

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sthefany Lioska Arenas Olivera

Derivação das equações de movimento de corpo em rotação sob momento de
força da forma geral

Juiz de Fora

2025

Sthefany Lioska Arenas Olivera

**Derivação das equações de movimento de corpo em rotação sob momento de
força da forma geral**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Alexei Anatolevich Deriglazov

Juiz de Fora

2025

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Arenas Olivera, Sthefany Lioska.

Derivação das equações de movimento de corpo em rotação sob momento de força da forma geral / Sthefany Lioska Arenas Olivera. – 2025.

42 f. : il.

Orientador: Alexei Anatolevich Deriglazov

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS. Programa de Pós-graduação em Matemática, 2025.

1. Cálculo Variacional. 2. Sistemas vinculados. 3. Dinâmica de Corpo Rígido. 4. Equações de Euler-Poisson com Torque Arbitrário . I. Deriglazov, Alexei, orient. II. Título.

Sthefany Lioska Arenas Olivera

Derivação das equações de movimento de corpo em rotação sob momento de força da forma geral

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática Aplicada

Aprovada em 04 de agosto de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alexei Anatolevich Deriglazov - Orientador

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Andrey Pupasov Maksimov

Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof^a. Dr^a. Zhanna Gennadyevna Kuznetsova

Universidade Federal do ABC

Juiz de Fora, 11/08/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Alexei Anatolevich Deriglazov, Professor(a)**, em 11/08/2025, às 18:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andrey Pupasov Maksimov, Professor(a)**, em 12/08/2025, às 10:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Zhanna Gennadyevna Kuznetsova, Usuário Externo**, em 15/08/2025, às 16:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2545433** e o código CRC **E593C7B6**.

Dedico este trabalho a minha filha Luciana e aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a minha filha Luciana por todo o amor e apoio incondicional que sempre recebo e de me lembrar que baixo qualquer circunstancia, sou a mãe mais feliz do mundo.

Agradeço também à minha mãe, Juana, e meu pai Victor por sempre me dar o apoio e a confiança mesmo morando em outro país. Agradeço a minha irmã Alina pelo apoio moral e por sempre acreditarem em mim.

Agradeço aos meus professores do Departamento de Matemática que conheci enquanto estive fazendo o mestrado. Em particular, agradeço ao meu orientador, Alexei, ao chefe do departamento Luiz Fernando e a secretária Paula, por sempre estar me apoiando em tudo o que precisava.

Agradeço a todos os amigos que conheci no mestrado, em especial ao Thiago, Gabi e Fran, por me dar o apoio desde o primeiro dia que comecei o mestrado.

E finalmente agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro e a Universidade Federal de Juiz de Fora por me dar a oportunidade de um estudo de qualidade.

“Há momentos em que sinto que estou em uma grande floresta e não sei para onde estou indo. Mas então, de alguma forma, chego ao topo de uma colina e posso ver tudo com mais clareza.”
(Maryam Mirzakhani).

RESUMO

Na abordagem padrão da dinâmica do corpo rígido, as equações de movimento são geralmente (e de fato intuitivamente) postuladas e em seguida estudadas em um ou outro referencial fixo ao corpo. Em seguida, os resultados finais da análise devem ser transferidos para o referencial do Laboratório, onde o corpo é observado. Devido a esse procedimento intuitivo e indireto, as equações consideradas às vezes são incorretas. Os exemplos conhecidos são as equações de um pião de Lagrange e de um pião dançante giratório (ou de Poisson). Além disso, ao analisá-las, algumas sutilezas da dinâmica do corpo rígido às vezes não são levadas em consideração, levando a conclusões finais equivocadas.

Assim, na presente dissertação, procedemos de forma mais direta, de acordo com o formalismo recentemente desenvolvido (1). Derivamos as equações do corpo rígido no contexto de métodos padrão da mecânica clássica, adaptados e aplicados ao corpo rígido considerado como um sistema de partículas com restrições holonômicas. Trabalharemos com base na matriz de rotação, que contém todas as informações sobre o movimento em relação ao referencial do Laboratório, escrevendo as equações de movimento para todas as variáveis dinâmicas envolvidas, parametrizadas no referencial do Laboratório. O foco principal será a derivação de equações com o torque externo da força de forma geral.

Palavras-chave: calculo variacional; sistemas vinculados, dinâmica de corpo rígido; equações de Euler-Poisson com torque arbitrário.

ABSTRACT

In the standard approach to the rigid body dynamics, the equations of motion are usually (and in fact intuitively) postulated and then studied in the one or another body-fixed frame. Then the final results of analysis should be translated into the Laboratory frame, where the body is observed. Because of this intuitive and indirect procedure, the original equations are sometimes taken incorrect. The known examples are the equations of a Lagrange top and of a dancing spinning (or Poisson) top. Besides, when analyzing them, some subtleties of rigid body dynamics are sometimes not taken into account, leading to wrong final conclusions.

So in the present dissertation we proceed in a more direct way, according to the recently developed formalism (1). We derive the rigid-body equations in the framework of standard methods of classical mechanics adapted and applied to the rigid body considered as a system of particles with holonomic constraints. We work in terms of the rotation matrix, which contains all information on the movement with respect to the Laboratory frame, by writing the equations of motion for all involved dynamical variables parameterized in the Laboratory frame. The main focus will be on the derivation of equations with the external torque of the force of a general form.

Keywords: variational problem; constrained systems; dynamics of a rotating body; Euler-Poisson equations; torque of a general form.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1	– Vectores $\mathbf{z}_2(t), \mathbf{z}_3(t), \mathbf{z}_4(t)$ que conetam quatro pontos de um corpo rígido. Os vetores $\mathbf{z}_A = \mathbf{y}_A - \mathbf{y}_1$ são linearmente independentes e definem a geometria do corpo.	14
Figura 2.1.3	– Posições das partículas em relação ao laboratório, e em relação ao centro de massa	19
Figura 2.3	– Velocidade angular instantânea $ \omega = \frac{d\varphi}{dt}$ de precessão	25

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$	Vetores de base ortonormal do sistema Laboratorial.
$y_N(t)$	Vetor de posição da partícula N do corpo no sistema de laboratório.
m_N	Massa da partícula N .
μ	Massa total de um corpo.
$\mathbf{y}_0(t)$	Vetor de posição do centro de massa em sistema Laboratorial.
$\mathbf{x}_N(t)$	Vetor de posição da partícula N do corpo no sistema de centro de massa.
$R(t) - 3 \times 3$	Matriz de rotação com os elementos $R_{ij}(t)$.
$\mathbf{R}_i(t) = (R_{1i}, R_{2i}, R_{3i})^T$	São as colunas da matriz de rotação que formam vetores de base do quadro fixo do corpo.
$\mathbf{G}_j(t) = (R_{j1}, R_{j2}, R_{j3})$	São suas linhas que representam coordenadas dos vetores de laboratório $\mathbf{e}_j$ no quadro fixo do corpo.
ω	Vetor de velocidade angular do corpo.
ω_i	Componentes do vetor de velocidade angular no quadro de laboratório.
Ω_i	Componentes do vetor de velocidade angular no quadro fixo do corpo.
$\mathbf{m}$	Vetor de momento angular de um corpo.
m_i	Componentes do vetor de momento angular em quadro de laboratório.
M_i	Componentes do vetor de momento angular em quadro fixo de corpo.
g	Matriz de massa com os elementos g_{ij} .
g_1, g_2, g_3	Autovalores da matriz de massa.
I	Tensor de inércia com os elementos $I_{ij} = g_{kk}\delta_{ij} - g_{ij}$.
I_1, I_2, I_3	Autovalores do tensor de inércia.
$I_1 \neq I_2 \neq I_3$	Corpo assimétrico.
$I_1 = I_2 \neq I_3$	Corpo simétrico.
$I_1 = I_2 = I_3$	Corpo totalmente simétrico.
$N, P, A, B, \dots$	Letras maiúsculas do alfabeto latino ou são usadas para rotular partículas.
$\alpha, \beta, \dots$	Letras gregas são usadas para rotular partículas.
$i, j, k, \dots$	Letras latinas são usadas para rotular coordenadas. Os vetores são denotados usando as letras em negrito, por exemplo, o vetor de posição da partícula N é $\mathbf{y}_N = (y_N^1, y_N^2, y_N^3)$, onde y_N^i são coordenadas cartesianas da partícula.
$\dot{\mathbf{y}}_N = \frac{d\mathbf{y}_N}{dt}$	Um ponto sobre qualquer quantidade significa a derivada de tempo dessa quantidade:
$\sum_{N=1}^n m_N \mathbf{y}_N$	A soma sobre partículas é sempre explicitamente declarada.
$\epsilon_{ijk} y_N^j y_P^k = \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} y_N^j y_P^k$	Os índices latinos repetidos são somados, salvo indicação em contrário.
$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_i b_i$	Notação para o produto escalar.
$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$	Notação para o produto vetorial.
ϵ_{ijk}	É o símbolo de Levi-Civita em três dimensões, com $\epsilon_{123} = +1$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	CORPO RÍGIDO LIVRE.	13
2.1	Problema variacional inicial, graus de liberdade de translação e rotação.	13
2.1.1	O número de graus independentes de liberdade do corpo rígido.	13
2.1.2	Problema variacional inicial.	16
2.1.3	O sistema inercial de coordenadas do centro de massa.	18
2.1.4	Integrais de movimento.	20
2.2	Base ortonormal rigidamente conectada ao corpo em movimento e à matriz de rotação.	21
2.3	Velocidade angular, matriz de massa e tensor de inércia.	24
2.3.1	Velocidade angular instantânea de um corpo rígido.	24
2.3.2	Dinâmica de um corpo com velocidade angular constante.	26
2.3.3	Matriz de massa, tensor de inércia e suas propriedades sob rotações do sistema de centro de massa.	27
2.3.4	Momento angular e momento angular no corpo.	29
2.3.5	Propriedades de transformação de grandezas básicas sob rotações do sistema de laboratório.	30
2.4	Ação funcional e equações de Lagrange de segundo ordem para os graus de liberdade rotacional.	31
2.4.1	Problema variacional para as equações (2.65).	32
2.4.2	Um Lagrangiano equivalente.	32
2.4.3	Equações de movimento de segunda ordem para a matriz de rotação R_{ij}	33
2.4.4	A energia rotacional não é uma integral independente do movimento.	34
2.5	Forma de primeira ordem das equações de movimento e as equações de Euler-Poisson.	35
2.5.1	Comentários.	36
2.5.2	Forma de primeira ordem de um sistema mais geral.	37
3	CONCLUSÃO	39
	REFERÊNCIAS	40

1 INTRODUÇÃO

Na Mecânica Clássica, quando passamos de uma partícula pontual para um objeto estendido, o caráter do movimento sofre mudanças qualitativas: um objeto estendido, além de translacional, pode experimentar um movimento rotacional. A rotação é um tipo de movimento bastante surpreendente em suas propriedades, que em muitas situações acabam sendo contra-intuitivas. Para um objeto estendido imerso em um campo externo, a rotação geralmente afeta o movimento de translação e vice-versa. Basta mencionar o conhecido comportamento de um pião inclinado lançado sobre a mesa - por algum motivo ele não cai, mas precessa! A formulação das leis do movimento de um corpo giratório é precisamente o objeto de estudo desse trabalho chamado dinâmica do corpo rígido.

A análise da dinâmica de corpos rígidos em rotação constitui um dos temas clássicos da mecânica clássica, com aplicações relevantes em áreas como astrodinâmica, engenharia aeroespacial, robótica e física matemática. A complexidade do problema reside na natureza não trivial dos graus de liberdade rotacionais, bem como na presença de vínculos geométricos que restringem o movimento do sistema. Dentre as abordagens possíveis, a formulação variacional da mecânica, com o uso de vínculos holonômicos e multiplicadores de Lagrange.

Neste trabalho, consideramos o corpo rígido como um sistema de partículas submetidas a vínculos que mantêm constantes as distâncias relativas entre os pontos materiais, permitindo assim a representação do estado rotacional do sistema por meio de uma matriz de rotação $R(t) \in SO(3)$. A partir do princípio da ação, obtemos a equação de movimento de segunda ordem para essa matriz, na qual os vínculos ortogonais são impostos por multiplicadores de Lagrange.

O objetivo principal do trabalho é mostrar que tal equação de segunda ordem, apresentada na equação (2.94), é formalmente equivalente a um sistema autônomo de equações diferenciais de primeira ordem, composto pelas equações (2.95) e (2.96), definidas em termos das variáveis $R(t)$ e $\Omega(t)$, sendo $\Omega \in \mathbb{R}^3$ a velocidade angular expressa no referencial do corpo. Isto permite eliminar o uso de coordenadas angulares sujeitas a singularidades, como os ângulos de Euler, além de simplificar o tratamento computacional da dinâmica rotacional.

A abordagem adotada neste trabalho, baseada na estrutura geométrica do grupo $SO(3)$ e de sua álgebra de Lie associada, fornece uma descrição global, contínua e livre de ambiguidade do movimento rotacional. Tal perspectiva é particularmente útil em contextos onde simetrias específicas ou condições iniciais complexas exigem uma modelagem matemática precisa e generalizável.

Ao longo do desenvolvimento, serão apresentados os fundamentos teóricos, as deduções formais e os cálculos que conduzem à equivalência entre as duas formulações.

Espera-se, com isso, contribuir para a compreensão profunda da dinâmica de corpos rígidos sob uma ótica variacional moderna e geometricamente consistente.

No longo deste trabalho vamos a fazer uso de algumas equações chamadas identidades de Levi-Civita

$$\epsilon_{pij}\epsilon_{pab} = \delta_{ia}\delta_{jb} - \delta_{ib}\delta_{ja}, \quad \epsilon_{pnj}\epsilon_{pnb} = 2\delta_{jb}. \quad (1.1)$$

Usamos a notação A^T para matriz transposta e A^{-1} para matriz inversa.

Para evitar notações pesadas como $(A^{-1T})_{ij}$, o inverso da matriz A é frequentemente denotado com um til: $A^{-1} \equiv \tilde{A}$.

Lembre-se que os conjuntos de três vetores e matrizes antissimétricas 3×3 são equivalentes. Para o vetor ω , a matriz correspondente é denotada por $\hat{\omega}$, e temos a relação

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para os componentes, obtemos.

$$\hat{\omega}_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega_k, \quad \omega_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\hat{\omega}_{ij}. \quad (1.2)$$

O vetor unitário na direção de $\mathbf{m}$ também é denotado com um chapéu:

$$\hat{\mathbf{m}} = (\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{m}_3)^T \equiv \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}.$$

A partir da definição $\det B = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}B_{ia}B_{jb}B_{kc}\epsilon_{abc}$, temos a identidade útil

$$\epsilon_{abc} = (\det B)^{-1}\epsilon_{ijk}B_{ia}B_{jb}B_{kc}. \quad (1.3)$$

. Usando isso, para qualquer matriz D obtemos

$$D[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = \frac{1}{\det B}[B\mathbf{a}, B\mathbf{c}]BD^T. \quad (1.4)$$

Seja D uma matriz simétrica, digamos I^{-1} , $I^T = I$. Escolhendo $B = I$ na equação (1.4) obtemos

$$I^{-1}[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = \frac{1}{\det I}[I\mathbf{a}, I\mathbf{c}]. \quad (1.5)$$

Seja $D = R$ é uma matriz ortogonal com determinante unitário, $RR^T = 1$, $\det R = 1$. Escolhendo $B = R$ na equação (1.4) obtemos

$$R[\mathbf{a}, \mathbf{c}] = [R\mathbf{a}, R\mathbf{c}]. \quad (1.6)$$

2 CORPO RÍGIDO LIVRE.

2.1 Problema variacional inicial, graus de liberdade de translação e rotação.

Nesta seção, utilizamos as regras básicas da Mecânica Clássica para a formulação do problema variacional inicial de um corpo rígido. Esse problema envolve o uso de uma função chamada de funcional de ação lagrangiana, que ajuda a descrever o comportamento de um sistema de partículas sob certas restrições holonômicas. Vamos considerar um sistema composto por n partículas (sendo n maior ou igual a 4), onde a posição de cada partícula é dada por um vetor de três componentes. Esse vetor indica as coordenadas no espaço tridimensional para cada partícula, que são representadas por: $\mathbf{y}_N(t) = (y_N^1(t), y_N^2(t), y_N^3(t))$. Aqui, $\mathbf{y}_N(t)$ é a posição de uma partícula N no instante de tempo t , e as componentes $y_N^1(t), y_N^2(t), y_N^3(t)$ representam as coordenadas x, y, z dessa partícula. Cada partícula também tem uma massa associada, representada por m_N , $N = 1, 2, \dots, n$ (ou seja, cada partícula tem uma massa). Importante: as partículas não estão todas no mesmo plano, o que significa que o sistema está em três dimensões.

Agora, esse sistema de partículas é chamado de corpo rígido quando as distâncias e os ângulos entre todas as partículas não mudam com o tempo. Isso quer dizer que, independentemente de como o corpo se move ou gira, a estrutura interna dele permanece a mesma. Em termos matemáticos, isso é expresso pela equação:

$$(\mathbf{y}_N(t) - \mathbf{y}_K(t), \mathbf{y}_P(t) - \mathbf{y}_M(t)) = \text{const.} \quad (2.1)$$

Aqui, estamos dizendo que a relação entre as posições das partículas (que podem ser distâncias ou ângulos) é constante ao longo do tempo.

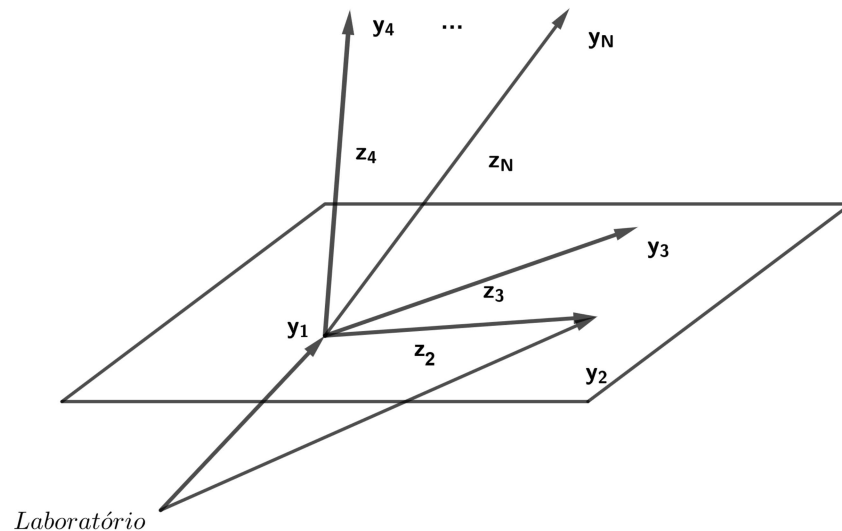
O objetivo agora é escrever as equações de movimento, que nos permitem descobrir como as posições $\mathbf{y}_N(t)$ de cada partícula mudam com o tempo, a partir de suas condições iniciais. Ou seja, se conhecemos onde cada partícula estava inicialmente e qual era sua velocidade, podemos prever suas posições futuras. As posições iniciais das partículas são indicadas por $\mathbf{y}_N(0) = \mathbf{c}_N$, onde c_N^i são $3n$ números dados e as velocidades iniciais das partículas são representadas por $\mathbf{v}_N$, que nos dizem como cada partícula estava se movendo no momento inicial.

Com essas informações, podemos usar as leis da mecânica para encontrar o movimento de todas as partículas ao longo do tempo.

2.1.1 O número de graus independentes de liberdade do corpo rígido.

Um grau de liberdade refere-se à quantidade de maneiras pelas quais um sistema pode se mover ou ser ajustado independentemente. No caso de um corpo rígido, a situação

– Figura 2.1 – Vectors $\mathbf{z}_2(t), \mathbf{z}_3(t), \mathbf{z}_4(t)$ que conetam quatro pontos de um corpo rígido. Os vetores $\mathbf{z}_A = \mathbf{y}_A - \mathbf{y}_1$ são linearmente independentes e definem a geometria do corpo.



Fonte: Rigid body as a constrained system Lagrangian and Hamiltonian formalism-Alexei A. Deriglazov

é um pouco mais complexa, já que há certas restrições que limitam esses movimentos. Este texto explica quantos graus de liberdade um corpo rígido possui e como isso é determinado.

Inicialmente, há muitas restrições que governam o movimento das partículas em um corpo rígido, como mencionado anteriormente na equação (2.1). No entanto, nem todas essas restrições são independentes; algumas delas podem ser consequências de outras. Assim, podemos reduzir o número de restrições, encontrando um conjunto independente delas. Ao final, restam $3n - 6$ restrições independentes, onde n é o número total de partículas no sistema.

Dado isso, pode-se representar todas as funções vetoriais $\mathbf{y}_N(t)$ usando apenas seis funções, que não estão limitadas por essas restrições. Ou seja, ao invés de lidar com muitas variáveis e restrições, podemos simplificar o problema, focando só nessas seis funções essenciais. Isso significa que o corpo rígido tem seis graus de liberdade independentes, ou seja, seis maneiras pelas quais ele pode se mover ou ser descrito sem restrições adicionais.

Para ilustrar melhor esse conceito, vamos escolher quatro partículas específicas do corpo rígido, com posições $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ e $\mathbf{y}_4$, que não estão no mesmo plano. Isso significa

que esses quatro pontos formam um sistema tridimensional completo, sem serem colineares ou coplanares.

Agora, podemos definir três novos vetores: $\mathbf{z}_2 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1$, $\mathbf{z}_3 = \mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1$ e $\mathbf{z}_4 = \mathbf{y}_4 - \mathbf{y}_1$. Esses vetores são linearmente independentes, o que quer dizer que nenhum deles pode ser formado por uma combinação linear dos outros. Eles formam uma base tridimensional completa, como mostrado na figura 2.1.

Vamos introduzir o conjunto de n vetores $\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_N = \mathbf{y}_N - \mathbf{y}_1$, $N = 2, 3, \dots, n$. Essas novas variáveis nos permitem expressar as restrições do corpo rígido (2.1) de maneira mais conveniente.

As restrições que descrevem o comportamento do corpo rígido podem ser reescritas da seguinte forma:

$$(\mathbf{z}_N, \mathbf{z}_P) = \text{const}, \quad (\mathbf{z}_N - \mathbf{z}_K, \mathbf{z}_P - \mathbf{z}_M) = \text{const}. \quad (2.2)$$

Essas equações mantêm as relações de distância e ângulo entre as partículas do corpo rígido. Para simplificar ainda mais, vamos focar nas restrições que envolvem os vetores $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ e $\mathbf{z}_4$, que são linearmente independentes. Existem $3n - 6$ restrições delas.

$$(\mathbf{z}_A, \mathbf{z}_B) = a_{AB}, \quad A, B = 2, 3, 4, \quad (2.3)$$

$$(\mathbf{z}_A, \mathbf{z}_\alpha) = a_{A\alpha}, \quad \alpha = 5, 6, \dots, n. \quad (2.4)$$

Essas equações indicam que as distâncias entre os vetores $\mathbf{z}_A$ são fixas e determinadas pelos valores a_{AB} . Como $\mathbf{z}_A$ são linearmente independentes, o determinante da matriz formada por a_{AB} não é zero, ou seja, $\det a_{AB} \neq 0$. Isso garante que as relações entre esses vetores estão completamente determinadas. As restrições fixam comprimentos de $\mathbf{z}_A$ e ângulos entre eles, bem como os produtos escalares entre cada $\mathbf{z}_\alpha$ com três $\mathbf{z}_A$.

Agora que temos as restrições principais em $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$, precisamos descrever como os outros vetores $\mathbf{z}_\alpha$ (para $\alpha = 5, 6, \dots, n$) se relacionam com eles. Podemos expressar esses vetores na base formada por $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$

$$\mathbf{z}_\alpha = k_\alpha^2 \mathbf{z}_2 + k_\alpha^3 \mathbf{z}_3 + k_\alpha^4 \mathbf{z}_4, \quad (2.5)$$

Essa equação diz que cada vetor $\mathbf{z}_\alpha$ pode ser descrito como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$, com coeficientes k_α^A . Podemos determinar esses coeficientes resolvendo um sistema de equações obtido ao calcular os produtos escalares entre $\mathbf{z}_\alpha$ e $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$. O resultado é: $k_\alpha^A = a_{AB}^{-1} a_{B\alpha}$.

Agora podemos representar as posições de todas as partículas no corpo rígido usando apenas os vetores $\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ e $\mathbf{z}_4$ da seguinte forma:

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{z}_2, \mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{z}_3, \mathbf{y}_4 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{z}_4, \mathbf{y}_\alpha = \mathbf{y}_1 + k_\alpha^A \mathbf{z}_A. \quad (2.6)$$

Portanto, todas as posições das partículas $\mathbf{y}_N$ podem ser descritas em termos de apenas quatro vetores: $\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ e $\mathbf{z}_4$.

O sistema possui 9 variáveis associadas aos vetores $\mathbf{z}_A$ (3 para cada vetor $\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ e $\mathbf{z}_4$). No entanto, as restrições na equação (2.3) impõem 6 limitações sobre essas variáveis, o que significa que restam 3 graus de liberdade independentes associados a $\mathbf{z}_A$. Além disso, as três coordenadas do vetor $\mathbf{y}_1$ representam mais 3 graus de liberdade independentes.

Portanto, ao todo, o corpo rígido tem 6 graus de liberdade independentes: 3 que são associados à posição do ponto $\mathbf{y}_1$ e 3 que são associados às rotações do corpo em torno desse ponto.

2.1.2 Problema variacional inicial.

O problema variacional inicial para o corpo rígido é um problema clássico na Mecânica Lagrangiana, no qual precisamos formular as equações de movimento que descrevem o comportamento de um sistema de partículas com restrições (neste caso, as que definem o corpo rígido). Abaixo, vamos detalhar as equações apresentadas, fazendo as contas e explicando os conceitos envolvidos.

As equações (2.7) e (2.8) descrevem as restrições que o corpo rígido impõe às partículas. A ideia é que as distâncias entre as partículas são constantes.

$$(\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_B - \mathbf{y}_1) = a_{AB}, \quad A, B = 2, 3, 4, \quad (2.7)$$

Esta equação define que as distâncias entre as partículas $\mathbf{y}_A$ e $\mathbf{y}_B$, em relação à partícula $\mathbf{y}_1$, são constantes

$$(\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_\alpha - \mathbf{y}_1) = a_{A\alpha}, \quad \alpha = 5, 6, \dots, n. \quad (2.8)$$

Aqui, as distâncias entre as partículas $\mathbf{y}_A$ (para $A = 2, 3, 4$) e as outras partículas $\mathbf{y}_\alpha$ também são constantes, com valores dados por $a_{A\alpha}$.

Essas duas equações definem uma superfície de seis dimensões em $\mathbb{R}^{3n}$, isto é que o corpo rígido é representado por um ponto que se move dentro da superfície. Com isso, as restrições fixam o movimento do corpo dentro desse espaço.

De acordo com os resultados conhecidos da mecânica clássica (14), (25). A ação lagrangiana é uma função que, ao ser minimizada, nos dá as equações de movimento do sistema. A ação proposta deste sistema é:

$$\begin{aligned}
S = \int dt & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^n m_N \dot{\mathbf{y}}_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{A,B=2}^4 \lambda_{AB} [(\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_B - \mathbf{y}_1) - a_{AB}] \\
& + \frac{1}{2} \sum_{A=2}^4 \sum_{\beta=5}^n \lambda_{A\beta} [(\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_\beta - \mathbf{y}_1) - a_{A\beta}].
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Essa ação é composta de três termos principais: Termo de energia cinética: $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^n m_N \dot{\mathbf{y}}_N^2$, que representa a energia cinética de todas as partículas. Termos de restrição: Os termos com os multiplicadores de Lagrange λ_{AB} e $\lambda_{A\beta}$ impõem as restrições a_{AB} e $a_{A\beta}$ de maneira formal. Esses multiplicadores de Lagrange são variáveis auxiliares que garantem que as distâncias entre as partículas permaneçam constantes. As variáveis dinâmicas auxiliares $\lambda_{AN}(t)$ são chamadas de multiplicadores Lagrangianos. Em todos os cálculos, eles devem ser tratados iguais com $\mathbf{y}_N(t)$. Em particular, procurando as equações de movimento, tomamos variações em relação a $\mathbf{y}_N$ e todos λ_{AN} . O λ_{AB} de 3×3 blocos de λ_{AN} foi escolhido para ser a matriz simétrica. As variações em relação a λ_{AN} implicam as restrições (2.7) e (2.8), enquanto as variações em relação a $\mathbf{y}_N(t)$ fornecem as equações dinâmicas

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{\mathbf{y}}_1 &= - \sum_{AB} \lambda_{AB} [\mathbf{y}_B - \mathbf{y}_1] - \frac{1}{2} \sum_{A\alpha} \lambda_{A\alpha} [\mathbf{y}_A + \mathbf{y}_\alpha - 2\mathbf{y}_1], \\
m_A \ddot{\mathbf{y}}_A &= \sum_B \lambda_{AB} [\mathbf{y}_B - \mathbf{y}_1] + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \lambda_{A\alpha} [\mathbf{y}_\alpha - \mathbf{y}_1], \\
m_\alpha \ddot{\mathbf{y}}_\alpha &= \frac{1}{2} \sum_A \lambda_{A\alpha} [\mathbf{y}_A - \mathbf{y}_1].
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Para este último uso, denotamos LD (lado direito) dessas equações por $\mathbf{F}_N(y, \lambda)$. Então eles são da forma

$$m_N \ddot{\mathbf{y}}_N = \mathbf{F}_N(y, \lambda). \tag{2.11}$$

Assim a equação (2.11) é simplesmente uma forma resumida das três equações dadas em (2.10), resumidas em uma fórmula geral para cada partícula do sistema.

As equações de movimento admitem várias integrais de movimento. Eles são momento total, energia e momento angular

$$\mathbb{P} = \sum m_N \dot{\mathbf{y}}_N, \quad \mathbb{E} = \frac{1}{2} \sum m_N \dot{\mathbf{y}}_N^2, \quad \mathbb{M} = \sum m_N [\mathbf{y}_N, \dot{\mathbf{y}}_N]. \tag{2.12}$$

Eles são preservados devido à simetria do sistema e à conservação da energia e do momento no corpo rígido.

2.1.3 O sistema inercial de coordenadas do centro de massa.

Começamos com o conjunto de equações de movimento do corpo rígido para $3n$ coordenadas, que são dadas por: $m_N \ddot{\mathbf{y}}_N = \mathbf{F}_N(y, \lambda)$. Se somarmos todas as equações (2.10), obtemos:

$$\sum_{N=1}^n m_N \ddot{\mathbf{y}}_N = 0. \quad (2.13)$$

Isso implica que o centro de massa do corpo se move com aceleração zero, ou seja, o centro de massa tem um movimento retilíneo e uniforme. Isso nos leva a introduzir o conceito do ponto móvel chamado de centro de massa. O vetor posição do centro de massa $\mathbf{y}_0(t)$ é definido como:

$$\mathbf{y}_0(t) = \frac{1}{\mu} \sum_{N=1}^n m_N \mathbf{y}_N(t), \text{ onde } \mu = \sum_{N=1}^n m_N, \text{ então } \ddot{\mathbf{y}}_0 = 0. \quad (2.14)$$

Neste caso, μ é a massa total do sistema.

A aceleração do centro de massa é zero, $\ddot{\mathbf{y}}_0 = 0$, e, portanto, sua trajetória é linear, com uma velocidade constante. Isso nos dá a expressão para a posição do centro de massa ao longo do tempo:

$$\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t, \quad (2.15)$$

onde $\mathbf{C}_0 = \frac{(\sum m_N \mathbf{c}_N)}{\mu}$ é a posição inicial do centro de massa $\mathbf{V}_0 = \frac{(\sum m_N \mathbf{v}_N)}{\mu}$ é a velocidade inicial.

Para simplificar ainda mais o problema, realizamos uma mudança de variáveis, onde agora descrevemos as posições das partículas em relação ao centro de massa. Assim, definimos $\mathbf{x}_P$ que são vetores de posição de $n - 1$ pontos do corpo em relação ao centro de massa, veja a Figura 2.1.3.

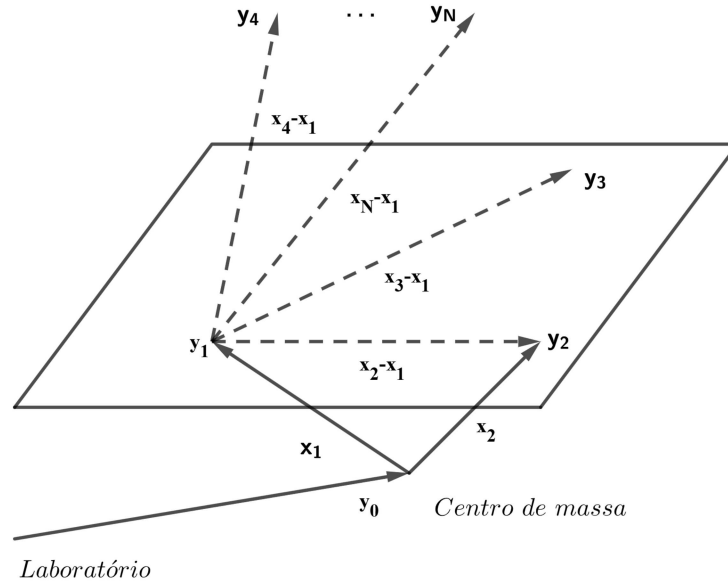
$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) \rightarrow \left(\mathbf{y}_0 = \frac{1}{\mu} \sum_{N=1}^n m_N \mathbf{y}_N(t), \mathbf{x}_P = \mathbf{y}_P - \mathbf{y}_0 \right), \quad P = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (2.16)$$

Fazendo as contas $\mathbf{y}_0 = \frac{1}{\mu} \sum_{N=1}^{n-1} m_N \mathbf{y}_N + \frac{1}{\mu} m_n \mathbf{y}_n$, assim a mudança inversa é

$$(\mathbf{y}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}) \rightarrow \left(\mathbf{y}_P = \mathbf{y}_0 + \mathbf{x}_P, \mathbf{y}_n = \mathbf{y}_0 - \frac{1}{m_n} \sum_{N=1}^{n-1} m_N \mathbf{x}_N \right), \quad P = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (2.17)$$

Uma mudança invertível de variáveis pode ser realizada em um Lagrangiano, isso é conhecido por fornecer uma formulação equivalente do problema inicial (14), (13), (25). Em termos de novas variáveis (2.17), o Lagrangiano (2.9) tem a seguinte redação:

– Figura 2.1.3 – Posições das partículas em relação ao laboratório, e em relação ao centro de massa



Fonte: Rigid body as a constrained system Lagrangian and Hamiltonian formalism-Alexei A. Deriglazov

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{y}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{N=1}^n m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{A=2}^4 \sum_{N=2}^n \lambda_{AN} [(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1) - a_{AN}], \quad (2.18)$$

onde foi denotado

$$\mathbf{x}_n \equiv -\frac{1}{m_n} \sum_{N=1}^{n-1} m_N \mathbf{x}_N, \text{ então } \sum_{N=1}^n m_N \mathbf{x}_N = 0. \quad (2.19)$$

Isso nos leva a introduzir uma variável auxiliar independente x_n e a levar em conta a igualdade (2.19) como mais uma restrição do problema, adicionando-a à nossa ação com o multiplicador lagrangiano correspondente. De acordo com os resultados conhecidos da mecânica clássica, isso dá um Lagrangiano equivalente

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{y}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{N=1}^n m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{A,B=2}^4 \lambda_{AB} [(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_1) - a_{AB}] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{A=2}^4 \sum_{\beta=5}^n \lambda_{A\beta} [(\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_1) - a_{A\beta}] + (\boldsymbol{\lambda}, \sum_{N=1}^n m_N \mathbf{x}_N). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Agora consiste em $3n+3$ variáveis dinâmicas independentes y_0 (posição do centro de massa) e x_N , $N = 1, 2, \dots, n$, (posições relativas no corpo); bem como $3n-3$ multiplicadores de Lagrange variáveis auxiliares λ_{AN} e $\boldsymbol{\lambda}$, que impõem as restrições de rigidez e de centro de massa.

O centro de massa entra apenas no primeiro termo do Lagrangiano. Assim, a variação da ação em relação a $\mathbf{y}_0$ dá a equação (2.14), cuja solução já conhecemos, ver a equação (2.15). Diz-se que três funções y_0^i descrevem os graus de liberdade de translação de um corpo rígido. Como sua evolução já está determinada, omitimos o primeiro termo de (2.20) nos cálculos subsequentes. As demais variáveis $\mathbf{x}_N$ têm uma interpretação física simples. De fato, consideremos o sistema de coordenadas com origem no centro de massa e com eixos paralelos aos eixos do Laboratório. Isso é chamado de sistema de centro de massa. Em seguida, $\mathbf{x}_N$ definido nas Equações. (2.16) e (2.19) são apenas os vetores de posição dos pontos do corpo em relação a este sistema, veja a Figura **2.1.3**.

A variação da ação (2.20) em relação às variáveis $\mathbf{x}_N$ dá as equações dinâmicas

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1^i &= - \sum_{A,B=2}^4 \lambda_{AB} [x_B^i - x_1^i] - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{A\alpha} \lambda_{A\alpha} [x_A^i + x_\alpha^i - 2x_1^i] + m_1 \lambda^i, \\ m_A \ddot{x}_A^i &= \sum_{B=2}^4 \lambda_{AB} [x_B^i - x_1^i] + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{\alpha=5}^n \lambda_{A\alpha} [x_\alpha^i - x_1^i] + m_A \lambda^i, \\ m_\alpha \ddot{x}_\alpha^i &= \frac{1}{2} \sum_{A=2}^4 \lambda_{A\alpha} [x_A^i - x_1^i] + m_\alpha \lambda^i. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Para este último uso, denotamos LD (lado direito) dessas equações por $\mathbf{F}_N(x, \lambda)$. Então eles são da forma

$$m_N \ddot{\mathbf{x}}_N = \mathbf{F}_N(x, \lambda). \tag{2.22}$$

São acompanhadas das restrições, resultantes da variação de (2.20) em relação a λ

$$\sum_{N=1}^n m_N \mathbf{x}_N = 0, \quad (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_1) = a_{AN}. \tag{2.23}$$

2.1.4 Integrais de movimento.

Tomando o produto escalar da N-ésima equação do sistema (2.21) com $\dot{x}_N$, $N = 1, 2, \dots, n$, então temos; $m_N \ddot{\mathbf{x}}_N = \mathbf{F}_N(x, \lambda)$ Fazendo o produto interno com $\dot{\mathbf{x}}_N$ $(m_N \ddot{\mathbf{x}}_N, \dot{\mathbf{x}}_N) = (\mathbf{F}_N(x, \lambda), \dot{\mathbf{x}}_N)$, onde $(m_N \ddot{\mathbf{x}}_N, \dot{\mathbf{x}}_N) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2 \right)$, e somando temos

$\sum_{N=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2 \right) = \sum_{N=1}^n (\mathbf{F}_N(x, \lambda), \dot{\mathbf{x}}_N)$ só que $\sum_{N=1}^n (\mathbf{F}_N(x, \lambda), \dot{\mathbf{x}}_N) = 0$, assim temos:
 $\sum_{N=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2 \right) = 0$ concluimos que a energia rotacional é dado por:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{N=1}^n m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2, \quad (2.24)$$

é preservado ao longo de qualquer trajetória verdadeira do corpo: $\frac{dE}{dt} = 0$.

Da mesma forma, tomando em vez de produtos escalares os produtos vetoriais com $\mathbf{x}_N$, obtemos esse momento angular (interno) do corpo em relação ao centro de massa

$$\mathbf{m} = \sum_{N=1}^n m_N [\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N], \quad (2.25)$$

é preservado também, $\frac{d\mathbf{m}}{dt} = 0$.

O momento angular total (2.12) nessas variáveis é a soma do momento angular orbital e interno (spin)

$$\mathbb{M} = \mu[\mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0] + \sum m_N [\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N]. \quad (2.26)$$

Para o corpo livre, os dois momentos são preservados separadamente.

2.2 Base ortonormal rigidamente conectada ao corpo em movimento e à matriz de rotação.

Nesta seção e na próxima aparecem as quantidades que tomamos como variáveis básicas usadas para descrever a rotação de um corpo ao longo deste trabalho. São os elementos $R_{ij}(t)$ da matriz de rotação ortogonal que contém todas as informações sobre a orientação do corpo em relação ao Laboratório e, ao final, sobre a posição das partículas do corpo em cada instante de tempo.

Para começar, vamos mostrar que as distâncias dos pontos do corpo ao centro de massa não mudam com o tempo

$$|\mathbf{x}_N(t)| = \text{constante}. \quad (2.27)$$

Isso significa que o ponto do centro de massa (que geralmente não é um ponto do corpo) acompanha o deslocamento do corpo no espaço. Por sua vez, a Equação (2.27) implica que os ângulos entre os vetores $\mathbf{x}_N(t)$ são preservados. De fato, considere os vetores $\mathbf{x}_N(t)$, $\mathbf{x}_P(t)$ e $\mathbf{x}_N(t) - \mathbf{x}_P(t)$ que formam um triângulo. De acordo com (2.1) e (2.27), os comprimentos dos lados do triângulo não dependem do tempo. Então, o mesmo é verdade para os ângulos, em particular,

$$(\mathbf{x}_N(t), \mathbf{x}_P(t)) = \text{constante}. \quad (2.28)$$

Essas duas propriedades nos permitem imaginar o caráter dos possíveis movimentos do corpo em relação ao centro de massa. O movimento se assemelha à evolução de um pião inclinado. Ou seja, geralmente, o corpo gira em torno de algum eixo, uma extremidade do qual repousa no centro de massa, enquanto a outra extremidade experimenta algum movimento no espaço.

A formulação matemática exata desta imagem será dada abaixo. Para mostrar a validade de (2.27), calculamos a derivada de $|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P|^2 = \text{constante}$, obtendo $\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P(t), \mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P(t)) = (\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N) + (\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P) - (\dot{\mathbf{x}}_N, \mathbf{x}_P) - (\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_P) = 0$. Multiplicando esta expressão por m_P , somando sobre P e usando a Equação (2.19), obtemos

$$\mu(\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N) = - \sum_{P=1}^n m_P(\mathbf{x}_P, \dot{\mathbf{x}}_P), \quad (2.29)$$

para qualquer N . Isso implica $(\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N) = (\mathbf{x}_K, \dot{\mathbf{x}}_K)$, ou $(\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N) = c(t)$, onde $c(t)$ é o mesmo para qualquer N . Substituindo esta expressão de volta em (2.29), obtemos $c = 0$. Então $(\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) = 0$, ou $(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) = \text{const}$, como foi declarado.

Obtemos agora a fórmula básica, que nos permitirá livrar-nos da maioria das restrições e apresentar o problema variacional (2.20) de uma forma conveniente para uma análise posterior. Sejam os vetores de base do sistema de centro de massa as colunas $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$. Então

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{e}_i x_N^i(t), \quad \mathbf{x}_N(0) = \mathbf{e}_i x_N^i(0). \quad (2.30)$$

Como $|\mathbf{x}_N(t)| = \text{const}$, os vetores $\mathbf{x}_N(t)$ e $\mathbf{x}_N(0)$ têm o mesmo comprimento e, portanto, estão relacionados por alguma rotação [34]: $x_N^i(t) = R_{Nij}(t)x_N^j(0)$, onde $R_N^T R_N = 1$ é uma matriz ortogonal. Mostraremos que esta matriz é a mesma para todas as partículas, ou seja,

$$x_N^i(t) = R_{ij}(t)x_N^j(0). \quad (2.31)$$

Esta é a fórmula básica. Simplifica muito o trabalho. De fato, combinando-o com as Equações. (2.15) e (2.17), a evolução de qualquer ponto do corpo pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\mathbf{y}_N(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t + \mathbf{x}_N(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t + R(t)\mathbf{x}_N(0). \quad (2.32)$$

Ou seja, o trabalho se reduz a encontrar as equações de movimento para três variáveis dinâmicas independentes contidas na matriz ortogonal $R(t)$. Eles são chamados de graus de liberdade rotacionais do corpo rígido. Enfatizamos que, de acordo com a Equação (2.31), *os dados iniciais para a matriz de rotação na teoria de um corpo rígido são fixados de uma vez por todas*

$$R_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad (2.33)$$

Geometricamente, isso significa que em $t = 0$ colunas da matriz $R(t)$ coincidem com os vetores de base do sistema de centro de massa. A igualdade (2.32) é conhecida como teorema de Euler.

Para provar (2.31), escolhemos três vetores linearmente independentes $\mathbf{x}_A(t)$ entre $\mathbf{x}_N(t)$ e construímos a base ortonormal $\mathbf{R}_i(t)$, rigidamente conectada com $\mathbf{x}_A(t)$ em cada instante de tempo. Por exemplo, podemos tomar o vetor unitário $\mathbf{R}_1(t)$ na direção de $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{R}_2(t)$ no plano dos vetores $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$ e $\mathbf{R}_3(t) = [\mathbf{R}_1(t), \mathbf{R}_2(t)]$. Por construção, os vetores $\mathbf{R}_i$ formam uma base ortonormal rigidamente conectada ao corpo em movimento.

Como base fixa do corpo, poderíamos igualmente usar os vetores

$$\mathbf{R}'_j(t) = \mathbf{R}_i(t)U_{ij}, \quad (2.34)$$

onde U é uma matriz ortogonal independente do tempo, $UU^T = 1$.

Vamos concordar, de uma vez por todas, *que no estudo de um corpo rígido usaremos o Laboratório com vetores de base direcionados ao longo de $\mathbf{R}_i(0)$: $\mathbf{e}_i = \mathbf{R}_i(0)$* . Então podemos escrever as seguintes expansões:

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{R}_i(t)k_N^i, \quad \mathbf{x}_N(0) = \mathbf{R}_i(0)k_N^i = \mathbf{e}_i k_N^i. \quad (2.35)$$

Observe que, devido às Equações (2.27) e (2.28), esses dois vetores diferentes têm as mesmas coordenadas, que foram denotadas por k_N^i . Comparando essas expressões com (2.30), concluímos que $k_N^i = x_N^i(0)$. Então (2.35) e (2.30) implicam

$$\mathbf{e}_j x_N^j(t) = \mathbf{x}_N(t) = \mathbf{R}_i(t)x_N^i(0). \quad (2.36)$$

Duas bases ortonormais $\mathbf{R}_i(t)$ e $\mathbf{e}_i$ estão relacionadas por uma matriz ortogonal da seguinte forma:

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{e}_j R_{ji}(t). \quad (2.37)$$

Substituindo este $R_{ij}(t)$ na Equação (2.36), chegamos à fórmula desejada (2.31).

Tanto as colunas quanto as linhas da matriz R_{ij} têm uma interpretação simples. De fato, a última equação afirma que *as colunas da matriz R_{ji} coincidem com os vetores $\mathbf{R}_i(t)$ da base fixa do corpo*, ou seja,

$$R = (\mathbf{R}_1 | \mathbf{R}_2 | \mathbf{R}_3), \quad \text{ou} \quad (\mathbf{R}_j)_i = R_{ij}. \quad (2.38)$$

Contraindo a equação (2.31) com $\mathbf{e}_i$, isso pode ser apresentado na forma vetorial:

$$\mathbf{x}_N(t) = \mathbf{R}_j(t)x_N^j(0). \quad (2.39)$$

Isso tem um significado simples: os pontos do corpo estão em repouso em relação à base $\mathbf{R}_j(t)$.

A interpretação das linhas torna-se clara se invertermos a equação (2.37) da seguinte forma: $\mathbf{e}_i = R_{ij}(t)\mathbf{R}_j(t)$. Então

$$R^T = (\mathbf{G}_1|\mathbf{G}_2|\mathbf{G}_3), \quad (2.40)$$

onde as colunas $\mathbf{G}_i$ representam os vetores de base do laboratório $\mathbf{e}_i$ na base fixa do corpo. Por exemplo, os números $\mathbf{G}_3(t) = (R_{31}(t), R_{32}(t), R_{33}(t))^T$ são componentes do vetor de base $\mathbf{e}_3$ na base $\mathbf{R}_i$. A equação (2.31) pode ser escrita em uma forma vetorial

$$x_N^i(t) = (\mathbf{G}_i(t), \mathbf{x}_N(0)), \quad (2.41)$$

2.3 Velocidade angular, matriz de massa e tensor de inércia.

Para descrever a velocidade de rotação do corpo, quatro quantidades diferentes são usadas. Eles são velocidade angular instantânea ω_i , seus componentes Ω_i no referencial fixado pelo corpo, momento angular conservado m_i e seus componentes M_i no referencial fixo pelo corpo. Vamos obtê-los analisando as consequências cinemáticas da fórmula (2.31). Além disso, continuando a análise da ação lagrangiana, chegamos a duas grandezas que determinam a distribuição da massa no corpo. Eles são chamados de matriz de massa e tensor de inércia. Ressaltamos que todas essas quantidades surgem automaticamente também no formalismo hamiltoniano.

2.3.1 Velocidade angular instantânea de um corpo rígido.

A derivada da Equação (2.31) pode ser apresentada de várias formas da seguinte forma:

$$\dot{x}_N^i(t) = \dot{R}_{ij}x_N^j(0) = -\hat{\omega}_{ij}(t)x_N^j(t) = \epsilon_{ikj}\omega_k(t)x_N^j(t). \quad (2.42)$$

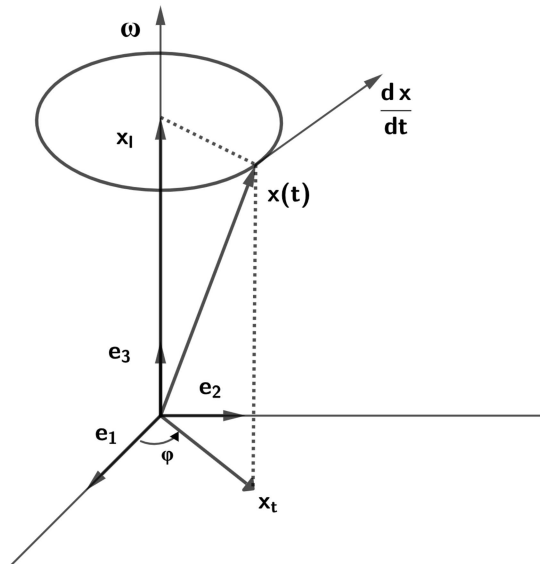
Onde

$$\hat{\omega}_{ij}(t) = -\left(\dot{R}R^T\right)_{ij} \quad (2.43)$$

é uma matriz antissimétrica, enquanto ω_k é o vetor correspondente (ver a equação (1.2))

$$\omega_k(t) \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\hat{\omega}_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}\left(\dot{R}R^T\right)_{ij}, \quad \hat{\omega}_{ij} = \epsilon_{ijk}\omega_k. \quad (2.44)$$

– Figura 2.3 – Velocidade angular instantânea $|\omega| = \frac{d\varphi}{dt}$ de precessão



Fonte: Rigid body as a constrained system Lagrangian and Hamiltonian formalism-Alexei A. Deriglazov

É chamado de vetor da velocidade angular instantânea do corpo. A equação (2.42) na forma vetorial é dado por

$$\dot{\mathbf{x}}_N = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}_N]. \quad (2.45)$$

Isso implica que a velocidade de qualquer ponto N é ortogonal ao plano de $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{x}_N$. Além disso, isso implica $|\mathbf{x}_N| = \text{const.}$, como deveria ser de acordo com (2.27). Quando $\boldsymbol{\omega}$ não depende do tempo, esta equação descreve a precessão do vetor $\mathbf{x}_N$ em torno do eixo $\boldsymbol{\omega}$, ver Figura 2.3. De fato, vamos colocar o início do vetor $\boldsymbol{\omega}$ na origem do sistema de centro de massa. Seja $\mathbf{x}_N(0) = \mathbf{x}_{N\parallel}(0) + \mathbf{x}_{N\perp}(0)$ é uma decomposição da posição inicial nas partes longitudinais e transversais em relação a $\boldsymbol{\omega}$, ver Figura 2.3. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_N(t) &= \mathbf{x}_{N\parallel}(0) + \mathbf{x}_{N\perp}(t) \\ &= \mathbf{x}_{N\parallel}(0) + |\mathbf{x}_{N\perp}(0)|[\mathbf{e}_1 \cos(|\boldsymbol{\omega}|t) + \mathbf{e}_2 \sin(|\boldsymbol{\omega}|t)], \end{aligned} \quad (2.46)$$

é uma solução para a equação (2.45). O ponto $\mathbf{x}_N$ descreve um círculo em torno de $\boldsymbol{\omega}$ com a frequência de rotação (ou velocidade angular) igual à magnitude deste vetor $|\boldsymbol{\omega}|$. Quando $\boldsymbol{\omega}$ é uma função do tempo, o final desse vetor experimenta algum movimento, e a precessão descrita é apenas uma parte do movimento total da partícula do corpo.

Os vetores de base do quadro fixo do corpo $\mathbf{R}_j(t)$, sendo rigidamente conectados ao corpo, precedem de acordo com a mesma regra

$$\dot{\mathbf{R}}_j = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}_j]. \quad (2.47)$$

Observe que $\hat{\omega} = \dot{R}R^T$ e $R^T\dot{R}$ são duas matrizes antissimétricas diferentes. Portanto, denotamos $\hat{\Omega}_{ij} = -\left(R^T\dot{R}\right)_{ij}$, $\Omega_k \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\hat{\Omega}_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}\left(R^T\dot{R}\right)_{ij}$, então

$$\hat{\Omega}_{ij} = \epsilon_{ijk}\Omega_k. \quad (2.48)$$

Essas definições implicam as relações

$$\hat{\Omega} = -R^T\hat{\omega}R, \quad \omega_i = R_{ij}\Omega_j. \quad (2.49)$$

As funções $\Omega_j(t)$ são chamadas de *componentes da velocidade angular no corpo* [13]. Seu significado é claro a partir da seguinte linha:

$$\boldsymbol{\omega} \equiv (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T = \mathbf{e}_i\omega_i(t) = \mathbf{e}_iR_{ij}(t)\Omega_j(t) = \mathbf{R}_j(t)\Omega_j(t). \quad (2.50)$$

Ou seja, os números Ω_j são coordenadas do vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_i\omega_i$ em relação à base ortonormal $\mathbf{R}_j(t)$, rigidamente conectada ao corpo. *Ressaltamos que não há vetor independente $\boldsymbol{\Omega}$ no formalismo. Às vezes, escrevemos $\mathbf{I}\boldsymbol{\Omega}$ para denotar as quantidades $I_{ij}\Omega_j$ e assim por diante, o que é um certo abuso de notação.*

2.3.2 Dinâmica de um corpo com velocidade angular constante.

Quando a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ é conhecida por ser independente do tempo, podemos combinar a solução (2.46) com a equação $\dot{\mathbf{x}}_N = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}_N]$ com (2.32) e obter

$$\mathbf{y}_N(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0t + \mathbf{x}_{N\parallel}(0) + |\mathbf{x}_{N\perp}(0)| [\mathbf{e}_1\cos(|\boldsymbol{\omega}|t) + \mathbf{e}_2\sin(|\boldsymbol{\omega}|t)]. \quad (2.51)$$

Ou seja, neste caso, o problema do movimento de um corpo rígido pode ser considerado já resolvido.

Considere algum ponto do corpo, que em $t = 0$ está localizado no eixo $\boldsymbol{\omega}$. Então a equação (2.51) implica que este ponto estará localizado no eixo em todos os instantes futuros. Portanto, o eixo $\boldsymbol{\omega}$ pode ser considerado como rigidamente conectado ao corpo. Quando o eixo $\boldsymbol{\omega}$ se move no espaço, ele também deve se mover no corpo.

No caso geral da velocidade angular dependente do tempo, a equação $\dot{\mathbf{x}}_N = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}_N]$ acaba sendo muito menos útil. A propriedade específica da teoria é que as equações dinâmicas em Ω_i acabam sendo fechadas, no sentido de que envolvem apenas o próprio Ω_i . Estas são as famosas equações de Euler, veja abaixo. De (2.49) segue-se que, para determinar $\boldsymbol{\omega}$, precisamos também conhecer $R(t)$. Por sua vez, as equações dinâmicas para $R(t)$ envolvem Ω_i , mas não envolvem $\boldsymbol{\omega}$, veja abaixo. Portanto, acaba sendo uma tarefa mais simples resolver o sistema de equações para R_{ij} e Ω_i , que não envolvem $\boldsymbol{\omega}$ de forma alguma, e usar o $R(t)$ obtido para determinar o movimento pela fórmula $\mathbf{x}_N(t) = R(t)\mathbf{x}_N(0)$, em vez de usar (2.45). Por outro lado, a velocidade angular tem um significado geométrico simples como o eixo de rotação instantânea e será útil para a visualização do movimento livre.

Em resumo, quando a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ é um vetor constante, ela acaba sendo a variável básica para determinar o movimento. No caso geral, as variáveis Ω_i e R_{ij} são mais convenientes, pois as equações de movimento do corpo rígido são formuladas em termos dessas variáveis.

2.3.3 Matriz de massa, tensor de inércia e suas propriedades sob rotações do sistema de centro de massa.

O segundo termo do Lagrangiano (2.20) representa a energia cinética da rotação do corpo. Como mostramos acima, a energia preserva seu valor ao longo de soluções para equações de movimento. Seja $\mathbf{x}_N(t)$, $N = 1, 2, \dots, n$ solução para equações de movimento. Usando as equações (2.31), (2.38) e (2.48), sua energia pode ser apresentada da seguinte forma:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{N=1}^n m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2 = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{\mathbf{R}}_i \dot{\mathbf{R}}_j = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j, \quad (2.52)$$

na equação (2.52) apareceram duas matrizes numéricas. A matriz simétrica não degenerada g com os componentes

$$g_{ij} \equiv \sum_{N=1}^n m_N x_N^i(0) x_N^j(0), \quad (2.53)$$

será chamada de matriz de massa, enquanto a matriz simétrica I com os componentes

$$I_{ij} \equiv \sum_{N=1}^n m_N \left[x_N^2(0) \delta^{ij} - x_N^i(0) x_N^j(0) \right] = g_{kk} \delta_{ij} - g_{ij}, \text{ então } g_{ij} = \frac{I_{aa}}{2} \delta_{ij} - I_{ij}, \quad (2.54)$$

será chamada de tensor de inércia. No limite de uma distribuição contínua de partículas com densidade de massa $\rho(\mathbf{x})$, a soma nessas expressões deve ser substituída por integral, por exemplo,

$$g_{ij} = \int d^3x \rho(\mathbf{x}) x^i x^j. \quad (2.55)$$

Essas duas matrizes independentes do tempo são características da distribuição espacial das massas no corpo no instante inicial. Eles não são invariantes sob translações: elas foram definidos e devem ser computados no sistema de centro de massa.

Além disso, a forma explícita dessas matrizes numéricas depende da posição inicial do corpo em relação ao sistema de laboratório. Equivalentemente, pode-se dizer que elas mudam quando passamos de uma base de Laboratório para outra, relacionada por alguma rotação. Matematicamente, elas se transformam como tensores de segunda ordem sob as rotações. De fato, considere duas bases ortonormais relacionadas por rotação com a ajuda de matriz ortogonal numérica $U^T U = 1$: $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_k U_{ki}^T$. As coordenadas das partículas do corpo nessas bases estão relacionados da seguinte forma: $x'^i = U_{ij} x^j$. Então a equação (2.53) implica que as matrizes g'_{ij} e g_{ij} , calculadas nessas bases, estão relacionadas por

$$\begin{aligned} g'_{ij} &\equiv \sum_N m_N x_N'^i(0) x_N'^j(0) = U_{ia} \left(\sum_N m_N x_N^a(0) x_N^b(0) \right) U_{jb} \\ &= U_{ia} g_{ab} U_{jb}, \quad \text{ou} \quad g' = U_g U^T, \end{aligned} \quad (2.56)$$

O tensor de inércia tem a mesma regra de transformação

$$I' = U I U^T. \quad (2.57)$$

Vamos provar que g é uma matriz não degenerada. De acordo com a álgebra linear, dada uma matriz simétrica g , existe uma matriz ortogonal U tal que $U g U^T$ é uma matriz diagonal, digamos $U g U^T = \tilde{g} \equiv \text{diagonal}(g_1, g_2, g_3)$, ou $\sum_N m_N (U \mathbf{x}_N)^i (U \mathbf{x}_N)^j = \text{diagonal}(g_1, g_2, g_3)$. Essas igualdades implicam (não há soma sobre i)

$$\det g = \det \tilde{g} = g_1 g_2 g_3, \quad g_i = \sum_N m_N (U \mathbf{x}_N)^i (U \mathbf{x}_N)^i. \quad (2.58)$$

Como nosso corpo tem quatro partículas que não estão no mesmo plano, entre $\mathbf{x}_N$ existem três vetores linearmente independentes. Juntamente com a equação (2.58) isso implica $g_i > 0$ e $\det g > 0$.

Se um de g_i , digamos $g_1 = 0$, isso implica $(U \mathbf{x}_N)^1 = 0$ para qualquer N , ou seja, temos um corpo plano. Da mesma forma, $g_1 = g_2 = 0$ implica que o corpo é uma haste sólida.

Lembre-se de que uma matriz simétrica não degenerada g tem três ou autovetores ortogonais com autovalores não desaparecidos: $g \mathbf{b}_i = \lambda_i \mathbf{b}_i$. Eles podem ser escolhidos para ter comprimento unitário e formar um triplo destro. Aplicando a matriz definida acima U a essa igualdade, obtemos $\tilde{g}(U \mathbf{b})_i = \lambda_i (U \mathbf{b})_i$, o que implica que os autovalores coincidem

com elementos diagonais de $\tilde{g}$, $\lambda_i = g_i$. De acordo com a equação (2.54), $\mathbf{b}_i$ também são autovetores de I , com os autovalores, digamos, I_1, I_2, I_3 . As retas determinadas pelos vetores $\mathbf{b}_i$ são chamadas do eixo principal de inércia do corpo, enquanto os números I_j são os principais momentos de inércia. Por construção, os eixos são rigidamente conectados ao corpo.

Para o último uso, apresentamos as relações entre os autovalores

$$\begin{aligned} 2g_1 &= I_2 + I_3 - I_1, \quad 2g_2 = I_1 + I_3 - I_2, \quad 2g_3 = I_1 + I_2 - I_3, \quad I_1 = \\ &= g_2 + g_3, \quad I_2 = g_1 + g_3, \quad I_3 = g_1 + g_2, \quad g_i - g_j = I_j - I_i. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Observe que $g_i > 0$ implica várias consequências: (a) $I_i > 0$; (b) $g_1 = g_2 = g_3$ implica $I_1 = I_2 = I_3 = 2g_1$; (c) A soma de quaisquer dois momentos de inércia não é sempre menor que o terceiro, por exemplo, $I_2 + I_3 \geq I_1$. Para um corpo plano, digamos $g_1 = 0$, obtemos $I_1 = I_2 + I_3 = g_2 + g_3$. Para uma haste sólida, digamos $g_1 = g_2 = 0$, obtemos $I_3 = 0$, $I_1 = I_2 = g_3$.

Adaptando o sistema de laboratório com a posição do corpo em $t = 0$, podemos supor que g e I em (2.52) são matrizes diagonais. De fato, seja g na equação (2.52) não é diagonal e seja U sua matriz diagonal, $U_g U^T = \tilde{g} = \text{diagonal}(g_1, g_2, g_3)$. Vamos transformar a base laboratorial com a ajuda da U^T . De acordo com a equação (2.56), calculando a energia cinética nesta base, chegamos à equação (2.52) com matrizes diagonais g e I . Geometricamente, isso significa que em $t = 0$ escolhemos os eixos do Laboratório para coincidir com os eixos principais de inércia. Além disso, a partir das equações (2.37) e (2.33) segue-se que o quadro fixo do corpo $\mathbf{R}_j$ em $t = 0$ também coincide com essas duas bases. Uma vez que os eixos de inércia e os eixos fixados pelo corpo estão rigidamente conectados com o corpo, eles coincidirão entre si em todos os instantes de tempo futuros: $\mathbf{R}_j(t) = \mathbf{b}_j(t)$.

Nos cálculos subsequentes, sempre assumimos que as matrizes g e I em (2.52) são diagonais. Isso implica que em $t = 0$ os eixos do Laboratório foram fixados nas direções dos eixos de inércia do corpo $\mathbf{R}_i(0)$.

O caso excepcional é um corpo totalmente simétrico, $I_1 = I_2 = I_3$. De acordo com (2.57), o tensor de inércia manterá sua forma diagonal para qualquer direção dos eixos do laboratório.

2.3.4 Momento angular e momento angular no corpo.

É conveniente introduzir os componentes $M_k(t)$ do momento angular $\mathbf{m}$ na base fixa do corpo $\mathbf{R}_k(t)$ da seguinte forma:

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)^T = \mathbf{e}_i m_i = \mathbf{e}_j R_{jk} R_{ki}^T m_i = \mathbf{R}_k R_{ki}^T m_i \equiv \mathbf{R}_k M_k, \quad (2.60)$$

que é $M_k = R_{ki}^T m_i$. M_k são chamados de componentes do momento angular no corpo (14).

Usando a fórmula básica (2.31) na definição de memória angular (2.25), ela pode ser apresentada de várias formas da seguinte forma:

$$\mathbf{m} = \sum_{N=1}^n m_N [\mathbf{x}_N, \dot{\mathbf{x}}_N] = \sum_i g_i [\mathbf{R}_i, \dot{\mathbf{R}}_i] = RIR^T \boldsymbol{\omega} = RI\boldsymbol{\Omega} = R\mathbf{M}. \quad (2.61)$$

Na obtenção da terceira e quarta igualdades, usamos as equações (1.6), (2.48), (2.54) e (2.49). Na base laboratorial, o vetor $\mathbf{m}$ é constante, enquanto a extremidade do vetor $\boldsymbol{\omega}$ se move ao longo de uma trajetória complexa. A fórmula $M_k = I_{kj}\Omega_j$ mostra que as coordenadas de $\mathbf{m}$ e $\boldsymbol{\omega}$ no referencial fixo do corpo estão rigidamente conectadas. No instante inicial, temos $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$, e as igualdades (2.61) se transformam em

$$\mathbf{m} = I\boldsymbol{\omega}(0) = I\boldsymbol{\Omega}(0) = \mathbf{M}(0). \quad (2.62)$$

Para um corpo totalmente simétrico, a equação (2.61) implica $\mathbf{m} = I_1 \boldsymbol{\omega} = I_1 R\boldsymbol{\Omega}$. Ou seja, o eixo instantâneo de rotação sempre permanece paralelo ao vetor do momento angular.

Da mesma forma, a energia cinética (2.52) pode ser apresentada de várias formas, como segue:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{N=1}^n m_N \dot{\mathbf{x}}_N^2 = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{\mathbf{R}}_i \dot{\mathbf{R}}_j = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{m}) = \frac{1}{2} (RIR^T)_{ij} \omega_i \omega_j = \quad (2.63)$$

$$= \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j = \frac{1}{2} (RI^{-1}R^T)_{ij} m_i m_j = \frac{1}{2} I_{ij}^{-1} M_i M_j$$

Para qualquer movimento, temos $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{m}) > 0$, ou seja, os vetores de momento angular conservado e velocidade angular sempre formam um ângulo agudo.

Enfatizamos que as Equações (2.61) e (2.63) são de natureza puramente cinemática. Por conseguinte, são igualmente aplicáveis no caso de um corpo com um ponto fixo, bem como de um corpo sob a ação de forças externas.

2.3.5 Propriedades de transformação de grandezas básicas sob rotações do sistema de laboratório.

Considere dois laboratórios com coordenadas relacionadas por matriz numérica ortogonal

$$x_i(t) = U_{ij} x_j(t). \quad (2.64)$$

Já observamos que as matrizes g_{ij} e I_{ij} são tensores de segunda ordem sob essas transformações. Equações (2.64) e (2.31) implicam que $R_{ij}(t)$ também é um tensor de segunda ordem. Com o uso dessas fórmulas, as propriedades de transformação de ω_i , Ω_i , m_i e M_i podem ser deduzidas de suas definições (2.44), (2.48), (2.25) e (2.61). Todos eles acabam sendo quantidades vetoriais: $\omega_i(t) = U_{ij}\omega_j(t)$, e em breve. Portanto, podemos falar sobre a covariância das equações construídas a partir dessas quantidades.

2.4 Ação funcional e equações de Lagrange de segundo ordem para os graus de liberdade rotacional.

Nesta seção serão obtidas equações de movimento de segunda ordem para a matriz de rotação. Também mostramos que elas decorrem de seu próprio problema variacional.

Voltando à discussão das equações (2.21) e (2.23), vamos resumir as duas últimas seções, apontando as propriedades peculiares do formalismo. Com corpo rígido podem ser associados três eixos de inércia ortogonais que passam pelo centro de massa. Três vetores ortonormais em suas direções $\mathbf{R}_i(t)$, rigidamente conectados ao corpo, são chamados de quadro fixo do corpo. Iniciando a análise do movimento de um corpo dado, selecionamos os vetores de base $\mathbf{e}_i$ do sistema de laboratório na direção de $\mathbf{R}_i(t)$ no instante inicial $t = 0$: $\mathbf{e}_i = \mathbf{R}_i(0)$. Então, a posição do ponto $\mathbf{x}_N(t)$ do corpo está relacionada com sua posição inicial $\mathbf{x}_N(0)$ da seguinte forma: $\mathbf{x}_N(t) = R(t)\mathbf{x}_N(0)$, onde a matriz de rotação é composta pelas colunas $\mathbf{R}_i(t)$: $R(t) = (\mathbf{R}_1(t), \mathbf{R}_2(t), \mathbf{R}_3(t))$. Além disso, sob esses pressupostos, as matrizes g e I , construídas de acordo com as equações (2.53) e (2.54), acabam sendo as matrizes diagonais.

Como vimos acima, qualquer solução de equações (2.21) e (2.23) é da forma $x_N^i(t) = R_{ij}(t)x_N^j(0)$. Substituindo essa aproximação nas restrições (2.23), acabamos de aprender que elas devem ser satisfeitas no instante inicial do tempo. Substituindo a aproximação nas equações dinâmicas, obtemos $3n$ equações que contêm R_{ij} e suas segundas derivadas. Multiplicando a N -ésima equação por $x_N^j(0)$ e tomando sua soma, obtemos as seguintes equações para determinar R_{ik} :

$$\ddot{R}_{ik}g_{kj} = -R_{ik}\lambda_{kj}, \quad R^T R = 1. \quad (2.65)$$

Por $\lambda_{jk}(t)$ na Equação (2.65) foi denotada a seguinte matriz simétrica

$$\begin{aligned} \lambda_{jk} = & - \sum_{AB} \lambda_{AB} \left[x_1^j x_1^k + x_A^j x_B^k - x_B^{(j)} x_1^k \right] - \\ & \frac{1}{2} \sum_{A\alpha} \lambda_{A\alpha} \left[x_\alpha^{(j)} x_A^k - x_\alpha^{(j)} x_1^k - x_A^{(j)} x_1^k - 2x_1^j x_1^k \right], \end{aligned} \quad (2.66)$$

onde todos os x_N^i são tomados no instante $t = 0$. Observe que depende das variáveis dinâmicas desconhecidas $\lambda_{AN}(t)$. Uma propriedade notável do sistema (2.65) é que

não precisamos saber $\lambda_{jk}(\lambda_{AN}(t))$ para resolvê-lo. Como mostramos abaixo, λ_{jk} são determinados exclusivamente pelo próprio sistema (2.65). Ele determina λ_{jk} algebricamente, como algumas funções de R e $\dot{R}$. A substituição dessas funções de volta para a equação (2.65) que fornece um problema de Cauchy bem definido para determinar $R(t)$. Vejamos como tudo isto funciona.

2.4.1 Problema variacional para as equações (2.65).

Mostremos que o sistema (2.65) decorre do problema variacional, no qual λ_{jk} são apenas os multiplicadores lagrangianos para as restrições $R^T R = 1$.

Considere um sistema dinâmico com variáveis de espaço de configuração $R_{ij}(t)$, $\lambda_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3$, onde R é a matriz 3×3 e λ é a matriz simétrica 3×3 . Seja $g_{ij} = \text{diag}(g_1, g_2, g_3)$ é uma matriz numérica diagonal. Então a ação lagrangiana

$$\begin{aligned} S &= \int dt \frac{1}{2} g_{ij} \dot{R}_{ki} \dot{R}_{kj} - \frac{1}{2} \lambda_{ij} [R_{ki} R_{kj} - \delta_{ij}] \equiv \\ &\equiv \int dt \frac{1}{2} \text{tr} [\dot{R} g \dot{R}^T] - \frac{1}{2} \text{tr} [\lambda (R^T R - 1)], \end{aligned} \quad (2.67)$$

implica tanto equações dinâmicas quanto restrições (2.65) como as condições de extremo deste problema variacional. Em particular, a variação da ação em λ implica as restrições $R^T R = 1$. Eles significam que qualquer solução $R(t)$ é um elemento do grupo de rotações $SO(3)$.

Diz-se que o problema variacional é formulado para um ponto que se move na variedade de grupo $SO(3)$. Deve-se notar que, ao formular um problema variacional na mecânica clássica, geralmente procuramos o extremo do funcional $\int dt L(q, \dot{q})$ para posições iniciais e finais escolhidas arbitrariamente: $q(0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$. No caso de um corpo rígido, a posição inicial do problema é fixada de uma vez por todas de acordo com a equação (2.33): $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$.

O problema (2.67) tem uma interpretação mecânica simples. Podemos reescrever (2.67) em termos de colunas $\mathbf{R}_j$ da matriz R_{ij} da seguinte forma:

$$L = \frac{1}{2} [g_1 \dot{\mathbf{R}}_1^2 + g_2 \dot{\mathbf{R}}_2^2 + g_3 \dot{\mathbf{R}}_3^2] - \frac{1}{2} \lambda_{ij} [(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) - \delta_{ij}]. \quad (2.68)$$

Como foi provado acima, $g_i > 0$. Assim, o problema variacional descreve três partículas de massas g_i , que são conectadas por hastes sólidas sem massa de comprimento igual a $\sqrt{2}$ e se movem livremente na esfera de raio unitário.

2.4.2 Um Lagrangiano equivalente.

Para o último uso, é conveniente reescrever o Lagrangiano (2.67) em termos de velocidade angular no corpo $\Omega_i(R, \dot{R}) \equiv -\frac{1}{2} \epsilon_{inm} (R^T \dot{R})_{nm}$. Fazendo isso, deve-se lembrar

que a matriz R_{ij} no Lagrangiano (2.67) deve ser tratada como uma matriz arbitrária (não ortogonal!).

Afirmção. O problema variacional (2.67) é equivalente ao seguinte:

$$L_2 = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i(R, \dot{R}) \Omega_j(R, \dot{R}) - \frac{1}{2} \lambda_{ij} [R_{ki} R_{kj} - \delta_{ij}] \quad (2.69)$$

Prova. Reescrevemos de forma idêntica o Lagrangiano (2.67) da seguinte forma:

$$L = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j - \frac{1}{2} \lambda_{ij} [(R^T R)_{ij} - \delta_{ij}] - \frac{1}{2} G_{ij}(R, \dot{R}) [(R^T R)_{ij}^{-1} - \delta_{ij}], \quad (2.70)$$

onde $G_{ij} \equiv \hat{\Omega}_{ia} g_{ab} \hat{\Omega}_{bj}$. Mostremos que o último termo pode ser omitido. Para ver isso, primeiro notamos que a teoria (2.70) é equivalente a

$$L_1 = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j - \frac{1}{2} [\lambda_{ij} + G_{ij}] [R_{ki} R_{kj} - \delta_{ij}]. \quad (2.71)$$

Isso pode ser facilmente verificado comparando suas equações de movimento. Em segundo lugar, vamos comparar as equações de movimento de L_1 e L_2 . Para L_2 eles têm a estrutura

$$D_{ij}(\ddot{R}, \dot{R}, R) + \lambda_{ik} R_{kj} = 0, \quad R^T R = 1, \quad (2.72)$$

enquanto para L_1 temos

$$D_{ij}(\ddot{R}, \dot{R}, R) + [\lambda_{ik} + G_{ik}] R_{kj} = 0, \quad R^T R = 1, \quad (2.73)$$

com o mesmo D_{ij} . Se $R_0(t), \lambda_0(t)$ é uma solução para (2.72), então $R_0(t), \lambda_0(t) = \lambda_0(t) - G(\dot{R}_0, R_0)$ é uma solução para (2.73). Por outro lado, se $R_0(t), \lambda_0(t)$ é uma solução para (2.73), então $R_0(t), \lambda_0(t) = \lambda_0(t) + G(\dot{R}_0, R_0)$ é uma solução para (2.72). As teorias (2.67) e (2.69) têm as mesmas soluções para as variáveis de espaço de configuração $R_{ij}(t)$ e, doravante, são equivalentes.

2.4.3 Equações de movimento de segunda ordem para a matriz de rotação R_{ij} .

A variação da ação (2.68) em $\mathbf{R}_i$ e λ_{ij} dá as equações de movimento (não há soma sobre i na equação (2.74))

$$g_i \ddot{\mathbf{R}}_i = - \sum_j \lambda_{ij} \mathbf{R}_j, \quad (2.74)$$

$$(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) = \delta_{ij}. \quad (2.75)$$

As variáveis auxiliares λ_{ij} podem ser excluídas das equações de segunda ordem (2.74) da seguinte forma. Calculando a primeira e a segunda derivada da restrição (2.75), obtemos suas consequências

$$\left(\dot{\mathbf{R}}_i, \mathbf{R}_j\right) + \left(\mathbf{R}_i, \dot{\mathbf{R}}_j\right) = 0, \quad \left(\ddot{\mathbf{R}}_i, \mathbf{R}_j\right) + \left(\mathbf{R}_i, \ddot{\mathbf{R}}_j\right) + 2\left(\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j\right) = 0. \quad (2.76)$$

Usando as equações (2.74) para derivadas de segunda ordem na última expressão, obtemos

$$\lambda_{ij} = \frac{2g_i g_j}{g_i + g_j} \left(\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j\right). \quad (2.77)$$

Usando esses λ_{ij} em (2.74), obtemos um sistema fechado de equações de segunda ordem para determinar a evolução temporal da matriz rotacional

$$\ddot{\mathbf{R}}_i = - \sum_j \frac{2g_j}{g_i + g_j} \left(\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j\right) \mathbf{R}_j, \quad (\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) = \delta_{ij}. \quad (2.78)$$

Eles devem ser resolvidos com dados iniciais $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $\dot{R}_{ij}(0) = V_{ij}$, $V_{ij} = -V_{ji}$, ver equações (2.33) e (2.76).

Observe que as equações obtidas não são covariantes sob rotações.

Enfatizamos mais uma vez que nem todas as soluções para as equações (2.78) com a matriz de massa diagonal g descrevem os movimentos possíveis de um corpo rígido. Seja $R_{ij}(t)$ uma solução de (2.78). De acordo com (2.31), pela construção das variáveis $R_{ij}(t)$, isso descreve o possível movimento de um corpo rígido somente se em algum instante de tempo, digamos $t = 0$, a solução passa pelo elemento unitário de $SO(3)$: $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Então $R_{ij}(t)$ corresponde ao movimento do nosso corpo rígido, que no momento $t = 0$ tinha eixos de inércia na direção dos eixos do laboratório.

2.4.4 A energia rotacional não é uma integral independente do movimento.

As equações de movimento (2.78) implicam conservação de energia e momento angular. Tomando o produto escalar de (2.78) com o vetor $g_i \dot{\mathbf{R}}_i$ e somando sobre i obtemos a conservação de energia

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad \text{onde} \quad E = \frac{1}{2} \sum_i g_i \dot{\mathbf{R}}_i^2. \quad (2.79)$$

A energia pode ser apresentada de várias formas, ver (2.3). Da mesma forma, usando o produto vetorial em vez do produto escalar, obtemos a conservação do momento angular.

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = 0, \quad \text{onde} \quad \mathbf{m} = \sum_i g_i [\mathbf{R}_i, \dot{\mathbf{R}}_i]. \quad (2.80)$$

Como deveria ser, este vetor conservado coincide com o definido em (2.61):

$$\sum_i g_i [\mathbf{R}_i, \dot{\mathbf{R}}_i] = \sum_{N=1}^n m_N [x_N, \dot{x}_N]_i.$$

As equações (2.61) e (2.33) implicam uma consequência importante: os dados iniciais para a velocidade angular não podem ser tomados arbitrariamente, mas são fixados pelo momento angular conservado.

$$m_i = I_i \omega_i(0) = I_i \Omega_i(0). \quad (2.81)$$

Então a expressão para a energia $E = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Omega_i^2(t) = \frac{1}{2} \sum_i I_i \Omega_i^2(0)$ implica

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{I_i} m_i^2, \quad (2.82)$$

que é a energia rotacional de um corpo livre não representa uma integral independente do movimento.

2.5 Forma de primeira ordem das equações de movimento e as equações de Euler-Poisson.

As mais convenientes nas aplicações acabam sendo as equações de movimento de primeira ordem (hamiltonianas) de um corpo rígido.

A equação vetorial (2.78) de segunda ordem é equivalente a um sistema de duas equações de primeira ordem para o dobro do número de variáveis independentes. Para obter o sistema de primeira ordem, considere o espaço das variáveis dinâmicas mutuamente independentes $R_{ij}(t)$ e $\Omega_i(t)$, sujeitas às equações $(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) = \delta_{ij}$, bem como para

$$\ddot{R}_{aj} = - \sum_k \frac{2g_k}{g_j + g_k} (\dot{\mathbf{R}}_j, \dot{\mathbf{R}}_k) R_{ak}, \quad (2.83)$$

$$\Omega_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kij} (R^T \dot{R})_{ij}. \quad (2.84)$$

Ou seja, $R_{aj}(t)$ satisfaz as equações (2.78), enquanto $\Omega_k(t)$ acompanha a dinâmica de $R_{aj}(t)$ de acordo com (2.84). Evidentemente, este sistema é equivalente a (2.78). Multiplicando a equação (2.83) na matriz invertível R_{ai} obtemos

$$(\mathbf{R}_i, \ddot{\mathbf{R}}_j) = -\frac{2g_i}{g_i + g_j} (\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j). \quad (2.85)$$

Vamos separar as partes simétricas e antissimétricas da equação (2.85) da seguinte forma:

$$(\mathbf{R}_i, \ddot{\mathbf{R}}_j) + (\mathbf{R}_j, \ddot{\mathbf{R}}_i) = -2 (\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j), \quad (2.86)$$

$$(\mathbf{R}_i, \ddot{\mathbf{R}}_j) - (\mathbf{R}_j, \ddot{\mathbf{R}}_i) = -2 \frac{g_i - g_j}{g_i + g_j} (\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j). \quad (2.87)$$

De acordo com (2.76), a equação (2.86) é uma consequência de $(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) = \delta_{ij}$, e pode ser omitida do sistema. Além disso, o produto escalar no LD da equação (2.87) pode ser reescrito de forma idêntica em termos de Ω_i (2.84) da seguinte forma:

$$(\dot{\mathbf{R}}_i, \dot{\mathbf{R}}_j) = \Omega^2 N_{ij}(\Omega), \quad \text{onde} \quad N_{ij}(\Omega) = \delta_{ij} - \frac{\Omega_i \Omega_j}{\Omega^2}, \quad \Omega^2 \equiv \sum_i \Omega_i^2. \quad (2.88)$$

Devido à identificação (1.2), podemos contrair a equação antissimétrica (2.87) com $-\frac{1}{2}\varepsilon_{kij}$, obtendo uma equação equivalente. Usando (2.84) e (2.88), isso pode ser apresentado como a equação de primeira ordem para determinar Ω_i

$$\dot{\Omega}_k = - \sum_{ij} \varepsilon_{kij} \frac{g_i}{g_i + g_j} \Omega_i \Omega_j. \quad (2.89)$$

Para os componentes que obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \frac{1}{I_1} (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3, \\ \dot{\Omega}_2 &= \frac{1}{I_2} (I_3 - I_1) \Omega_1 \Omega_3, \\ \dot{\Omega}_3 &= \frac{1}{I_3} (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Estas são as famosas equações de Euler. Aqui I_i são componentes do tensor de inércia, ver (2.59). De forma mais compacta, com o uso de produto vetorial, lêem-se

$$I\dot{\boldsymbol{\Omega}} = [I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}]. \quad (2.91)$$

A equação (2.84) pode ser reescrita na forma de uma equação de primeira ordem para determinar R_{ij}

$$\dot{R}_{ij} = -\varepsilon_{jkm} \Omega_k R_{im}. \quad (2.92)$$

Usando as colunas $\mathbf{G}_i = (R_{i1}, R_{i2}, R_{i3})^T$, esta equação pode ser escrita em uma forma vetorial da seguinte forma: $\dot{\mathbf{G}}_i = -[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{G}_i]$, $i = 1, 2, 3$. Isto é, os vetores $\mathbf{G}_i$ instantaneamente preces em torno do vetor de velocidade angular no corpo.

2.5.1 Comentários.

1. Para o caso de um pião pesado, três dessas equações (ou seja, as equações para os elementos da matriz R_{31} , R_{32} e R_{33} , ou seja, $\dot{\mathbf{G}}_3 = [\mathbf{G}_3, \boldsymbol{\Omega}]$), escritas em termos de ângulos de Euler, foram obtidas por Poisson (4) e levam seu nome, veja as notas históricas em (8). Portanto, chamaremos as equações (2.91) e (2.92) de equações de Euler-Poisson.

2. Como vimos as equações (2.91) e (2.92) são compostos de quantidades vetoriais e tensoriais. Portanto, eles são covariantes, ou seja, preservam sua forma sob rotações do sistema de laboratório. É claro que, no sistema girado, a matriz diagonal $I_i \delta_{ij}$ se transforma em uma matriz simétrica I_{ij} com elementos fora da diagonal diferentes de zero.

Coletando esses resultados, concluímos que as equações de primeira ordem (2.91) e (2.92), consideradas como um sistema para determinação das variáveis dinâmicas mutuamente independentes $R_{ij}(t)$ e $\Omega_i(t)$, são equivalentes ao sistema original (2.78). Os dados iniciais para o problema (2.91) e (2.92) são $R_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $\Omega_i(0) = \omega_i(0) = (I^{-1}\mathbf{m})_i$, ver (2.81).

Qualquer solução $R_{ij}(t)$ que obedeça a essas condições em $t = 0$ automaticamente será uma matriz ortogonal em qualquer instante futuro de tempo. De fato, a equação $\dot{\mathbf{G}}_i = -[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{G}_i]$ para as linhas de $R_{ij}(t)$ implica $(\dot{\mathbf{G}}_i, \mathbf{G}_j) + (\mathbf{G}_i, \dot{\mathbf{G}}_j) = 0$, ou $d(\mathbf{G}_i, \mathbf{G}_j)/dt = 0$. Uma vez que esses produtos escalares são independentes do tempo, podemos escrever $(\mathbf{G}_i(t), \mathbf{G}_j(t)) = (\mathbf{G}_i(0), \mathbf{G}_j(0)) = \delta_{ij}$ para qualquer t . Assim, um corpo rígido pode ser descrito usando apenas as equações diferenciais (2.91) e (2.92). Eles têm a forma normal, ou seja, as derivadas de tempo são separadas no LD das equações. Então, a teoria das equações diferenciais garante a existência e a singularidade de uma solução para o problema de Cauchy.

Observe que, para provar a existência de soluções para um sistema misto de equações diferenciais e algébricas, é necessário muito mais esforço (33).

Assim, alcançamos nosso objetivo de obter as equações de movimento. A evolução da matriz de rotação pode ser determinada a partir das equações de segunda ordem (2.78) ou do sistema de primeira ordem (2.91), (2.92). Neste último caso, resolvendo as equações (2.91), obtemos o vetor da velocidade angular no corpo $\Omega_i(t)$. Com este $\Omega_i(t)$, devemos resolver as equações (2.92) para $R(t)$. Então a dinâmica de qualquer ponto do corpo rígido é

$$\mathbf{y}_N(t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t + R(t)\mathbf{x}_N(0). \quad (2.93)$$

O movimento consiste em movimento retilíneo $\mathbf{C}_0 + \mathbf{V}_0 t$ do centro de massa e a transformação ortogonal $R(t)\mathbf{x}_N(0)$ em torno do centro de massa.

2.5.2 Forma de primeira ordem de um sistema mais geral.

Para um corpo em campos externos e em alguns outros casos, as equações de segunda ordem (2.65) adquirem uma forma mais complicada

$$\ddot{R}_{ik}g_{kj} = -R_{ik}\lambda_{kj} - A_{ik}g_{kj}, \quad R^T R = 1, \quad (2.94)$$

onde $A_{ik}(R_{ab}, \dot{R}_{ab})$ é alguma matriz que não depende de g_{kj} e λ_{kj} (como antes, g_{kj} é uma matriz numérica simétrica não degenerada, e $\lambda_{kj}(t) = \lambda_{jk}(t)$). Repetindo o cálculo anterior para este caso, obtemos a seguinte afirmação:

Afirmação.

O sistema (2.94) é equivalente ao seguinte problema de Cauchy para o sistema de primeira ordem, escrito para as variáveis mutuamente independentes $R_{ij}(t)$ e $\Omega_i(t)$:

$$I_{ka}\dot{\Omega}_a = [I\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}]_k + \frac{1}{2}\varepsilon_{kij} [(AI)_{ai}R_{aj} + (RI)_{ai}A_{aj}] - \frac{1}{2}I_{ka}\varepsilon_{aij}A_{bi}R_{bj}, \quad (2.95)$$

$$\dot{R}_{ij} = -\varepsilon_{jab}\Omega_a R_{ib}, \quad R_{ij}(0) = \delta_{ij}, \quad (2.96)$$

onde $I_{ij} = (\sum g_{aa})\delta_{ij} - g_{ij}$. Este sistema é composto de vetores e tensores $SO(3)$, portanto, é covariante sob as rotações. Quando $C_{ij} \equiv A_{bi}R_{bj}$ é uma matriz simétrica, o último termo em (2.95) desaparece.

3 CONCLUSÃO

A análise desenvolvida ao longo deste trabalho permitiu uma compreensão mais clara da dinâmica de corpos rígidos quando é tratada a partir de uma perspectiva variacional. Ao em vez de assumir equações como ponto de partida, buscamos fundamentá-las em princípios gerais da mecânica clássica, o que nos levou a resultados mais transparentes e logicamente construídos. Essa abordagem também evidenciou detalhes frequentemente ignorados em formulações tradicionais, especialmente no que diz respeito à escolha do referencial e à presença de torques externos arbitrários.

Ao final do estudo, verificamos que a estrutura matemática adotada não apenas reproduz os resultados clássicos já conhecidos, como também oferece maior precisão na interpretação física dos sistemas considerados. Assim, este trabalho reforça a importância de revisitar conceitos estabelecidos sob novos pontos de vista, contribuindo para uma prática mais rigorosa na aplicação da teoria e da pesquisa em mecânica clássica.

REFERÊNCIAS

- 1 Deriglazov, Alexei A. **Rigid body as a constrained system: Lagrangian and Hamiltonian formalism**. Cambridge Scholars Publishing, 2024. ISBN: 978-1-0364-1287-6.
- 2 Euler, L. **Theoria Motus Corporum Solidorum seu Rigidorum**. 1765.
See English translation by Ian Bruce:
<http://www.17centurymaths.com/contents/mechanica3.html>
- 3 Lagrange, J.L. **Mécanique analitique**. Paris, Widow Desaint, 1788.
- 4 Poisson, S.D. **A treatise of mechanics V.2**. London, Longman and Co. 1842.
- 5 Poincot, L. **Theorie Nouvelle de la Rotation des Corps**. Bachelier, Bachelier, 1834; English translation: <https://hdl.handle.net/2027/coo.31924021260447>.
- 6 Whittaker, E.T. **A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies**. Cambridge: at the University press, 1917.
- 7 MacMillan, W.D. **Dynamics of rigid bodies**. Dover Publications Inc., New-York, 1936.
- 8 Leimanis, E. **The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point**. Springer-Verlag, 1965.
- 9 Goldstein,H.; Poole, C. and Safko, J. **Classical mechanics, Third edition**. Addison Wesley, 2000.
- 10 Greiner, W. **Classical mechanics**. Springer-Verlag New York Inc., 2003.
- 11 Chernousko, F. L.; Akulenko, L. D.; Leshchenko, D. D. **Evolution of motions of a rigid body about its center of mass**. Springer, 2017.
- 12 Yehia, H. M. **Rigid body dynamics. A Lagrangian approach, Advances in Mechanics and Mathematics, V. 45**. Birkhäuser, 2022.
- 13 Landau,L. D.; Lifshitz, E. M. **Mechanics, Volume 1, third edition**. Elsevier, 1976.
- 14 Arnold, V. I. **Mathematical methods of classical mechanics, 2nd edn**. Springer, New York, NY, 1989.
- 15 Borisov, A. V.; Mamaev, I. S. **Rigid body dynamics**.Berlin, Boston : Higher Education Press and Walter de Gruyter GmbH. 2019
- 16 Holm, D. D.; Marsden, J. E.; Ratiu, T. S. **The Euler-Poincare equations and semidirect products with applications to continuum theories**. Advances in Mathematics 137, 1-81, 1998 Article No. AI981721; arXiv:chao-dyn/9801015.
- 17 Deriglazov, Alexei A. **Lagrangian and Hamiltonian formulations of asymmetric rigid body, considered as a constrained system**. Eur. J. Phys. 44, 2023, 065001; arXiv:2301.10741.

- 18 Deriglazov, Alexei A. **Geodesic motion on the symplectic leaf of $SO(3)$ with distorted $e(3)$ algebra and Liouville integrability of a free rigid body.** Eur. Phys. J. C, 2023, 83:265; arXiv:2302.04828.
- 19 Deriglazov, Alexei A. **Euler-Poisson equations of a dancing spinning top, integrability and examples of analytical solutions.** Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 127, 2023, 107579; arXiv:2307.12201.
- 20 Deriglazov, Alexei A. **Dynamics on a submanifold: intermediate formalism versus Hamiltonian reduction of Dirac bracket, and integrability.** Eur. Phys. J. C, 2024, 84:311, arXiv:2309.05151.
- 21 Suslov, G. K. **Theoretical mechanics, (Third Ed., N. N. Buchholz, V. K. Holtzman (eds.).** Moscow; Leningrad, OGIZ Publ, Russian, 1946.
- 22 Olver, P. J. **Applications of Lie groups to differential equations.** Springer, New York, NY, 1986.
- 23 Dirac, P. A. M. **Lectures on quantum mechanics.** Yeshiva University, New York, NY, 1964.
- 24 Gitman, D. M.; Tyutin, I. V. **Quantization of fields with constraints.** Springer, Berlin, 1990.
- 25 Deriglazov, Alexei A. **Classical Mechanics: Hamiltonian and Lagrangian formalism, 2nd edition.** Springer, New York, 2017.
- 26 Arnold, V.I., Kozlov, V. V.; Neishtadt, A. I. **Mathematical aspects of classical and celestial mechanics, in: V.I. Arnold, Dynamical systems III.** Springer-Verlag, 1999.
- 27 Hanson, A. J.; Regge, T. **The relativistic spherical top.** Annals of Physics, 87 (2), 498-566, 1974.
- 28 Sudarshan, E. C. G.; Mukunda, N. **Classical mechanics: a modern perspective.** John Wiley, New-York, 1974.
- 29 Deriglazov, Alexei A.; Ramírez, W. G. **Recent progress on the description of relativistic spin: vector model of spinning particle and rotating body with gravimagnetic moment in general relativity.** Advances in Mathematical Physics. V. Article ID 7397159; arXiv:1710.07135, 2017.
- 30 Rubin, H.; Ungar, P. **Motion under a strong constraining force.** Communications on the pure and applied mathematics, 10 N 1, 65-87, 1957.
- 31 Bolsinov, A. V.; Fomenko, A. T. **Integrable Hamiltonian systems.** Charman and Hall/CRC, 2004.
- 32 Dubrovin, B. A.; Krichever, I. M.; Novikov, S. P. **Integrable Systems I, in: V. I. Arnold, Dynamical systems III.** Springer Verlag, 2001
- 33 Deriglazov, Alexei A. **Basic notions of Poisson and symplectic geometry in local coordinates, with applications to Hamiltonian systems.** Universe, 8, 536; arXiv:2210.09131, 2022.

- 34 Petrovski, I. G. **Ordinary differential equations**. Dover, 1973
- 35 Shilov, G. E. **Linear Algebra**. Dover, New-York, 1977.
- 36 Kowalevski, S. **Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe**. Acta Math., 12 (2), 177-232, 1889.
- 37 Perelomov, A. M. **Kovalevskaya top-an elementary approach**. arXiv:math-ph/0111025.
- 38 Deriglazov, Alexei A. **Nonminimal spin-field interaction of the classical electron and quantization of spin**. Physics of Particles and Nuclei Letters, 17 5, 738-743; arXiv:2001.01294, 2020.
- 39 Deriglazov, Alexei A. **Massless polarized particle and Faraday rotation of light in the Schwarzschild spacetime**. Phys. Rev. D 104, 025006; arXiv:2103.07794, 2021.
- 40 Corrêa Silva, Guilherme **General solution to Euler-Poisson equations of a free symmetric body by direct summation of power series**. arXiv:2407.10326.
- 41 Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. **The classical theory of fields, Volume 2**. Pergamon Press, Oxford, 1980.
- 42 Jackson, J. D. **Classical electrodynamics**. John Wiley, New-York, 1975.
- 43 Griffiths, D. J. **Introduction to electrodynamics**. Pearson Addison Wesley, New Jersey, 1981.
- 44 Chetaev, N. G. **On the equations of Poincaré**. Prikl. Mat. i Mekh. 5 N 2, 253-262, Russian, 1941.
- 45 Chetaev, N. G. **Theoretical mechanics**. Mir. Publishers, Moscow, 1989.
- 46 Deriglazov, Alexei A. **Comment on the Letter "Geometric Origin of the Tennis Racket Effect" by P. Mardesic, et al**, Phys. Rev. Lett. 125, 064301. arXiv:2302.04190, 2020.
- 47 Grioli, G. **Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla**. Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova, tome 27, p. 90-102, 1957.