígido no sistema de centro de massa: diferentes formas de velocidade angular, matriz de massa e tensor de inércia.

Velocidade angular instantânea de um corpo rígido. A derivada da Eq. (4.5) pode ser apresentada de várias formas, conforme a seguir:

$$\dot{x}_N^i(t) = \dot{R}_{ij}(t)x_N^j(0) = -\hat{\omega}_{ij}(t)x_N^j(t) = \epsilon_{ikj}\omega_k(t)x_N^j(t). \quad (5.1)$$

Aqui,

$$\hat{\omega}_{ij}(t) = -(\dot{R}R^T)_{ij}, \quad (5.2)$$

é uma matriz antissimétrica, enquanto $\omega_k(t)$ é o vetor angular correspondente (ver Eq. (2)):

$$\omega_k(t) \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\hat{\omega}_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}(\dot{R}R^T)_{ij}, \quad \hat{\omega}_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega_k. \quad (5.3)$$

Essa quantidade é chamada de *velocidade angular instantânea* do corpo rígido. A Eq. (5.1), na forma vetorial, pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{x}}_N = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_N. \quad (5.4)$$

Isso implica que a velocidade de qualquer ponto N do corpo é sempre ortogonal ao plano formado pelos vetores $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{x}_N$. Além disso, o comprimento do vetor posição permanece constante, isto é, $|\mathbf{x}_N| = \text{constante}$, conforme esperado pela condição de corpo rígido expressa em (4.1).

Quando $\boldsymbol{\omega}$ é constante no tempo, a equação (5.4) descreve uma precessão do vetor $\mathbf{x}_N$ ao redor do eixo definido por $\boldsymbol{\omega}$, conforme ilustrado na Figura 3. Assumimos que a origem do vetor $\boldsymbol{\omega}$ está localizada no centro de massa do sistema. Seja a decomposição do vetor posição inicial em partes paralela e perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$:

$$\mathbf{x}_N(0) = \mathbf{x}_{N\parallel}(0) + \mathbf{x}_{N\perp}(0),$$

como mostrado na Figura 3. Então, a solução da Eq. (5.4) é dada por

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{x}_{N\parallel}(0) + \mathbf{x}_{N\perp}(t) = \mathbf{x}_{N\parallel}(0) + |\mathbf{x}_{N\perp}(0)| [\mathbf{e}_1 \cos(|\boldsymbol{\omega}|t) + \mathbf{e}_2 \sin(|\boldsymbol{\omega}|t)], \quad (5.5)$$

onde $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são vetores unitários ortogonais no plano perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$.

Isso significa que o ponto $\mathbf{x}_N$ descreve um movimento circular ao redor do eixo $\boldsymbol{\omega}$ com frequência angular (ou velocidade angular¹) igual à magnitude do vetor $\boldsymbol{\omega}$, isto é, $|\boldsymbol{\omega}|$.

¹ Seja $\varphi(t)$ o ângulo de rotação, conforme a Figura 3. A velocidade angular está relacionada à velocidade linear tangencial pela relação $\dot{\varphi} = |\dot{\mathbf{x}}_{N\perp}|/|\mathbf{x}_{N\perp}|$. Usando (5.5), obtemos $\dot{\varphi} = |\boldsymbol{\omega}|$.

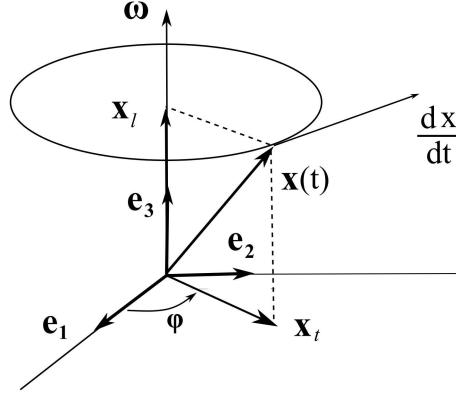


Figura 3 – Velocidade angular instantânea $|\boldsymbol{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}$ da precessão.

Se $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ varia no tempo, a ponta desse vetor também realiza um movimento, e a precessão descrita corresponde apenas a uma parte do movimento total do corpo rígido.

Os vetores básicos $\mathbf{R}_j$, rigidamente conectados ao corpo, precessam segundo a mesma regra

$$\dot{\mathbf{R}}_j = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_j. \quad (5.6)$$

Note que $\hat{\omega} = \dot{R}R^T$ e $R^T\dot{R}$ são duas matrizes antissimétricas distintas. Por isso, definimos

$$\hat{\Omega}_{ij} = -(R^T\dot{R})_{ij}, \quad \Omega_k \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\hat{\Omega}_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}(R^T\dot{R})_{ij}, \quad \text{logo} \quad \hat{\Omega}_{ij} = \epsilon_{ijk}\Omega_k. \quad (5.7)$$

Essas definições levam às relações

$$\hat{\Omega} = -R^T\hat{\omega}R, \quad \text{e} \quad \omega_i = R_{ij}\Omega_j. \quad (5.8)$$

As funções $\Omega_j(t)$ são chamadas de componentes da *velocidade angular no corpo* (9). Seu significado fica evidente pela seguinte identidade:

$$\boldsymbol{\omega} \equiv (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T = \mathbf{e}_i \omega_i = \mathbf{e}_i R_{ij} \Omega_j = \mathbf{R}_j(t) \Omega_j. \quad (5.9)$$

Ou seja, os números Ω_j correspondem às coordenadas do vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_i \omega_i$ expressas na base ortonormal $\mathbf{R}_j(t)$, rigidamente ligada ao corpo. É importante enfatizar que não existe um vetor independente $\boldsymbol{\Omega}$ no formalismo, apenas suas componentes na base móvel. Eventualmente, escreveremos expressões como $I_{ij}\Omega_j$ para indicar o produto $I_{ij}\Omega_j$, e assim por diante, o que constitui um certo abuso de notação, mas bastante usual na literatura.

Dinâmica de um corpo no caso de velocidade angular constante. Quando a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ é conhecida por ser constante no tempo, podemos combinar a solução (5.5) da equação

$$\dot{\mathbf{x}}_N = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_N$$

com a equação do movimento do centro de massa (4.6) para obter a expressão completa da trajetória de um ponto N do corpo rígido:

$$\mathbf{y}_N(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{x}_{N\parallel}(0) + |\mathbf{x}_{N\perp}(0)| [\mathbf{e}_1 \cos(|\boldsymbol{\omega}|t) + \mathbf{e}_2 \sin(|\boldsymbol{\omega}|t)]. \quad (5.10)$$

Neste caso, o problema do movimento rígido é considerado solucionado, pois temos uma descrição analítica clara da posição de qualquer ponto do corpo ao longo do tempo.

Importante destacar que a decomposição do vetor posição inicial $\mathbf{x}_N(0) = \mathbf{x}_{N\parallel}(0) + \mathbf{x}_{N\perp}(0)$ em componentes paralela e perpendicular ao eixo de rotação $\boldsymbol{\omega}$ é fundamental para entender a natureza do movimento: a componente paralela permanece fixa, enquanto a perpendicular realiza uma precessão circular em torno do eixo, com frequência angular $|\boldsymbol{\omega}|$. Assim, pontos localizados sobre o eixo de rotação permanecem nele, conforme indicado pela análise da Eq. (5.10).

Considere um ponto do corpo que, em um instante t_0 , esteja localizado exatamente sobre o eixo $\boldsymbol{\omega}$. A equação acima implica que esse ponto permanecerá sobre esse eixo para todo tempo futuro, evidenciando que o eixo de rotação é um eixo fixo do corpo, rigidamente conectado a ele, enquanto $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$. Tal eixo é denominado eixo principal de rotação no caso de velocidade angular constante.

Por outro lado, se o vetor $\boldsymbol{\omega}$ variar com o tempo, o problema se torna mais complexo: o eixo instantâneo de rotação não é fixo no espaço nem no corpo, resultando em movimentos mais gerais de precessão e nutação, que serão abordados posteriormente (vide capítulo 7).

No caso geral em que a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}(t)$ depende do tempo, a equação vetorial

$$\dot{\mathbf{x}}_N = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}_N$$

perde a simplicidade para descrever diretamente a evolução do sistema. Uma das propriedades centrais da mecânica dos corpos rígidos é que as equações para as componentes da velocidade angular no corpo $\Omega_i(t)$ são autônomas, ou seja, formam um sistema fechado que envolve apenas essas componentes. Essas equações correspondem às famosas equações de Euler para o movimento rotacional de um corpo rígido.

A relação entre os vetores $\boldsymbol{\omega}$ no sistema inercial e as componentes Ω_i no sistema do corpo é dada pela matriz de rotação $R(t)$, conforme (5.8). Para determinar completamente o movimento, é necessário conhecer a evolução temporal da matriz $R(t)$. As equações para $R(t)$ dependem de Ω_i , mas não de $\boldsymbol{\omega}$ diretamente, o que facilita a resolução: resolve-se primeiro o sistema para $R_{ij}(t)$ e $\Omega_i(t)$, depois utiliza-se

$$\mathbf{x}_N(t) = R(t)\mathbf{x}_N(0)$$

para obter o movimento dos pontos do corpo, em vez de resolver diretamente a equação vetorial para $\boldsymbol{\omega}$.

Finalmente, é importante sublinhar que a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ possui um significado geométrico claro, atuando como o eixo instantâneo e a taxa de rotação do corpo, o que a torna um conceito fundamental para visualizar e interpretar o movimento rígido, conforme será discutido em detalhes no capítulo 8.

Em resumo, quando a velocidade angular é constante, ela é o objeto essencial para descrever o movimento. Para casos mais gerais, a escolha das variáveis Ω_i e R_{ij} é mais adequada, já que as equações de movimento do corpo rígido se expressam naturalmente em termos delas, facilitando análises e aplicações em problemas de dinâmica clássica.

Matriz de massa, tensor de inércia e suas propriedades sob rotações do sistema de centro de massa. O segundo termo do Lagrangiano (3.18) representa a energia cinética associada à rotação do corpo rígido em torno do seu centro de massa². Essa energia é conservada ao longo das soluções das equações de movimento, desde que não haja forças externas.

A energia cinética rotacional pode ser expressa de diferentes formas equivalentes, utilizando as Eqs. (3.22), (4.5) e (5.4):

$$E = \frac{1}{2} \sum_{N=1}^n m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2 = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_j = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j. \quad (5.11)$$

Neste contexto aparecem duas matrizes simétricas relacionadas à distribuição da massa do corpo.

A primeira é a *matriz de massa* g_{ij} , cujos componentes são dados por

$$g_{ij} = \sum_{N=1}^n m_N x_N^i(0) x_N^j(0), \quad (5.12)$$

onde $x_N^i(0)$ são as coordenadas iniciais das partículas no sistema de centro de massa. Essa matriz contém informações sobre a distribuição das massas em relação aos eixos de referência do corpo. Por construção, g_{ij} é simétrica e positiva.

A segunda matriz é o *tensor de inércia* I_{ij} , definido por

$$I_{ij} = \sum_{N=1}^n m_N \left[\mathbf{x}_N^2(0) \delta_{ij} - x_N^i(0) x_N^j(0) \right] = [g_{kk} \delta_{ij} - g_{ij}]. \quad (5.13)$$

Este tensor é utilizado para relacionar a velocidade angular do corpo com sua energia cinética rotacional e momento angular. Ele depende da massa das partículas e de sua distribuição espacial, refletindo o quanto a massa está afastada de um dado eixo de rotação.

As matrizes g_{ij} e I_{ij} são constantes no tempo para um corpo rígido, pois a configuração do corpo não varia. Entretanto, essas matrizes dependem da escolha do sistema de referência: elas são definidas no sistema de centro de massa. Se ocorrer uma translação do sistema, suas componentes serão alteradas, pois as coordenadas x_N^i mudam.

² Mais precisamente, trata-se da energia cinética rotacional do corpo, descontando a energia cinética do movimento translacional do centro de massa.

Sob rotações do sistema de centro de massa, g_{ij} e I_{ij} transformam-se como tensores de segunda ordem. Essa propriedade permite diagonalizar o tensor de inércia, determinando os chamados eixos principais de inércia, nos quais o tensor assume forma diagonal. Essa diagonalização simplifica a análise da dinâmica rotacional, uma vez que as equações do movimento podem ser expressas nessas coordenadas principais.

Dessa forma, as matrizes de massa e o tensor de inércia conectam a geometria do corpo rígido com as variáveis que descrevem seu movimento rotacional.

Além disso, a forma explícita dessas matrizes numéricas depende da posição inicial do corpo rígido, ou seja, das coordenadas iniciais das partículas que compõem o corpo no sistema de centro de massa. Equivalentemente, essas matrizes variam quando passamos de uma base ortonormal para outra, relacionadas entre si por uma rotação. Matematicamente, g_{ij} e I_{ij} transformam-se como tensores de segunda ordem sob rotações do sistema de centro de massa.

Mais formalmente, considere duas bases ortonormais relacionadas por uma matriz ortogonal numérica U , tal que $U^T U = 1$, e as bases relacionadas por

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_k U_{ki}^T.$$

As coordenadas das partículas do corpo nessas bases satisfazem

$$x'^i = U_{ij} x^j.$$

Aplicando esta transformação à matriz de massa definida na Eq. (5.12), obtemos

$$\begin{aligned} g'_{ij} &\equiv \sum_N m_N x_N'^i(0) x_N'^j(0) = \sum_N m_N (U_{ia} x_N^a(0)) (U_{jb} x_N^b(0)) \\ &= U_{ia} \left(\sum_N m_N x_N^a(0) x_N^b(0) \right) U_{jb} = U_{ia} g_{ab} U_{jb}, \quad \text{ou seja,} \quad g' = U g U^T. \end{aligned} \quad (5.14)$$

A mesma regra de transformação vale para o tensor de inércia I , pois ele também é um tensor simétrico de segunda ordem construído a partir das coordenadas das partículas.

Agora, podemos demonstrar que g é uma matriz não degenerada. Pelo teorema espectral, dada uma matriz simétrica g , existe uma matriz ortogonal U tal que

$$U g U^T = \tilde{g} = \text{diag}(g_1, g_2, g_3),$$

ou seja, a matriz g pode ser diagonalizada por uma rotação. Neste sistema diagonal, cada elemento g_i é dado por

$$g_i = \sum_N m_N (U \mathbf{x}_N)^i (U \mathbf{x}_N)^i \quad (\text{sem somatória em } i). \quad (5.15)$$

O determinante de g é então o produto dos autovalores,

$$\det g = \det \tilde{g} = g_1 g_2 g_3.$$

Como o corpo rígido é composto por pelo menos quatro partículas que não estão todas contidas em um único plano, entre os vetores $\mathbf{x}_N$ existem três vetores linearmente independentes. Isso implica que todos os autovalores g_i são estritamente positivos, o que garante que $\det g > 0$ e, portanto, que g é uma matriz não degenerada.

Por outro lado, se algum dos autovalores, digamos $g_1 = 0$, isso implica que todas as partículas possuem coordenada nula na direção correspondente, ou seja, o corpo é plano nesse sentido. Similarmente, se $g_1 = g_2 = 0$, o corpo é efetivamente uma barra, com extensão significativa apenas em uma direção.

Lembre-se que uma matriz simétrica não degenerada g possui três autovetores ortogonais $\mathbf{b}_i$ associados a autovalores não nulos λ_i , satisfazendo

$$g\mathbf{b}_i = \lambda_i\mathbf{b}_i.$$

Esses autovetores podem ser normalizados para formar uma base ortonormal orientada. Aplicando a rotação U definida acima à essa equação, temos

$$\tilde{g}(U\mathbf{b}_i) = \lambda_i(U\mathbf{b}_i),$$

de onde segue que os autovalores λ_i coincidem com os elementos diagonais g_i da matriz diagonal $\tilde{g}$.

Além disso, pela relação (5.13) entre o tensor de inércia e a matriz g , os mesmos vetores $\mathbf{b}_i$ são autovetores de I ,

$$I\mathbf{b}_i = I_i\mathbf{b}_i,$$

onde I_i são os autovalores correspondentes, denominados momentos principais de inércia.

As direções definidas pelos vetores $\mathbf{b}_i$ são chamadas de eixos principais de inércia do corpo, que estão rigidamente conectados ao corpo. A diagonalização do tensor de inércia nessa base simplifica a análise do movimento rotacional, pois permite decompor o movimento em rotações independentes em torno desses eixos.

Para finalizar, apresentamos as relações explícitas entre os autovalores das matrizes g e do tensor de inércia I :

$$2g_1 = I_2 + I_3 - I_1, \quad 2g_2 = I_1 + I_3 - I_2, \quad 2g_3 = I_1 + I_2 - I_3, \quad (5.16)$$

$$I_1 = g_2 + g_3, \quad I_2 = g_1 + g_3, \quad I_3 = g_1 + g_2. \quad (5.17)$$

Essas expressões permitem conectar diretamente os momentos principais de inércia I_i com os elementos diagonais g_i da matriz de massa. De forma geral, o fato de $g_i > 0$ leva a várias consequências importantes:

- (a) Os momentos principais de inércia são sempre positivos, isto é, $I_i > 0$.

- (b) Se $g_1 = g_2 = g_3$, então temos $I_1 = I_2 = I_3 = 2g_1$, caracterizando um corpo com inércia isotrópica.
- (c) A soma de quaisquer dois momentos principais de inércia é sempre maior ou igual ao terceiro, por exemplo, $I_2 + I_3 \geq I_1$.

No caso particular de um corpo plano, em que uma das direções tem zero extensão, digamos $g_1 = 0$, a relação se reduz a

$$I_1 = I_2 + I_3 = g_2 + g_3.$$

Para o caso limite de uma haste sólida, onde duas direções não possuem extensão, por exemplo, $g_1 = g_2 = 0$, obtemos

$$I_3 = 0, \quad I_1 = I_2 = g_3.$$

Sem perda de generalidade, podemos sempre assumir que as matrizes g e I na expressão da energia cinética (5.11) são diagonais. Para isso, considere que a matriz g inicialmente não está diagonalizada e seja U a matriz ortogonal que a diagonaliza, ou seja,

$$UgU^T = \tilde{g} = \text{diag}(g_1, g_2, g_3).$$

Realizando uma mudança de base do sistema de laboratório por meio de U^T , temos que, pela transformação das matrizes conforme a Eq. (5.14), a energia cinética na nova base mantém a mesma forma (5.11), porém agora com g e I diagonais.

Geometricamente, essa mudança de base corresponde a escolher, no instante inicial $t = 0$, os eixos do laboratório de modo que coincidam com os eixos principais de inércia do corpo. Além disso, das equações (4.5) e (4.7) decorre que o referencial fixo no corpo, representado pelos vetores $\mathbf{R}_j$, também coincide com essa base em $t = 0$.

Como os eixos principais de inércia e os eixos estruturais do corpo estão rigidamente conectados ao corpo rígido, eles permanecem coincidentes ao longo do tempo, ou seja,

$$\mathbf{R}_j(t) = \mathbf{b}_j(t),$$

onde $\mathbf{b}_j(t)$ representam os eixos principais de inércia em qualquer instante t .

Nos capítulos seguintes, consideraremos um corpo rígido assimétrico, ou seja, com momentos principais de inércia distintos,

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3,$$

e adotaremos a convenção de que as matrizes g e I estão diagonais. Isso implica que no instante inicial os eixos do laboratório estão fixados nas direções dos eixos principais de inércia do corpo.

Essa escolha tem uma consequência importante para a formulação do problema: perdemos a liberdade de realizar rotações adicionais do sistema de laboratório para simplificar as equações do movimento, pois os eixos já estão alinhados com os eixos de inércia.

O caso particular de corpos simétricos, em que dois momentos de inércia são iguais, por exemplo, $I_1 = I_2 \neq I_3$, será tratado especificamente no capítulo 10.

Momento angular e momento angular no corpo. É conveniente introduzir os componentes M_k do momento angular $\mathbf{m}$ na base fixa ao corpo $\mathbf{R}_k$ da seguinte forma:

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)^T = \mathbf{e}_i m_i = \mathbf{e}_j R_{jk} R_{ki}^T m_i = \mathbf{R}_k R_{ki}^T m_i \equiv \mathbf{R}_k M_k, \quad (5.18)$$

isto é, temos $M_k = R_{ki}^T m_i$. Os componentes M_k são chamados *componentes do momento angular no corpo* (9).

Utilizando a relação básica (4.5) para as velocidades e a definição do momento angular (3.22), o vetor momento angular pode ser expresso de diversas maneiras:

$$\mathbf{m} = \sum_{N=1}^n m_N [\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N] = \sum_i g_i [\mathbf{R}_i, \dot{\mathbf{R}}_i] = R I R^T \boldsymbol{\omega} = R I \boldsymbol{\Omega} = R \mathbf{M}. \quad (5.19)$$

Na obtenção das terceira e quarta igualdades foram usadas as Eqs. (2), (5.7), (5.13) e (5.8).

Note que na base do laboratório o vetor $\mathbf{m}$ é constante ao longo do movimento, enquanto a ponta do vetor $\boldsymbol{\omega}$ descreve uma trajetória complexa no espaço. A relação $M_k = I_{kj} \Omega_j$ mostra que as coordenadas do momento angular $\mathbf{m}$ e da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ no referencial fixo ao corpo estão rigidamente conectadas, pois o tensor de inércia I é constante neste referencial.

De maneira análoga, a energia cinética (5.11) pode ser escrita sob diferentes formas equivalentes:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{N=1}^n m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2 = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{\mathbf{R}}_i \dot{\mathbf{R}}_j = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2} (R I R^T)_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j \\ &= \frac{1}{2} (R I^{-1} R^T)_{ij} m_i m_j = \frac{1}{2} I_{ij}^{-1} M_i M_j. \end{aligned} \quad (5.20)$$

É importante observar que para qualquer movimento do corpo rígido, o produto escalar $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{m}) > 0$, ou seja, os vetores de momento angular conservado e velocidade angular sempre formam um ângulo agudo, o que reflete a consistência física da relação entre estes vetores.

Vale destacar que as expressões (5.19) e (5.20) são de natureza puramente cinemática, não dependendo diretamente das forças atuantes. Por isso, elas são válidas não apenas para corpos livres, mas também para corpos rígidos com ponto fixo ou sob ação de forças externas, desde que se considere o referencial adequado para cada caso.

6 Problema variacional e Equações Lagrangianas de segunda ordem para graus de liberdade rotacionais.

Voltemos à análise das equações de movimento (3.19) e (3.20), que são implicitamente definidas pelo Lagrangiano (3.18). Como já discutido, qualquer solução dessas equações pode ser expressa na forma

$$x_N^i(t) = R_{ij}(t)x_N^j(0),$$

onde $R_{ij}(t)$ é uma matriz ortogonal dependente do tempo, que representa a rotação do corpo rígido.

Ao substituir esse ansatz nas restrições impostas pela Eq. (3.20), verificamos que elas são automaticamente satisfeitas para todo o tempo, desde que sejam satisfeitas no instante inicial $t = 0$. Isso decorre do fato de que a matriz $R(t)$ é ortogonal, ou seja, satisfaz $R^T(t)R(t) = \mathbf{1}$ para todo t .

Por outro lado, ao substituir o mesmo ansatz nas equações dinâmicas, obtemos um sistema com $3n$ equações diferenciais de segunda ordem que envolvem as componentes de $R_{ij}(t)$ e suas segundas derivadas no tempo, $\ddot{R}_{ij}(t)$. Multiplicando cada uma dessas equações correspondentes à partícula N por $x_N^j(0)$ e somando sobre N , podemos reescrever esse sistema em termos da matriz $R(t)$ como:

$$\ddot{R}_{ik} g_{kj} = -R_{ik} \lambda_{kj}, \quad (6.1)$$

sujeito à condição restritiva

$$R^T R = \mathbf{1},$$

que garante que $R(t)$ permanece uma matriz ortogonal ao longo do tempo.

Aqui, a matriz $\lambda_{jk}(t)$ é simétrica e está definida como

$$\lambda_{jk} = - \sum_{A,B} \lambda_{AB} \left[x_1^j x_1^k + x_A^j x_B^k - x_B^{(j} x_1^{k)} \right] - \frac{1}{2} \sum_{A,\alpha} \lambda_{A\alpha} \left[x_\alpha^{(j} x_A^{k)} - x_\alpha^{(j} x_1^{k)} - x_A^{(j} x_1^{k)} - 2x_1^j x_1^k \right], \quad (6.2)$$

onde todos os valores x_N^i são avaliados no instante inicial $t = 0$. Observe que λ_{jk} depende das variáveis dinâmicas auxiliares $\lambda_{AN}(t)$, as quais ainda não conhecemos explicitamente.

Uma característica importante do sistema (6.1) é que, para encontrar a solução $R(t)$, não é necessário conhecer previamente a forma explícita de $\lambda_{jk}(t)$ como função das variáveis auxiliares $\lambda_{AN}(t)$. De fato, é possível determinar a matriz $\lambda_{jk}(t)$ de forma algébrica a partir das próprias variáveis dinâmicas $R(t)$ e $\dot{R}(t)$, sem resolver separadamente para os multiplicadores. Isso implica que o sistema (6.1) pode ser fechado e tratado como um problema de valor inicial (problema de Cauchy) bem colocado para determinar a evolução temporal da matriz de rotação $R(t)$.

A seguir, detalharemos como essa determinação algébrica de λ_{jk} é feita e como se estabelece a existência e unicidade da solução de $R(t)$ para o sistema (6.1).

Formulação variacional do problema para as equações (6.1).

Mostraremos que o sistema de equações (6.1) pode ser derivado a partir de um princípio variacional, no qual as matrizes $\lambda_{jk}(t)$ surgem como multiplicadores de Lagrange associados às restrições de ortogonalidade da matriz $R(t)$, expressas por

$$R^T R = \mathbf{1}.$$

Essa formulação variacional fornece um método sistemático para obter as equações do movimento do corpo rígido sob as restrições inerentes à sua rigidez, permitindo a interpretação física e matemática das variáveis λ_{jk} como forças internas de reação que mantêm o corpo rigidamente estruturado.

Considere um sistema dinâmico com variáveis do espaço de configuração $R_{ij}(t)$ e $\lambda_{ij}(t)$, para $i, j = 1, 2, 3$, onde R é uma matriz 3×3 e λ é uma matriz simétrica 3×3 . Seja $g_{ij} = \text{diag}(g_1, g_2, g_3)$ uma matriz numérica diagonal. Então, a ação lagrangiana

$$S = \int dt \left[\frac{1}{2} g_{ij} \dot{R}_{ki} \dot{R}_{kj} - \frac{1}{2} \lambda_{ij} (R_{ki} R_{kj} - \delta_{ij}) \right] \equiv \int dt \left[\frac{1}{2} \text{tr}(\dot{R} g \dot{R}^T) - \frac{1}{2} \text{tr}(\lambda (R^T R - \mathbf{1})) \right], \quad (6.3)$$

implica as equações dinâmicas e as restrições (6.1) como condições de extremo deste problema variacional. Em particular, a variação da ação em relação a λ implica as restrições

$$R^T R = \mathbf{1}.$$

Estas condições significam que $R(t)$ é um elemento do grupo de rotações especial $SO(3)$, somando-se a condição $\det R = 1$. Diz-se, portanto, que o problema variacional está formulado para um ponto que se move na variedade do grupo $SO(3)$.

Deve-se notar que, ao formular um problema variacional em mecânica clássica, usualmente buscamos o extremo do funcional

$$\int dt L(q, \dot{q})$$

para condições de contorno arbitrárias nas posições inicial e final, $q(0) = q_0$ e $q(t_1) = q_1$. No caso do corpo rígido, a posição inicial do problema está fixada de forma única segundo a Eq. (4.7), ou seja,

$$R_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$

O problema (6.3) também possui uma interpretação mecânica simples. Podemos reescrever a lagrangiana (6.3) em termos das colunas $\mathbf{R}_j$ da matriz R_{ij} da seguinte forma:

$$L = \frac{1}{2} [g_1 \dot{\mathbf{R}}_1^2 + g_2 \dot{\mathbf{R}}_2^2 + g_3 \dot{\mathbf{R}}_3^2] - \frac{1}{2} \lambda_{ij} [(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) - \delta_{ij}]. \quad (6.4)$$

Como foi demonstrado anteriormente, $g_i > 0$. Portanto, este problema variacional descreve três partículas de massas g_i , conectadas por hastes rígidas sem massa de comprimento igual a $\sqrt{2}$, que se movem livremente sobre a superfície de uma esfera unitária.

Equações de movimento de segunda ordem para R_{ij} . A variação da ação (6.4) em relação a $\mathbf{R}_i$ e λ_{ij} fornece as equações de movimento (não há somatório sobre i na Eq. (6.5))

$$g_i \ddot{\mathbf{R}}_i = - \sum_j \lambda_{ij} \mathbf{R}_j, \quad (6.5)$$

$$(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) = \delta_{ij}. \quad (6.6)$$

As variáveis auxiliares λ_{ij} podem ser eliminadas das equações de segunda ordem (6.5) da seguinte forma. Calculando a primeira e a segunda derivadas da restrição (6.6), obtemos as seguintes consequências:

$$(\dot{\mathbf{R}}_i, \mathbf{R}_j) + (\mathbf{R}_i, \dot{\mathbf{R}}_j) = 0, \quad (\ddot{\mathbf{R}}_i, \mathbf{R}_j) + (\mathbf{R}_i, \ddot{\mathbf{R}}_j) + 2(\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j) = 0. \quad (6.7)$$

Utilizando as Eqs. (6.5) para substituir as segundas derivadas na última expressão, obtemos

$$\lambda_{ij} = \frac{2g_i g_j}{g_i + g_j} (\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j). \quad (6.8)$$

Substituindo este resultado em (6.5), obtemos um sistema fechado de equações de segunda ordem para determinar a evolução temporal dos graus de liberdade rotacionais do corpo:

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = - \sum_j \frac{2g_j}{g_i + g_j} (\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j) \mathbf{R}_j, \quad (\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) = \delta_{ij}. \quad (6.9)$$

Estas equações devem ser resolvidas com as condições iniciais

$$R_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad \dot{R}_{ij}(0) = V_{ij}, \quad \text{onde } V_{ij} = -V_{ji}.$$

Elas decorrem das Eqs. (4.9) e (6.7).

Enfatizamos mais uma vez que nem todas as soluções das equações (6.9) com a matriz de massas diagonal g descrevem movimentos físicos possíveis de um corpo rígido. Seja $R_{ij}(t)$ uma solução de (6.9). Segundo a Eq. (4.5) e pela construção das variáveis $R_{ij}(t)$, ela descreve o movimento possível do corpo rígido apenas se, em algum instante de tempo, digamos $t = 0$, a solução passar pelo elemento neutro de $SO(3)$:

$$R_{ij}(0) = \delta_{ij}.$$

Nesse caso, esse $R_{ij}(t)$ corresponde ao movimento do corpo rígido, que no instante $t = 0$ tinha seus eixos de inércia alinhados com os eixos do laboratório.

A energia rotacional não é uma integral independente do movimento. As equações de movimento (6.9) implicam a conservação tanto da energia quanto do momento angular. Tomando o produto escalar da Eq. (6.9) com o vetor $g_i \dot{\mathbf{R}}_i$ e somando sobre i , obtemos a lei de conservação da energia:

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad \text{onde} \quad E = \frac{1}{2} \sum_i g_i \dot{\mathbf{R}}_i^2. \quad (6.10)$$

A energia pode ser expressa de diversas formas equivalentes — ver, por exemplo, a Eq. (5.20).

Analogamente, utilizando o produto vetorial em vez do escalar, obtemos a conservação do momento angular:

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = 0, \quad \text{onde} \quad \mathbf{m} = \sum_i g_i [\mathbf{R}_i, \dot{\mathbf{R}}_i]. \quad (6.11)$$

Como se espera, este vetor conservado coincide com aquele definido anteriormente em (5.19). De fato, temos:

$$\begin{aligned} m_i &= \sum_{N=1}^n m_N [\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N]_i = \sum_{N=1}^n m_N [\mathbf{x}_N, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}_N]]_i \\ &= \sum_{N=1}^n m_N \left(\omega^i (\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) - x_N^i (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}_N) \right) \\ &= \sum_{N=1}^n m_N \left[(\mathbf{x}_N(0), \mathbf{x}_N(0)) \delta_{ij} - R_{ia} R_{jb} x_N^a(0) x_N^b(0) \right] \omega_j \\ &= \sum_{N=1}^n m_N \left[\mathbf{x}_N^2(0) \delta_{ab} - x_N^a(0) x_N^b(0) \right] R_{ia} (R^T \boldsymbol{\omega})_b \\ &= R_{ia} I_{ab} (R^T \boldsymbol{\omega})_b. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Aqui utilizamos as Eqs. (5.4), (4.5), (5.13) e (5.8).

As Eqs. (5.19) e (4.7) conduzem a uma consequência importante: os dados iniciais para a velocidade angular não são arbitrários, mas determinados pelo valor do momento angular conservado:

$$m_i = I_{ij} \omega_j(0) = I_{ij} \Omega_j(0). \quad (6.13)$$

A expressão da energia,

$$E = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Omega_i^2(t) = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Omega_i^2(0),$$

implica¹ que a energia rotacional de um corpo rígido livre não representa uma integral independente do movimento:

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{I_i} m_i^2. \quad (6.14)$$

Essa observação deve ser comparada com a Seção 28 de (9).

¹ Na forma covariante, esta relação se escreve como $E = \frac{1}{2} I_{ij}^{-1} m_i m_j$; ver também a Eq. (5.20).

7 Forma de primeira ordem das equações de movimento e as equações de Euler-Poisson.

A equação vetorial de segunda ordem (6.9) é equivalente a um sistema de duas equações de primeira ordem para o dobro do número de variáveis dinâmicas. Para obter esse sistema, consideramos o espaço das variáveis mutuamente independentes $R_{ij}(t)$ e $\Omega_i(t)$, sujeitas às condições de ortonormalidade $(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) = \delta_{ij}$, bem como às equações

$$\ddot{R}_{aj} = - \sum_k \frac{2g_k}{g_j + g_k} (\dot{\mathbf{R}}_j, \dot{\mathbf{R}}_k) R_{ak}, \quad (7.1)$$

$$\Omega_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{kij} (R^T \dot{R})_{ij}. \quad (7.2)$$

Ou seja, a matriz $R_{aj}(t)$ satisfaz as equações de movimento (6.9), enquanto $\Omega_k(t)$ representa a velocidade angular instantânea, acompanhando a evolução temporal de $R_{aj}(t)$ conforme a Eq. (7.2). Este sistema de equações é evidentemente equivalente à equação original de segunda ordem (6.9).

Multiplicando a Eq. (7.1) pela matriz invertível R_{ai} , obtemos:

$$(\mathbf{R}_i, \ddot{\mathbf{R}}_j) = -\frac{2g_i}{g_i + g_j} (\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j). \quad (7.3)$$

Vamos agora separar as partes simétrica e antissimétrica da Eq. (7.3):

$$(\mathbf{R}_i, \ddot{\mathbf{R}}_j) + (\mathbf{R}_j, \ddot{\mathbf{R}}_i) = -2(\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j), \quad (7.4)$$

$$(\mathbf{R}_i, \ddot{\mathbf{R}}_j) - (\mathbf{R}_j, \ddot{\mathbf{R}}_i) = -2\frac{g_i - g_j}{g_i + g_j} (\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j). \quad (7.5)$$

A equação (7.4) é simplesmente uma consequência da condição de ortonormalidade $(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) = \delta_{ij}$ e de suas derivadas temporais, conforme mostrado em (6.7). Assim, ela pode ser omitida do sistema de equações independentes.

Por outro lado, o membro direito da Eq. (7.5), que envolve o produto escalar $(\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j)$, pode ser reescrito em termos da velocidade angular Ω_i definida na Eq. (7.2). Essa reescrita é possível graças à relação entre $\dot{R}$ e Ω via a matriz R , e pode ser organizada de forma compacta utilizando o projetor

$$N_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\Omega_i \Omega_j}{\Omega^2},$$

o qual possui as propriedades $N_{ij}\Omega_j = 0$ e $N_{ik}N_{kj} = N_{ij}$, projetando qualquer vetor no plano ortogonal à velocidade angular Ω_i .

De fato, ao agir sobre um conjunto de vetores $\{\mathbf{B}_j\}$ segundo a regra $N_{ij}\mathbf{B}_j \equiv \mathbf{C}_i$, obtemos três vetores coplanares tais que $\Omega_i\mathbf{C}_i = 0$. Este formalismo será útil na reformulação das equações de movimento em termos puramente da variável Ω_i , conforme será explorado a seguir.

A relação fundamental entre as velocidades $\dot{\mathbf{R}}_i$ pode ser expressa diretamente em termos da velocidade angular. Utilizando a definição (7.2), temos:

$$(\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j) = \Omega^2 N_{ij}(\boldsymbol{\Omega}), \quad \text{com} \quad N_{ij}(\boldsymbol{\Omega}) = \delta_{ij} - \frac{\Omega_i \Omega_j}{\Omega^2}, \quad \Omega^2 \equiv \sum_i \Omega_i^2. \quad (7.6)$$

Aqui, $N_{ij}(\boldsymbol{\Omega})$ representa o projetor no plano ortogonal ao vetor de velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$.

Com base na equação (2), podemos contrair a equação antissimétrica (7.5) com o símbolo de Levi-Civita $-\frac{1}{2}\epsilon_{kij}$, obtendo uma equação equivalente que envolve explicitamente a evolução temporal de Ω_k . Usando as Eqs. (7.2) e (7.6), obtemos então o sistema de equações de primeira ordem que governam a dinâmica da velocidade angular:

$$\dot{\Omega}_k = - \sum_{i,j} \epsilon_{kij} \frac{g_i}{g_i + g_j} \Omega_i \Omega_j. \quad (7.7)$$

Expandindo os componentes explicitamente, chegamos às conhecidas equações de Euler:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \frac{1}{I_1} (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3, \\ \dot{\Omega}_2 &= \frac{1}{I_2} (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3, \\ \dot{\Omega}_3 &= \frac{1}{I_3} (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2, \end{aligned} \quad (7.8)$$

onde I_i são os autovalores do tensor de inércia, conforme definidos em (5.16). Em notação vetorial, o sistema pode ser condensado na forma

$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = [I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}], \quad (7.9)$$

onde I denota o tensor de inércia (diagonal no referencial principal) e o colchete indica o produto vetorial usual em $\mathbb{R}^3$.

Por outro lado, a Eq. (7.2) pode ser reinterpretada como uma equação de primeira ordem para a evolução da matriz $R_{ij}(t)$. De fato, a partir de sua definição obtemos:

$$\dot{R}_{ij} = -\epsilon_{jkm} \Omega_k R_{im}. \quad (7.10)$$

Utilizando a base dual $\{\mathbf{G}_i\}$, definida como os vetores coluna da matriz R , a equação acima pode ser reescrita de forma vetorial como

$$\dot{\mathbf{G}}_i = -[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{G}_i],$$

o que mostra que cada vetor da base do corpo gira rigidamente em torno do vetor $\boldsymbol{\Omega}$. Este sistema descreve a rotação da base ligada ao corpo rígido em torno de seu próprio eixo angular.

No caso particular do peão pesado, três dessas equações (mais precisamente aquelas associadas aos elementos R_{31}, R_{32} e R_{33} , ou seja, à evolução de $\mathbf{G}_3$) foram obtidas

originalmente por Poisson (3) e, por isso, são frequentemente associadas ao seu nome. Para detalhes históricos, ver também (6). Em vista disso, chamaremos conjuntamente as equações (7.9) e (7.10) de ***equações de Euler–Poisson***, que descrevem completamente a dinâmica de um corpo rígido livre em termos das variáveis $\Omega(t)$ e $R(t)$.

Reunindo os resultados obtidos, concluímos que as equações de primeira ordem (7.9) e (7.10), consideradas como um sistema para determinar as variáveis dinâmicas mutuamente independentes $R(t)$ e $\Omega(t)$, são totalmente equivalentes ao sistema original de segunda ordem (6.9). Assim, elas podem ser utilizadas igualmente para estudar a evolução do corpo rígido.

As condições iniciais associadas ao sistema (7.9)–(7.10) são:

$$R_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad \Omega_i(0) = \omega_i(0) = (I^{-1}\mathbf{m})_i,$$

conforme definido em (6.13). Qualquer solução $R_{ij}(t)$ que satisfaça essas condições iniciais em $t = 0$ será automaticamente uma matriz ortogonal para todo $t > 0$, isto é, a condição $R^T R = \mathbf{1}$ permanecerá preservada ao longo do tempo.

Para verificar isso, basta contrair a equação (7.10) com R_{ip} , obtendo:

$$(\mathbf{R}_p, \dot{\mathbf{R}}_j) = -\epsilon_{pjk}\Omega_k,$$

o que implica que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}_p, \mathbf{R}_j) = 0.$$

Ou seja, o produto interno entre os vetores coluna de R permanece constante no tempo. Como na condição inicial temos $(\mathbf{R}_p(0), \mathbf{R}_j(0)) = \delta_{pj}$, segue-se que essa ortogonalidade é mantida para todo t , ou seja,

$$(\mathbf{R}_p(t), \mathbf{R}_j(t)) = \delta_{pj}.$$

Portanto, a dinâmica de um corpo rígido pode ser inteiramente descrita pelas equações diferenciais de primeira ordem (7.9) e (7.10). Como essas equações estão na chamada *forma normal* — ou seja, com todas as derivadas temporais isoladas no lado esquerdo — a teoria clássica das equações diferenciais ordinárias garante a existência e unicidade da solução do problema de Cauchy associado. Cabe destacar que, no caso de sistemas mistos envolvendo equações diferenciais e algébricas, o tratamento teórico é consideravelmente mais delicado e exige ferramentas adicionais, como discutido em (24).

Dessa forma, atingimos nosso objetivo de obter as equações de movimento para um corpo rígido. A evolução dos graus de liberdade rotacionais pode ser determinada tanto a partir das equações de segunda ordem (6.9) quanto do sistema de primeira ordem (7.9)–(7.10). Neste último caso, ao resolver a equação de Euler (7.9) determinamos o vetor de velocidade angular no referencial do corpo, $\Omega_i(t)$. Com esse vetor conhecido, a equação (7.10) pode então ser integrada para obter a matriz de rotação $R(t)$.

Consequentemente, a dinâmica de qualquer ponto material do corpo rígido é descrita por:

$$\mathbf{y}_N(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t + R(t)\mathbf{x}_N(0), \quad (7.11)$$

onde $\mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t$ representa o movimento retilíneo uniforme do centro de massa, e $R(t)\mathbf{x}_N(0)$ corresponde à rotação do ponto em torno do centro de massa, dada pela ação da matriz ortogonal $R(t)$ sobre a posição inicial relativa $\mathbf{x}_N(0)$.

Conservação do momento angular e as equações de Euler

A equação (6.11), que expressa a conservação do momento angular em ausência de torques externos, revela-se equivalente às equações de Euler na forma (7.9). Assim, as equações de movimento obtidas estão em total acordo com os princípios fundamentais da mecânica.

Na verdade, a preservação no tempo do momento angular, conforme expresso em (6.11), implica a precessão do momento angular no referencial do corpo rígido em torno do vetor de velocidade angular do próprio corpo. De fato,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d(R\mathbf{M})}{dt} = \dot{R}\mathbf{M} + R\dot{\mathbf{M}} = 0, \quad (7.12)$$

o que implica que

$$\dot{\mathbf{M}} = -R^T \dot{R} \mathbf{M} = \hat{\Omega} \mathbf{M},$$

ou, de forma vetorial,

$$\dot{\mathbf{M}} = -[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M}]. \quad (7.13)$$

Substituindo $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}$ nesta equação, obtemos as equações de Euler na forma

$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = [I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}]. \quad (7.14)$$

Comentários adicionais:

1. As funções $\Omega_i(t)$ representam as componentes da velocidade angular instantânea $\boldsymbol{\omega}$ na base fixa no corpo, isto é, nos vetores $\mathbf{R}_i$. Portanto, conhecer a solução das equações de Euler não é suficiente, por si só, para descrever completamente o comportamento do corpo rígido. Para reconstruir sua orientação ao longo do tempo, é necessário resolver também as equações de evolução da matriz de rotação, dadas por (7.10).

2. Calculando a derivada temporal de $\omega_i(t) = R_{ij}(t)\Omega_j(t)$ e utilizando (7.10), obtemos:

$$\dot{\omega}_i = R_{ij}\dot{\Omega}_j.$$

Portanto, se $\dot{\omega}_i \neq 0$, então necessariamente $\dot{\Omega}_j(t) \neq 0$. Isso indica que, quando o eixo de rotação $\boldsymbol{\omega}$ se move no espaço, ele também se move com relação ao corpo.

3. Como consequência das equações (7.9) e (7.10), o vetor de velocidade angular no espaço, $\boldsymbol{\omega}$, satisfaz equações de movimento mais complexas:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = RI^{-1}R^T[\mathbf{m}, \boldsymbol{\omega}]. \quad (7.15)$$

Na dedução desta equação foi utilizada a identidade (3).

4. Ao substituir $\boldsymbol{\Omega} = R^T\boldsymbol{\omega}$ na equação (7.10), ela se transforma diretamente na equação (5.6).

8 Imagem qualitativa do movimento de acordo com Poinot.

De acordo com a equação $\dot{\mathbf{x}}_N = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}_N]$, no sistema do centro de massa, um corpo rígido realiza um movimento de rotação em torno do eixo instantâneo $\boldsymbol{\omega}$, o qual, por sua vez, evolui no espaço conforme a equação (7.15). Esse movimento complexo foi visualizado geometricamente por L. Poinot (23).

Recordemos que os vetores de base fixos no corpo, $\mathbf{R}_j(t)$, foram escolhidos ao longo dos eixos principais de inércia. Além disso, no instante inicial $t = 0$, esses vetores coincidem com a base do sistema de laboratório:

$$\mathbf{R}_j(0) = \mathbf{e}_j.$$

Dessa forma, no instante t a relação entre a base do corpo e a base inercial é dada por:

$$\mathbf{R}_j(t) = \mathbf{e}_i R_{ij}(t), \quad (8.1)$$

onde $R_{ij}(t)$ é a matriz de rotação associada ao movimento do corpo rígido.

Denotemos por x_i as coordenadas de um ponto fixo $\mathbf{x}$ no sistema de laboratório, e por $z_i(t)$ as coordenadas do mesmo ponto no referencial do corpo. A identidade vetorial

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_i x_i = \mathbf{R}_i(t) z_i(t),$$

em conjunto com (8.1), implica

$$\mathbf{e}_i x_i = \mathbf{e}_i R_{ij}(t) z_j(t),$$

o que nos leva à seguinte relação entre as coordenadas nos dois referenciais:

$$x_i = R_{ij}(t) z_j(t), \quad z_i(t) = R_{ji}(t) x_j = R_{ij}^T(t) x_j. \quad (8.2)$$

Se $\mathbf{x}(t)$ representa a trajetória de uma partícula em movimento no espaço, então a diferenciação das expressões acima nos fornece a relação entre os vetores de velocidade nos sistemas de laboratório e do corpo. Especificamente, ao derivarmos a equação $\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}_i(t) z_i(t)$ com relação ao tempo, obtemos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{R}}_i z_i + \mathbf{R}_i \dot{z}_i.$$

Utilizando a equação de evolução da base do corpo $\dot{\mathbf{R}}_i = -[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{R}_i]$, ou ainda $\dot{\mathbf{R}}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}_i$, e aplicando a distributividade do produto vetorial, temos:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{R}_i z_i] + \mathbf{R}_i \dot{z}_i = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x}] + \mathbf{R}_i \dot{z}_i.$$

Essa equação mostra que a velocidade de uma partícula no laboratório é composta por uma rotação (em torno de $\boldsymbol{\Omega}$) mais a variação interna das coordenadas no corpo. Para

um corpo rígido, no entanto, temos $\dot{z}_i = 0$, pois as posições relativas são fixas no corpo. Assim, obtemos novamente:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{x}],$$

confirmando a equação de movimento de um ponto fixo em um corpo rígido.

Se $\mathbf{x}(t)$ representa a trajetória de alguma partícula em movimento no espaço, a derivada dessas igualdades fornece a relação entre os vetores de velocidade no laboratório e nos sistemas de corpos

$$\dot{x}_i - [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}]_i = R_{ij} \dot{z}_j, \quad \dot{z}_i + \epsilon_{ijk} \Omega_j z_k = R_{ij}^T \dot{x}_j, \quad (8.3)$$

onde Ω_i são as componentes da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ expressas na base do corpo.

Se $\mathbf{x}(t)$ representa um ponto pertencente ao corpo rígido, então suas coordenadas no sistema do corpo permanecem constantes, ou seja, $\dot{z}_i = 0$. Nesse caso, a equação (8.3) implica que

$$\dot{\mathbf{x}} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}],$$

como era de se esperar. Por outro lado, se $\mathbf{x}$ representa um ponto fixo no espaço (isto é, $\dot{x}_i = 0$), então sua velocidade relativa ao corpo é dada por:

$$\dot{z}_i = -\epsilon_{ijk} \Omega_j z_k.$$

Consideremos agora o movimento de um corpo rígido com momento angular constante $\mathbf{m} = \text{const}$ e energia constante dada por

$$E = \frac{1}{2} \sum_i I_i^{-1} m_i^2.$$

A expressão da energia conservada (5.20) motiva a associação, a cada instante de tempo t , de um elipsoide cujos eixos estão alinhados com os eixos principais do corpo $\mathbf{R}_i(t)$, e cujos comprimentos dos semieixos são dados por $\sqrt{2E/I_i}$. No sistema de coordenadas fixo ao corpo, esse elipsoide possui equação canônica:

$$\frac{1}{2} I_1 z_1^2 + \frac{1}{2} I_2 z_2^2 + \frac{1}{2} I_3 z_3^2 = E. \quad (8.4)$$

A conservação da energia na forma $\frac{1}{2} \sum I_i \Omega_i^2(t) = E$ implica que as componentes $\Omega_i(t)$ da velocidade angular satisfazem a equação (8.4), ou seja, o vetor $\boldsymbol{\omega}(t)$ permanece sempre sobre a superfície desse elipsoide, conhecido como ****elipsoide de energia****.

Utilizando a relação (8.2) entre coordenadas corporais e inerciais, podemos expressar a equação do elipsoide no sistema de laboratório. A substituição de $z_j = R_{jk}^T(t) x_k$ na equação (8.4) conduz à forma:

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{1}{2} \left(R(t) I R^T(t) \right)_{ij} x_i x_j - E = 0. \quad (8.5)$$

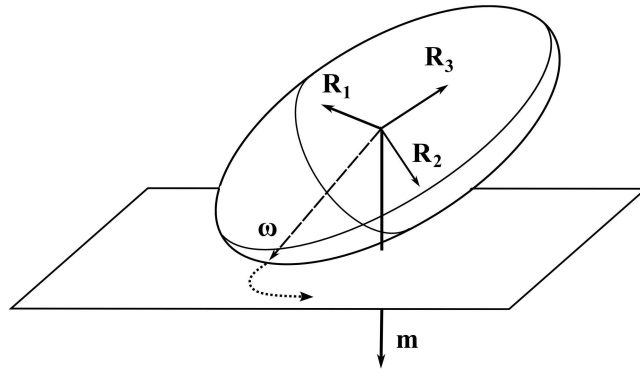


Figura 4 – O elipsoide de Poincaré rola no plano invariável sem deslizar.

Essa superfície é chamada de **elipsoide de Poincaré**, veja a Figura 4.

A conservação da energia na forma

$$\frac{1}{2} \sum (RIR^T)_{ij} \omega_i \omega_j = E$$

implica que as componentes $\omega_i(t)$ da velocidade angular satisfazem esta equação. Ou seja, novamente, a extremidade do vetor $\boldsymbol{\omega}(t)$ permanece sobre o elipsoide de energia em movimento.

Como os eixos principais desse elipsoide coincidem com os vetores base do corpo $\mathbf{R}_i(t)$, a posição do elipsoide de Poincaré no espaço, em cada instante de tempo, representa também a orientação do corpo rígido.

Para esse propósito, consideramos o gradiente da função f , cuja expressão define o elipsoide de Poincaré. O vetor gradiente fornece a direção normal à superfície do elipsoide:

$$(\nabla f)_i = (RIR^T)_{ij} x_j.$$

No ponto $\boldsymbol{\omega}(t)$, esse vetor normal coincide com a direção do momento angular constante $\mathbf{m}$ (ver Eq. 5.19):

$$\nabla f(\boldsymbol{\omega}(t)) = R(t)IR^T(t)\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{m}. \quad (8.6)$$

A conservação da energia, expressa como

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}(t), \mathbf{m}) = E,$$

implica que a projeção da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}(t)$ na direção do momento angular $\mathbf{m}$ é constante:

$$|\boldsymbol{\omega}(t)| \cos \alpha(t) = \frac{2E}{|\mathbf{m}|} = \text{constante}. \quad (8.7)$$

Portanto, o vetor $\boldsymbol{\omega}(t)$ descreve um movimento confinado a um plano ortogonal ao vetor constante $\mathbf{m}$, a uma distância constante $\frac{2E}{|\mathbf{m}|}$ da origem. Esse plano é denominado *plano invariável*.

A partir da equação (8.6), vemos que no ponto $\boldsymbol{\omega}(t)$ o vetor normal ao elipsoide de Poinot é ortogonal ao plano invariável. Logo, o elipsoide toca o plano nesse ponto, sem atravessá-lo. A extremidade do vetor $\boldsymbol{\omega}(t)$ se desloca simultaneamente sobre o plano invariável e sobre o elipsoide.

A velocidade de $\boldsymbol{\omega}(t)$ em relação ao plano (que está no referencial inercial) é dada por $\dot{\omega}_i$, enquanto sua velocidade relativa ao elipsoide (que está no referencial do corpo) é $\dot{\Omega}_i$. Utilizando a equação (8.3), obtemos:

$$R_{ij}\dot{\Omega}_j = \dot{\omega}_i - \epsilon_{ikm}\omega_k\omega_m = \dot{\omega}_i,$$

portanto,

$$|\dot{\boldsymbol{\omega}}| = |R\dot{\boldsymbol{\Omega}}| = |\dot{\boldsymbol{\Omega}}|.$$

Isso mostra que, em intervalos de tempo iguais, o ponto $\boldsymbol{\omega}(t)$ percorre a mesma distância tanto no elipsoide quanto no plano. Em outras palavras, o elipsoide de Poinot **rola sobre o plano invariável sem escorregar**.

A imagem obtida para o movimento livre de um corpo rígido pode ser resumida da seguinte forma: no sistema de centro de massa, podemos associar ao corpo dois objetos geométricos — o *plano invariável* e o *elipsoide de Poinot*. Este último pode ser usado para visualizar a orientação do corpo, pois seus eixos coincidem, a cada instante, com os vetores base $\mathbf{R}_i(t)$ fixados no corpo. Durante o movimento, o elipsoide de Poinot rola sobre o plano invariável sem escorregar. A extremidade do vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}(t)$ permanece constantemente no ponto de contato entre essas duas superfícies.

9 Discussão sobre equações de movimento.

Neste capítulo apresentamos e discutimos diferentes formas das equações de movimento de um corpo rígido.

Sistema linear de 3 + 9 equações. Retomando os resultados dos capítulos anteriores, a dinâmica associada aos graus de liberdade rotacionais pode ser descrita pelas equações de Euler-Poisson de primeira ordem, escritas em termos das variáveis dinâmicas independentes $R_{ij}(t)$ e $\Omega_i(t)$:

$$I\dot{\Omega} = [I\Omega, \Omega], \quad (9.1)$$

$$\dot{R}_{ij} = -\epsilon_{jkm}\Omega_k R_{im}, \quad (9.2)$$

as quais devem ser resolvidas com as condições iniciais naturais para a matriz de rotação: $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Já as condições iniciais para Ω_i são arbitrárias, representando as componentes da velocidade angular inicial do corpo. Assume-se que o tensor de inércia I é diagonal: $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$.

Uma vez conhecida a solução $R(t)$, a evolução da posição de um ponto material fixo no corpo, denotado por $\mathbf{y}(t)$, é determinada pela expressão

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t + R(t)\mathbf{x}(0),$$

onde $\mathbf{x}(0)$ é a posição inicial do ponto no sistema de centro de massa. Os termos $\mathbf{C}_0$ e $\mathbf{V}_0 t$ descrevem o movimento translacional do centro de massa no referencial do laboratório.

Lembremos que as colunas da matriz $R(t) = (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3)$ formam uma base ortonormal rigidamente associada ao corpo. Por sua vez, as linhas da matriz transposta $R^T(t) = (\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3)$ representam as componentes dos vetores de base do laboratório, $\mathbf{e}_i$, expressas na base móvel do corpo. Por exemplo, o vetor $\mathbf{G}_1(t) = (R_{11}, R_{12}, R_{13})$ fornece as coordenadas do vetor de base fixo $\mathbf{e}_1$ na base móvel $\mathbf{R}_i(t)$.

As equações de Euler-Poisson admitem diversas integrais de movimento. Entre elas, encontra-se a energia rotacional

$$2E = (\Omega, I\Omega) = I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2, \quad (9.3)$$

três componentes do momento angular

$$m_i = (RI\Omega)_i = I_1 R_{i1}\Omega_1 + I_2 R_{i2}\Omega_2 + I_3 R_{i3}\Omega_3, \quad (9.4)$$

e mais seis integrais

$$R_{ki}R_{kj} = a_{ij}. \quad (9.5)$$

As constantes de integração a_{ij} são determinadas pelas condições iniciais: como $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$, segue-se que $a_{ij} = \delta_{ij}$. Portanto, essas integrais de movimento se reduzem às condições

de ortogonalidade da matriz de rotação. Consequentemente, qualquer solução $R_{ij}(t)$ do sistema sujeita a essas condições iniciais será automaticamente uma matriz ortogonal para todo instante futuro, ou seja,

$$R^T(t)R(t) = \mathbf{1}.$$

Adicionalmente, as condições iniciais implicam uma relação entre a energia e o momento angular dada por

$$2E = \frac{1}{I_1}m_1^2 + \frac{1}{I_2}m_2^2 + \frac{1}{I_3}m_3^2. \quad (9.6)$$

O quadrado do momento angular pode ser expresso como

$$\mathbf{m}^2 = I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2, \quad (9.7)$$

onde se observa que $\mathbf{m}^2$ não depende da matriz R_{ij} . Assim, as próprias equações de Euler admitem duas integrais independentes de movimento, dadas pelas equações (9.6) e (9.7).

Por sua vez, as equações (9.2) ainda estão expressas em um número excessivo de variáveis. De fato, em cada instante de tempo, os nove elementos da matriz R_{ij} são sujeitos a seis restrições impostas pela condição de ortogonalidade $R^T R = \mathbf{1}$, o que implica que apenas três parâmetros independentes são necessários para especificar completamente a matriz R , ou seja, $9 - 6 = 3$.

É tradição nos tratados clássicos discutir soluções dessas equações utilizando algum conjunto irredutível de variáveis, como os ângulos de Euler (4, 5, 6). Contudo, existem diversos argumentos contrários a essa abordagem. Primeiramente, em discussões fundamentadas nos ângulos de Euler, as equações (9.2) frequentemente se diluem em cálculos extensos, a ponto de não serem explicitamente mencionadas. Em segundo lugar, para descrever completamente o movimento do corpo rígido, é fundamental conhecer a evolução da matriz $R_{ij}(t)$; nesse caso, qual a vantagem real de introduzir variáveis independentes adicionais? Além disso, a descrição em termos dessas variáveis frequentemente se limita a representações locais, o que pode ocasionar mal-entendidos — vide (27). Por fim, resolver as equações de Euler-Poisson diretamente nas variáveis originais pode ser até menos trabalhoso do que utilizar as variáveis independentes, como exemplificado na solução do peão assimétrico livre apresentada em (7).

Dessa forma, optamos por postergar a introdução dos ângulos de Euler para o capítulo 11, concentrando a discussão principal neste capítulo nas equações de movimento formuladas nas variáveis originais.

Sistema linear de 3 + 3 equações. Utilizando as linhas $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ e $\mathbf{G}_3$ da matriz de rotação R , o sistema (9.2) pode ser reescrito como

$$I\dot{\Omega} = [I\Omega, \Omega], \quad \dot{\mathbf{G}}_i = [\mathbf{G}_i, \Omega].$$

Assim, o sistema original se decompõe em três subsistemas equivalentes. Para resolver o problema, basta considerar um sistema reduzido de seis equações, composto pelas três equações de Euler e três equações para qualquer um dos vetores $\mathbf{G}_i$, que denotaremos genericamente por $\boldsymbol{\gamma}$:

$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = [I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}], \quad (9.8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = [\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\Omega}]. \quad (9.9)$$

A matriz de rotação completa pode ser reconstruída a partir de três soluções particulares deste sistema, correspondentes aos três vetores de base do laboratório expressos no referencial corporal: $\mathbf{G}_1(t)$ é a solução $\boldsymbol{\gamma}(t)$ que satisfaz a condição inicial $\boldsymbol{\gamma}(0) = (1, 0, 0)$, $\mathbf{G}_2(t)$ corresponde a $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 1, 0)$, e $\mathbf{G}_3(t)$ corresponde a $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 0, 1)$.

As equações de Euler possuem duas integrais independentes de movimento, expressas em (9.3) e (9.7). De modo análogo, as equações (9.9) admitem as seguintes integrais de movimento, derivadas das relações (9.4) e (9.5):

$$\boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad c = I_1\Omega_1\gamma_1 + I_2\Omega_2\gamma_2 + I_3\Omega_3\gamma_3, \quad (9.10)$$

onde, por exemplo, para $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{G}_1$ temos $c = m_1$, e assim sucessivamente para os outros vetores.

Utilizando essas integrais, o sistema (9.8), (9.9) pode ser reduzido a um conjunto de duas equações diferenciais de primeira ordem, cada uma para uma variável distinta. No caso geral de um corpo rígido assimétrico, essas equações podem ser integradas formalmente, resultando em soluções expressas por integrais elípticas (7). Entretanto, para o caso especial do peão de Lagrange (corpo simétrico), existe uma solução analítica explícita para a matriz R_{ij} , a qual será apresentada e discutida no próximo capítulo.

Sistema parcialmente integrado de 9 equações. As integrais de movimento (9.3) e (9.4), que decorrem diretamente das equações (9.1) e (9.2), podem ser incorporadas a estas últimas, resultando no sistema equivalente:

$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = [I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}], \quad (9.11)$$

$$\dot{R}_{ij} = -\epsilon_{jkp}\Omega_k R_{ip}, \quad (9.12)$$

$$\frac{1}{2} \sum_i I_i \Omega_i^2 = E = \text{const}, \quad (9.13)$$

$$RI\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{m} = \text{const}. \quad (9.14)$$

As equações de Euler (9.11) podem ser deduzidas a partir da conservação do momento angular expressa em (9.14). De fato, derivando esta última em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{R}I\boldsymbol{\Omega} + RI\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0,$$

o que implica

$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = -(R^T \dot{R})I\boldsymbol{\Omega} = \hat{\boldsymbol{\Omega}}I\boldsymbol{\Omega} = [I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}].$$

Portanto, as equações de Euler podem ser omitidas do sistema completo (9.11)–(9.14).

Além disso, ao expressar $\boldsymbol{\Omega}$ em função de $\mathbf{m}$ e R por meio de

$$\Omega_k(\mathbf{m}, R) = (I^{-1}R^T \mathbf{m})_k = \frac{1}{I_k}(m_1 R_{1k} + m_2 R_{2k} + m_3 R_{3k}), \quad (9.15)$$

podemos substituir esta relação nas equações (9.12) e (9.13), reduzindo o sistema às seguintes equações para a matriz de rotação $R_{ij}(t)$, contendo as constantes de integração E e m_i :

$$\dot{R}_{ij} = -\epsilon_{jkp}\Omega_k(\mathbf{m}, R)R_{ip}, \quad (9.16)$$

$$\frac{1}{2} \sum_i I_i \Omega_i^2(\mathbf{m}, R) = E = \text{const.} \quad (9.17)$$

A principal vantagem deste sistema é que ele envolve unicamente a matriz de rotação, que é o objeto fundamental para descrever o estado do corpo rígido. No entanto, em comparação com as formulações anteriores, as equações acima apresentam uma dependência não linear em R_{ij} .

10 Exemplos de soluções em funções elementares.

Corpo assimétrico com valores especiais do momento angular. Neste capítulo, analisamos as equações do corpo assimétrico dadas por (9.16)–(9.17), sob condições iniciais específicas que permitem a separação de variáveis, viabilizando sua solução analítica. Curiosamente, essa solução não pode ser obtida por meio da parametrização via ângulos de Euler; detalhes adicionais são fornecidos no próximo capítulo.

Considere o movimento com momento angular constante orientado ao longo do eixo fixo do laboratório $\mathbf{e}_3$, isto é,

$$\mathbf{m} = (0, 0, m_3 < 0). \quad (10.1)$$

Essa escolha determina a energia total do sistema por

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \frac{m_i^2}{I_i},$$

os semieixos do elipsóide de Poincaré

$$a_i = \sqrt{\frac{2E}{I_i}},$$

e a velocidade angular inicial

$$\omega_i(0) = \frac{m_i}{I_i}.$$

Assim, no instante inicial, o eixo de inércia associado a I_3 é colinear com o momento angular, conforme ilustrado na Figura 5.

A equação (9.15) adquire a forma simples

$$\Omega_k(\mathbf{m}) = \frac{1}{I_k} m_3 R_{3k}. \quad (10.2)$$

Observe que tal configuração não pode ser obtida simplesmente por meio de uma rotação adequada da base do laboratório. Ao escrever as equações (9.1) e (9.2), assumimos que, no instante inicial, os eixos do laboratório e do corpo rígido foram alinhados com os eixos principais de inércia, conforme discutido ao final do capítulo 5. Dessa forma, o tensor de inércia na Eq. (9.15) é uma matriz diagonal, o que simplifica bastante a expressão para a velocidade angular, conforme a Eq. (10.2).

Se considerarmos um corpo rígido com momento angular arbitrário e tentarmos girar o sistema do laboratório para que o vetor $\mathbf{e}_3$ coincida com $\mathbf{m}$, a matriz diagonal I será transformada em uma matriz simétrica I' , e a expressão para a velocidade angular torna-se mais complexa, dada por $\Omega_k(\mathbf{m}) = m_3 R_{3i} (I'^{-1})_{ik}$.

Considerando o momento angular especial (10.1), substituímos a expressão simplificada (10.2) nas equações de movimento (9.16), obtendo

$$\dot{R}_{ij} = -\omega_k \epsilon_{jkp} R_{3k} R_{ip}, \quad \text{onde} \quad \omega_k \equiv \frac{m_3}{I_k}. \quad (10.3)$$

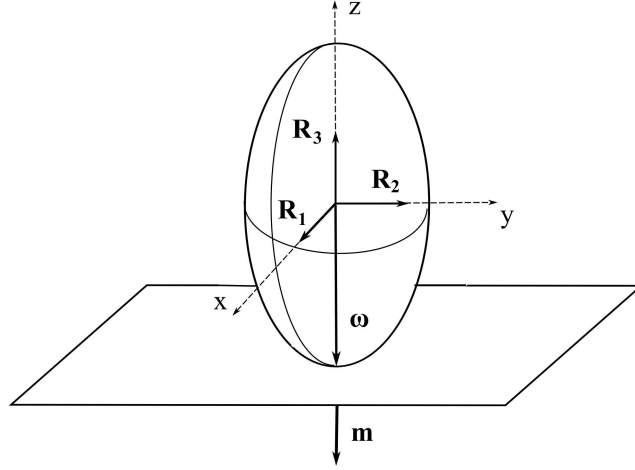


Figura 5 – As equações do corpo assimétrico podem ser facilmente integradas quando o momento angular $\mathbf{m}$ e o eixo de inércia $\mathbf{R}_3$ são colineares no momento inicial.

Buscaremos uma solução da forma (como mencionado anteriormente, o problema possui solução única para as condições iniciais dadas)

$$\mathbf{R}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

Isso implica $R_{3k} = \delta_{3k}$. Usando isso nas Eqs. (10.3) obtemos $\dot{\mathbf{R}}_j = \omega \epsilon_{jp3} \mathbf{R}_p$, ou $\dot{\mathbf{R}}_1 = \omega \mathbf{R}_2$, $\dot{\mathbf{R}}_2 = -\omega \mathbf{R}_1$, bem como a equação $\dot{\mathbf{R}}_3 = 0$, que é identicamente satisfeito por $\mathbf{R}_3$ escrito na Eq. (10.4). Aqui $\omega = m_3/I_3$. Para os componentes, as equações para $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ são lidas

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega x_2, \\ \dot{y}_1 = \omega y_2; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -\omega x_1, \\ \dot{y}_2 = -\omega y_1. \end{cases} \quad (10.5)$$

A solução geral deles é a seguinte

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \\ y_1 = C \sin \omega t + D \cos \omega t; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -A \sin \omega t + B \cos \omega t, \\ y_2 = C \cos \omega t - D \sin \omega t. \end{cases} \quad (10.6)$$

Então as condições iniciais $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$ implicam: $A = C = 1$, $B = D = 0$. No resultado obtivemos a solução

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10.7)$$

Como seria de esperar da Figura 5, isso confirma que os vetores $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ giram em torno do eixo z com constante frequência angular $\omega = m_3/I_3$. Observe também que eles obedecem às equações de precessão em torno do vetor $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, m_3/I_3)$: $\dot{\mathbf{R}}_1 = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}_1]$, $\dot{\mathbf{R}}_2 = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}_2]$.

Solução geral para equações de movimento do corpo simétrico livre.

Considere um corpo rígido com dois momentos de inércia coincidentes, isto é, $I_1 = I_2$. Tomamos então as equações (9.8)–(9.10) com essa condição, e com o momento angular conservado $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$. Inicialmente, confirmamos que, sem perda de generalidade, podemos assumir $m_1 = 0$.

Os momentos de inércia são autovalores do tensor de inércia I , cujos autovetores correspondem aos eixos fixos do corpo no instante inicial, satisfazendo

$$I\mathbf{R}_i(0) = I_i\mathbf{R}_i(0).$$

Com $I_1 = I_2$, temos

$$I\mathbf{R}_1(0) = I_2\mathbf{R}_1(0), \quad I\mathbf{R}_2(0) = I_2\mathbf{R}_2(0),$$

portanto qualquer combinação linear $\alpha\mathbf{R}_1(0) + \beta\mathbf{R}_2(0)$ também é um autovetor com autovalor I_2 . Isso significa que podemos escolher arbitrariamente quaisquer dois eixos ortogonais no plano gerado por $\mathbf{R}_1(0)$ e $\mathbf{R}_2(0)$ como eixos de inércia.

Lembre-se de que, no instante inicial, os eixos do laboratório devem ser alinhados com $\mathbf{R}_i$, para que as equações de movimento contenham os valores dos momentos de inércia I_i em vez do tensor completo I_{ij} . Assim, no caso $I_1 = I_2$, podemos girar os eixos do laboratório no plano (x^1, x^2) sem perder a forma diagonal do tensor de inércia. Utilizando essa liberdade, escolhemos $m_1 = 0$ para simplificar o problema.

Solução geral das equações de Euler. Com $I_1 = I_2$, as equações de Euler assumem a forma

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{(I_2 - I_3)}{I_2} \Omega_3 \Omega_2, \tag{10.8}$$

$$\dot{\Omega}_2 = -\frac{(I_2 - I_3)}{I_2} \Omega_3 \Omega_1, \tag{10.9}$$

$$\dot{\Omega}_3 = 0, \tag{10.10}$$

ou, equivalentemente,

$$\dot{\Omega}_1 = \phi \Omega_2, \quad \dot{\Omega}_2 = -\phi \Omega_1, \quad \Omega_3 = \text{const}, \tag{10.11}$$

onde definimos $\phi \equiv \frac{(I_2 - I_3)}{I_2} \Omega_3$.

A solução geral dessas equações é

$$\Omega_1 = a \sin(\phi t + \phi_0), \quad \Omega_2 = a \cos(\phi t + \phi_0), \quad \Omega_3 = \text{const}.$$

Essa solução tem um significado físico claro: para um observador fixo no referencial do corpo rígido, definido pelos eixos $\mathbf{R}_i$, o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ descreve uma precessão em torno do eixo $\mathbf{R}_3$ com frequência angular ϕ .

Vamos relacionar as constantes de integração a , Ω_3 e ϕ_0 com as grandezas físicas do sistema. O momento angular conservado e a velocidade angular estão ligados pela relação $m_i = I_{ij}\Omega_j(0)$, o que nos dá

$$m_1 = I_2 a \sin \phi_0, \quad m_2 = I_2 a \cos \phi_0, \quad m_3 = I_3 \Omega_3.$$

A escolha $m_1 = 0$ implica $\phi_0 = 0$, de modo que

$$a = \frac{m_2}{I_2}, \quad \Omega_3 = \frac{m_3}{I_3}.$$

Assim, a frequência da precessão ϕ é determinada pela componente m_3 do momento angular conservado,

$$\phi = \frac{(I_2 - I_3)}{I_2 I_3} m_3.$$

Finalmente, a solução explícita é

$$\Omega_1 = \frac{m_2}{I_2} \sin \phi t, \tag{10.12}$$

$$\Omega_2 = \frac{m_2}{I_2} \cos \phi t, \tag{10.13}$$

$$\Omega_3 = \frac{m_3}{I_3}. \tag{10.14}$$

Essa forma explícita da solução evidencia também a conservação da energia rotacional,

$$2E = I_i \Omega_i^2(t) = \frac{m_2^2}{I_2} + \frac{m_3^2}{I_3} = \text{constante}.$$

Solução geral para as equações de Poisson. Pegue a integral linear do movimento da Eq. (9.10) e o terceiro componente da equação de Poisson

$$\Omega_2 \gamma_1 - \Omega_1 \gamma_2 = \dot{\gamma}_3, \quad I_2 \Omega_1 \gamma_1 + I_2 \Omega_2 \gamma_2 = c - I_3 \Omega_3 \gamma_3. \tag{10.15}$$

A solução para este sistema linear é

$$\gamma_1 = \frac{I_2}{m_2^2} [I_2 \Omega_2 \dot{\gamma}_3 + (c - m_3 \gamma_3) \Omega_1], \quad \gamma_2 = \frac{I_2}{m_2^2} [-I_2 \Omega_1 \dot{\gamma}_3 + (c - m_3 \gamma_3) \Omega_2]. \tag{10.16}$$

Substituindo essas expressões na equação de Poisson $\dot{\gamma}_1 = \Omega_3 \gamma_2 - \Omega_2 \gamma_3$ obtemos a equação fechada para γ_3

$$\ddot{\gamma}_3 + k^2 \gamma_3 = \frac{m_3}{I_2^2} c, \quad \text{onde} \quad k^2 \equiv \frac{m_2^2 + m_3^2}{I_2^2} = \frac{\mathbf{m}^2}{I_2^2}, \tag{10.17}$$

com a solução geral

$$\gamma_3 = b \cos(kt + k_0) + \frac{m_3 c}{\mathbf{m}^2}, \quad \text{onde} \quad k \equiv \frac{|\mathbf{m}|}{I_2}. \tag{10.18}$$

De acordo com a Eq. (10.18), a segunda frequência de oscilação k no problema é determinada pela magnitude do momento angular conservado. Usando este γ_3 nas equações (10.16), obtemos a solução geral do sistema (9.9) como segue

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -\frac{|\mathbf{m}|b}{m_2} \cos \phi t \sin(kt + k_0) + \left[\frac{m_2 c}{\mathbf{m}^2} - \frac{m_3 b}{m_2} \cos(kt + k_0) \right] \sin \phi t, \\ \gamma_2 &= \frac{|\mathbf{m}|b}{m_2} \sin \phi t \sin(kt + k_0) + \left[\frac{m_2 c}{\mathbf{m}^2} - \frac{m_3 b}{m_2} \cos(kt + k_0) \right] \cos \phi t, \\ \gamma_3 &= b \cos(kt + k_0) + \frac{m_3 c}{\mathbf{m}^2}.\end{aligned}\quad (10.19)$$

No instante inicial $t = 0$ obtemos

$$\gamma_1(0) = -\frac{|\mathbf{m}|b}{m_2} \sin k_0, \quad \gamma_2(0) = \frac{m_2 c}{\mathbf{m}^2} - \frac{m_3 b}{m_2} \cos k_0, \quad \gamma_3(0) = b \cos k_0 + \frac{m_3 c}{\mathbf{m}^2}. \quad (10.20)$$

Como vimos acima, as três linhas da matriz R_{ij} são obtidas a partir das Eqs. (10.19) se escolhermos as constantes de integração b e k_0 então que $\gamma(0) = (1, 0, 0)$ com $c = m_1$, então $\gamma(0) = (0, 1, 0)$ com $c = m_2$, e por último $\gamma(0) = (0, 0, 1)$ com $c = m_3$. Resolvendo as equações (10.20) com estes dados, obtemos, em cada caso

$$\begin{aligned}c = m_1 = 0, \quad b &= -\frac{m_2}{|\mathbf{m}|}, \quad k_0 = \frac{\pi}{2}; \\ c = m_2, \quad b &= -\frac{m_2 m_3}{\mathbf{m}^2}, \quad k_0 = 0; \\ c = m_3, \quad b &= \frac{m_2^2}{\mathbf{m}^2}, \quad k_0 = 0.\end{aligned}\quad (10.21)$$

Substituindo esses valores na Eq. (10.19) obtemos a forma final da matriz de rotação R do peão simétrico livre como segue:

$$\begin{pmatrix} \cos kt \cos \phi t - \hat{m}_3 \sin kt \sin \phi t & -\cos kt \sin \phi t - \hat{m}_3 \sin kt \cos \phi t & \hat{m}_2 \sin kt \\ \hat{m}_3 \sin kt \cos \phi t + (\hat{m}_2^2 + \hat{m}_3^2 \cos kt) \sin \phi t & -\hat{m}_3 \sin kt \sin \phi t + (\hat{m}_2^2 + \hat{m}_3^2 \cos kt) \cos \phi t & \hat{m}_2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt) \\ -\hat{m}_2 \sin kt \cos \phi t + \hat{m}_2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt) \sin \phi t & \hat{m}_2 \sin kt \sin \phi t + \hat{m}_2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt) \cos \phi t & \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt \end{pmatrix}, \quad (10.22)$$

onde, assumindo $|\mathbf{m}| \neq 0$, denotamos por $\hat{m}_i = m_i/|\mathbf{m}|$ as componentes do vetor unitário na direção do momento angular conservado. As duas frequências no problema são $\phi = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} m_3$ e $k = |\mathbf{m}|/I_2 = \sqrt{m_2^2 + m_3^2}/Eu_2$. Curiosamente, a matriz R depende dos momentos de inércia apenas através das frequências.

As fórmulas (7.11) e (10.22) resolvem o problema do movimento do peão simétrico livre.

Decomposição da matriz de rotação em duas rotações subsequentes e a imagem do movimento de Poincaré. Começamos nossa discussão sobre a matriz de rotação examinando vários casos limites.

(1) Considere o momento angular conservado $\mathbf{m}$ na direção do eixo do laboratório OY , ou seja, $m_3 = 0$, $m_2 \neq 0$. Isso implica $\phi = 0$, $|\mathbf{m}| = |m_2|$, $\hat{m}_2 = \pm 1$, e $\hat{m}_2 \sin \frac{|\mathbf{m}|t}{I_2} =$

$\sin \frac{m_2 t}{I_2}$. Usando isso na Eq. (10.22) obtemos

$$R_{OY}(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{m_2 t}{I_2} & 0 & \sin \frac{m_2 t}{I_2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \frac{m_2 t}{I_2} & 0 & \cos \frac{m_2 t}{I_2} \end{pmatrix}. \quad (10.23)$$

Este movimento de frequência única representa a rotação do corpo rígido em torno do eixo de inércia OY .

(2) De forma análoga, para $m_2 = 0$, $m_3 \neq 0$, temos $|\mathbf{m}| = |m_3|$, $\hat{m}_3 = \pm 1$, $k = \frac{|m_3|}{I_2}$, e $\phi + \frac{m_3}{I_2} = \frac{m_3}{I_3}$. Aplicando isso na Eq. (10.22), observamos que as duas frequências combinam-se em uma única, conforme

$$R_{OZ}(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{m_3 t}{I_3} & -\sin \frac{m_3 t}{I_3} & 0 \\ \sin \frac{m_3 t}{I_3} & \cos \frac{m_3 t}{I_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.24)$$

Este movimento de frequência única corresponde à rotação do corpo rígido em torno do eixo de inércia OZ . Note que esta solução coincide com o movimento de um peão assimétrico, conforme Eq. (10.7), sob as mesmas condições iniciais.

(3) Para o corpo totalmente simétrico, $I_1 = I_2 = I_3$, obtemos $\phi = 0$ e a matriz de rotação (10.22) assume a forma

$$R_{\mathbf{m}}(t) = \begin{pmatrix} \cos kt & -\hat{m}_3 \sin kt & \hat{m}_2 \sin kt \\ \hat{m}_3 \sin kt & \hat{m}_2^2 + \hat{m}_3^2 \cos kt & \hat{m}_2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt) \\ -\hat{m}_2 \sin kt & \hat{m}_2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt) & \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt \end{pmatrix}, \quad (10.25)$$

onde $k = \frac{|\mathbf{m}|}{I_2}$. Os pontos do corpo localizados ao longo do eixo $\mathbf{m}$ permanecem fixos durante este movimento: para qualquer $c \in \mathbb{R}$,

$$R_{\mathbf{m}}(t) c\mathbf{m} = c\mathbf{m}.$$

Portanto, este movimento representa a rotação do corpo em torno do vetor momento angular conservado $\mathbf{m}$. Este é o único movimento possível para um corpo totalmente simétrico.

(4) Para discutir o caso geral do movimento de duas frequências (10.22), recordemos como os movimentos rotacionais do corpo rígido se apresentam na imagem de Poinsot. Consideremos

$$I_1 = I_2 > I_3, \quad m_1 = 0, \quad m_2 > 0, \quad m_3 < 0. \quad (10.26)$$

Isso determina a energia

$$E = \frac{1}{2} \sum_i I_i^{-1} m_i^2,$$

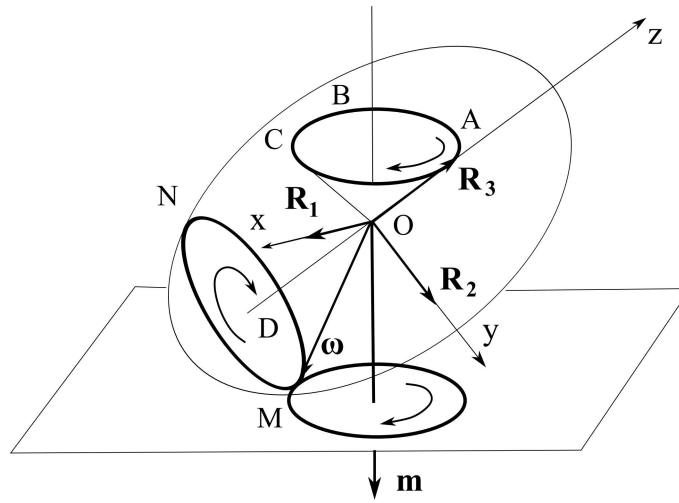


Figura 6 – Imagem de Poincaré para o peão simétrico.

os semieixos

$$a_i = \sqrt{\frac{2E}{I_i}},$$

e a velocidade angular inicial

$$\omega_i(0) = I_i^{-1} m_i.$$

Com esses dados, podemos construir o plano invariável e o elipsóide de Poincaré. A posição do elipsóide de Poincaré no instante inicial $t = 0$ é mostrada na Figura 6.

Neste instante, os vetores $\mathbf{m}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$, assim como os pontos O , A , C , D , M e N estão contidos no plano $x = 0$. O ponto A representa a extremidade do vetor fixo do corpo $\mathbf{R}_3$ neste instante. Como $\dot{\mathbf{R}}_3 = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}_3]$, o ponto A inicia seu movimento na direção indicada pela seta próxima a ele. Isso determina as direções dos movimentos dos demais elementos como segue. A roda D , com eixo DO fixado no ponto O , rola sem escorregar ao longo do círculo desenhado no plano invariável. A extremidade do vetor $\boldsymbol{\omega}$ descreve esse círculo no sentido anti-horário em torno de $\mathbf{m}$. Consequentemente, todos os pontos do eixo fixo do corpo Dz se movem ao longo dos círculos formados por um cone com eixo orientado segundo $\mathbf{m}$. Em particular, o ponto A descreve o círculo $ACBA$.

Resumindo, o eixo Dz , formado pelos pontos do corpo, gera a superfície do cone, enquanto os demais pontos do corpo giram instantaneamente em torno deste eixo.

A matriz de rotação (10.22) corresponde a esta imagem. Na verdade, observamos que ela pode ser decomposta da seguinte forma:

$$R(t) = R_{\mathbf{m}}(t) \times R_{OZ}(t), \quad (10.27)$$

onde $R_{\mathbf{m}}(t)$ é a matriz de rotação dada pela Eq. (10.25), e

$$R_{OZ}(t) = \begin{pmatrix} \cos \phi t & -\sin \phi t & 0 \\ \sin \phi t & \cos \phi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.28)$$

onde

$$\phi = \frac{(I_2 - I_3)m_3 t}{I_2 I_3}.$$

Então, a posição $\mathbf{x}(t)$ de qualquer ponto do corpo no instante t é dada por:

$$\mathbf{x}(t) = R_{\mathbf{m}}(t) \times R_{OZ}(t) \mathbf{x}(0).$$

Isso significa que o vetor de posição inicial $\mathbf{x}(0)$ é girado primeiro em torno do eixo do laboratório OZ pelo ângulo $\frac{(I_2 - I_3)m_3 t}{I_2 I_3}$ e, em seguida, em torno do eixo $\mathbf{m}$ pelo ângulo $\frac{|\mathbf{m}|t}{I_2}$.

Para completar, apresentamos também a forma explícita do vetor velocidade angular instantânea do peão simétrico:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) &= R(t) \boldsymbol{\Omega}(t) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(I_2 - I_3)m_2 m_3}{I_2 I_3 |\mathbf{m}|} \sin kt \\ \frac{(I_3 m_2^2 + I_2 m_3^2)m_2}{I_2 I_3 \mathbf{m}^2} - \frac{(I_2 - I_3)m_2 m_3^2}{I_2 I_3 \mathbf{m}^2} \cos kt \\ \frac{(I_3 m_2^2 + I_2 m_3^2)m_3}{I_2 I_3 \mathbf{m}^2} + \frac{(I_2 - I_3)m_2^2 m_3}{I_2 I_3 \mathbf{m}^2} \cos kt \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

A magnitude deste vetor fornece a frequência total de rotação dos pontos do corpo em cada instante de tempo:

$$\omega^2 = \frac{m_2^2}{I_2^2} + \frac{m_3^2}{I_3^2}.$$

Essa magnitude está relacionada às duas frequências da matriz de rotação da seguinte forma:

$$\omega^2 = k^2 + \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} m_3 \phi.$$

11 Peão livre de Lagrange via ângulos de Euler

Construiremos o sistema de vetores básicos ligados rigidamente ao corpo $\{\mathbf{R}_i\}$ a partir da base canônica $\{\mathbf{e}_i\}$. A princípio, fixamos um vetor normal ao plano gerado por um par $\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_i$. Escolhemos $\mathbf{e}'_1 \equiv [\mathbf{e}_3, \mathbf{R}_3]$, desde que $\mathbf{e}_3$ e $\mathbf{R}_3$ não estejam na mesma direção. Construímos também um sistema de coordenadas $\{\mathbf{e}'_i\}$ onde, no instante inicial, $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i$. A matriz R que transforma $\{\mathbf{e}_i\}$ em $\{\mathbf{R}_i\}$ será obtida seguindo os passos abaixo:

1. Rotacionar o vetor $\mathbf{e}'_1$ em torno de $\mathbf{e}_3$ por um ângulo de φ no sentido anti-horário. Pela configuração inicial dos vetores, isso também gerará um ângulo φ entre $\mathbf{e}'_2$ e $\mathbf{e}_2$.
2. Rotacionar o vetor $\mathbf{e}'_3$ em torno de $\mathbf{e}'_1$ por um ângulo θ no sentido anti-horário até que ele coincida com $\mathbf{R}_3$. Logicamente, $\mathbf{e}'_2$ acompanha a rotação. A partir desse momento, $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ estão todos no mesmo plano.
3. Rotacionar o vetor $\mathbf{e}'_1$ em torno de $\mathbf{R}_3$ por um ângulo ψ no sentido anti-horário até que ele coincida com $\mathbf{R}_1$. Nesse momento, $\mathbf{e}'_2$ também estará coincidindo com $\mathbf{R}_2$. Esse procedimento está representado pela figura 7.

A aplicação sucessiva dessas três operações constrói uma matriz transformação $R(\varphi, \theta, \psi)$ da base $\mathbf{e}_i$ para a base $\mathbf{R}_i$. Os vetores da base $\{\mathbf{e}_i\}$ tem direção e sentido fixos no espaço, logo, os vetores da base $\{\mathbf{R}_i\}$ devem depender dos ângulos φ, θ e ψ . Logo, por construção, vale a relação $\mathbf{R}_i(\varphi, \theta, \psi) = R_{ji}(\varphi, \theta, \psi)\mathbf{e}_j$, para $i, j \in \{1, 2, 3\}$. A forma explícita da matriz $R(\varphi, \theta, \psi)$ é dada por (os ângulos são considerados funções do tempo: $\varphi = \varphi(t)$, $\theta = \theta(t)$ e $\psi = \psi(t)$):

$$R(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (11.1)$$

onde

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \psi < 2\pi. \quad (11.2)$$

O objetivo desse capítulo é solucionar o Problema de Cauchy (9.11-9.14) utilizando a matriz $R(\varphi, \theta, \psi)$. Aplicando a Equação de Poisson (9.12) nela obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ij}(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) &\equiv \frac{\partial R_{ij}(\varphi, \theta, \psi)}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial R_{ij}(\varphi, \theta, \psi)}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial R_{ij}(\varphi, \theta, \psi)}{\partial \psi} \dot{\psi} \\ &= -\epsilon_{jkp} \Omega_k(\varphi, \theta, \psi) R_{ip}(\varphi, \theta, \psi). \end{aligned} \quad (11.3)$$

As componentes $\Omega_k(\varphi, \theta, \psi)$ são obtidas substituindo as componentes da matriz (11.1) na

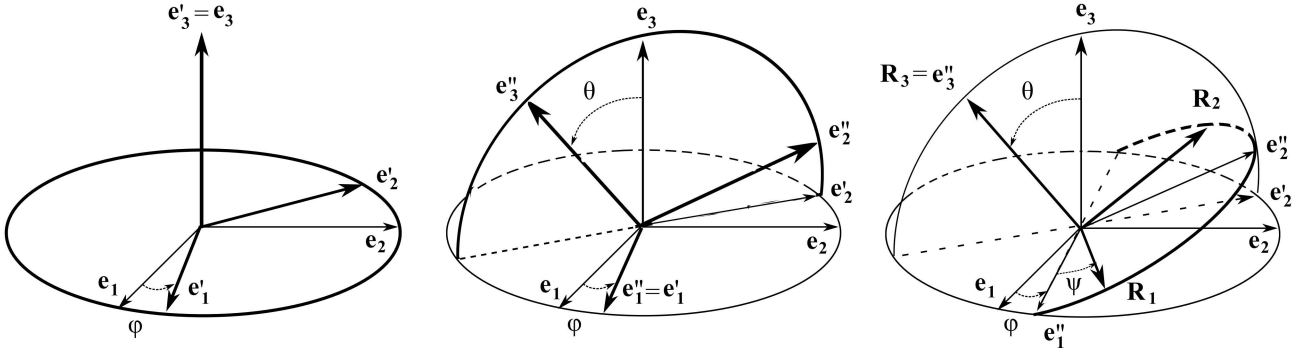


Figura 7 – Definition of the Euler angles φ , θ and ψ .

equação (9.15). Elas são dadas por:

$$\Omega_1 = \frac{m_2}{I_2} [\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \theta \cos \varphi] + \frac{m_3}{I_2} \sin \psi \sin \theta, \quad (11.4)$$

$$\Omega_2 = \frac{m_2}{I_2} [-\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi] + \frac{m_3}{I_2} \cos \psi \sin \theta, \quad (11.5)$$

$$\Omega_3 = -\frac{m_2}{I_3} \sin \theta \cos \varphi + \frac{m_3}{I_3} \cos \theta. \quad (11.6)$$

Na equação $\dot{R}_{ij}(\varphi, \theta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$ em (11.3) estão representadas 9 equações diferenciais das variáveis φ , θ e ψ . A interpretação dela é que a Equação de Poisson implica em como os ângulos de euler φ , θ e ψ variam com o tempo; obedecendo equações diferenciais de primeira ordem. Então, resolver essas equações é equivalente a resolver a Equação de Poisson.

Supomos que as funções $\varphi(t)$, $\theta(t)$ e $\psi(t)$ são soluções das equações (11.3). Substituímos essas soluções em (11.1) e obtemos $R(t) \equiv R(\varphi(t), \theta(t), \psi(t))$ – solução da equação de Poisson (9.12). Pela construção de $R(\varphi, \theta, \psi)$, a matriz $R(t)$ não pode representar a solução de um corpo rígido. Com efeito, aplicando a condição $R_{ij}(0) = R_{ij}(\varphi(0), \theta(0), \psi(0)) = \delta_{ij}$, vemos que a componente $R_{33}(0) = \cos \theta(0) = 1$ implica $\theta = 0$ em um intervalo de 0 a 2π . Mas, por construção, $0 < \theta < \pi$, então, é impossível calcular $\cos \theta(0)$. Logo, a matriz $R(\varphi, \theta, \psi)$ não pode representar uma solução para o corpo rígido.

Como não se pode obter uma solução que representa um corpo rígido a partir de (11.3), buscaremos uma solução que se aproxima de um corpo rígido. Se obtermos uma matriz $R(t) \equiv R(\varphi(t), \theta(t), \psi(t))$ tal que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} R_{ij}(t) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} R_{ij}(\varphi(t), \theta(t), \psi(t)) = \delta_{ij}, \quad (11.7)$$

então podemos concluir que $R(t)$ é uma boa solução que se aproxima de um corpo rígido.

Para resolver (11.3), começamos escolhendo componentes tais que as equações diferenciais respectivas são simples de resolver. Escolhemos os termos:

$$\dot{R}_{33} = -\Omega_1 R_{32} + \Omega_2 R_{31}, \quad \dot{R}_{31} = -\Omega_2 R_{33} + \Omega_3 R_{32}. \quad (11.8)$$

Para se obter essas equações apenas em função dos ângulos de euler $\varphi(t)$, $\theta(t)$ e $\psi(t)$ é preciso substituir as componentes respectivas da matriz (11.1) e as velocidades angulares (11.4)-(11.6). Quando substituimos a matriz elas se tornam¹:

$$\dot{\theta} = \Omega_1 \cos \psi - \Omega_2 \sin \psi, \quad (11.9)$$

$$\dot{\psi} \sin \theta = -(\Omega_1 \sin \psi + \Omega_2 \cos \psi) \cos \theta + \Omega_3 \sin \theta. \quad (11.10)$$

Agora, substituindo as velocidades angulares:

$$\dot{\theta} = \frac{m_2}{I_2} \sin \varphi \quad (11.11)$$

$$\dot{\psi} = -\left(\frac{m_2 \cos^2 \theta}{I_2 \sin \theta} + \frac{m_2}{I_3} \sin \theta\right) \cos \varphi + \left(-\frac{m_3}{I_2} + \frac{m_3}{I_3}\right) \cos \theta. \quad (11.12)$$

Podemos obter uma equação para φ da seguinte forma: a energia em função dos ângulos de Euler é dada substituindo as velocidades angulares (11.4)-(11.6) na equação (9.13):

$$2E = \frac{m_2^2}{I_2} + \frac{m_3^2}{I_3} + I_{(2-3)}[(m_3^2 - m_2^2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + 2m_3 m_2 \cos \varphi \cos \theta \sin \theta], \quad (11.13)$$

onde $I_{(a-b)} \equiv 1/I_a - 1/I_b$. Ainda pela energia (9.13), também temos $2E = m_2^2/I_2 + m_3^2/I_3$. O que implica que na equação acima temos:

$$(m_3^2 - m_2^2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + 2m_3 m_2 \cos \varphi \cos \theta \sin \theta = 0. \quad (11.14)$$

Essa é uma equação quadrática onde a variável é $\cos \varphi$. Ela tem duas soluções, dadas por:

$$\cos \varphi_+ = \frac{m_3}{m_2} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}, \quad \text{ou}, \quad \cos \varphi_- = -\frac{m_3}{m_2} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (11.15)$$

Substituindo ambas em (11.6), obtemos integrais de movimento:

$$\cos \varphi_+ \implies \Omega_3 = -\frac{m_3}{I_3}, \quad \text{e}, \quad \cos \varphi_- \implies \Omega_3 = \frac{m_3}{I_3}. \quad (11.16)$$

Pela condição inicial $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$, temos $\Omega_3(0) = m_3/I_3$, o que implica que $\cos \varphi_+$ não pode ser uma solução que representa um corpo rígido. Logo, a única solução possível da equação (11.14) que satisfaz as condições do nosso problema é

$$\cos \varphi = -\frac{m_3}{m_2} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}, \quad \text{ou}, \quad \sin \varphi = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{m_3}{m_2}\right)^2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}}. \quad (11.17)$$

As condições (11.2) são devidas à construção de $R(\varphi, \theta, \psi)$ em (11.1). Como $0 < \theta < \pi$ e pelas condições $m_2 > 0$ e $m_3 < 0$, a função $\cos \varphi$ é sempre positiva. Como o ângulo φ está definido no intervalo $0 < \varphi < 2\pi$, então φ deve satisfazer² $0 < \varphi \leq \pi/2$

¹ Para obter (11.10) também se utiliza (11.9).

² Uma forma mais clara de explicar isso é a seguinte. Estabelecemos os intervalos $A = \{\varphi \in \mathbb{R}; 0 < \varphi < 2\pi\}$ e $B = \{\varphi \in \mathbb{R}; 0 < \varphi \leq \pi/2 \text{ ou } 3\pi/2 \leq \varphi < 2\pi\}$. O ângulo φ que aparece na matriz (11.1) está definido no conjunto A . As equações do corpo rígido (Equações de Euler-Poisson, integrais de movimento, etc.) implicam que φ pertence ao conjunto $B \subset A$.

ou $3\pi/2 \leq \varphi < 2\pi$. A função $\sin \varphi$ é positiva no intervalo $0 < \varphi \leq \pi/2$ e negativa no intervalo $3\pi/2 \leq \varphi < 2\pi$.

Agora, podemos substituir a equação (11.17) nas equações (11.11) e (11.12) e obter um sistema de equações para os ângulos φ , θ e ψ

$$\dot{\theta} = \pm \frac{m_2}{I_2} \sqrt{1 - \left(\frac{m_3}{m_2}\right)^2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}}, \quad (11.18)$$

$$\dot{\psi} = \frac{m_3}{I_3} - \frac{m_3}{I_2} \frac{(1 - \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad (11.19)$$

$$\cos \varphi = -\frac{m_3}{m_2} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (11.20)$$

Se as soluções $\varphi(t)$, $\theta(t)$ e $\psi(t)$ desse sistema implicam $\lim_{t \rightarrow 0} R_{ij}(\varphi(t), \theta(t), \psi(t)) = \delta_{ij}$, então elas representam uma boa aproximação para o movimento de um corpo rígido.

Iniciando a solução do sistema por (11.18), multiplicamos ela por $\sin \theta$ e consideramos a substituição $u = \cos \theta$. Obtemos a equação:

$$\dot{u} = \pm \frac{1}{I_2} \sqrt{[1 - u][(m_2^2 + m_3^2)u + m_2^2 - m_3^2]}. \quad (11.21)$$

A solução dessa equação diferencial é dada solucionando a integral:

$$\int \frac{du}{\sqrt{[1 - u][(m_2^2 + m_3^2)u + m_2^2 - m_3^2]}} + c = \pm \frac{t}{I_2}, \quad \text{onde,} \quad c = \text{const}, \quad (11.22)$$

e depois substituindo $u = \cos \theta$. Obtemos duas soluções dadas por:

$$\cos \theta(t) = \hat{m}_3^2 \pm \hat{m}_2^2 \cos kt + c_{\pm}, \quad \text{onde,} \quad c_{\pm} = \text{const}. \quad (11.23)$$

A condição $\lim_{t \rightarrow 0} R_{ij}(\varphi(t), \theta(t), \psi(t)) = \delta_{ij}$ em (11.1) implica $\lim_{t \rightarrow 0} R_{33} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos \theta(t) = \cos \theta(0) = 1$, porque (11.23) é contínua. Então, as constantes são dadas por $c_+ = 0$ e $c_- = 2\hat{m}_2^2$. Substituindo elas nas soluções (11.23):

$$\cos \theta_+(t) = \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt, \quad \text{ou,} \quad \cos \theta_-(t) = 1 + \hat{m}_2^2(1 - \cos kt). \quad (11.24)$$

A solução $\cos \theta_-(t)$ é inconsistente com uma função cosseno por assumir todos os valores do intervalo $[1, 1 + 2\hat{m}_2^2]$ quando $t \in [0, \pi/k]$. Logo, a única solução da equação (11.18) é³

$$\cos \theta(t) = \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt, \quad \text{ou,} \quad \sin \theta(t) = \sqrt{1 - (\hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt)^2}. \quad (11.25)$$

Agora, substituindo (11.25) nas equações (11.19) e (11.20), obtemos:

$$\dot{\psi}(t) = \phi + \frac{m_3}{2I_2} \frac{1}{\hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos^2 \frac{k}{2}t}, \quad \text{onde,} \quad \phi \equiv (I_2 - I_3)m_3/I_2I_3, \quad (11.26)$$

$$\cos \varphi(t) = -\hat{m}_3 \sqrt{\frac{1 - \cos kt}{1 + \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt}}, \quad \text{ou,} \quad \sin \varphi(t) = \sqrt{\frac{1 + \cos kt}{1 + \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt}}. \quad (11.27)$$

³ $\sin \theta(t)$ é sempre positivo, pois $0 < \theta < \pi$.

Comentários 1:

1. A solução $\cos \varphi(t)$ é sempre positiva para todo instante de tempo, pois $\hat{m}_3 < 0$. Como foi deduzido antes, $0 < \varphi \leq \pi/2$ ou $3\pi/2 \leq \varphi < 2\pi$. Como $\cos \varphi(0) = 0$, então $\varphi(0) = \pi/2$ ou $\varphi(0) = 3\pi/2$. No intervalo $(0, \pi/k)$ a função $\cos \varphi(t)$ é crescente.

2. Agora queremos determinar qual entre $\varphi(0) = \pi/2$ ou $\varphi(0) = 3\pi/2$ é o correto. Considerando um contradomínio de 0 a 2π , podemos definir uma função inversa do cosseno que seja contínua de apenas duas formas: $\arccos x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ ou $\arccos x : [-1, 1] \rightarrow [\pi, 2\pi]$. Analisaremos cada uma separadamente.

Se $\arccos x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, sabemos que $\arccos x$ é decrescente, pois $d \arccos x / dx = -1/\sqrt{1-x^2}$. Para φ definida no intervalo $0 < \varphi \leq \pi/2$, isso implicaria que φ é uma função decrescente com t , isto é, quando t varia de 0 a π/k , $\varphi(t)$ varia de $\pi/2$ a 0.

Se $\arccos x : [-1, 1] \rightarrow [\pi, 2\pi]$, então, isso implicaria $\arccos x$ como uma função crescente⁴, contrariando a sua derivada. Então há um problema para encontrar a função $\varphi(t)$ no intervalo $3\pi/2 \leq \varphi < 2\pi$.

Dito isso, utilizando a primeira definição de $\arccos x$ em $\cos \varphi(t)$ na equação (11.27), obtemos:

$$\varphi(t) = \arccos \left(-\hat{m}_3 \sqrt{\frac{1 - \cos kt}{1 + \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt}} \right). \quad (11.28)$$

Na equação acima, $\varphi(t)$ é uma função decrescente. Isso implica que no intervalo $(0, \pi/2)$, $\cos \varphi(t)$ é uma função crescente que varia de 0 a 1 porque $\varphi(t)$ varia de $\pi/2$ a 0.

3. Como $0 < \varphi(t) \leq \pi/2$ pelo comentário anterior, então $\sin \varphi(t)$ é sempre positiva.

A equação (11.19) é resolvida da seguinte forma (onde $c = \text{const}$):

$$\psi(t) = \int \left(\phi + \frac{m_3}{2I_2} \frac{1}{\hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos^2 \frac{k}{2}t} \right) dt + c = \phi t + \frac{m_3}{2I_2} \int \frac{\sec^2(\frac{k}{2}t)}{\hat{m}_3^2 \sec^2(\frac{k}{2}t) + \hat{m}_2^2} dt + c, \quad (11.29)$$

A solução da integral é dada pela substituição $u = \tan(\frac{k}{2}t)$. Calculando a integral, obtemos:

$$\psi(t) = \phi t + \arctan \left(\hat{m}_3 \tan \frac{k}{2}t \right) + c, \quad (11.30)$$

Aplicaremos a condição $\lim_{t=0} R_{ij}(\varphi(t), \theta(t), \psi(t)) = \delta_{ij}$ para descobrir c . Considerando essa condição na componente R_{22} da matriz (11.1), temos $\lim_{t=0} -\sin \psi(t) \sin \varphi(t) + \cos \psi(t) \cos \theta(t) \cos \varphi(t) = 1$. Pelas equações (11.25) e (11.27), esse limite se torna $\lim_{t=0} -\sin \psi(t) = 1$. A composição de funções contínuas é contínua. Então, como $\psi(t)$ em (11.30) é contínua, então $\sin \psi(t)$ é contínua. Então, o cálculo do limite se dá $\lim_{t=0} -\sin \psi(t) = -\sin \psi(0) = 1$. Como $0 < \psi < 2\pi$ pelas condições de construção (11.2), então $\psi(0) = 3\pi/2$. Logo, a função $\psi(t)$ solução da equação (11.26) que satisfaz as

⁴ Pois, na medida que x varia de -1 a 1 , $\arccos x$ também deveria variar de π a 2π . O que caracteriza uma função crescente.

condições de contorno é

$$\psi(t) = \phi t + \arctan \left(\hat{m}_3 \tan \frac{k}{2} t \right) + \frac{3\pi}{2}. \quad (11.31)$$

Comentários 2:

4. Utilizando as relações $\sin(\arctan x) = x/\sqrt{1+x^2}$ e $\cos(\arctan x) = 1/\sqrt{1+x^2}$, as expressões para $\cos \psi(t)$ e $\sin \psi(t)$ são:

$$\cos \psi(t) = \frac{\sin \phi t \sqrt{1 + \cos kt} + \hat{m}_3 \cos \phi t \sqrt{1 - \cos kt}}{\sqrt{1 + \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt}}, \quad (11.32)$$

$$\sin \psi(t) = \frac{-\cos \phi t \sqrt{1 + \cos kt} + \hat{m}_3 \sin \phi t \sqrt{1 - \cos kt}}{\sqrt{1 + \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt}}. \quad (11.33)$$

5. Quando $t \in (0, \pi/k) \subset \mathbb{R}$, então $0 < \theta(t) < \pi$ e $0 < \varphi(t) < \pi/2$. Qualquer valor de tempo fora desse intervalo não pode fazer parte do domínio das soluções⁵ $\theta(t)$ e $\varphi(t)$.

Pela equação (11.31), $\psi(0) = 3\pi/2$. E pela equação $\dot{\psi}(t)$ em (11.26), $\psi(t)$ é uma função decrescente, pois, pelas condições de contorno: $\dot{\psi}(t) < 0$. Também, como $\psi(t)$ é contínua, deve existir algum t_0 , que representa um limite da nossa construção de $0 < \psi$, isto é, $\psi(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow t_0$. O tempo t_0 deve satisfazer

$$-\frac{3\pi}{2} = \phi t_0 + \arctan \left(\hat{m}_3 \tan \frac{k}{2} t_0 \right). \quad (11.34)$$

Dito isso, o domínio das soluções $\varphi(t)$, $\theta(t)$ e $\psi(t)$ deve ser $(0, \min\{\pi/k, t_0\})$.

Concluimos, o conjunto de soluções $\varphi(t)$, $\theta(t)$ e $\psi(t)$ do sistema (11.18)-(11.20) que

⁵ Se t não estivesse nesse intervalo, então $\theta(t)$ não obedeceria $0 < \theta(t) < \pi$, que a condição (11.2) da construção da matriz R em função de ângulos de Euler. Ela sempre precisa ser satisfeita.

satisfaz $\lim_{t=0} R(\varphi(t), \theta(t), \psi(t)) = \delta_{ij}$ é dado por

$$\begin{aligned}\cos \theta(t) &= \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt, \\ \text{ou,} \\ \sin \theta(t) &= \sqrt{1 - (\hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt)^2},\end{aligned}\tag{11.35}$$

$$\begin{aligned}\cos \psi(t) &= \frac{\sin \phi t \sqrt{1 + \cos kt} + \hat{m}_3 \cos \phi t \sqrt{1 - \cos kt}}{\sqrt{1 + \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt}}, \\ \text{ou,} \\ \sin \psi(t) &= \frac{-\cos \phi t \sqrt{1 + \cos kt} + \hat{m}_3 \sin \phi t \sqrt{1 - \cos kt}}{\sqrt{1 + \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt}},\end{aligned}\tag{11.36}$$

$$\begin{aligned}\cos \varphi(t) &= -\hat{m}_3 \sqrt{\frac{1 - \cos kt}{1 + \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt}}, \\ \text{ou,} \\ \sin \varphi(t) &= \sqrt{\frac{1 + \cos kt}{1 + \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt}}.\end{aligned}\tag{11.37}$$

O domínio dessas funções é dado por $(0, \min\{\pi/k, t_0\})$, onde t_0 é dado pela relação (11.34). Esse domínio implica que os ângulos de Euler obedecem $0 < \theta < \pi$, $0 < \varphi < \pi/2$ e $0 < \psi < 3\pi/2$ e que a posição inicial do corpo rígido em termos de ângulos de Euler se aproxima como $(\varphi, \theta, \psi) \rightarrow (\pi/2, 0, 3\pi/2)$.

Substituímos as soluções (11.35)-(11.37) nas velocidades angulares (11.4)-(11.6) e na matriz (11.1) obtemos:

$$\Omega_1 = \frac{m_2}{I_2} \sin \phi t, \quad \Omega_2 = \frac{m_2}{I_2} \cos \phi t, \quad \Omega_3 = \frac{m_3}{I_3},\tag{11.38}$$

$$\begin{pmatrix} \cos kt \cos \phi t - \hat{m}_3 \sin kt \sin \phi t & -\cos kt \sin \phi t - \hat{m}_3 \sin kt \cos \phi t & \hat{m}_2 \sin kt \\ \hat{m}_3 \sin kt \cos \phi t + (\hat{m}_2^2 + \hat{m}_3^2 \cos kt) \sin \phi t & -\hat{m}_3 \sin kt \sin \phi t + (\hat{m}_2^2 + \hat{m}_3^2 \cos kt) \cos \phi t & \hat{m}_2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt) \\ -\hat{m}_2 \sin kt \cos \phi t + \hat{m}_2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt) \sin \phi t & \hat{m}_2 \sin kt \sin \phi t + \hat{m}_2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt) \cos \phi t & \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt \end{pmatrix}.\tag{11.39}$$

12 Notação e equações básicas do problema

Neste parágrafo estamos desenvolvendo os métodos aplicados no artigo (56). Antes de discutir as soluções para as equações de Euler-Poisson que descrevem os movimentos de um corpo rígido, em especial, usando Cauchy-Kovalevskaya, vamos obter a solução geral desse sistema de equações diferenciais utilizando a fórmula (2.10). Representando as colunas da matriz R^T por $\mathbf{G}_i(t) = (R_{i1}, R_{i2}, R_{i3})^T$, as equações de Poisson (2.8) podem ser reescritas na forma vetorial: $\dot{\mathbf{G}}_i = [\mathbf{G}_i, \boldsymbol{\Omega}]$. A fim de resolver (2.7), (2.8), considere o seguinte problema de Cauchy:

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = I^{-1}[I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}], \quad \Omega_i(0) = \Omega'_i, \quad (12.1)$$

$$\dot{\mathbf{G}}_i = [\mathbf{G}_i, \boldsymbol{\Omega}], \quad R_{ij}(0) = R'_{ij}, \quad (12.2)$$

onde os dados iniciais Ω'_i e R'_{ij} são números arbitrários, e I é uma matriz diagonal da seguinte forma: $I = \text{diagonal}(I_2, I_2, I_3)$. As soluções para este problema com os dados $R'_{ij} = \delta_{ij}$ descrevem todos os movimentos possíveis de um corpo simétrico que, no instante inicial $t = 0$, tem seus eixos de inércia direcionados ao longo dos eixos do laboratório: $\mathbf{R}_i(0) = \mathbf{e}_i$.

As equações de Euler-Poisson (para um corpo simétrico) admitem várias integrais de movimento. Elas são

$$\Omega_3(t) = \Omega'_3 = \text{const}, \quad (12.3)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \Omega_i^2 = E = \text{const}, \quad (12.4)$$

$$(RI\boldsymbol{\Omega})_i = \sum_{j=1}^3 I_j R_{ij} \Omega_j = m_i = \text{const}. \quad (12.5)$$

Para movimentos de corpo rígido, E e m_i representam a energia rotacional e os componentes do momento angular, respectivamente. Além disso, tomando a igualdade (12.5) em $t = 0$ e usando $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$, obtemos a relação entre o momento angular conservado e os valores iniciais da velocidade angular: $\Omega_i(0) = m_i/I_i$. Usando este resultado em (12.4), concluímos que a energia ao longo de qualquer trajetória é fixada pelo momento angular: $E = \frac{1}{2} \sum_i m_i^2/I_i$.

As equações (12.1) e (12.2) formam um sistema autônomo de $3 + 9$ equações diferenciais não lineares de primeira ordem. Seus lados direitos são polinômios e, portanto, representam funções analíticas de $3 + 9$ variáveis. De acordo com a fórmula (2.10), a solução única para o nosso problema de valor inicial é dada pelas séries

$$\boldsymbol{\Omega}(t, \Omega'_j) = \exp \left[t \left([\mathbf{G}'_a, \boldsymbol{\Omega}']_b \frac{\partial}{\partial R'_{ab}} + (I^{-1}[I\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}'])_c \frac{\partial}{\partial \Omega'_c} \right) \right] \boldsymbol{\Omega}' = \exp \left[t (I^{-1}[I\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}'])_c \frac{\partial}{\partial \Omega'_c} \right] \boldsymbol{\Omega}', \quad (12.6)$$

$$\mathbf{G}_i(t, \Omega'_j, R'_{kl}) = \exp \left[t \left([\mathbf{G}'_a, \boldsymbol{\Omega}']_b \frac{\partial}{\partial R'_{ab}} + (I^{-1}[I\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}'])_c \frac{\partial}{\partial \Omega'_c} \right) \right] \mathbf{G}'_i. \quad (12.7)$$

Nosso objetivo é somar essas séries e tentar escrevê-las em funções elementares. Começamos analisando as equações de Euler.

Solução geral para as equações de Euler. O primeiro termo da série de potências (12.6) é apenas Ω' . O próximo termo apresentamos da seguinte forma:

$$\left[(I^{-1}[I\Omega', \Omega'])_c \frac{\partial}{\partial \Omega'_c} \right] \Omega' = \phi' \begin{pmatrix} \Omega'_2 \\ -\Omega'_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi' T_3 \Omega', \quad (12.8)$$

onde $\phi' = (I_2 - I_3)\Omega'_3/I_2$, e $T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Acima temos três equações (uma para cada componente do vetor $\dot{\Omega}$) e a mais interessante delas é a da terceira componente. Isso significa que o componente Ω'_3 pertence ao núcleo do operador diferencial linear $(I^{-1}[I\Omega', \Omega'])_c \frac{\partial}{\partial \Omega'_c}$. Como consequência da utilização da fórmula (2.10), funções de elementos do núcleo do campo vetorial h^k também pertencem ao seu núcleo, veja a proposição 3 do apêndice. Ou seja, como as funções $f(\Omega'_3)$ pertencem ao núcleo, consequentemente temos $[(I^{-1}[I\Omega', \Omega'])_c \frac{\partial}{\partial \Omega'_c}] \phi' = 0$. Então, os próximos termos aparecem imediatamente: para $n = 2$ temos $[(I^{-1}[I\Omega', \Omega'])_c \frac{\partial}{\partial \Omega'_c}]^2 \Omega' = [(I^{-1}[I\Omega', \Omega'])_c \frac{\partial}{\partial \Omega'_c}] (\phi' T_3 \Omega') = (\phi' T_3)^2 \Omega'$, e assim por diante. Realizando indução matemática, a série (12.6) é reescrita como¹

$$\Omega(t, \Omega'_j) = e^{t\phi' T_3} \Omega' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \phi'^n T_3^n \right) \Omega'. \quad (12.9)$$

Além disso, as potências pares e ímpares da matriz T_3 satisfazem as relações $T_3^{2n} = (-1)^n \text{diag}(1, 1, 0)$ (exceto por $n = 0$) e $T_3^{2n+1} = (-1)^n T_3$, respectivamente. Então, considerando isso na soma acima, obtemos

$$\Omega(t, \Omega'_j) = \begin{pmatrix} \cos \phi' t & \sin \phi' t & 0 \\ -\sin \phi' t & \cos \phi' t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Omega' = \begin{pmatrix} \Omega'_1 \cos \phi' t + \Omega'_2 \sin \phi' t \\ -\Omega'_1 \sin \phi' t + \Omega'_2 \cos \phi' t \\ \Omega'_3 \end{pmatrix}, \quad (12.10)$$

a conhecida solução geral das equações de Euler para o caso de $I_1 = I_2$ em funções elementares. Representando a solução geral das equações de Euler no caso de um corpo rígido simétrico livre, uma vez que a única condição que separa as duas situações (de todas as soluções do sistema e das soluções que descrevem um corpo rígido) é o dado $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Então, a velocidade angular $\Omega(t, \Omega'_j)$ gira em torno do terceiro eixo do referencial fixo no corpo no sentido horário com frequência ϕ' .

¹ Anteriormente foi mencionado: se o sistema fosse linear, a solução seria imediata. Essa é a solução. Mais especificamente, com a condição $I_1 = I_2$, as equações de Euler (2.7) revelam-se um sistema autônomo e linear com coeficientes constantes. Esta classe de sistemas possui uma solução geral imediata. O interessante é que poderíamos chegar a esse resultado a partir da fórmula (2.10).

13 Solução geral para equações de Poisson usando integrais de movimento

Neste capítulo vamos tratar da solução geral das equações de Poisson (12.2). Vamos então tratar até mesmo das soluções que não descrevem um corpo rígido (talvez nem mesmo algum sistema físico). Ainda mesmo nesse caso, a energia (12.4) e o momento angular (12.5) são integrais do movimento do sistema (12.1), (12.2). Mesmo que essas integrais sejam encontradas por leis físicas, elas continuam sendo constantes em relação a t independente das condições iniciais, ou seja, até para um sistema não físico, elas ainda são integrais de movimento do sistema (12.1), (12.2). Em $t = 0$ elas tomam os valores

$$2E = I_2(\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2) + I_3\Omega_3'^2, \quad m_i = I_2(\Omega_1'R_{i1}' + \Omega_2'R_{i2}') + I_3\Omega_3'R_{i3}' = (I\mathbf{\Omega}', \mathbf{G}_i'). \quad (13.1)$$

Por cálculo direto, obtemos¹ $\nabla E = 0$ e $\nabla m_i = 0$, o que endossa uma relação entre integrais de movimento e o núcleo de ∇ . Esta relação também é explorada pela proposição 3 do apêndice. Além disso, lembre-se que funções dos elementos do núcleo como $f(E, m_i)$ ou $g(\Omega_3')$ satisfazem $\nabla f(E, m_i) = 0 = \nabla g(\Omega_3')$. Esses fatos sobre integrais de movimento serão importantes para explicar o seguinte lema:

Lema 1. *Dada uma matriz numérica $A = \text{diag}(A_2, A_2, A_3)$, então o operador diferencial linear ∇ obedece às relações:*

$$\nabla^{2n}(A\mathbf{\Omega}', \mathbf{G}_i') = \left(A_3 - \frac{I_3}{I_2}A_2\right) \left[-(-1)^n k'^{2n} \frac{(M\mathbf{\Omega}', \mathbf{G}_i')}{k'^2} \right], \quad \text{para } n \geq 1, \quad (13.2)$$

$$\nabla^{2n+1}(A\mathbf{\Omega}', \mathbf{G}_i') = \left(A_3 - \frac{I_3}{I_2}A_2\right) \left[(-1)^n k'^{2n+1} \frac{\Omega_3'[\mathbf{G}_i', \mathbf{\Omega}']_3}{k'} \right], \quad \text{para } n \geq 0, \quad (13.3)$$

onde:

$$M = \text{diag}\left(\frac{I_3}{I_2}\Omega_3'^2, \frac{I_3}{I_2}\Omega_3'^2, -(\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2)\right), \quad \text{and} \quad k' \equiv \sqrt{\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2 + \frac{I_3^2}{I_2^2}\Omega_3'^2}. \quad (13.4)$$

O lema acima será utilizado para obter os coeficientes da série (12.7). Ele é uma consequência das integrais de movimento das equações de EP. Em primeiro lugar, considere os fatos úteis:

1. A função $f(E, \Omega_3') = (2E - I_3\Omega_3'^2)/I_2 = \Omega_1'^2 + \Omega_2'^2$ também pertence ao núcleo de ∇ . Com isso, vemos que os componentes da matriz M satisfazem $\nabla M_i = 0$. Evidentemente, como $k' = \sqrt{M_3 - I_3 M_2/I_2}$, também temos $\nabla k' = 0$.
2. A aplicação de ∇ na terceira componente de $\mathbf{G}_i'$ nos fornece $\nabla R_{i3}' = [\mathbf{G}_i', \mathbf{\Omega}']_3$. Substituindo isso em $\nabla m_i = I_2\nabla(\Omega_1'R_{i1}' + \Omega_2'R_{i2}') + I_3\Omega_3'\nabla R_{i3}' = 0$, obtemos a relação $\nabla(\Omega_1'R_{i1}' + \Omega_2'R_{i2}') = -I_3\Omega_3'\nabla R_{i3}'/I_2$. Então, podemos escrever uma combinação linear

¹ Nos capítulos 13 e 14 fixamos a notação $\nabla \equiv [\mathbf{G}_a', \mathbf{\Omega}']_b \frac{\partial}{\partial R'_{ab}} + (I^{-1}[\mathbf{I}\mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}'])_c \frac{\partial}{\partial \Omega'_c}$ para simplificar nossas equações.

de $\nabla(\Omega'_1 R'_{i1} + \Omega'_2 R'_{i2})$ e $\nabla(\Omega'_3 R'_{i3})$ como segue

$$\nabla(A\Omega', \mathbf{G}'_i) = A_2 \nabla(\Omega'_1 R'_{i1} + \Omega'_2 R'_{i2}) + A_3 \nabla(\Omega'_3 R'_{i3}) = \left(A_3 - \frac{I_3}{I_2} A_2\right) \Omega'_3 [\mathbf{G}'_i, \Omega']_3. \quad (13.5)$$

A seguir, aplicando ∇ em (13.5), por cálculo direto, obtemos $\nabla^2(A\Omega', \mathbf{G}'_i) = (A_3 - I_3 A_2 / I_2)(M\Omega', \mathbf{G}'_i)$. Como as componentes em M pertencem ao núcleo de ∇ , a matriz M é tratada da mesma forma que A em relação a esse operador. Então, podemos trocar A por M na última equação e escrever $\nabla^2(M\Omega', \mathbf{G}'_i) = (M_3 - I_3 M_2 / I_2)(M\Omega', \mathbf{G}'_i) = -k'^2(M\Omega', \mathbf{G}'_i)$. Essa relação pode ser entendida como uma progressão geométrica. Portanto, considerando a sequência $a_n = \nabla^{2n}(M\Omega', \mathbf{G}'_i)$, temos $a_{n+1} = \nabla^{2n}[\nabla^2(M\Omega', \mathbf{G}'_i)] = -k'^2 \nabla^{2n}(M\Omega', \mathbf{G}'_i) = -k'^2 a_n$. Além disso, seu termo geral tem uma forma bem conhecida dada por $\nabla^{2n}(M\Omega', \mathbf{G}'_i) = (-k')^{2n}(M\Omega', \mathbf{G}'_i)$. Então, substituindo este resultado em $\nabla^{2n}(A\Omega', \mathbf{G}'_i) = (A_3 - I_3 A_2 / I_2) \nabla^{2n-2}(M\Omega', \mathbf{G}'_i)$, obtemos a expressão (13.2) e, após isso, aplicando ∇ em ambos os lados obtemos (13.3). Este lema também poderia ser obtido pelo cálculo direto dos termos $\nabla^n(A\Omega', \mathbf{G}'_i)$ e então feito uma indução matemática. Isso significa que, apesar deste resultado ser consequência das integrais de movimento, vemos que o cálculo direto da série (12.7) já conhece esta informação.

Agora, usaremos esse resultado para somar as séries (12.7). Os coeficientes mais simples de obter são os das componentes R_{i3} . Basta colocar $A_2 = 0$ e $A_3 = 1/\Omega'_3$ no lema e o resultado obtido será:

$$\nabla^{2n} R'_{i3} = -\frac{1}{\Omega'_3} (-1)^n k'^{2n} \frac{(M\Omega', \mathbf{G}'_i)}{k'^2}, \quad \text{para } n \geq 1, \quad (13.6)$$

$$\nabla^{2n+1} R'_{i3} = (-1)^n k'^{2n+1} \frac{[\mathbf{G}'_i, \Omega']_3}{k'}, \quad \text{para } n \geq 0. \quad (13.7)$$

Substituindo-os em (12.7), obtemos a solução geral da terceira componente das equações de Poisson em funções elementares:

$$\begin{aligned} R_{i3}(t, \Omega'_\gamma, R'_{\alpha\beta}) &= R'_{i3} - \frac{1}{\Omega'_3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n!} (-1)^n k'^{2n} \frac{(M\Omega', \mathbf{G}'_i)}{k'^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n k'^{2n+1} \frac{[\mathbf{G}'_i, \Omega']_3}{k'} \\ &= R'_{i3} + (1 - \cos k't) \frac{(M\Omega', \mathbf{G}'_i)}{\Omega'_3 k'^2} + \sin k't \frac{[\mathbf{G}'_i, \Omega']_3}{k'}. \end{aligned} \quad (13.8)$$

As funções $R_{i1}(t, \Omega'_\gamma, R'_{\alpha\beta})$ e $R_{i2}(t, \Omega'_\gamma, R'_{\alpha\beta})$ podem ser apresentadas através de $R_{i3}(t, \Omega'_\gamma, R'_{\alpha\beta})$ como segue: usando (13.7) com $n = 0$ e a componente m_i do momento angular conservado (13.1) obtemos o sistema linear

$$\Omega'_2 R'_{i1} - \Omega'_1 R'_{i2} = \nabla R'_{i3}, \quad I_2(\Omega'_1 R'_{i1} + \Omega'_2 R'_{i2}) = m_i - I_3 \Omega'_3 R'_{i3}, \quad (13.9)$$

determinando os dados iniciais R'_{i1} e R'_{i2} até R'_{i3} . Resolvendo o sistema, obtemos

$$R'_{i1} = \frac{1}{I_2(\Omega'^2_1 + \Omega'^2_2)} [I_2 \Omega'_2 \nabla R'_{i3} + (m_i - I_3 \Omega'_3 R'_{i3}) \Omega'_1], \quad (13.10)$$

$$R'_{i2} = \frac{1}{I_2(\Omega'^2_1 + \Omega'^2_2)} [-I_2 \Omega'_1 \nabla R'_{i3} + (m_i - I_3 \Omega'_3 R'_{i3}) \Omega'_2].$$

Essas relações valem para os dados iniciais $\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2 \neq 0$. O caso $\Omega_1' = \Omega_2' = 0$ deve ser considerado separadamente, veja abaixo.

Vamos aplicar o operador $e^{t\nabla}$ a ambos os lados dessas relações entre os dados iniciais. Com o uso de (2.11) e (2.12), nós os transformamos nas relações entre as soluções

$$R_{i1}(t, \Omega'_\gamma, R'_{\alpha\beta}) = \frac{1}{I_2(\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2)} [I_2\Omega_2(t, \Omega'_\gamma)\dot{R}_{i3}(t, \Omega'_\gamma, R'_{\alpha\beta}) + (m_i - I_3\Omega'_3 R_{i3}(t, \Omega'_\gamma, R'_{\alpha\beta}))\Omega_1(t, \Omega'_\gamma)], \quad (13.11)$$

$$R_{i2}(t, \Omega'_\gamma, R'_{\alpha\beta}) = \frac{1}{I_2(\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2)} [-I_2\Omega_1(t, \Omega'_\gamma)\dot{R}_{i3}(t, \Omega'_\gamma, R'_{\alpha\beta}) + (m_i - I_3\Omega'_3 R_{i3}(t, \Omega'_\gamma, R'_{\alpha\beta}))\Omega_2(t, \Omega'_\gamma)]. \quad (13.12)$$

Na obtenção deste resultado foi utilizado que as quantidades Ω'_3 , $(\Omega'_1)^2 + (\Omega'_2)^2$ e m_i estão no núcleo de ∇ . Substituindo (12.10) e (13.8) nas equações acima, obtemos-as através de funções elementares:

$$R_{i1}(t, \Omega', R') = \left\{ \left[\left(I_2\Omega'_2 \frac{\sin k't}{\Omega'_3 k'} - I_3\Omega'_1 \frac{(1 - \cos k't)}{k'^2} \right) \cos \phi't - \left(I_2\Omega'_1 \frac{\sin k't}{\Omega'_3 k'} + I_3\Omega'_2 \frac{(1 - \cos k't)}{k'^2} \right) \sin \phi't \right] (M\Omega', \mathbf{G}'_i) + \left[\left(I_2\Omega'_2 \cos k't - I_3\Omega'_1 \Omega'_3 \frac{\sin k't}{k'} \right) \cos \phi't - \left(I_2\Omega'_1 \cos k't + I_3\Omega'_2 \Omega'_3 \frac{\sin k't}{k'} \right) \sin \phi't \right] [\Omega', \mathbf{G}'_i]_3 + (m_i - I_3\Omega'_3 R'_{i3})(\Omega'_1 \cos \phi't + \Omega'_2 \sin \phi't) \right\} / [I_2(\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2)] \quad (13.13)$$

$$R_{i2}(t, \Omega', R') = \left\{ \left[\left(I_2\Omega'_1 \frac{\sin k't}{\Omega'_3 k'} + I_3\Omega'_2 \frac{(1 - \cos k't)}{k'^2} \right) \cos \phi't + \left(I_2\Omega'_2 \frac{\sin k't}{\Omega'_3 k'} - I_3\Omega'_1 \frac{(1 - \cos k't)}{k'^2} \right) \sin \phi't \right] (M\Omega', \mathbf{G}'_i) + \left[\left(I_2\Omega'_1 \cos k't + I_3\Omega'_2 \Omega'_3 \frac{\sin k't}{k'} \right) \cos \phi't + \left(I_2\Omega'_2 \cos k't - I_3\Omega'_1 \Omega'_3 \frac{\sin k't}{k'} \right) \sin \phi't \right] [\Omega', \mathbf{G}'_i]_3 - (m_i - I_3\Omega'_3 R'_{i3})(-\Omega'_1 \sin \phi't + \Omega'_2 \cos \phi't) \right\} / [-I_2(\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2)] \quad (13.14)$$

onde $\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2 \neq 0$.

O caso $\Omega_1' = \Omega_2' = 0$. Para os dados iniciais com $\Omega_1' = \Omega_2' = 0$, Eq. (12.10) implica $\Omega(t, \Omega'_j) = (0, 0, \Omega'_3)^T$. Então as equações de Poisson (12.2) afirmam que os vetores $\mathbf{G}_i$ precessam em torno deste vetor constante. Com isso, as equações de Poisson são reescritas como

$$\dot{R}_{i1} = \Omega'_3 R_{i2}, \quad \dot{R}_{i2} = -\Omega'_3 R_{i1}, \quad \dot{R}_{i3} = 0. \quad (13.15)$$

É um sistema de equações diferenciais linear, também escrito na forma $\dot{\mathbf{G}}_i = \Omega'_3 T_3 \mathbf{G}_i$. Isso é o mesmo que (12.8), então a solução geral para as equações de Poisson (13.15) é dada por

$$R(t, \Omega'_3, R'_{ij}) = \begin{pmatrix} R'_{11} \cos \Omega'_3 t + R'_{12} \sin \Omega'_3 t & -R'_{11} \sin \Omega'_3 t + R'_{12} \cos \Omega'_3 t & R'_{13} \\ R'_{21} \cos \Omega'_3 t + R'_{22} \sin \Omega'_3 t & -R'_{21} \sin \Omega'_3 t + R'_{22} \cos \Omega'_3 t & R'_{23} \\ R'_{31} \cos \Omega'_3 t + R'_{32} \sin \Omega'_3 t & -R'_{31} \sin \Omega'_3 t + R'_{32} \cos \Omega'_3 t & R'_{33} \end{pmatrix}. \quad (13.16)$$

As equações (12.10), (13.8), (13.13), (13.14) e (13.16) configuram a solução geral para as equações de Euler-Poisson para o caso $I_1 = I_2$.

Solução geral para equações de Poisson que descrevem um corpo rígido simétrico livre. Como vimos anteriormente, o movimento do corpo rígido corresponde às soluções (13.8), (13.13) e (13.14) no ponto $(t, m_\gamma/I_\gamma, \delta_{\alpha\beta})$. Além disso, a expressão final para a matriz de rotação adquire uma forma mais transparente se ajustarmos as orientações dos eixos do Laboratório e o vetor de momento angular conservado. Como $\mathbf{R}_i(0)$ são os autovetores do tensor de inércia I , podemos definir arbitrariamente $I\mathbf{R}_1(0) = I_2\mathbf{R}_1(0)$ e $I\mathbf{R}_2(0) = I_2\mathbf{R}_2(0)$. Então qualquer combinação linear dos vetores $\mathbf{R}_1(0)$ e $\mathbf{R}_2(0)$ é um autovetor de I com autovalor I_2 . Além disso, como temos $\mathbf{R}_i(0) = \mathbf{e}_i$, podemos girar livremente os vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (gerando uma nova base ortonormal $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3\}$) da base Laboratório até que o vetor $\mathbf{m}$ (escrito na antiga base $\mathbf{e}_i$) pertença ao plano gerado por $\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3$ sem quebrar o caráter diagonal do tensor de inércia I . Então, desde o início, podemos escolher esta configuração, mantendo I como diagonal e tendo $m_1 = 0$. Em última análise, as condições iniciais para as equações de Euler-Poisson são traduzidas nas constantes da solução geral para as equações EP como $R'_{ij} = \delta_{ij}$, $\Omega'_1 = 0$, $\Omega'_2 = m_2/I_2$ e $\Omega'_3 = m_3/I_3$. Substituindo essas constantes em (12.10), (13.13), (13.14), (13.8), obtemos as equações de movimento de um corpo rígido simétrico livre dadas por a velocidade angular

$$\Omega_1 = \frac{m_2}{I_2} \sin \phi t, \quad \Omega_2 = \frac{m_2}{I_2} \cos \phi t, \quad \Omega_3 = \frac{m_3}{I_3}, \quad \text{where } \phi = (I_2 - I_3)m_3/I_2I_3, \quad (13.17)$$

e a matriz de rotação $R(t)$

$$\begin{pmatrix} \cos kt \cos \phi t - \hat{m}_3 \sin kt \sin \phi t & -\cos kt \sin \phi t - \hat{m}_3 \sin kt \cos \phi t & \hat{m}_2 \sin kt \\ \hat{m}_3 \sin kt \cos \phi t + (\hat{m}_2^2 + \hat{m}_3^2 \cos kt) \sin \phi t & -\hat{m}_3 \sin kt \sin \phi t + (\hat{m}_2^2 + \hat{m}_3^2 \cos kt) \cos \phi t & \hat{m}_2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt) \\ -\hat{m}_2 \sin kt \cos \phi t + \hat{m}_2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt) \sin \phi t & \hat{m}_2 \sin kt \sin \phi t + \hat{m}_2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt) \cos \phi t & \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt \end{pmatrix}, \quad (13.18)$$

que descreve a rotação dos pontos do corpo em torno do centro de massa, após substituí-lo em (2.6). Acima temos as frequências $\phi = (I_2 - I_3)m_3/I_2I_3$, $k = \sqrt{m_2^2 + m_3^2}/I_2 = |\mathbf{m}|/I_2$ e, assumindo $|\mathbf{m}| \neq 0$, denotamos $\hat{m}_i = m_i/|\mathbf{m}|$. O caso $\Omega'_1 = \Omega'_2 = 0$ acaba sendo

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{m_3}{I_3} t & -\sin \frac{m_3}{I_3} t & 0 \\ \sin \frac{m_3}{I_3} t & \cos \frac{m_3}{I_3} t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13.19)$$

Movimento do corpo. Com o propósito de um ponto de vista ilustrativo, suponha $\mathbf{R}_3(t) = (\hat{m}_2 \sin kt, \hat{m}_2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt), \hat{m}_3^2 + \hat{m}_2^2 \cos kt)^T$ sendo o vetor posição de uma partícula. Então, a velocidade desta partícula é dada por $\dot{\mathbf{R}}_3(t) = k(\hat{m}_2 \cos kt, \hat{m}_2 \hat{m}_3 \sin kt, -\hat{m}_2^2 \sin kt)^T$. Esses dois vetores são ortogonais entre si e, além disso, perceba que a velocidade da partícula é ortogonal ao momento angular conservado $\mathbf{m} = (0, m_2, m_3)^T$:

$(\mathbf{m}, \dot{\mathbf{R}}_3(t)) = k\hat{m}_2 \sin kt(\hat{m}_3 m_2 - \hat{m}_2 m_3) = 0$. Então, a partícula se move no plano com vetor normal na mesma direção que $\mathbf{m}$. Além disso, possui trajetória fechada, pois o vetor posição é periódico: $\mathbf{R}_3(t) = \mathbf{R}_3(t + 2\pi/k)$. Se θ é o ângulo entre o vetor $\mathbf{R}_3(t)$ e o vetor normal do plano, então

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{m}, \mathbf{R}_3(t))}{|\mathbf{m}|} = \hat{m}_2^2 \hat{m}_3 (1 - \cos kt) + \hat{m}_3^3 + \hat{m}_2^2 \hat{m}_3 \cos kt = \hat{m}_3. \quad (13.20)$$

Este ângulo não varia com o tempo, então podemos concluir que as partículas possuem trajetória circular no plano. O raio será dado por $\sin \theta = \hat{m}_2$, pois o vetor posição possui comprimento unitário. Além da rotação ter frequência angular uniforme $|\dot{\mathbf{R}}_3(t)|/\hat{m}_2 = k$.

Como os eixos de inércia estão sempre na mesma direção dos vetores $\mathbf{R}_i(t)$, o terceiro eixo de inércia precessa com velocidade angular uniforme k em torno do eixo na direção do momento angular conservado $\mathbf{m}$ enquanto os outros eixos de inércia giram em torno do eixo variável na direção $\mathbf{R}_3(t)$ para cada instante de tempo. A diferença entre este movimento mais geral e o movimento descrito por (13.19) (caso $m_1 = m_2 = 0$) é que o terceiro eixo de inércia é fixo na mesma direção que o terceiro eixo do referencial Laboratório. Então os outros girarão em torno do terceiro eixo fixo com velocidade angular uniforme m_3/I_3 .

14 Solução geral para equações de Poisson por soma direta de séries para todos R_{ij}

No capítulo anterior a matriz de rotação $R(t)$ foi obtida fazendo uso de propriedades causadas pelas integrais de movimento. Esse caminho mascarou tanto o cálculo que não ficou claro onde estávamos somando as séries. Assim, para mostrar ainda mais a capacidade da fórmula (2.10), neste capítulo iremos somar diretamente as séries (12.7). Para tanto, mostraremos explicitamente como são dados os termos $\nabla^n R'_{ij}$. Quando $n = 0$, temos o primeiro termo R'_{ij} . Quando $n = 1$, o termo $\nabla R'_{ij}$ identifica-se com as equações de Poisson:

$$\nabla R'_{ij} = -\epsilon_{jkm} \Omega'_k R'_{im} = [\mathbf{G}'_i, \mathbf{\Omega}']_j. \quad (14.1)$$

Quando $n = 2$, obtemos a fórmula:

$$\nabla^2 R'_{ij} = -\mathbf{\Omega}'^2 R'_{ij} + (B_i)_j \Omega'_j, \quad (14.2)$$

onde B_i são três matrizes diagonais 3×3 dadas por

$$B_i = \text{diag}\left((B_2 \mathbf{\Omega}', \mathbf{G}'_i), (B_2 \mathbf{\Omega}', \mathbf{G}'_i), (B_3 \mathbf{\Omega}', \mathbf{G}'_i)\right), \quad (14.3)$$

onde $B_2 = \text{diag}\left(1, 1, 2 - \frac{I_3}{I_2}\right)$ e $B_3 = \text{diag}\left(\frac{I_3}{I_2}, \frac{I_3}{I_2}, 1\right)$.

Esta equação é obtida por cálculo direto¹:

$$\begin{aligned} \nabla^2 R'_{ij} &= \nabla(\epsilon_{j\alpha\beta} R'_{i\alpha} \Omega'_\beta) = \epsilon_{j\alpha\beta} [\mathbf{G}'_i, \mathbf{\Omega}']_\alpha \Omega'_\beta + \epsilon_{j\alpha\beta} R'_{i\alpha} (I^{-1} [I \mathbf{\Omega}', \mathbf{\Omega}'])_\beta \\ &= [[\mathbf{G}'_i, \mathbf{\Omega}'], \mathbf{\Omega}']_j + \phi' [\mathbf{G}'_i, T \mathbf{\Omega}']_j \\ &= (\mathbf{G}'_i, \mathbf{\Omega}') \Omega'_j - \mathbf{\Omega}'^2 R'_{ij} + [(I_2 - I_3)/I_2] [\text{diag}(R'_{i3} \Omega'_3, R'_{i3} \Omega'_3, -(R'_{i1} \Omega'_1 + R'_{i2} \Omega'_2))]_j \Omega'_j \\ &= -\mathbf{\Omega}'^2 R'_{ij} + (B_i)_j \Omega'_j. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Com este resultado, não precisamos mais calcular diretamente os próximos termos. Vimos anteriormente que Ω'_3 e $\Omega_1'^2 + \Omega_2'^2$ pertencem ao núcleo de ∇ . Isso implica que $\mathbf{\Omega}'^2 = \Omega'_i \Omega'_i$ também pertence a esse conjunto. Por isso, podemos definir recursivamente as ordens pares dos termos $\nabla^n R'_{ij}$ da seguinte forma:

$$\nabla^0 R'_{ij} = R'_{ij}, \quad \text{e} \quad \nabla^{2(n+1)} R'_{ij} = -\mathbf{\Omega}'^2 \nabla^{2n} R'_{ij} + \nabla^{2n} [(B_i)_j \Omega'_j], \quad \text{para } n \geq 0. \quad (14.5)$$

Os termos de ordens ímpares são dados aplicando ∇ a ambos os lados das equações acima:

$$\nabla R'_{ij} = -\epsilon_{jkm} \Omega'_k R'_{im}, \quad \text{and} \quad \nabla^{2(n+1)+1} R'_{ij} = -\mathbf{\Omega}'^2 \nabla^{2n+1} R'_{ij} + \nabla^{2n+1} [(B_i)_j \Omega'_j], \quad \text{for } n \geq 0. \quad (14.6)$$

¹ Nesta derivação o produto vetorial $[\mathbf{G}'_i, T \mathbf{\Omega}']$ foi calculado explicitamente.

Os termos $\nabla^n[(B_i)_j\Omega'_j]$ são calculados de acordo com a regra geral de Leibniz (A.1). Para comodidade do leitor, abaixo temos explicitamente estas expressões:

$$\nabla^{2n}[(B_i)_j\Omega'_j] = \sum_{a=0}^n \binom{2n}{2a} \nabla^{2a}(B_i)_j \nabla^{2n-2a}\Omega'_j + \sum_{b=0}^{n-1} \binom{2n}{2b+1} \nabla^{2b+1}(B_i)_j \nabla^{2n-(2b+1)}\Omega'_j, \quad (14.7)$$

$$\nabla^{2n+1}[(B_i)_j\Omega'_j] = \sum_{a=0}^n \binom{2n+1}{2a} \nabla^{2a}(B_i)_j \nabla^{2n+1-2a}\Omega'_j + \sum_{b=0}^n \binom{2n+1}{2b+1} \nabla^{2b+1}(B_i)_j \nabla^{2n-2b}\Omega'_j. \quad (14.8)$$

A equação (14.7) está definida para $n \geq 1$ e (14.8) está definida para $n \geq 0$. Acima também temos $\nabla^n\Omega' = (\phi'T_3)^n\Omega = \phi'^n T_3^n\Omega'$, isto é $\nabla^{2k}\Omega'_j = \phi'^{2k}[\text{diag}(\Omega'_1, \Omega'_2, 0)]_j$ (exceto por $n = 0$) e $\nabla^{2k+1}\Omega'_j = \phi'^{2k+1}(T_3\Omega')_j$; e os termos $\nabla^n(B_i)_j$ são dados pelo lema 1.

As equações (14.5), (14.6) determinam completamente os coeficientes da série (12.7). A seguir, mostraremos como utilizá-los para obter a componente R_{11} na matriz (13.18). Escolhemos este componente porque seu cálculo tem relativamente a mesma dificuldade dos demais R_{i1} , R_{i2} e o cálculo para o R_{i3} é mais simples e não mostra muita aplicabilidade das nossas fórmulas. Para isso, primeiramente substituiremos as condições iniciais de um corpo rígido simétrico nas equações (14.6)-(14.8). Para facilitar o cálculo, nós as consideramos na forma:

$$\Omega'_1 = 0, \quad \Omega'_2 = \frac{m_2}{I_2} = \hat{m}_2 k, \quad \Omega'_3 = \frac{m_3}{I_3} = \phi + \hat{m}_3 k, \quad R'_{ij} = \delta_{ij}, \quad (14.9)$$

onde $\phi = (I_2 - I_3)m_3/I_2 I_3$, $k = \sqrt{m_2^2 + m_3^2}/I_2 = |\mathbf{m}|/I_2$ e $\hat{m}_i = m_i/|\mathbf{m}|$, com $|\mathbf{m}| \neq 0$. Quando as condições iniciais são substituídas, as constantes ϕ' e k' tornam-se ϕ e k da matriz (13.18), respectivamente. Então, após serem substituídas nas equações (14.7) e (14.8), obtemos

$$\nabla^{2n}[(B_2\Omega', \mathbf{G}'_1)\Omega'_1] = \begin{cases} 0, & \text{para } n = 0, \\ -2\hat{m}_2^2(-1)^n \sum_{b=0}^{n-1} \frac{2n!}{(2b+1)![2n-(2b+1)]!} k^{2b+2} \phi^{2n-2b}, & \text{para } n \geq 1, \end{cases} \quad (14.10)$$

$$\nabla^{2n+1}[(B_2\Omega', \mathbf{G}'_1)\Omega'_1] = 0, \quad \text{para } n \geq 0. \quad (14.11)$$

Então, substituindo esta e as condições iniciais (14.9) nas funções (14.5), (14.6), obtemos as funções recursivas

$$\begin{aligned} \nabla^0 R'_{11} &= 1, \quad \nabla^2 R'_{11} = -(k^2 + \phi^2 + 2\hat{m}_3 k \phi), \\ \nabla^{2(n+1)} R'_{ij} &= -(k^2 + \phi^2 + 2\hat{m}_3 k \phi) \nabla^{2n} R'_{ij} \\ &\quad - 2\hat{m}_2^2(-1)^n \sum_{b=0}^{n-1} \frac{2n!}{(2b+1)![2n-(2b+1)]!} k^{2b+2} \phi^{2n-2b}, \quad \text{for } n \geq 1, \end{aligned} \quad (14.12)$$

e

$$\nabla R'_{ij} = 0, \quad \nabla^{2(n+1)+1} R'_{ij} = -(k^2 + \phi^2 + 2\hat{m}_3 k \phi) \nabla^{2n+1} R'_{ij}, \quad \text{for } n \geq 0, \quad (14.13)$$

que determina todos os coeficientes da série de R_{11} . Então, obteremos essa série aplicando as fórmulas acima: em primeiro lugar, é imediato que todos os termos em (14.13) sejam nulos. Assim, os coeficientes da série para $R_{11}(t)$ são dados apenas pela função (14.5). Então, os termos pares descritos por (14.12) são dados da seguinte forma: os dois primeiros termos são dados $\nabla^0 R'_{11} = 0$ e

$$\begin{aligned}\nabla^2 R'_{11} &= (k^2 + \phi^2 + 2\hat{m}_3 k\phi) = -2! \left(\frac{k^2}{2!} + \frac{\phi^2}{2!} + \hat{m}_3 k\phi \right) \\ &= -2! \left[\sum_{k=0}^1 \left(\frac{1}{2k!(2-2k)!} k^{2k} \phi^{2-2k} \right) + \hat{m}_3 k\phi \right].\end{aligned}\quad (14.14)$$

Então, para $n = 1$, nós temos

$$\begin{aligned}\nabla^4 R'_{11} &= -(k^2 + \phi^2 + 2\hat{m}_3 k\phi) \nabla^2 R'_{11} + 4\hat{m}_2^2 k^2 \phi^2 = (k^2 + \phi^2 + 2\hat{m}_3 k\phi)^2 + 4\hat{m}_2^2 k^2 \phi^2 \\ &= 4! \left[\frac{k^4}{4!} + \frac{\phi^4}{4!} + \frac{k^2 \phi^2}{2! 2!} + \hat{m}_3 \left(\frac{k^3}{3!} \phi + k \frac{\phi^3}{3!} \right) \right] \\ &= 4! \left[\sum_{k=0}^2 \left(\frac{1}{2k!(4-2k)!} k^{2k} \phi^{4-2k} \right) + \hat{m}_3 \sum_{k=0}^1 \left(\frac{1}{(2k+1)![4-(2k+1)]!} k^{2k+1} \phi^{4-(2k+1)} \right) \right].\end{aligned}\quad (14.15)$$

Para $n = 2$:

$$\nabla^6 R'_{11} = -6! \left[\sum_{k=0}^3 \left(\frac{1}{2k!(6-2k)!} k^{2k} \phi^{6-2k} \right) + \hat{m}_3 \sum_{k=0}^2 \left(\frac{1}{(2k+1)![6-(2k+1)]!} k^{2k+1} \phi^{6-(2k+1)} \right) \right],\quad (14.16)$$

e assim por diante. Então, os termos de ordem par obedecem o seguinte padrão:

$$\begin{aligned}\nabla^{2n} R'_{11} &= (-1)^n 2n! \left[\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2k!(2n-2k)!} k^{2k} \phi^{2n-2k} \right) \right. \\ &\quad \left. + \hat{m}_3 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{(2k+1)![2n-(2k+1)]!} k^{2k+1} \phi^{2n-(2k+1)} \right) \right].\end{aligned}\quad (14.17)$$

A afirmação acima é confirmada por indução ao substituí-la em (14.12). Substituindo ela e (14.13) em (12.7), obtemos a série

$$R_{11}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{(-1)^n t^{2n}}{2k!(2n-2k)!} k^{2k} \phi^{2n-2k} \right) + \hat{m}_3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2k+1)![2n-(2k+1)]!} k^{2k+1} \phi^{2n-(2k+1)} \right).\quad (14.18)$$

Esta série pode ser representada em funções elementares da seguinte forma: considere as sequências

$$a_m(t) = \frac{(-1)^m k^{2m} t^{2m}}{2m!}, \quad b_m(t) = \frac{(-1)^m \phi^{2m} t^{2m}}{2m!},\quad (14.19)$$

$$c_m(t) = \frac{(-1)^m k^{2m+1} t^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad d_m(t) = \frac{(-1)^m \phi^{2m+1} t^{2m+1}}{(2m+1)!},\quad (14.20)$$

e a equação (14.18) escrita como uma função delas

$$R_{11}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{2k} b_{2n-2k} - \hat{m}_3 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} c_{2k+1} d_{2n-(2k+1)}. \quad (14.21)$$

Como essas sequências representam os coeficientes da série de senos e cossenos, eles convergem para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Além disso, pela afirmação do teorema de Cauchy-Kovalevskaya, a série (14.18) é localmente convergente em torno de $t = 0$. Então, existe um resultado básico (45, 46) sobre o produto de séries de potências convergentes que podemos usar. Ele diz: se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge (pontualmente), então $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n (a_i x^i)(b_{n-i} x^{n-i}) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)$ também converge. Além disso, aplicando este resultado em (14.21), podemos escrever a função $R_{11}(t)$ como:

$$\begin{aligned} R_{11}(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) - \hat{m}_3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n \right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{2n} t^{2n}}{2n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \phi^{2m} t^{2m}}{2m!} \right) \\ &\quad - \hat{m}_3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \phi^{2m+1} t^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) \\ &= \cos kt \cos \phi t - \hat{m}_3 \sin kt \sin \phi t. \end{aligned} \quad (14.22)$$

O mesmo procedimento pode ser feito para as demais componentes em (12.7). Naturalmente, depois de fazer isso, obtemos a matriz (13.18).

Commentário: Sobre as funções (14.5), (14.6): também poderíamos obter os termos gerais pares e ímpares $\nabla^{2n} R'_{ij}$, $\nabla^{2n+1} R'_{ij}$. Por exemplo, isso poderia ser feito para ordens pares da seguinte forma: já que $\nabla^2 R'_{ij} = -\Omega'^2 R'_{ij} + (B_i)_j \Omega'_j$, então $\nabla^4 R'_{ij} = -\Omega'^2 (-\Omega'^2 R'_{ij} + (B_i)_j \Omega'_j) + \nabla^2 [(B_i)_j \Omega'_j]$ e assim por diante. Realizando indução matemática, aparece $\nabla^{2n} R'_{ij} = (-\Omega')^n R'_{ij} + \sum_{k=0}^{n-1} (-\Omega')^{n-1-k} \nabla^{2k} [(B_i)_j \Omega'_j]$, onde $n \geq 1$. Aplicando ∇ em ambos os lados nas últimas equações, obtém-se o termo geral para os termos de ordem ímpar. O problema desta abordagem é a dificuldade de escrever as séries $R_{i1}(t, \Omega', R')$ e $R_{i2}(t, \Omega', R')$ através de funções elementares. Mesmo que simplifiquemos a série substituindo as condições iniciais, isso ainda não ajuda muito. Este mesmo problema acontece ao tentar usar (14.5) e (14.6) para obter a solução geral das equações de Poisson.

15 Conclusão.

Neste trabalho, desenvolvemos uma formulação completa da dinâmica de corpos rígidos livres a partir do princípio variacional (2.1), (2.5). Essa abordagem permitiu deduzir de forma direta todas as quantidades relevantes do sistema como o centro de massa, os graus de liberdade rotacionais, o tensor de inércia e o momento angular, bem como suas respectivas equações de movimento, sem recorrer a postulados adicionais.

Com base nessa formulação, identificamos três sistemas equivalentes de equações para descrever a rotação do corpo em torno do centro de massa:

1. As equações lagrangianas de segunda ordem para a matriz de rotação $R_{ij}(t)$ (7.1);
2. O sistema hamiltoniano de primeira ordem para $R_{ij}(t)$ e $\Omega_i(t)$ (9.1), (9.2);
3. E um sistema reduzido em que Ω_i é eliminado em favor das constantes de movimento, resultando em equações puramente para $R_{ij}(t)$ (9.15), (9.16).

O principal resultado desta dissertação foi a obtenção da **solução geral das equações de Euler-Poisson para um corpo rígido simétrico livre, com condições iniciais arbitrárias** (12.1), (12.2) (56). Esse feito foi alcançado através da aplicação cuidadosa do **teorema de Cauchy-Kovalevskaya** (A.3), que assegura a existência e unicidade de soluções analíticas para sistemas diferenciais autônomos com condições iniciais bem definidas. Utilizando séries de potências guiadas pelas integrais de movimento, conseguimos somar explicitamente os termos dessas séries, obtendo expressões exatas em funções elementares tanto para a matriz de rotação $R_{ij}(t)$ (13.18) quanto para a velocidade angular $\Omega_i(t)$ (13.17).

Essa abordagem alternativa, livre do uso de ângulos de Euler, revelou-se especialmente eficaz. Além de fornecer soluções fechadas para o movimento rotacional, ela destacou de forma natural o papel das simetrias e integrais de movimento na estrutura da solução, veja o lema 1 no capítulo 13. No caso simétrico, a solução final representa uma precessão regular em torno do eixo do momento angular, com duas frequências distintas associadas à rotação intrínseca e à precessão (10.27).

Também discutimos aspectos frequentemente omitidos nos tratamentos tradicionais: o fato de que nem todas as soluções matemáticas das equações de movimento representam movimentos físicos possíveis de um corpo rígido; a necessidade de condições iniciais compatíveis com o uso de um tensor de inércia diagonal; e a dependência da energia rotacional em relação ao momento angular, o que a impede de ser uma integral de movimento independente.

Por fim, este estudo mostra como o uso sistemático de métodos variacionais, aliado a uma análise rigorosa das equações diferenciais envolvidas, pode fornecer uma descrição clara, completa e construtiva da dinâmica de corpos rígidos livres. Ao alcançar uma solução geral analítica para as equações de Euler-Poisson com dados iniciais arbitrários,

este trabalho oferece uma contribuição à teoria clássica, com implicações tanto conceituais quanto pedagógicas para o estudo da rotação de corpos rígidos.

APÊNDICE A – Propriedades das séries $e^{th^k(z_0^j)\frac{\partial}{\partial z_0^k}}z_0^i$.

Neste apêndice exibimos e discutimos algumas propriedades da fórmula (2.10). Nesta parte do texto fomos amplamente apoiados pela literatura (47, 48, 49, 42, 40, 50, 46, 51, 45). Primeiramente, seja V um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^p$. Então, considere p funções analíticas reais $h^k : V \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos um operador diferencial linear $h^k(z_0^j)\frac{\partial}{\partial z_0^k}$ atuando em conjuntos de funções analíticas $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Portanto, o resultado $\left(h^k(z_0^j)\frac{\partial}{\partial z_0^k}\right)f(z_0^i)$ também será uma função analítica real. Como as funções analíticas são da classe C^∞ , para qualquer número natural n , podemos definir recursivamente o operador $\left(h^k(z_0^j)\frac{\partial}{\partial z_0^k}\right)^n$ com domínio e imagem em conjuntos de funções analíticas. Além disso, realizando a indução matemática, vemos que ela obedece à regra geral de Leibniz (52, 53, 50, 54):

$$\left(h^k(z_0^j)\frac{\partial}{\partial z_0^k}\right)^n (f(z_0^a)g(z_0^b)) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(h^{k'}(z_0)\frac{\partial}{\partial z_0^{k'}}\right)^i f(z_0^a) \left(h^{k''}(z_0)\frac{\partial}{\partial z_0^{k''}}\right)^{n-i} g(z_0^b), \quad (\text{A.1})$$

para todo número natural n , onde $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ é o coeficiente binomial.

A próxima proposição esclarece como obter a fórmula (2.10):

Proposição 1. *Suponha que $V \subset \mathbb{R}^p$ seja um subconjunto aberto e sejam $h^i : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ funções analíticas, onde $i = 1, \dots, p$. Então, o problema de valor inicial*

$$\dot{z}^i = h^i(z^j), \quad z^i(0) = z_0^i, \quad \text{onde} \quad (z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^p) \in V, \quad (\text{A.2})$$

possui solução única dada pelas séries

$$z^i(t, z_0^j) = e^{th^k(z_0^m)\frac{\partial}{\partial z_0^k}} z_0^i, \quad (\text{A.3})$$

que convergem em alguma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Pelo teorema de Cauchy-Kovalevskaya (40), o sistema (A.2) tem uma solução única $z(t)$ analítica em algum intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ contendo 0. Dito isso, existe $r > 0$ tal que, para todo $t \in (-r, r)$, a série de Taylor

$$z^i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n z^i(t)}{dt^n} \Big|_{t=0}, \quad (\text{A.4})$$

converge absoluta e uniformemente. Sem perda de generalidade, podemos considerar esse mesmo intervalo para cada $i = 1, 2, \dots, p$. Mostraremos que a série acima pode ser escrita na forma (A.3). Considere a seguinte afirmação:

$$\frac{d^n z^i(t)}{dt^n} = \left[\left(h^k(z^j) \frac{\partial}{\partial z^k} \right)^n z^i \right]_{z=z(t)}, \quad \text{para todos } n \text{ números naturais.} \quad (\text{A.5})$$

Isso é válido por indução: quando $n = 0$, a afirmação é reduzida à identidade $z^i(t) = z^i|_{z=z(t)}$. Portanto, para o caso base, a afirmação é verdadeira. Assumimos, por hipótese, que isso é verdade para um n natural. Então segue a etapa de indução

$$\begin{aligned} \frac{d^{n+1}z^i(t)}{dt^{n+1}} &= \frac{d}{dt} \left[\left(h^k(z^j) \frac{\partial}{\partial z^k} \right)^n z^i \right] \Big|_{z=z(t)} = \frac{d}{dt} h'^i(z^j(t)) = \left[h^k(z) \frac{\partial h'^i(z^j)}{\partial z^k} \right] \Big|_{z=z(t)} \\ &= \left[\left(h^k(z^j) \frac{\partial}{\partial z^k} \right)^{n+1} z^i \right] \Big|_{z=z(t)}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde $h'^i(z^j) = (h^k(z^j) \frac{\partial}{\partial z^k})^n z^i$. Então, como tanto o caso base quanto o passo de indução são verdadeiros, por indução fraca, a afirmação (A.5) é verdadeira. Em $t = 0$, ele fica na forma

$$\frac{d^n z^i(t)}{dt^n} \Big|_{t=0} = \left\{ \left[\left(h^k(z^j) \frac{\partial}{\partial z^k} \right)^n z^i \right] \Big|_{z=z(t)} \right\} \Big|_{t=0} = \left[\left(h^k(z^j) \frac{\partial}{\partial z^k} \right)^n z^i \right] \Big|_{z=z_0} = \left(h^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k} \right)^n z_0^i. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo essa última equação na série de Taylor (A.4), nós obtemos:

$$z^i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(h^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k} \right)^n z_0^i = e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} z_0^i \equiv z^i(t, z_0^j). \quad (\text{A.8})$$

□

Como em (A.3) temos uma família p -paramétrica de curvas resolvendo cada equação diferencial (A.2), então essa fórmula também representa a solução geral do sistema $\dot{z}^i = h^i(z^j)$. Mais ainda, sabe-se que a existência e unicidade da solução para sistemas autônomos pode ser generalizada para sistemas não autônomos. Então, se tivéssemos um sistema não autônomo

$$\dot{z}^i = h^i(t, z^j), \quad z^i(t_0) = z_0^i, \quad \text{onde} \quad (z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^p) \in V, \quad (\text{A.9})$$

o teorema de Cauchy-Kovalevskaya também garantiria a existência e a unicidade de uma solução analítica para o sistema não autônomo acima. Neste caso, sua solução seria escrita como

$$z^i(t, t_0, z_0^j) = e^{t \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + h^k(t_0, z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k} \right)} z_0^i. \quad (\text{A.10})$$

Em alguns campos da matemática e da física, a função (2.10) é bastante utilizada. Normalmente tem duas propriedades principais. O primeiro: $z^i(0, z_0^j) = z_0^i$ é imediatamente identificado na equação (2.10). A segunda, também denominada “lei de grupo”, e é traduzida neste trabalho pela proposição 2, onde provamos a equação (2.11). Para fazer isso, precisaremos dos seguintes resultados:

Lema 2. O operador $e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}}$ tem a propriedade:

$$e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} (z_0^i z_0^j) = \left(e^{th^a(z_0^a) \frac{\partial}{\partial z_0^a}} z_0^i \right) \left(e^{th^b(z_0^b) \frac{\partial}{\partial z_0^b}} z_0^j \right) = z^i(t, z_0^a) z^j(t, z_0^b), \quad \text{onde} \quad 1 \leq i, j \leq p. \quad (\text{A.11})$$

Demonstração. Considere as sequências $a_n(t) = \frac{t^n}{n!} \left(h^k(z_0^\alpha) \frac{\partial}{\partial z_0^k} \right)^n z_0^i$ e $b_n(t) = \frac{t^n}{n!} \left(h^k(z_0^\beta) \frac{\partial}{\partial z_0^k} \right)^n z_0^j$. As séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(t)$ convergem de acordo com a proposição 1. Então, um resultado sobre o produto de série convergente nos fornece a relação $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k(t) b_{n-k}(t)$, veja o final do capítulo 6.3. Escrevendo explicitamente, temos

$$\begin{aligned} \left(e^{th^a(z_0^\alpha) \frac{\partial}{\partial z_0^a}} z_0^i \right) \left(e^{th^b(z_0^\beta) \frac{\partial}{\partial z_0^b}} z_0^j \right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k(t) b_{n-k}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^n}{k!(n-k)!} \left(h^a(z_0^\alpha) \frac{\partial}{\partial z_0^a} \right)^k z_0^i \left(h^b(z_0^\beta) \frac{\partial}{\partial z_0^b} \right)^{n-k} z_0^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(h^k(z_0^\gamma) \frac{\partial}{\partial z_0^k} \right)^n (z_0^i z_0^j) = e^{th^k(z_0^\gamma) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} (z_0^i z_0^j), \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

onde foi utilizada a regra geral de Leibniz na última igualdade (A.1).

□

O lema acima é generalizado como se segue:

Lema 3 (Generalização do Lema 2). *Considere um produto das variáveis $z_0^{i_1} \dots z_0^{i_n}$, onde $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq p$. Então, a aplicação do operador $e^{th^k(z_0) \frac{\partial}{\partial z_0^k}}$ nesse produto obedece*

$$e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} (z_0^{i_1} \dots z_0^{i_n}) = \left(e^{th^k(z_0^{j_1}) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} z_0^{i_1} \right) \dots \left(e^{th^k(z_0^{j_n}) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} z_0^{i_n} \right) = z^{i_1}(t, z_0^{j_1}) \dots z^{i_n}(t, z_0^{j_n}). \quad (\text{A.13})$$

Demonstração. Provaremos esta afirmação por indução. O caso base (para $n = 1$) é verdadeiro pela equação (2.10). O caso $n = 2$ foi provado pelo lema anterior. Além disso, suponhamos, por hipótese, que isso seja verdade para algum n natural, ou seja:

$$z^{i_1}(t, z_0^{j_1}) z^{i_2}(t, z_0^{j_2}) \dots z^{i_n}(t, z_0^{j_n}) = e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} (z_0^{i_1} z_0^{i_2} \dots z_0^{i_n}). \quad (\text{A.14})$$

Multiplicando ambos os lados por $z^{i_{n+1}} = e^{th^k(z_0^{j_{n+1}}) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} z_0^{i_{n+1}}$, com $1 \leq i_{n+1} \leq p$, nós obtemos

$$z^{i_1}(t, z_0^{j_1}) z^{i_2}(t, z_0^{j_2}) \dots z^{i_n}(t, z_0^{j_n}) z^{i_{n+1}}(t, z_0^{j_{n+1}}) = e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} (z_0^{i_1} z_0^{i_2} \dots z_0^{i_n}) e^{th^k(z_0^{j_{n+1}}) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} z_0^{i_{n+1}}. \quad (\text{A.15})$$

A seguir, considere as sequências $a_n(t) = \frac{t^n}{n!} \left(h^a(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^a} \right)^n (z_0^{i_1} z_0^{i_2} \dots z_0^{i_n})$ e $b_n(t) = \frac{t^n}{n!} \left(h^k(z_0^{j_{n+1}}) \frac{\partial}{\partial z_0^k} \right)^n z_0^{i_{n+1}}$. As séries com esses termos gerais são convergentes pela hipótese de indução¹, então podemos

¹ Como a afirmação (A.14) é verdadeira por hipótese e todas $z^i(t, z_0^j)$ são séries convergentes, nós sabemos, por teoria de séries de potências, que um produto finito de séries de potências convergentes também é uma série de potências convergente. Então $e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} (z_0^{i_1} z_0^{i_2} \dots z_0^{i_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(h^a(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^a} \right)^n (z_0^{i_1} z_0^{i_2} \dots z_0^{i_n})$ é convergente.

usar o mesmo teorema de antes e obter

$$\begin{aligned}
z^{i_1}(t, z_0^{j_1}) \dots z^{i_{n+1}}(t, z_0^{j_{n+1}}) &= e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} (z_0^{i_1} z_0^{i_2} \dots z_0^{i_n}) e^{th^k(z_0^{j_{n+1}}) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} z_0^{i_{n+1}} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k(t) b_{n-k}(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^n}{k!(n-k)!} \left(h^a(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^a} \right)^k (z_0^{i_1} z_0^{i_2} \dots z_0^{i_n}) \left(h^b(z_0^{j_{n+1}}) \frac{\partial}{\partial z_0^b} \right)^{n-k} z_0^{i_{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(h^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k} \right)^n (z_0^{i_1} z_0^{i_2} \dots z_0^{i_n} z_0^{i_{n+1}}) \\
&= e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} (z_0^{i_1} z_0^{i_2} \dots z_0^{i_n} z_0^{i_{n+1}}), \tag{A.16}
\end{aligned}$$

onde a regra geral de Leibniz (A.1) foi utilizada. Pela relação acima, nós podemos concluir que a afirmação (A.14) é verdadeira para $n+1$. Então, por indução fraca, ela é verdadeira para todo natural. □

Agora, nós podemos seguir para a prova da propriedade (2.11):

Proposição 2. *Considere uma função analítica $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Então nós temos:*

$$e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} f(z_0^i) = f(e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} z_0^i) = f(z^i(t, z_0^j)). \tag{A.17}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere $0 \in V$. Como a função f é analítica em V , então existe $r > 0$ tal que para todo $(z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^p) \in B_r(0)$ (bola aberta com raio r centrado em $0 \in \mathbb{R}^p$), a série de Taylor de f sobre 0 é dada por²

$$f(z_0) = c_0 + \sum_{i=1}^p c_i z_0^i + \sum_{i,j=1}^p c_{i,j} z_0^i z_0^j + \sum_{i,j,k=1}^p c_{i,j,k} z_0^i z_0^j z_0^k + \dots, \tag{A.18}$$

converge absoluta e uniformemente. Os números $c_0, c_i, c_{i,j}, \dots$ são os coeficientes da série de Taylor. Aplicando o operador $e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}}$ em ambos os lados e usando o lema anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} f(z_0) &= c_0 + \sum_{i=1}^p c_i z^i(t, z_0) + \sum_{i,j=1}^p c_{i,j} z^i(t, z_0) z^j(t, z_0) + \\
&\quad \sum_{i,j,k=1}^p c_{i,j,k} z^i(t, z_0) z^j(t, z_0) z^k(t, z_0) + \dots = f(z(t, z_0)). \tag{A.19}
\end{aligned}$$

A última igualdade na equação acima precisa de alguma explicação. As séries $z^i(t, z_0^j)$ são funções analíticas (portanto contínuas) definidas em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}$

² Nesta fórmula e na próxima denotamos $f(z_0^i) = f(z_0)$.

representada por um intervalo $(-r', r')$, com $r' > 0$. Então, a imagem de $z(t, z_0^j)$ por $(-r', r')$: $z((-r', r'), z_0^j)$ é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^p$. Como $(z_0^1, z_0^2, \dots, z_0^p)$ é um ponto interior em $B_r(0)$, então a interseção $z((-r', r'), z_0^j) \cap B_r(0)$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^p$. Além disso, a última igualdade é válida e acontece para qualquer t tal que $z(t, z_0^j) \in z((-r', r'), z_0^j) \cap B_r(0)$.

□

O último resultado tem uma aplicação interessante. Por definição, a função $h^i(z_0^j) = \left(h^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k} \right) z_0^i$ é analítica em V . O operador $e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}}$ agindo nessa função resulta em:

$$e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} h^i(z_0^j) = h^i(z(t, z_0^j)) = \dot{z}(t, z_0^j), \quad (\text{A.20})$$

como $z^i(t, z_0^j)$ é a solução geral da equação diferencial $\dot{z}^i = h^i(z^j)$.

Lembramos que a função $F(z^1, z^2, \dots, z^p)$ é uma integral do movimento do sistema (2.9) se, para qualquer solução $z^i(t)$, temos

$$\frac{d}{dt} F(z^i(t)) = 0. \quad (\text{A.21})$$

Existe uma relação entre as integrais de movimento e o núcleo do operador $h^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}$.

Proposição 3. *As duas condições a seguir são equivalentes:*

1. $F(z^i)$ é uma integral do movimento.
2. $F(z_0^i)$ está no núcleo do operador $h^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}$, ou seja $h^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k} F(z_0^i) = 0$.

Demonstração. A condição 1 implica a condição 2. De fato, sendo $F(z^i)$ uma integral do movimento, então

$$0 = \dot{F}(z^i(t, z_0^j)) = \dot{z}^k(t, z_0^j) \frac{\partial F(z^i)}{\partial z^k} \Big|_{z=z(t, z_0)} = \left(h^k(z^j) \frac{\partial F(z^i)}{\partial z^k} \right) \Big|_{z=z(t, z_0)}, \quad (\text{A.22})$$

por qualquer t . Então, temos $h^k(z^j) \frac{\partial F(z^i)}{\partial z^k} = 0$, concluindo que $F(z^j)$ pertence ao núcleo de $h^k(z^j) \frac{\partial}{\partial z^k}$.

A condição 2 implica a condição 1. Na verdade, considere uma função $F(z_0^i)$ tal que $h^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k} F(z_0^i) = 0$. Por aplicação direta e com a proposição 2, temos

$$F(z^i(t, z_0^j)) = e^{th^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k}} F(z_0^i) = F(z_0^i). \quad (\text{A.23})$$

A derivada relativa a t da equação acima nos fornece $\dot{F}(z^i(t, z_0^j)) = \frac{d}{dt} F(z_0^i) = 0$. Portanto, é uma integral do movimento. □

Em particular, se $F(z^i)$ é um movimento integral, dada uma função diferenciável $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e uma solução $z^i(t)$, nós temos

$$\frac{d}{dt}G(F(z^i(t))) = \frac{dG(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=F(z^i(t))} \frac{dF(z^i(t))}{dt} = 0. \quad (\text{A.24})$$

Então, o lema acima resulta em $h^k(z_0^j) \frac{\partial}{\partial z_0^k} G(F(z_0^i)) = 0$.

REFERÊNCIAS

- 1 L. Euler, *Theoria Motus Corporum Solidorum seu Rigidorum*, (1765), (see English translation by Ian Bruce:
<http://www.17centurymaths.com/contents/mechanica3.html>).
- 2 J. L. Lagrange, *Méchanique analitique*, (Paris: Widow Desaint, 1788).
- 3 S. D. Poisson, *A treatise of mechanics*, V. 2 (London: Longman and Co., 1842).
- 4 E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, (Cambridge: at the University press, 1917).
- 5 W. D. MacMillan, *Dynamics of rigid bodies*, (Dover Publications Inc., New-York, 1936).
- 6 E. Leimanis, *The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point*, (Springer-Verlag, 1965).
- 7 L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Volume 1, third edition, (Elsevier, 1976).
- 8 H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical mechanics*, Third edition, (Addison Wesley, 2000)
- 9 V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, 2nd edn. (Springer, New York, NY, 1989).
- 10 V. I. Arnold, V. V. Kozlov and A. I. Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, in: V. I. Arnold, *Dynamical systems III*, (Springer-Verlag, 1999).
- 11 W. Greiner, *Classical mechanics*, (Springer-Verlag New York Inc. 2003).
- 12 S. Ray and J. Shamanna, *On virtual displacement and virtual work in Lagrangian dynamics*, Eur. J. Phys. 27 (2006) 311.
- 13 E. Piña, *Jacobi's approach to the Lagrange top*, (2017) Eur. J. Phys. 38 035001.
- 14 G. Saccomandi, *On the motion of the centre of mass of a system of particles*, (2010) Eur. J. Phys. 31 657.
- 15 E. Minguzzi, *A geometrical introduction to screw theory*, (2013) Eur. J. Phys. 34 613.
- 16 M. V. Berry and P. Shukla, *Slow manifold and Hannay angle in the spinning top*, (2011) Eur. J. Phys. 32 115.
- 17 F. J. Gil Chica, M. Pérez Polo and M. Pérez Molina, *Note on an apparently forgotten theorem about solid rigid dynamics*, (2014) Eur. J. Phys. 35 045003.
- 18 V. Tanriverdi, *Can a gyroscope reverse its spin direction?*, (2019) Eur. J. Phys. 40 065004.
- 19 D. D. Holm, J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *The Euler-Poincare equations and semidirect products with applications to continuum theories*, arXiv:chao-dyn/9801015.

- 20 P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **2**, 129 (1950); *Lectures on quantum mechanics* (Yeshiva University, New York, NY, 1964).
- 21 D. M. Gitman, I. V. Tyutin, *Quantization of fields with constraints* (Springer, Berlin, 1990).
- 22 A. A. Deriglazov, *Classical mechanics: Hamiltonian and Lagrangian formalism* (Springer, 2nd edition, 2017).
- 23 L. Poincot, *Theorie Nouvelle de la Rotation des Corps*, (Bachelier, Paris, 1834); English translation: <https://hdl.handle.net/2027/coo.31924021260447>.
- 24 A. A. Deriglazov, Basic notions of Poisson and symplectic geometry in local coordinates, with applications to Hamiltonian systems, *Universe*, **8** (2022), 536; arXiv:2210.09131.
- 25 E. Khastyan, S. Krivonos and A. Nersessian, Euler top and freedom in supersymmetrization of one-dimensional mechanics, *Phys. Lett. A* **452** (2022) 128442; arXiv:2204.12975.
- 26 N. G. Chetaev, On the equations of Poincaré, *Prikl. Mat. i Mekh.* **5** N 2 (1941), 253-262 (In Russian).
- 27 A. A. Deriglazov, Comment on the Letter "Geometric Origin of the Tennis Racket Effect" by P. Mardesic, et al, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 064301 (2020), arXiv:2302.04190.
- 28 A. A. Deriglazov, Geodesic motion on the symplectic leaf of $SO(3)$ with distorted $e(3)$ algebra and Liouville integrability of a free rigid body, arXiv:2302.04828.
- 29 A. A. Deriglazov, Poincaré-Chetaev equations in the Dirac's formalism of constrained systems, arXiv:2302.12423.
- 30 L. Euler, *Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum*, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* **20** 189-207, (1776).
- 31 A. A. Deriglazov, Lagrangian and Hamiltonian formulations of asymmetric rigid body, considered as a constrained system, *European Journal of Physics* **44**, (2023) 065001, DOI=10.1088/1361-6404/ace80d.
- 32 B. Palais, R. Palais, and S. Rodi, A disorienting look at Euler's theorem on the axis of a rotation, *The American Mathematical Monthly* **116** 10 892-909, (Taylor & Francis, 2009).
- 33 A. A. Deriglazov, An asymmetrical body: example of analytical solution for the rotation matrix in elementary functions and Dzhaniybekov effect, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **118** 108257, (Elsevier, 2024).
- 34 A. A. Deriglazov, Has the problem of the motion of a heavy symmetric top been solved in quadratures?, *Foundations of Physics* **54** 41, (Elsevier, 2024).
- 35 A. A. Deriglazov, General solution to the Euler-Poisson equations of a free Lagrange top directly for the rotation matrix (2023), arXiv:2303.02431, URL <https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.02431>

- 36 A. A. Deriglazov, *Euler–Poisson equations of a dancing spinning top, integrability and examples of analytical solutions*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **127** 107579, (Elsevier, 2023).
- 37 A. A. Deriglazov, *Rotation Matrix of a Charged Symmetrical Body: One-Parameter Family of Solutions in Elementary Functions*, Universe **10** 2218-1997, DOI=10.3390/universe10060250 (MDPI AG, 2024).
- 38 A. A. Deriglazov, *Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian Formalism* (2nd ed.) (Springer, 2016).
- 39 T. Gantumur, *Math 580 lecture notes 2: The cauchy-kovalevskaya theorem*, (2011).
- 40 Shane Kepley and Tianhao Zhang, *A constructive proof of the Cauchy-Kovalevskaya theorem for ordinary differential equations*, Journal of Fixed Point Theory and Applications **23** 7, (Springer, 2021).
- 41 R. J. Thelwell, P. G. Warne and D. A. Warne, *Cauchy-Kowalevski and polynomial ordinary differential equations*, Electronic Journal of Differential Equations **2012** 11 1-8, (2012).
- 42 Gerald B. Folland, *Introduction to partial differential equations*, Mathematical Notes **17**, (Princeton university press, 2020).
- 43 L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics **19**, (American Mathematical Society, 2020).
- 44 A. A. Deriglazov, *Dynamics on a submanifold: intermediate formalism versus Hamiltonian reduction of Dirac bracket, and integrability*, The European Physical Journal C **84** 311, (Springer, 2024).
- 45 T. J. F'a. Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series*, (American Mathematical Soc., 2024).
- 46 S. Abbott, Stephen et al., *Understanding analysis*, Volume **2**, (Springer, 2001).
- 47 W. K. Tung, *Group Theory in Physics: An Introduction to Symmetry Principles, Group Representations, and Special Functions in Classical and Quantum Physics*, (1985).
- 48 J. J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics **148**, (Springer Science & Business Media, 2012).
- 49 D. Bump, et. al., *Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics **225**, (Springer Science & Business Media, 2004).
- 50 M. Spivak, *Calculus* (3rd ed.), (Cambridge University Press, 2006).
- 51 J. J. Duistermaat and Johan A.C. Kolk, *Lie groups*, Universitext (Springer, 1999).
- 52 J. Stewart, *Calculus: early transcendentals* (8th ed.), (Cengage Learning, 2012).
- 53 J. P. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Graduate Texts in Mathematics **107**, (Springer Science & Business Media, 1993).

- 54 P. M. Fitzpatrick, *Advanced calculus* (2nd ed.), (American Mathematical Soc., 2009).
- 55 Yehia, H.M. *Rigid Body Dynamics: A Lagrangian Approach*. Springer, 2022.
- 56 Corrêa Silva, G. *General solution to Euler–Poisson equations of a free symmetric body by direct summation of power series*. Arch Appl Mech **95**, 68 (2025)