



UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Lucas Pereira de Souza

Ação de Euler–Heisenberg generalizada:
Para férmions acoplados a vetor e pseudovetor

Juiz de Fora
2025

Lucas Pereira de Souza

Ação de Euler–Heisenberg generalizada:
Para férmions acoplados a vetor e pseudovetor

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.
Área de concentração: Física

Orientador: Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro

Juiz de Fora
2025

Ficha catalográfica elaborada através do programa de geração automática da Biblioteca Universitária da UFJF, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Souza, Lucas Pereira de.

Ação de Euler-Heisenberg generalizada : Para férmions acoplados a vetor e pseudovetor / Lucas Pereira de Souza. -- 2025. 85 f. : il.

Orientador: Ilya Lvovich Shapiro

Dissertação (mestrado acadêmico) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2025.

1. Teoria quântica de campos. 2. Ação efetiva exata em 1-loop. 3. Mecanismo de Schwinger. 4. Bariogênese. I. Shapiro, Ilya Lvovich, orient. II. Título.

Lucas Pereira de Souza

Ação Generalizada de Euler-Heisenberg: Fermions acoplados a Vetor e Pseudo-vetor

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física. Área de concentração: Física.

Aprovada em 17 de setembro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ilya Lvovich Shapiro - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Dr. Gustavo Pazzini de Brito
Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Dr. Wagno Cesar e Silva
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF)

Prof. Dr. Tibério de Paula Netto
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Juiz de Fora, 17/09/2025.



Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Pazzini de Brito, Usuário Externo**, em 17/09/2025, às 18:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **José Abdalla Helayël Neto, Usuário Externo**, em 17/09/2025, às 18:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wagno Cesar e Silva, Usuário Externo**, em 17/09/2025, às 18:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tibério de Paula Netto, Professor(a)**, em 17/09/2025, às 18:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ilya Chapiro, Membro**, em 17/09/2025, às 19:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no Portal do SEI-Ufjf (www2.ufjf.br/SEI) através do ícone Conferência de Documentos, informando o código verificador **2624405** e o código CRC **99793A2C**.

Dedico este trabalho In Memoriam para minha avó, dona Reilta, cujo nome significou “lar acolhedor, local de paz e tranquilidade”. Sem você, sempre faltará um lugar seguro para voltar.

AGRADECIMENTOS

À meus pais, cujo apoio, amor e carinho foram fundamentais nesta caminhada. Mesmo distantes, vocês sempre estiveram presentes. Muito obrigado por me incentivarem a trilhar este caminho desde pequeno.

À minha amada, Thayla Carvalho, por me dar forças e estar ao meu lado, dividindo o fardo da distância e lutando contra os imprevistos e adversidades.

Ao meu irmão, Luciano Pereira, desejo forças nesta nova etapa da sua vida.

Ao professor Ilya Shapiro, por expandir meu horizonte com tanto conhecimento e problemas interessantes para resolver, que me faltou tempo hábil durante o mestrado para dar conta de aprender tudo direito, como eu gostaria. Agradeço pela inspiração, conselhos e força, bem como por tolerar minha instabilidade.

Aos professores Jorge Mario, Érico, Saulo, Ricardo, Fred, Maikel, Virgílio e tantos outros que marcaram minha jornada.

Aos meus melhores amigos Álvaro, Alan, Iago, Márcio, Murilo e Lucas, da banda Splattered Genocide, que sempre me apoiaram e nutriram essa criatividade, que está sendo tão útil para minha jornada na Física quanto para nossa música extrema.

À Ruan, companhia indispensável neste processo, pois, sem a terapia, eu já teria entrado em colapso e estaria sendo sugado pelo buraco negro da depressão novamente.

À Pedro, um irmão mais novo que ganhei nessa aventura. Obrigado pela parceria que vai desde musculação e Jiu jitsu à Física, pelas discussões, correções e apoio em casa, especialmente neste final de mestrado.

À Gabriel Marcondes, por me explicar seus trabalhos (que inclusive estão citados aqui), e à toda a galerinha de nosso grupo do zap: Vitor, Juliana, Ronan, David e Adriano, cujas discussões interessantíssimas me fazem aprender muito.

Ao Wagno, pelos conselhos e discussões com as quais aprendi tanto, ao Nicolás, por todos os ensinamentos até sobre a vida, ao Riccardo, Samuel, Guilherme, Luis, Thomas, Alicia, Phablo, Lucas e todo o pessoal do nosso grupo.

Ao Luquinhas, que me encaminhou para Juiz de Fora e a todos que me acolheram aqui: À sensei Karol, ao mestre William, Bebezão, Andrezão e toda a galera do Jiu Jitsu (Estarei de volta em breve, não vejo a hora!); à Arthur, Júlio, Guilherme, Antônio, Henrique, Thales e toda a galera do vôlei; à Lucas, Ana Lídia, Carlos Daniel, Matheus, Nicolas, Guilherme, Lorrán, Leandro, Vinycios, Amanda e toda a galera do departamento.

À Universidade Federal de Juiz de Fora e ao Departamento de Física.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, órgão financiador deste mestrado.

"Non est ad astra mollis e terris via." ("Não há caminho suave da terra para as estrelas.")
(SÊNECA. Hercules Furens, l. 437, 1 d.C.).

RESUMO

Nesta dissertação, apresenta-se a construção e análise de uma ação efetiva exata de Euler-Heisenberg em 1 laço, generalizada para férmions acoplados simultaneamente a um campo vetorial e um campo pseudo-vetorial. Utiliza-se a representação de tempo próprio em conjunto com o método de Weisskopf-Landau, que correspondem à implementação de regularização por função Zeta, para obter a expressão exata. Essa abordagem envolve a classificação de alguns subespaços dos parâmetros, seguido da obtenção de solução exata naquele fisicamente relevante, considerando-se aproximação de configurações quasi-estáticas dos campos. Após análise de consistência do resultado, explora-se a anomalia quiral e calcula-se taxas da criação dos pares de partículas para alguns cenários. Ao final, a ação efetiva é aplicada para investigar um modelo didático de universo primordial, onde postula-se que um campo pseudo-vetorial massivo poderia ser instrumental para a bariogênese, explicando assim a assimetria bariônica observada no universo atual, conforme demonstrado por dados da Planck Collaboration. Neste cenário, são feitas estimativas quanto à intensidade de campo necessária e seu valor atual após expansão do universo, destacando a viabilidade potencial do modelo proposto.

Palavras-chave: Ação efetiva de Euler-Heisenberg; Campo pseudo-vetorial massivo; Criação de Partículas.

ABSTRACT

In this dissertation, a comprehensive analysis of an one-loop exact Euler-Heisenberg effective action is presented, specifically tailored for fermions coupled simultaneously to both a vector field and a axial vector field. Utilizing the proper-time representation alongside the Weisskopf-Landau method, which corresponds to the implementation of Zeta function regularization, to derive the results. The chosen approach involves classifying some parameter subspaces and arriving at an exact solution within the physically relevant subspace, while focusing on an approximation of quasi-static field configurations. Afterwards, following an assessment on the consistency of the findings, the implications of chiral anomaly are investigated and particle pair creation rates are calculated under different assumptions. Furthermore, the effective action framework is applied to a toy model of the early universe, positing that a massive pseudo-vector field could be instrumental in baryogenesis, thereby accounting for the observed baryonic asymmetry in the present-day universe as shown by data from the Planck Collaboration. This analysis includes estimates of the necessary field strength and its current value, highlighting the potential viability of the proposed model.

Keywords: Euler-Heisenberg effective action; Massive axial vector field; Particle creation.

Lista de Figuras

Figura 1 – Diagrama de Polarização do Vácuo	26
Figura 2 – Diagramas Triangulares	41
Figura 3 – Probabilidade de Transição de Vácuo na QED	48
Figura 4 – Probabilidades de Transição de Vácuo	49

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TE	Teoria Efetiva
QED	Eletrodinâmica Quântica
QHO	Oscilador Harmônico Quântico

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	14
2.1	Ação efetiva na eletrodinâmica quântica	14
2.2	Representação do tempo próprio de Fock–Schwinger	17
2.3	Método de Weisskopf–Landau	20
2.3.1	Regularização por função Zeta	20
2.3.2	Redução do tensor eletromagnético à forma normal	21
2.3.3	Diagonalização do termo de spin	23
2.3.4	Do Hessiano a OHQs e os níveis de Landau	24
2.4	Ação de Euler–Heisenberg	25
2.4.1	Checagem de consistência com o método perturbativo	26
3	AÇÃO DA TEORIA ELETRO-AXIAL	28
3.1	Análise de consistência	31
3.2	Ação de Euler–Heisenberg generalizada	35
3.3	Análise perturbativa	39
4	RESULTADOS E APLICAÇÕES	41
4.1	Anomalia quiral	41
4.2	Criação de partículas	46
4.3	Assimetria bariônica	49
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	55
5.1	Síntese e implicações	55
5.2	Limitações do estudo	57
5.3	Perspectivas futuras e problemas em aberto	58
	REFERÊNCIAS	60
	APÊNDICE A – Notação, convenções e definições básicas	71
	APÊNDICE B – MATRIZES DE DIRAC	78
	APÊNDICE C – EXPANSÃO DA AÇÃO DE EULER–HEISENBERG	81
	APÊNDICE D – REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL	83

1 INTRODUÇÃO

Teorias Efetivas (TEs) constituem uma das ferramentas mais poderosas e versáteis da teoria quântica de campos, por permitirem descrever com precisão as correções quânticas sem que haja a necessidade de conhecer a teoria fundamental em detalhes. O objeto central deste formalismo é a Ação Efetiva (Γ) obtida via integração funcional sobre os graus de liberdade perturbados em relação a configurações (meta-)estáveis (ou mínimas) destes graus, denominados “configurações de fundo”, da teoria subjacente. Em linguagem diagramática, ela codifica os efeitos das correções de laços, servindo como uma ação clássica efetiva que incorpora informações sobre as flutuações quânticas.

O sucesso desta abordagem é histórico, tendo permitido não apenas previsões extremamente precisas, como do momento magnético anômalo do elétron, mas também a obtenção sistemática de fenômenos não perturbativos. Um exemplo paradigmático é o da eletrodinâmica quântica (QED), na qual a ação efetiva de Euler–Heisenberg (HEISENBERG; EULER, 1936) descreve desde efeitos de polarização do vácuo em regiões de campos eletromagnéticos intensos, como aqueles encontrados em pulsares e laboratórios de altas energias (DUNNE, 2005), ao espalhamento elástico fóton-fóton ($\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$) observado no LHC (ATLAS COLLABORATION, 2017), cuja medição representa uma verificação direta da não linearidade induzida sobre a Eletrodinâmica pelas flutuações quânticas do vácuo. Além disso, outras medições, como a birrefringência do vácuo em campos magnéticos intensos (DINU; KING; TORGRIMSSON; ZEPF, 2022), continuam a testar os limites das previsões baseadas em TEs.

Outra grande vantagem das ações efetivas é a possibilidade de obter soluções analíticas ou exatas em certos regimes, como o de campos constantes ou lentamente variantes, onde a integração funcional pode ser realizada explicitamente, resultando em expressões fechadas para a ação efetiva. Essas soluções são particularmente úteis na compreensão da instabilidade do vácuo e da geração dos pares de partículas; como demonstrado em tratamentos pioneiros (WEISSKOPF, 1936; SCHWINGER, 1951) da Ação efetiva de Euler–Heisenberg que embasaram previsões anteriores obtidas através de aproximação WKB (SAUTER, 1931); além de permitirem analisar a possibilidade de que uma teoria venha a ser renormalizável ainda que ela não aparente ser via tratamento perturbativo (GIES; SCHIRRMUSTER, 2024).

As TEs podem ser aplicadas em qualquer teoria quântica de campos. Em particular, o estudo de extensões da QED por meio da introdução de campos axiais na derivada covariante tem atraído considerável interesse nas últimas décadas, em virtude do surgimento natural em contextos diversos, desde sistemas em matéria condensada (CHEN; HU; LIN, 2018; FERREIROS; KEDEM; BERGHOLTZ; BARDARSON, 2019; SEKINE; NOMURA, 2021), óptica (ALEXANDRE; ELLIS; MILLINGTON; SEYNAEVE, 2019) até

gravitação quântica (HEHL; OBUKHOV, s.d.; HULL; TOWNSEND, 1986; SHAPIRO, 2002) e cosmologia (KAMADA; LONG, 2016; BENEVIDES; DABHOLKAR; KOBAYASHI, 2018; BRANDENBERGER; FRÖHLICH, 2021). Porém, a presença de um pseudo-vetor modifica as simetrias da teoria e induz novas dificuldades (BERREDO–PEIXOTO; HELAYËL–NETO; SHAPIRO, 2000; GHASEMKHANI; RAHMANPOUR; BUFALO; SOTO, 2022), como violação de Lorentz (FURTADO; MARIZ, 2014; KOSTELECKÝ; LEHNERT; SCHRECK; SERADJEH, 2025a) e efeitos anômalos (DOBADO; MAROTO, 1996; M. RASULIAN; TORABIAN, 2023; NASCIMENTO; PAGANELLY; PETROV; PORFIRIO, 2025). Assim sendo, tem-se buscado obter soluções exatas para aprofundar o entendimento destes sistemas (YAMASHITA *et al.*, 2017; COPINGER; HATTORI; YANG, 2023b; COPINGER; HATTORI; YANG, 2023a), o que vem evidenciando fenomenologias inéditas, como novos canais de criação de partículas (MAROTO, 1999; COPINGER; PU, 2020).

Assim, aqui será feita uma extensão das análises anteriores, obtendo uma ação efetiva generalizada e as implicações em seu domínio de validade. Para isso, esta dissertação será estruturada da seguinte maneira: Primeiro, no capítulo 2, será revisada a construção da ação de Euler-Heisenberg para a QED. Depois a teoria Eletro-Axial será discutida (capítulo 3), onde uma solução geral sob determinadas condições será construída, prosseguindo com a discussão dos resultados previstos, no capítulo 4, concluindo, por fim, no capítulo 5.

Até onde alcança a revisão bibliográfica realizada pelo autor (que incluiu artigos e pre-prints publicados até 25 de setembro de 2025 em bases como arXiv, INSPIRE-HEP, jornais da APS, dentre outros), nesta dissertação serão apresentados os seguintes resultados originais: (i) uma expressão fechada geral para a ação efetiva de Euler-Heisenberg de férmions acoplados simultaneamente a um campo vetorial e outro pseudo-vetorial em configurações quasi-estáticas (invariantes constantes); (ii) a diagonalização explícita do Hessiano funcional com classificação dos subespaços de parâmetros relevantes para estabilidade e realização em sistemas físicos; (iii) uma nova expressão para a taxa de criação de pares no caso de campo eletromagnético combinado com um vetor axial propagante; e (iv) um modelo cosmológico didático que explora a viabilidade do pseudo-vetor massivo como explicação da bariogênese, com comentários sobre a possibilidade deste modelo também ser aplicável aos problemas da CP forte e energia escura ao final.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo a construção da Ação de Euler-Heisenberg será revisada, fornecendo um ferramental sólido que servirá de base para o desenvolvimento e análise, nos próximos capítulos, de uma ação efetiva generalizada para uma modificação da QED à partir da inclusão de um campo axial acoplado a um férmion via derivada covariante. Isto será feito com base na representação do tempo próprio de Fock–Schwinger e aplicação do traço funcional através dos níveis de Weisskopf-Landau.

Para isso, o primeiro passo será revisar a construção da ação efetiva na eletrodinâmica quântica usual para um campo eletromagnético de fundo.

2.1 Ação efetiva na eletrodinâmica quântica

A QED é descrita pela ação

$$\begin{aligned} S_{\text{QED}} &= S_{\text{Maxwell}} + S_{\text{Dirac}}[A], \\ &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi} (i\mathcal{D} - m) \psi \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde unidades naturais ($\hbar = c = 1$) foram assumidas, $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor de Faraday, A_μ é o potencial eletromagnético e ψ é um campo fermiônico de Dirac, cuja interação com o campo eletromagnético se dá através da derivada covariante (ou operador de Dirac),

$$\mathcal{D} := \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu), \quad (2.2)$$

em que também fora definida a notação “Slash” de Feynman.

Tomando o campo eletromagnético como externo, o funcional gerador das funções de Green fermiônicas na presença do campo externo e normalizadas em relação à ausência deste é definido como

$$Z[A, \bar{\eta}, \eta] := e^{iS_{\text{Maxwell}}} \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS_{\text{Dirac}}[A] + i \int d^4x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS_{\text{Dirac}}[A=0]}} = e^{iW[A, \bar{\eta}, \eta]}, \quad (2.3)$$

onde $\bar{\eta}$ e η são fontes clássicas dos espinores de Dirac e $W[A, \bar{\eta}, \eta]$ é o funcional gerador das funções de Green conectadas dos fermions¹. Aqui opta-se por normalizar o funcional desta maneira, pois o objetivo é obter uma ação efetiva apenas para o campo eletromagnético de fundo. Para isso, deve-se remover as contribuições puramente fermiônicas – isto é, aquelas que existiriam mesmo na ausência de A_μ – de modo que reste somente o efeito quântico dos elétrons induzido pelo campo externo.

Quando $\psi = \Psi[A, \eta]$ e $\bar{\psi} = \bar{\Psi}[A, \bar{\eta}]$ são campos que minimizam a ação de Dirac com fontes,

$$S[A, \bar{\psi}, \psi] = S_{\text{Dirac}}[A] + i \int d^4x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta), \quad (2.4)$$

¹ De acordo com as definições e construções no livro dos autores Buchbinder e Shapiro (2021).

o campo fermiônico satisfaz as equações de movimento

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}} S \Big|_{\bar{\psi}=\bar{\Psi}, \psi=\Psi} = 0 &\implies \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}} S_{\text{Dirac}}[A] \Big|_{\bar{\psi}=\bar{\Psi}, \psi=\Psi} = -\eta, \\ S \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi} \Big|_{\bar{\psi}=\bar{\Psi}, \psi=\Psi} = 0 &\implies S_{\text{Dirac}}[A] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi} \Big|_{\bar{\psi}=\bar{\Psi}, \psi=\Psi} = -\bar{\eta}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que a seta sobre a derivada funcional simboliza o sentido de aplicação². Isto implica que, em caso de funcionais bem comportados, é possível expressar a fonte η como um funcional em Ψ e A , isto é, $\eta[A, \Psi]$ e $\bar{\eta}[A, \bar{\Psi}]$, definidos com base no resultado em (2.5).

Assim, pode-se perturbar os espinores ao redor desta configuração Ψ , que se trata do campo de fundo, ou seja,

$$\psi \rightarrow \Psi + \chi \quad (2.6)$$

e expandir ambas as ações de interesse em série ao redor de Ψ :

$$\begin{aligned} S &= S[A, \Psi, \bar{\Psi}] + \int d^4x d^4y \bar{\chi}(x) \mathcal{H}(x, y) \chi(y), \\ S_{\text{Dirac}}[A=0] &= S_{\text{Dirac}}[\bar{\Psi}, \Psi] - \int d^4x \left[\bar{\eta}' \chi + \bar{\chi} \eta' - \int d^4y \bar{\chi}(x) \mathcal{H}_0(x, y) \chi(y) \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde o Hessiano de S fora nomeado como $\mathcal{H}$, isto é,

$$\mathcal{H}(x, y) := \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} S \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(y)} \Big|_{\bar{\psi}=\bar{\Psi}, \psi=\Psi} = - (i \not{D} - m)_y \delta^4(x - y), \quad (2.8)$$

e fora definido

$$\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}|_{A=0}, \quad \eta' := \eta - ie \not{A} \Psi \text{ e } \bar{\eta}' := \bar{\eta} + ie \bar{\Psi} \not{A}. \quad (2.9)$$

Observe que ambas as expressões são exatas, dada a natureza de χ e $\bar{\chi}$ como variáveis de Grassmann e $S = \int \bar{\psi} \mathcal{H} \psi + \mathcal{O}(\bar{\psi}^2, \psi^2)$, porém se o campo eletromagnético não fosse externo, haveriam termos de ordens maiores, devido a interações entre fótons e férmions virtuais. O funcional gerador se torna, então,

$$Z = \frac{\exp \left[i S_{\text{Max+int}} + i \int d^4x \left(\bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta \right) \right] \int \mathcal{D} \bar{\chi} \mathcal{D} \chi \exp \left[i \int d^4x d^4y \bar{\chi}(x) \mathcal{H}(x, y) \chi(y) \right]}{\int \mathcal{D} \bar{\chi} \mathcal{D} \chi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\bar{\eta}' \chi + \bar{\chi} \eta' - \int d^4y \bar{\chi}(x) \mathcal{H}_0(x, y) \chi(y) \right] \right\}}, \quad (2.10)$$

onde

$$S_{\text{Max+int}} := \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + ie \bar{\Psi} \not{A} \Psi \right]. \quad (2.11)$$

A ação efetiva $\Gamma[A, \bar{\Psi}, \Psi]$ é definida à partir de (2.10),

$$e^{i\Gamma[A, \bar{\Psi}, \Psi]} = \frac{e^{i S_{\text{Max+int}}} \int \mathcal{D} \bar{\chi} \mathcal{D} \chi \exp \left[i \int d^4x d^4y \bar{\chi}(x) \mathcal{H}(x, y) \chi(y) \right]}{\int \mathcal{D} \bar{\chi} \mathcal{D} \chi \exp \left\{ -i \int d^4x \left[\bar{\eta}' \chi + \bar{\chi} \eta' - \int d^4y \bar{\chi}(x) \mathcal{H}_0(x, y) \chi(y) \right] \right\}}, \quad (2.12)$$

² Para mais detalhes, veja a construção feita por Berezin e Kirillov (1987).

de forma que

$$W[A, \bar{\Psi}, \Psi] = \Gamma[A, \bar{\Psi}, \Psi] + \int d^4x \left(\bar{\eta} \Psi + \bar{\Psi} \eta \right). \quad (2.13)$$

É possível verificar prontamente que Ψ também se trata do campo médio (quando $A \neq 0$), pois, da definição do funcional gerador e sua relação com a matriz de espalhamento,

$$\frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\eta}} W = \frac{1}{iZ} \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\eta}} Z, \implies \Psi = \langle \Omega | \psi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{\text{int}} + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta)} | \Omega \rangle, \quad (2.14)$$

onde assume-se ordenamento temporal implicitamente e denota-se o estado de vácuo interagente na presença de um campo eletromagnético externo A_μ como $|\Omega\rangle$, que satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\Omega\rangle = |A\rangle := |A_\mu\rangle \otimes |\psi = 0, \bar{\psi} = 0\rangle. \quad (2.15)$$

O mesmo pode ser demonstrado para $\bar{\Psi}$, o que permite concluir $\langle \chi \rangle_\Omega = \langle \bar{\chi} \rangle_\Omega = 0$. Note que

$$\lim_{\eta, \bar{\eta} \rightarrow 0} \Psi = \langle \psi e^{iS_{\text{int}}} \rangle_\Omega = 0, \quad (2.16)$$

de maneira que (2.13) se reduz a

$$W[A, \bar{\Psi}, \Psi] \big|_{\bar{\eta}=\eta=0} = \Gamma[A, \bar{\Psi}, \Psi] \big|_{\bar{\eta}=\eta=0} = S_{\text{Maxwell}} + \bar{\Gamma}[A], \quad (2.17)$$

ficando evidente que $\bar{\Gamma}[A]$ codifica as correções quânticas advindas de flutuações do vácuo fermiônico. Chama-se $\Gamma[A, \eta, \bar{\eta}]$ de “ação efetiva” por este satisfazer a mesma equação de movimento que (2.5), isto é,

$$\frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\Psi}} \Gamma = \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\Psi}} W - \eta - \int d^4x \left(\frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\Psi}} \bar{\eta} \right) \Psi = -\eta, \quad (2.18)$$

pois

$$\frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\Psi}(x)} W = \int d^4y \left[\frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\eta}(y)} W \right] \left[\frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\Psi}(x)} \bar{\eta}(y) \right] = - \int d^4y \left(\frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\Psi}} \bar{\eta} \right) \Psi, \quad (2.19)$$

em outras palavras, ele funciona como a ação efetiva clássica, porém contabilizando as correções quânticas para a ação original.

Foque agora nas correções quânticas em (2.17). Prosseguindo com a integral funcional e tomando o limite de fontes nulas, obtém-se

$$e^{i\bar{\Gamma}[A]} = \frac{\det(\mathcal{H})}{\det(\mathcal{H}_0)}, \quad (2.20)$$

onde

$$\int d^4z \mathcal{H}(x, z) \mathcal{H}^{-1}(z, y) = \delta(x - y) \implies \mathcal{H}^{-1}(x, y) := \left(\frac{1}{i\not{D} - m} \right)_{x,y}. \quad (2.21)$$

Segue então que

$$\bar{\Gamma}[A] = -i \text{Tr} \ln \left(\frac{i \not{D} - m}{i \not{\partial} - m} \right). \quad (2.22)$$

O tratamento deste traço funcional pode ser feito de algumas maneiras, mas aqui serão adotados alguns dos que costumam ser mais utilizados, isto é, para cálculo da solução exata será utilizada a representação do tempo próprio de Fock-Schwinger, enquanto a abordagem perturbativa será invocada para checagem de consistência dos resultados. Ambos serão revisados na próxima seção.

2.2 Representação do tempo próprio de Fock-Schwinger

A forma mais comum de lidar com o traço funcional na ação efetiva é, sem sombra de dúvidas, o tratamento perturbativo ³, onde manipula-se (2.22) para obter um operador relacionado à função de Green do campo livre seguido da expansão deste, isto é,

$$\bar{\Gamma}[A] = -i \ln \left[1 - (i \not{\partial} - m)^{-1} e \not{A} \right] = i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-e)^k}{k} \text{Tr} \left[\frac{1}{i \not{\partial} - m} \not{A} \right]^k = \sum_k \Gamma^{(k)}[A], \quad (2.23)$$

costumando-se prosseguir a análise no espaço dos momentos, onde (2.21) será dado por

$$(i \not{\partial} - m)^{-1}_{x,y} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^{4+\varepsilon} q}{(2\pi)^{4+\varepsilon}} \mu^\varepsilon e^{-iq \cdot (x-y)} \frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (2.24)$$

onde será assumida a regularização dimensional, de forma que μ^ε corresponde a uma escala de energia arbitrária ⁴. A análise dos termos das primeiras ordens será feita explicitamente mais tarde.

O foco aqui, no entanto, será a obtenção de uma solução exata. Para isso, primeiro é preciso escrever (2.22) de maneira mais conveniente: Assumindo uma regularização que mantenha as propriedades do traço e logaritmo, como a dimensional, pode-se fazer

$$\text{Tr} \ln (i \not{\partial} - m) = \text{Tr} \ln [(\gamma^5)^2 (i \not{\partial} - m)] = \text{Tr} \ln (-i \not{\partial} - m), \quad (2.25)$$

onde $\gamma_5 = \gamma^5 := i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ e $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, conforme descrito no apêndice B. Portanto, outra maneira de escrever o denominador em (2.22) é

$$\text{Tr} \ln (i \not{\partial} - m) = \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln (i \not{\partial} - m) + \ln (-i \not{\partial} - m)] = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\not{\partial}^2 + m^2). \quad (2.26)$$

O mesmo procedimento pode ser feito para o numerador, resultando em

$$\bar{\Gamma}[A] = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left(\frac{\not{D}^2 + m^2}{\not{\partial}^2 + m^2} \right). \quad (2.27)$$

³ Cujas construção aqui seguida será a do livro dos autores Dobado, Gomez-Nicola, Maroto e Pelaez (1997).

⁴ Para mais detalhes, recomenda-se a leitura do livro escrito pelo Collins (1984).

Quando escrito desta maneira, pode-se invocar a representação do tempo próprio de Fock-Schwinger, nomeado em homenagem a seus primeiros utilizadores (FOCK, 1937; SCHWINGER, 1951), que é construída com base na utilização dos truques

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \left[e^{i\tau(b+i\varepsilon)} - e^{i\tau(a+i\varepsilon)} \right], \quad (2.28)$$

para a ação efetiva, e

$$\frac{a}{b} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty d\tau \left[e^{i\tau(b+i\varepsilon)} - e^{i\tau(a+i\varepsilon)} \right], \quad (2.29)$$

que será utilizado para obter a função de Green quando necessário, cuja simplicidade esconde consequências interessantes, como a de permitir construir analogias com a Mecânica Quântica não relativística, como será visto a seguir.

Utilizando o resultado

$$\not{D}^2 = \frac{1}{2} (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]) D_\mu D_\nu = D^2 - \frac{i}{2} \sigma^{\mu\nu} [D_\mu, D_\nu] = D^2 + \frac{e}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

nesta representação, é possível deduzir

$$\bar{\Gamma}[A] = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-i\tau m^2} \text{Tr} \left\{ e^{-i\tau [(-iD)^2 - \frac{e}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}]} - e^{-i\tau (-i\partial)^2} \right\}, \quad (2.31)$$

em que considera-se $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\tau\varepsilon}$ presente, embora não seja escrito explicitamente para simplificar a notação, até que o contrário seja dito. Note então que o Hessiano assume uma estrutura similar ao de um campo escalar, visto que

$$\mathcal{H}_{\text{Klein-Gordon}} = \partial^2 - m, \quad (2.32)$$

porém com um termo de spin $F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$ adicionado. Passando para o formalismo de Heisenberg, onde

$$-i\partial \langle x | \Psi \rangle \rightarrow \langle x | p | \Psi \rangle = p(x) \Psi(x), \quad \text{com} \quad [x^\mu, p_\nu] = i\delta^\mu_\nu, \quad (2.33)$$

normalizados de acordo com

$$\langle x | 0 \rangle = 1 \quad \text{e} \quad p_\mu | 0 \rangle = 0, \quad (2.34)$$

o que permite definir

$$-iD \langle x | \Psi \rangle \rightarrow \langle x | \Pi | \Psi \rangle := \langle x | (p - eA) | \Psi \rangle, \quad (2.35)$$

pode-se notar que as exponenciais são como operadores de evolução temporal, onde τ é uma espécie de “tempo próprio”, o que justifica o nome do método, porém com unidades do inverso da massa ao quadrado, isto é, $[\tau] = [m]^{-2}$, onde os Hessianos subtraídos da massa em (2.31) exercem o papel do “Hamiltonianos” de uma Mecânica

Quântica “não relativística” em 5 dimensões (as quatro usuais mais τ), de forma que eles satisfazem até mesmo uma equação análoga à de Schrödinger ⁵,

$$i\partial_\tau \langle y; 0 | x; \tau \rangle = \langle y; 0 | \mathcal{H} | x; \tau \rangle, \quad (2.37)$$

onde $\partial_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}$, com os traços funcionais se tornando integrais do limite de coincidência dos propagadores ⁶ correspondentes a cada “Hamiltoniano”,

$$\begin{aligned} \text{Tre}^{-i\tau\mathcal{H}} &= \int d^4x \text{tr}_{\text{Dirac}} \langle x | e^{-i\tau\mathcal{H}} | x \rangle = \int d^4x \text{tr}_{\text{Dirac}} \langle x; 0 | x; \tau \rangle \\ &= \int d^4x \left(\lim_{y \rightarrow x} \text{tr}_{\text{Dirac}} \langle y; 0 | x; \tau \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Assim, o termo em (2.38) pode ser interpretado como relacionado a contribuições de partículas que propagam em uma trajetória de laço ⁷ durante o intervalo $\Delta\tau$ correspondente aos limites da integral em (2.31).

Neste contexto, o segundo termo em (2.31) corresponde a um propagador da partícula livre, visto que o Hessiano é proporcional à unidade em componentes fermiônicas ($\mathcal{H}_0 = p^2 \mathbf{1}_{\text{Dirac}}$), podendo ser calculado diretamente na representação de momentos, isto é,

$$\langle y; 0 | x; \tau \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \langle y; 0 | p \rangle \langle p | x; \tau \rangle, \quad (2.39)$$

onde

$$\langle p | x; \tau \rangle := e^{-i(\tau p^2 + p \cdot x)}, \quad (2.40)$$

culminando em

$$\begin{aligned} \langle y; 0 | x; \tau \rangle &= \frac{i}{(2\pi)^4} \prod_{\mu=0}^3 \int_{-\infty}^{\infty} dp_\mu e^{i[\tau p_\mu p^\mu - p_\mu(y^\mu - x^\mu)]}, \\ &= \frac{i}{(2\pi)^4} \left\{ e^{-i\frac{(y-x)^2}{4\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{i\left[p\sqrt{\tau} - \frac{(y-x)}{2\sqrt{\tau}}\right]^2} \right\}^4 = i(4\pi\tau)^{-2} e^{-i\frac{(y-x)^2}{4\tau}}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

seguido da tomada do limite de coincidência e traço,

$$\text{Tre}^{-i\tau p^2} = \lim_{y \rightarrow x} \left[i(4\pi\tau)^{-2} e^{-i\frac{(y-x)^2}{4\tau}} \right] \text{tr}_{\text{Dirac}}(\mathbf{1}) = \frac{i}{(2\pi\tau)^2}, \quad (2.42)$$

⁵ De maneira mais geral, se feita uma rotação de Wick no tempo próprio τ e no tempo físico t , obtém-se uma equação de calor em 5 dimensões (sendo 4 “espaciais”) com fontes (exceto quando o Hessiano é de partícula não massiva livre),

$$\partial_\tau K(y; 0, x; \tau) = \mathcal{H}K(y; 0, x; \tau), \quad (2.36)$$

onde $K(y; 0, x; \tau) := \langle y; 0 | x; \tau \rangle$, justificando o título “Heat-Kernel method” muito utilizado na literatura.

⁶ definidos como no livro do Sakurai (1994).

⁷ O que motiva a abordagem semi-clássica através do formalismo da linha de mundo, onde o Hessiano é reescrito em termos da função de mundo do Synge (1960).

visto que $\text{tr}_{\text{Dirac}}(\mathbf{1}) = 4$.

O termo interagente, por sua vez, deve ser tratado com “carinho especial”, o que será feito na próxima seção.

2.3 Método de Weisskopf–Landau

Novamente, existem algumas maneiras diferentes de lidar com o limite de coincidência do propagador da partícula interagente neste contexto e em outros (como em espaços curvos ⁸), podendo-se inclusive resolver diretamente a equação (2.37) para obter o propagador e tomar o limite de coincidência logo em seguida ⁹.

Aqui, no entanto, a analogia entre o Hessiano e um Hamiltoniano de Mecânica Quântica não relativística será explorada para tomar o traço em sua base ortonormal completa de auto-estados ¹⁰ $|n, \lambda\rangle$ (com autovalores $E_{n,\lambda}$), isto é,

$$\mathcal{H} |n, \lambda\rangle = E_{n,\lambda} |n, \lambda\rangle, \quad (2.44)$$

onde λ é o autovalor de spin. Isto implica em

$$\begin{aligned} \int d^4x \langle x | e^{-i\tau\mathcal{H}} | x \rangle &= \sum_{n,\lambda} \sum_{n',\lambda'} \int d^4x \langle x | n', \lambda' \rangle \langle n', \lambda' | e^{-i\tau\mathcal{H}} | n, \lambda \rangle \langle n, \lambda | x \rangle \\ &= \sum_{n,\lambda} \int d^4x |\Psi_{n,\lambda}(x)|^2 e^{-iE_{n,\lambda}\tau} = \sum_{n,\lambda} e^{-iE_{n,\lambda}\tau}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

em que as autofunções são dadas por

$$\Psi_{n,\lambda}(x) = f_n(x)\varphi_\lambda, \quad (2.46)$$

sendo $f_n(x)$ uma função de x^μ , enquanto φ_λ é um vetor de Dirac correspondente a um dos autovalores de spin $\lambda = \pm 1/2$ na direção z .

2.3.1 Regularização por função Zeta

Na prática, após rotação de Wick no tempo próprio, $\tau \rightarrow -i\tau$, a integral funcional aqui buscada, se resume então a

$$\det \mathcal{H} = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} \sum_n e^{-\tau E_n} = \prod_n E_n, \quad (2.47)$$

⁸ Veja, por exemplo, os artigos escritos por Avramidi (1995), Vassilevich (2003) e Ivanov e Kharuk (2020).

⁹ Como feito originalmente em Schwinger (1951), que hoje em dia costuma ser chamado de “re-summation method”, visto que, mais rigorosamente falando, este processo consiste de expandir as expressões em série, resolvê-las a cada ordem e depois somá-las novamente para obter uma forma fechada.

¹⁰ Que, portanto, satisfaz

$$\sum_{n,\lambda} |n, \lambda\rangle \langle n, \lambda| = \mathbf{1}. \quad (2.43)$$

onde E_n são os autovalores em (2.44). Porém, seja a função gama definida como

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} e^{-\tau}, \quad (2.48)$$

note então que, fazendo $\tau \rightarrow E_n \tau$, obtém-se

$$\Gamma(s) = E_n^s \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} e^{-E_n \tau}, \quad (2.49)$$

de maneira que é possível definir a função zeta

$$\zeta_{\mathcal{H}}(s) := \sum_n \frac{1}{E_n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty d\tau \tau^{s-1} \sum_n e^{-E_n \tau} = \sum_n e^{-s \ln(E_n)}, \quad (2.50)$$

cuja derivada será

$$\frac{d}{ds} \zeta_{\mathcal{H}} = - \sum_n \ln(E_n) e^{-s \ln(E_n)}, \quad (2.51)$$

em especial, quando $s \rightarrow 0$, então

$$\left. \frac{d}{ds} \zeta_{\mathcal{H}} \right|_{s=0} = - \sum_n \ln(E_n) = \ln \det(\mathcal{H}) \implies \det(\mathcal{H}) = e^{-\left. \frac{d}{ds} \zeta_{\mathcal{H}} \right|_{s=0}}, \quad (2.52)$$

isto é, ao adotar a combinação destes métodos, o que está sendo feito é a regularização por função zeta. Este método é vantajoso por permitir regularizar $\mathcal{H}$ mesmo se este não for Hermitiano, bastando que este não seja degenerado (i.e., é preciso que seja diagonalizável), sendo necessário apenas calcular

$$\det(\mathcal{H}) = \sqrt{\det \mathcal{H} \mathcal{H}^\dagger} = e^{-\frac{1}{2} \left. \frac{d}{ds} \zeta_{\mathcal{H} \mathcal{H}^\dagger} \right|_{s=0}}, \quad (2.53)$$

como será feito no próximo capítulo.

2.3.2 Redução do tensor eletromagnético à forma normal

Soluções exatas só são possíveis para algumas configurações específicas do campo, seja ele eletromagnético (SCHWINGER, 1951; NIKISHOV; RITUS, 1964; DUNNE; SCHUBERT, 2001, 2002; KIM; LEE; YOON, 2008; EDNÉN; GASENZER; KIMURA, 2021) ou não abeliano (OZAKI; ARAI; HATTORI; ITAKURA, 2015), portanto aqui será estudado o caso mais simples, correspondente a campos eletromagnéticos constantes (ou lentamente variáveis), em que pode-se partir do calibre de Fock–Schwinger ¹¹,

$$A_\mu = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} x^\nu, \quad (2.54)$$

que satisfaz

$$x^\mu A_\mu = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (2.55)$$

¹¹ Que pode ser visto de maneira mais aprofundada no artigo por Ivanov e Kharuk (2020) e livro do Schwartz (2014).

ou seja, se tratando de um calibre transverso, como o de Coulomb.

O tensor de Faraday, por sua vez, possui dois invariantes fundamentais,

$$\mathcal{F} := \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2) \quad \text{e} \quad \mathcal{G} := -\frac{1}{4}\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (2.56)$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}$ e os campos elétrico e magnético são definidos como

$$\begin{cases} \mathbf{E} = E_i e^i := F_{0i} e^i, \\ \mathbf{B} = B_i e^i := -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk} e^i, \end{cases} \quad (2.57)$$

sendo e^i o versor na direção $i \in \{1, 2, 3\}$, que estão relacionados com os autovalores através da equação característica ¹²

$$\kappa^4 + \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^2\kappa^2 - \frac{1}{16}(\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu})^2 = 0 \quad (2.58)$$

construída para o tensor eletromagnético com índices mistos, $F^\mu_\nu = g^{\mu\rho}F_{\rho\nu}$, que terá duas raízes reais e duas imaginárias puras (iguais, mas de sinais opostos), visto que se trata de uma matriz não totalmente simétrica ou anti-simétrica, mas com um bloco anti-simétrico, isto é

$$F^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \|\mathbf{E}\|^T \\ \|\mathbf{E}\| & -\|F^i_j\| \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

onde $\|\mathbf{E}\|$ é a forma matricial do vetor campo elétrico e $\|F_{ij}\|$ é a matriz bloco das componentes $i, j \neq 0$ do tensor de Faraday. As raízes serão

$$\begin{cases} \kappa_{1,\pm} = \pm\chi_+ = \pm\sqrt{-\mathcal{F} + \sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2}}, \\ \kappa_{2,\pm} = \pm i\chi_- = \pm i\sqrt{\mathcal{F} + \sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2}}, \end{cases} \quad (2.60)$$

com as normas satisfazendo

$$\chi_+^2 - \chi_-^2 = -2\mathcal{F} \quad \text{e} \quad \chi_+\chi_- = i\mathcal{G}. \quad (2.61)$$

onde fica claro que

$$\chi_+ = E := |\mathbf{E}| \quad \text{e} \quad \chi_- = B := |\mathbf{B}|. \quad (2.62)$$

Assim, o tensor eletromagnético pode ser posto em forma normal por uma transformação ortogonal ¹³, ou seja, sempre é possível escolher um sistema de coordenadas

¹² Que pode ser obtida mais facilmente via teorema de Cayley-Hamilton (CAYLEY, 1858).

¹³ Para mais detalhes, veja o livro do Gantmacher (1974).

onde o tensor eletromagnético será

$$F^\mu_\nu = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & -B & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & -B & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.63)$$

o que significa parametrizar o 4-potencial eletromagnético como

$$A_\mu = \frac{1}{2} (-Ex, Et, -Bz, By). \quad (2.64)$$

Agora, deixa-se o calibre de Fock-Schwinger, aplicando boosts e rotações de forma a parametrizar este potencial como

$$A_\mu = (-Ex, 0, -Bz, 0). \quad (2.65)$$

2.3.3 Diagonalização do termo de spin

O que fora realizado até o momento já facilita as contas, mas ainda é preciso diagonalizar diretamente o último termo no Hessiano, que é o único cuja matriz espinorial não é proporcional à identidade. Para isto, observe que

$$(F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})^2 = F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta}, \quad (2.66)$$

porém

$$\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\alpha\beta} = (\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})I - i(\eta^{\mu\alpha}\sigma^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\sigma^{\nu\alpha} - \eta^{\nu\alpha}\sigma^{\mu\beta} + \eta^{\nu\beta}\sigma^{\mu\alpha}) - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^5, \quad (2.67)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} (F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})^2 &= 2F_{\alpha\beta}^2 \mathbf{1} - i \left(2F_{\mu}^{\alpha}F_{\alpha\beta}\sigma^{\mu\beta} - 2F_{\mu}^{\alpha}F_{\beta\alpha}\sigma^{\mu\beta} \right) - i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^5 F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}, \\ &= 8(\mathcal{F}\mathbf{1} - i\gamma^5\mathcal{G}). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Sabendo que γ^5 possui autovalores ± 1 , bem como o fato da transformação que diagonaliza uma matriz também diagonalizar qualquer potência desta, obtém-se a, em forma bloco diagonal,

$$F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = 2 \operatorname{diag} \left\{ \sqrt{2(\mathcal{F} + i\mathcal{G})}\sigma_z, \sqrt{2(\mathcal{F} - i\mathcal{G})}\sigma_z \right\} = 2\Sigma_z, \quad (2.69)$$

onde $\sigma_z = \operatorname{diag} \{1, -1\}$ é a matriz de Pauli e Σ_z é o “operador de Spin”, ambos na direção z . Isto leva a definir os autovalores deste operador como

$$\Sigma_{\pm} := \sqrt{2(\mathcal{F} \pm i\mathcal{G})} \quad (2.70)$$

para simplificar a notação.

2.3.4 Do Hessiano a OHQs e os níveis de Landau

Aplicando estes resultados ao Hessiano em (2.31) já na representação de Heisenberg (2.33), chega-se a

$$\mathcal{H} = (p_t + eEx)^2 - p_x^2 - (p_y + ezB)^2 - p_z^2 - e\Sigma_z. \quad (2.71)$$

É necessário aplicar operadores de translação (SCHWARTZ, 2014; MAROTO, 1999)

$$x \rightarrow x - \frac{p_t}{eE} \quad \text{e} \quad z \rightarrow z - \frac{p_y}{eB}, \quad (2.72)$$

para que $\mathcal{H}$ fique em formato análogo ao Hamiltoniano de osciladores harmônicos quânticos (QHOs) desacoplados,

$$\mathcal{H} = - (p_x^2 - e^2 E^2 x^2) - (p_z^2 + e^2 B^2 z^2) - e\Sigma_z, \quad (2.73)$$

cujos autovalores de “energia” serão

$$E_{n_E, n_B}^\lambda = ieE(1 + 2n_E) + eB(1 + 2n_B) - 2e\lambda\Sigma_\pm, \quad (2.74)$$

com os auto-estados correspondentes sendo descritos por níveis de Landau (LANDAU, 1930):

$$\Psi_{n_E, n_B}^{p_t, p_y} = \sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} f_{n_E} \left(x - \frac{p_t}{eE} \right) f_{n_B} \left(z - \frac{p_y}{eB} \right) \varphi_\lambda e^{ip_t t - ip_y y}, \quad (2.75)$$

onde $f_n(x)$ são as autofunções do QHO. Com isso, pode-se aplicar (2.45) para obter

$$\text{Tre}^{-i\tau\mathcal{H}} = \int d^4x \frac{dp_t dp_y}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda, n_E, n_B} |\Psi_{n_E, n_B}^{p_t, p_y}|^2 \text{tr}_{\text{Dirac}} e^{-i\tau E_{n_E, n_B}^\lambda}. \quad (2.76)$$

Neste ponto, vale a pena fazer duas observações. Primeiramente,

$$\begin{aligned} \text{tr}_{\text{Dirac}} e^{-i\tau E_{n_E, n_B}^\lambda} &= e^{-\tau e [\Sigma_\pm \chi_\pm (1+2n_{E/B})]} \text{tr}_{\text{Dirac}} e^{2i\tau e \lambda \Sigma_z} \\ &= e^{-\tau e [\Sigma_\pm \chi_\pm (1+2n_{E/B})]} \left(e^{2ie\tau \lambda \Sigma_+} + e^{2ie\tau \lambda \Sigma_-} \right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Além disso, note que p_t e p_y movem continuamente o centro da Gaussiana das autofunções f_n , portanto, ao integrar em uma caixa de lados L , as densidades de modos em x e z serão ¹⁴ $\sim \frac{2\pi}{eL\chi_\pm}$. Desta maneira, chega-se a

$$\begin{aligned} \text{Tre}^{-i\tau\mathcal{H}} &= \frac{ie^2 L^4 \mathcal{G}}{(2\pi)^2} \left(\sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} e^{2ie\tau \lambda \Sigma_+} + e^{2ie\tau \lambda \Sigma_-} \right) \times \\ &\quad \times \left[\sum_{n_E=0}^{\infty} e^{-\tau e E (1+2n_E)} \right] \left[\sum_{n_B=0}^{\infty} e^{-i\tau e B (1+2n_B)} \right]. \end{aligned} \quad (2.78)$$

¹⁴ Para mais detalhes, recomendo a leitura da seção 33.4 do livro escrito pelo Schwartz (2014).

O termo entre parênteses se trata de

$$\sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} e^{2ie\tau\lambda\Sigma_+} + e^{2ie\tau\lambda\Sigma_-} = 2 [\cos(e\tau\Sigma_+) + \cos(e\tau\Sigma_-)], \quad (2.79)$$

Quanto aos termos entre colchetes, primeiro observe que

$$\begin{cases} E &= \sqrt{-\frac{1}{4}(\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2) + \frac{1}{2}\Sigma_+\Sigma_-} = \frac{i}{2}(\Sigma_+ - \Sigma_-) = \Im(\Sigma_+), \\ B &= \sqrt{\frac{1}{4}(\Sigma_+^2 + \Sigma_-^2) + \frac{1}{2}\Sigma_+\Sigma_-} = \frac{i}{2}(\Sigma_+ + \Sigma_-) = \Re(\Sigma_+), \end{cases} \quad (2.80)$$

onde $\Re(\alpha)$ e $\Im(\alpha)$ são as partes real e imaginária de um número complexo α respectivamente. Assim, resolvendo por série geométrica, o resultado será

$$\begin{cases} \sum_{n_E=0}^{\infty} e^{-\tau e E(1+2n_E)} = \frac{e^{-\tau e \Im(\Sigma_+)}}{1 - e^{-2\tau e \Im(\Sigma_+)}} = \frac{1}{2 \sinh[\tau e \Im(\Sigma_+)]}, \\ \sum_{n_B=0}^{\infty} e^{-i\tau e B(1+2n_B)} = \frac{i}{2 \sin[\tau e \Re(\Sigma_+)]}. \end{cases} \quad (2.81)$$

Por fim, como nada depende das coordenadas, pode-se fazer $L^4 \rightarrow \int d^4x$ seguido da utilização de (2.61) para obter

$$\bar{\Gamma}[A] = -\frac{ie^2}{16\pi^2} \int d^4x \, d\tau \, \frac{e^{-im^2\tau}}{\tau} \left\{ \frac{\mathcal{G}[\cos(\tau e \Sigma_+) + \cos(\tau e \Sigma_-)]}{\sin[\tau e \Re(\Sigma_+)] \sinh[\tau e \Im(\Sigma_+)]} - \frac{2}{\tau^2 e^2} \right\}, \quad (2.82)$$

que já é uma das formas de expressar parte da ação de Euler–Heisenberg, bastante útil para manipulação direta, mas ainda não é a “Verdadeira Alegria”¹⁵.

2.4 Ação de Euler–Heisenberg

Dá-se prosseguimento à análise observando que ambos $\Sigma_{\pm}$ são números complexos, portanto,

$$\begin{aligned} \cos(e\tau\Sigma_+) + \cos(e\tau\Sigma_-) &= 2 \cos\left[\frac{e\tau}{2}(\Sigma_+ - \Sigma_-)\right] \cos\left[\frac{e\tau}{2}(\Sigma_+ + \Sigma_-)\right], \\ &= 2\Re \cos(\tau e \Sigma_+), \end{aligned} \quad (2.83)$$

onde $\Re(Z)$ e $\Im(Z)$ são as partes real e imaginária de um número qualquer Z , ao passo que

$$\sin[\tau e \Re(\Sigma_+)] \sinh[\tau e \Im(\Sigma_+)] = -\Im \cos(\tau e \Sigma_+), \quad (2.84)$$

visto que

$$\cos(\tau e \Sigma_+) = \cos[(\tau e \Re \Sigma_+)] \cosh[(\tau e \Im \Sigma_+)] - i \sin[(\tau e \Re \Sigma_+)] \sinh[(\tau e \Im \Sigma_+)]. \quad (2.85)$$

Assim, fazendo uma rotação de Wick no “tempo próprio”, $\tau \rightarrow -i\tau$, extraíndo a Lagrangiana em $\bar{\Gamma}[A]$ e voltando à ação efetiva $\Gamma[A]$, chega-se à forma usual da Lagrangiana de Euler-Heisenberg,

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau m^2} \left[\mathcal{G} \frac{\Re \cosh(\tau e \Sigma_+)}{\Im \cosh(\tau e \Sigma_+)} - \frac{1}{\tau^2 e^2} \right]. \quad (2.86)$$

¹⁵ Esta se encontra no escritório do Prof. I. L. Shapiro.

Porém, ainda é preciso renormalizar esta ação.

Aqui será utilizado o esquema de subtração mínima para eliminar os termos divergentes no limite $\tau \rightarrow 0$. Nota-se que o termo a ser expandido se trata do produto de cotangentes ¹⁶ (uma hiperbólica e a outra não), resultando em

$$\mathcal{G} \frac{\Re \cosh(e\tau\Sigma_+)}{\Im \cosh(e\tau\Sigma_+)} = \frac{1}{e^2\tau^2} + \frac{2}{3}\mathcal{F} - \frac{4e^2\tau^2}{45} \left(\mathcal{F}^2 + \frac{7}{4}\mathcal{G}^2 \right) + \dots \quad (2.87)$$

O primeiro termo será cancelado pelo termo relacionado ao campo livre em (2.86), mas falta subtrair $\frac{2}{3}\mathcal{F}$, que também diverge, como contra-termo na lagrangiana, de forma que chega-se à ação de Euler-Heisenberg renormalizada,

$$\mathcal{L}_{\text{EH}}^{\text{R}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau m^2} \left[\mathcal{G} \frac{\Re \cosh(e\tau\Sigma_+)}{\Im \cosh(e\tau\Sigma_+)} - \frac{1}{\tau^2 e^2} - \frac{2}{3}\mathcal{F} \right], \quad (2.88)$$

que é a solução não perturbativa, contendo a informações da contribuição de todos os infinitos termos de 1-laço ¹⁷.

2.4.1 Checagem de consistência com o método perturbativo

Para efeito de comparação e checagem de consistência, será feita a comparação com o primeiro termo da ação obtida via método perturbativo, como exemplo. Pelo teorema de Furry, $\Gamma^{(k)}[A] = 0$ para k ímpar em (2.23), portanto a primeira contribuição virá de

$$\Gamma^{(2)}[A] = \frac{i}{2}e^2 \text{tr} \int d^4x d^4y \frac{i}{(i\cancel{\partial} - m)_{y,x}} \cancel{A}_x \frac{1}{(i\cancel{\partial} - m)_{x,y}} \cancel{A}_y, \quad (2.89)$$

onde $A_x = A(x)$, que corresponde ao processo representado através do diagrama na Figura 1. Utilizando (2.24), obtém-se

$$\Gamma^{(2)}[A] = \frac{ie^2}{2} \int d^4x d^4y \frac{d^D \tilde{q}}{(2\pi)^D} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x-y)} A_y^\mu A_x^\nu \frac{\text{tr} \left[(\not{q} + m) \gamma_\mu (\not{p} + \not{q} + m) \gamma_\nu \right]}{(q^2 - m^2) \left[(p+q)^2 - m^2 \right]}, \quad (2.90)$$

em que $D = 4 + \varepsilon$ e $d\tilde{q} = \mu^\varepsilon dq$, com o limite $\varepsilon \rightarrow 0$ implícito.

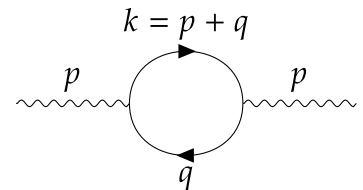
Aplicando o truque de Feynman,

$$\int \frac{dk}{A(k)B(k)} = \int_0^1 du \int \frac{dk}{[uA(k) + (1-u)B(k)]^2}, \quad (2.91)$$

e lembrando que o traço de um produto com uma quantidade ímpar de matrizes γ^μ se anula, chega-se a

$$\Gamma^{(2)}[A] = 2ie^2 \int d^4x d^4y \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x-y)} A_y^\mu A_x^\nu \mathbf{I}_{\mu\nu}, \quad (2.92)$$

Figura 1 – Diagrama de Polarização do Vácuo de acordo com a QED.



Fonte: Diagrama de Feynman gerado pelo autor utilizando o tikz-feynman (ELLIS, 2016).

¹⁶ Cuja expansão em série se encontra no apêndice C.

¹⁷ Que em inglês é traduzido para “1-loop”.

com

$$I_{\mu\nu} = \int_0^1 du \int \frac{d^D \tilde{k}}{(2\pi)^D} \left[\frac{2k_\mu k_\nu}{(k^2 - r^2)^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{(k^2 - r^2)} - \frac{2u(1-u)(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu})}{(k^2 - r^2)^2} \right], \quad (2.93)$$

onde fora definido $k_\mu := q_\mu + (1-u)p_\mu$ e $r^2 := m^2 - u(1-u)p^2$. Por fim, aplicando os resultados conhecidos da regularização dimensional¹⁸, obtém-se

$$I_{\mu\nu} = (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \left\{ \frac{1}{6} \Delta + \int_0^1 du u(1-u) \ln \left[1 - u(1-u) \frac{p^2}{m^2} \right] \right\}, \quad (2.94)$$

em que $\Delta = N_\varepsilon - \ln \frac{m^2}{\mu^2}$ é o termo que diverge, com N_ε definido como no apêndice C. Voltando para a representação de posição,

$$\Gamma^{(2)}[A] = \frac{e^2}{32\pi^2} \int d^4x \left[\frac{2}{3} \Delta F_{\mu\nu}^2 + F^{\mu\nu} f(-\square; m^2) F_{\mu\nu} \right], \quad (2.95)$$

com fator de forma

$$f(-\square; m^2) := \int d^4y \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \left\{ \int_0^1 du u(1-u) \ln \left[1 - u(1-u) \frac{p^2}{m^2} \right] \right\}. \quad (2.96)$$

Observe que este resultado concorda com (2.88) no limite de campos eletromagnéticos constantes, quando identifica-se $\Delta \rightarrow \int \frac{d\tau}{\tau} e^{-i\tau m^2}$ (com $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\tau\varepsilon}$ implícito). Outras ordens podem ser obtidas da mesma maneira e, de fato, sabe-se que essas abordagens concordam em todas as ordens calculadas na literatura para o caso da QED até o momento.

Também é possível ver de (2.96) e (2.88) que esta ação não é unitário em todo o domínio da QED, sendo aproximadamente estável e consistente até regimes em que $E^2 \approx m^2$. Essa quebra de unitariedade está relacionada ao fato de que, ao integrar sobre os modos fermiônicos, “joga-se fora” da teoria todas as configurações em que os fermions não se encontram no estado de vácuo Ψ . Assim, o complemento da probabilidade de transição do vácuo entre os estados acessíveis à TE representa a chance dos campos de fundo promoverem a criação de partículas reais, que virão sempre em pares (como mostra o teorema de Furry), portanto saindo do domínio de validade da TE, onde não se pode mais integrar sob os modos fermiônicos livremente. É possível aproveitar deste fato, como será feito no penúltimo capítulo.

Agora é possível enfrentar a luta por uma solução exata para outras teorias mais complicadas. Com estas técnicas, será construída a ação efetiva de Euler-Heisenberg generalizada para a teoria eletro-axial no próximo capítulo.

¹⁸ Que se encontram elencados no apêndice D.

3 AÇÃO DA TEORIA ELETRO-AXIAL

Neste capítulo, as técnicas desenvolvidas anteriormente serão utilizadas para estudar uma generalização da eletrodinâmica quântica na qual um campo axial externo é introduzido de forma não-mínima na derivada covariante que já continha o campo eletromagnético convencional. O objetivo será calcular uma ação efetiva de Euler-Heisenberg generalizada para esta teoria, que incorpore os efeitos das correções quânticas induzidas pela presença simultânea de ambos os campos. Assim, aqui será apresentada a diagonalização completa do Hessiano funcional da chamada teoria eletro-axial, para configurações quasi-estáticas dos campos externos, sendo que a forma fechada dos autovalores, resultando em uma solução exata para TE, e a classificação dos subespaços fisicamente realizáveis aqui obtidas constituem algumas das contribuições originais desta dissertação, conforme a revisão bibliográfica realizada pelo autor ¹.

Toma-se um modelo onde o férmion está acoplado ao 4-potencial eletromagnético e a um pseudo-vetor S_μ , com sua derivada covariante definida como

$$D_\mu := \partial_\mu - ieA_\mu - i\eta S_\mu \gamma_5 = \partial_\mu - iV_\mu^R P_R - iV_\mu^L P_L, \quad (3.1)$$

sendo $V_\mu^{R/L} = eA_\mu \pm \eta S_\mu$, enquanto $P_{R/L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$ são os projetores para as quiralidades direita (R) e esquerda (L). Neste caso, o funcional gerador das funções de Green, que ainda será normalizado em relação aos férmions livres, será

$$Z[A, S, \bar{\eta}, \eta] := e^{iS_0[A, S]} \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS_{\text{Dirac}}[A, S] + i \int d^4x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{iS_{\text{Dirac}}[A=S=0]}} = e^{i(S_0[A, S] + W[A, \bar{\eta}, \eta])}, \quad (3.2)$$

onde S_0 é a ação de Maxwell somada à ação do campo axial livre, que aqui será assumida como uma ação de Proca, e a eventuais termos de interação entre eles, a depender do modelo com que se está trabalhando. Novamente, após integração funcional, obtém-se

$$\bar{\Gamma}[A, S] = -i\text{Tr} \ln \left(\frac{\not{D} - m}{\not{\phi} - m} \right), \quad (3.3)$$

em que

$$\Gamma[A, S] = S_0[A, S] + \bar{\Gamma}[A, S] \quad (3.4)$$

assim como antes.

Neste caso, ao invés da aplicação de γ^5 , seguindo a abordagem feita por Maroto (1999), aplica-se o operador conjugação de carga, definido como

$$C := i\gamma^2\gamma^0 \implies \begin{cases} C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \\ C\gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^T, \end{cases} \quad (3.5)$$

¹ Reveja o capítulo 1 para mais detalhes sobre a revisão bibliográfica.

para obter a transposta da derivada covariante,

$$\mathcal{D}^T = -C \left(\not{\partial} - i\mathcal{V}^R \mathbf{P}_L - i\mathcal{V}^L \mathbf{P}_R \right) C^{-1} = -C \mathcal{D}^* C^{-1}, \quad (3.6)$$

onde

$$\mathcal{D}^* = \not{\partial} - ie\mathcal{A} + i\eta \not{S} \gamma^5. \quad (3.7)$$

Como $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$, então

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}[A, S] &= -i \text{Tr} \ln \left[\frac{(i\mathcal{D}^T - m)}{(i\not{\partial}^T - m)} \right] = -i \text{Tr} \ln \left[\frac{1}{(i\not{\partial}^T - m)} C C^{-1} (i\mathcal{D}^T - m) \right] \\ &= -i \text{Tr} \ln \left[\frac{-i \left(\not{\partial} - i\mathcal{V}^R \mathbf{P}_L - i\mathcal{V}^L \mathbf{P}_R \right) - m}{(-i\not{\partial} - m)} \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

o que permite obter

$$\bar{\Gamma}[A, S] = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{(-i\not{\partial} - \mathcal{V}^R \mathbf{P}_L - \mathcal{V}^L \mathbf{P}_R - m) (i\not{\partial} + \mathcal{V}^R \mathbf{P}_R + \mathcal{V}^L \mathbf{P}_L - m)}{(-\not{\partial}^2 - m^2)} \right], \quad (3.9)$$

com o numerador e denominador tendo sido convenientemente multiplicados por -1 , o que, após algum algebrismo, se reduz a

$$\bar{\Gamma}[A, S] = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{(-i\partial - eA + \eta S \gamma^5)^2 - \frac{1}{2} \left(eF_{\mu\nu} - \eta S_{\mu\nu} \gamma^5 \right) \sigma^{\mu\nu} - 2\eta m \not{S} \gamma^5 - m^2}{(-\partial^2 - m^2)} \right]. \quad (3.10)$$

Utilizando as identidades (B.21),

$$\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad \gamma^5 \gamma^\mu = -\frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\nu \sigma_{\alpha\beta}, \quad (3.11)$$

pode-se definir

$$V_{\mu\nu} := eF_{\mu\nu} - i\eta \tilde{S}_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

onde $\tilde{S}_{\mu\nu} := \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} S^{\alpha\beta}$, cujos invariantes fundamentais são

$$\begin{cases} \mathcal{V} := \frac{1}{4} V_{\mu\nu}^2 = e^2 \mathcal{F}_A + \eta^2 \mathcal{F}_S - \frac{ie\eta}{2} \tilde{S}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \\ \mathcal{W} := -\frac{1}{4} \tilde{V}^{\mu\nu} V_{\mu\nu} = e^2 \mathcal{G}_F + \eta^2 \mathcal{G}_S - \frac{ie\eta}{2} F^{\mu\nu} S_{\mu\nu}, \end{cases} \quad (3.13)$$

com o subscrito indicando a qual vetor o invariante está relacionado, isto é,

$$\mathcal{F}_S := \frac{1}{4} S_{\mu\nu}^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_S := -\frac{1}{4} \tilde{S}^{\mu\nu} S_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

enquanto passa-se a denotar (2.56) como $\mathcal{F}_A$ e $\mathcal{G}_A$. Vale ressaltar que, se o vetor axial for massivo, é possível encontrar mais um invariante fundamental além dos anteriores: $S^2 = S_\mu S^\mu$. Assim como fora feito para o campo eletromagnético, este trabalho se limita ao caso de invariantes constantes, ainda que S_μ e $S_{\mu\nu}$ não sejam constantes ².

Segue que, no formalismo de operadores, é possível escrever

$$\bar{\Gamma}[A, S] = -\frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{(\Pi + \eta S \gamma^5)^2 - \frac{1}{2} \left(V_{\mu\nu} + \frac{2\eta m}{3} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} S^\alpha \gamma^\beta \right) \sigma^{\mu\nu} - m^2}{p^2 - m^2} \right], \quad (3.15)$$

onde $\Pi := p - eA$, com

$$-i\partial \langle x | \Psi \rangle \rightarrow \langle x | p | \Psi \rangle = p(x) \Psi(x), \quad \text{e} \quad [x^\mu, p_\nu] = i\delta_\nu^\mu, \quad (3.16)$$

assim como no caso anterior. O primeiro termo no argumento do logaritmo consiste de

$$(\Pi + \eta S \gamma^5)^2 = [(\Pi^2 + \eta^2 S^2) \mathbf{1} + \eta (\Pi_\mu S^\mu + S^\mu \Pi_\mu) \gamma^5]_y \delta^4(x - y). \quad (3.17)$$

Assumindo o caso em que os campos vetoriais da teoria são abelianos, como quando o campo axial é induzido por torção totalmente anti-simétrica ³, o segundo termo se traduz a

$$\eta \{ \Pi_\mu, S^\mu \}_y \gamma^5 \delta^4(x - y) = -\eta [i (\partial_\mu S^\mu) + 2e A_\mu S^\mu + 2i S^\mu \partial_\mu]_y \gamma^5 \delta^4(x - y), \quad (3.18)$$

onde a derivada em $(\partial_\mu S^\mu)$ age apenas em S^μ . Portanto, em geral, o Hessiano em (3.15) terá a forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(0)} \mathbf{1} + \mathcal{H}_5 \gamma^5 + \mathcal{H}_\mu^{(1)} \gamma^\mu \gamma^5 + \mathcal{H}_{\mu\nu}^{(2)} \sigma^{\mu\nu} = \mathcal{H}^{(0)} \mathbf{1} + \mathcal{H}_R. \quad (3.19)$$

em que foram definidos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(0)} &:= (\Pi^2 + \eta^2 S^2) \delta^4(x - y), & \mathcal{H}_5 &:= \eta \{ \Pi_\mu, S^\mu \} \delta^4(x - y), \\ \mathcal{H}_\mu^{(1)} &:= -2\eta m S_\mu(y) \delta^4(x - y), & \mathcal{H}_{\mu\nu}^{(2)} &:= -\frac{1}{2} V_{\mu\nu}(y) \delta^4(x - y), \\ \mathcal{H}_R &:= \left[\eta \{ \Pi_\mu, S^\mu \}_y \gamma^5 - \frac{1}{2} V_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} - 2\eta m S_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \right]_y \delta^4(x - y). \end{aligned} \quad (3.20)$$

À partir daqui, as funções delta de Dirac não serão escritas explicitamente, porém assume-se que estas se encontram implicitamente presentes.

O termo $\mathcal{H}_R$ pode ser diagonalizável no caso geral, possuindo equação característica ⁴:

$$\begin{aligned} \kappa^4 + 2\eta^2 \left[4m^2 S^2 - \mathcal{H}_5^2 - \frac{2}{\eta^2} \mathcal{V} \right] \kappa^2 + 8\eta i \mathcal{H}_5 \mathcal{W} \kappa + \eta^4 [4m^2 S^2 - \mathcal{H}_5^2]^2 - \\ - 2\eta^2 \{ \mathcal{V}, \mathcal{H}_5^2 \} + 4 \left[\mathcal{V}^2 + \mathcal{W}^2 - 4\eta^2 m^2 (\tilde{V}^{\mu\nu} S_\nu)^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

² Como quando há precessão de S_μ em torno de um eixo.

³ Para mais informações, veja o artigo do Shapiro (2002).

⁴ Obtida via código de programação do autor (2025a), disponível em: <https://github.com/8stringtheorist/Hessian-Diagonalization>.

isto é,

$$\kappa^4 + 2\mathcal{A}\kappa^2 + 8i\mathcal{B}\kappa + \mathcal{C} = 0, \quad (3.22)$$

onde define-se

$$\begin{cases} \mathcal{A} := 4m^2\eta^2 S^2 - \eta^2 \mathcal{H}_5^2 - 2\mathcal{V}, \\ \mathcal{B} := \eta \mathcal{W} \mathcal{H}_5, \\ \mathcal{C} := \eta^4 \left[4m^2 S^2 - \mathcal{H}_5^2 \right]^2 - 2\eta^2 \{ \mathcal{V}, \mathcal{H}_5^2 \} + 4 \left[\mathcal{V}^2 + \mathcal{W}^2 - 4\eta^2 m^2 (\tilde{V}^{\mu\nu} S_\nu)^2 \right]. \end{cases} \quad (3.23)$$

A solução será

$$\kappa_{\pm}^{(\pm)} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\sqrt{\mathcal{D}_-} \pm i \sqrt{\mathcal{D}_+ \pm \frac{12i\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{D}_-}}} \right), \quad (3.24)$$

em que os sinais à frente de $\sqrt{\mathcal{D}_-}$ são correlacionados e

$$\mathcal{D}_{\pm} := \sqrt[3]{\Delta} - (1 \pm 3) \mathcal{A} + \frac{4}{\sqrt[3]{\Delta}} (\mathcal{A}^2 + 6\eta^4 m^2 S^2 \mathcal{H}_5^2 + 3\mathcal{W}^2), \quad (3.25)$$

onde

$$\Delta := \mathcal{K} + i \sqrt{\mathcal{K} + 64 \left[\mathcal{A}^2 + 2\eta^2 \mathcal{H}_5 (3\eta^2 m^2 S^2 - \mathcal{V}) + 3\mathcal{W}^2 - 12\eta^2 m^2 (\tilde{V}^{\mu\nu} S_\nu)^2 \right]^3}, \quad (3.26)$$

com

$$\mathcal{K} := \mathcal{A}^3 - 9\mathcal{A} (\mathcal{C} + 16m^2\eta^4 \mathcal{H}_5^2 S^2) - 108\mathcal{B}^2, \quad (3.27)$$

de maneira que quaisquer produtos devem ser lidos como

$$XY := \frac{1}{2} \{X, Y\}. \quad (3.28)$$

Pode-se notar que $\kappa \rightarrow \infty$ quando $\Delta \rightarrow 0$ ou $\Delta \rightarrow \infty$, o que implica na impossibilidade da diagonalização de $\mathcal{H}_R$ nestes regimes, ou seja, existem pontos (ou regiões) singulares, em que o Hessiano deixa de ser diagonalizável⁵. Isso quer dizer que nem todo o espaço de parâmetros é fisicamente acessível ou possui uma solução exata. Assim, além de restringir o sistema às condições em que o Hessiano é não singular, é preciso buscar entender quando ele é fenomenologicamente consistente.

3.1 Análise de consistência

Embora a não unitariedade possa ser bem vinda para a fenomenologia da TE, como será explorado no próximo capítulo, é preciso que a teoria possua algum intervalo de estabilidade, isto é, o Hessiano não pode ser um número imaginário puro em todo intervalo de condições fisicamente realizáveis. Porém ele pode ter uma dependência nos invariantes de tal maneira que passeie por entre as regiões aproximadamente estáveis, onde $\mathcal{H} \approx \Re(\mathcal{H})$, até as instáveis, $\mathcal{H} \approx i\Im(\mathcal{H})$.

⁵ Veja, por exemplo, os artigos escritos por Berry (2004) e Heiss (2012) para mais detalhes.

Sendo assim, faz-se necessário examinar diferentes limites dos autovalores da equação característica, culminando na classificação original dos subespaços abaixo, nomeados figurativamente com base nas propriedades exibidas:

1. *Tipo Eletromagnético*: Quando $S^2 = \mathcal{H}_5 = 0$, o resultado é uma cópia do caso eletromagnético com os invariantes substituídos, isto é,

$$\kappa_{\pm}^{(\pm)} = \pm \sqrt{2\mathcal{V} \pm 2i\mathcal{W}}, \quad (3.29)$$

sem outras contribuições de S_{μ} . Se o campo axial não for propagante, este caso se reduz de fato ao eletromagnetismo.

2. *Tipo Maroto (1999)*: Quando $\mathcal{H}_5 = 0$, a solução será

$$\kappa_{\pm}^{(\pm)} = \pm \sqrt{2\mathcal{V} - 4m^2\eta^2 S^2 \pm \sqrt{4m^2\eta^2 (\tilde{V}^{\mu\nu} S_{\nu})^2 - \mathcal{W}^2}}, \quad (3.30)$$

que é bem comportada quando S_{μ} é tipo espaço ou $\mathcal{V} \geq 4m^2\eta^2 S^2$. Este caso, em particular, é provavelmente um dos mais estáveis, visto que a condição $\mathcal{H}_5 = 0$ protege a teoria dos termos $(\partial_{\mu} S^{\mu})$ que podem surgir em expansões de mais laços⁶, além de vir acompanhado da condição $S^{\mu} A_{\mu} = 0$ que simplifica consideravelmente as contas. Nos demais casos, pode ser preciso que mais condições sejam satisfeitas para que haja estabilidade (BLUHM; GAGNE; POTTING; VRUBLEVSKIS, 2008; REUTER; SCHOLLMEYER, 2016; RHAM; ENGELBRECHT; HEISENBERG; LÜSCHER, 2022). Este é o domínio em que se pode reproduzir a solução demonstrada no artigo do Maroto (1999) de forma exata para condições um pouco mais abrangentes, como será mostrado em breve. Observe que o tipo anterior faz parte do subespaço dessa solução.

3. *Tipo (quase) sem anomalia quiral*: Quando $\mathcal{W} = 0$, os autovalores se reduzem a

$$\kappa_{\pm}^{(\pm)} = \pm \sqrt{\eta^2 \mathcal{H}_5^2 + 2\mathcal{V} - 4m^2\eta^2 S^2 \pm 2\eta \sqrt{2\mathcal{H}_5^2 \mathcal{V} - 4m^2 S^2 (\eta^2 \mathcal{H}_5^2 + \mathcal{V}) + 4m^2 (\tilde{V}^{\mu\nu} S_{\nu})^2}}, \quad (3.31)$$

ou seja, $\mathcal{H}_R$ permanece diagonalizável em todas as configurações onde $\mathcal{H}_5$ não venha a tender ao infinito. Este caso corresponde a

$$e^2 \mathcal{G}_A = -\eta^2 \mathcal{G}_S \quad \text{e} \quad S^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\mathbf{E}_A \cdot \mathbf{E}_S - \mathbf{B}_A \cdot \mathbf{B}_S) = 0, \quad (3.32)$$

isto é, A_{μ} e S_{μ} propagam isoladamente em seus subespaços, sem transferência de energia direta entre os setores eletromagnético e axial, ao passo que quebras locais de CP em um setor vêm acompanhadas das violações correspondentes do outro, de maneira que se cancelam (exemplo: ondas eletromagnéticas com polarização

⁶ Este problema é discutido detalhadamente nos artigos escritos por Berredo–Peixoto, Helayël–Neto e Shapiro (2000) e Shapiro (2002).

circular vem acompanhadas das ondas de S_μ com a polarização oposta). Em particular, as anomalias quirais provocadas por cada setor tendem a (quase) se cancelar ⁷, mantendo o setor eletromagnético CP neutro ⁸. Quando S_μ é massivo, tem-se então que

- (a) em baixas energias, o campo axial decai conforme $\sim e^{-M_S x}$ (onde M_S é a massa deste), porém deixando a ausência das violações de CP como “herança” para o setor eletromagnético livre, sendo que, quanto maior for a massa M_S , menor será a interferência no infra-vermelho (as violações ficam confinadas a distâncias da ordem $\lambda_S = \frac{1}{M_S}$),
- (b) porém o ajuste no ultra-violeta pode acabar sendo mais delicado, portanto faz-se necessário uma ação fundamental renormalizável e livre de fantasmas ⁹. Neste caso, tipicamente, é preciso que $M_S \sim M_{\text{Planck}}$ para garantir alguma consistência ¹⁰.

Se a massa do pseudo-vetor for muito grande, então, em baixas energias $|S| \approx$ constante $\ll 1$, isto é,

$$|\mathcal{H}_5| = |\Pi S| \sim \frac{m^2}{M_S^2} \approx 0, \quad (3.33)$$

visto que, classicamente,

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}S_{\mu\nu}^2 + M_S^2 S^2 + S_\mu J_5^\mu \implies \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{Proca}}}{\delta S_\mu} \approx S^\mu + \frac{1}{M_S^2} J_5^\mu = 0, \quad (3.34)$$

quando $\partial_\mu S^{\mu\nu} \approx 0$. De fato, como a TE em questão deixa de valer assim que $\mathbf{E}_{A/S}^2 > m^2$, os autovalores simplificam para

$$\kappa_\pm^{(\pm)} \approx \pm \sqrt{2\mathcal{V} - 4m^2\eta^2 S^2 \pm 4m\eta \sqrt{(\tilde{V}^{\mu\nu} S_\nu)^2 - S^2 \mathcal{V}}}. \quad (3.35)$$

Uma solução simples corresponde à de ondas planas (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990), por exemplo,

$$\tilde{S}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \implies \mathcal{G}_A = \mathcal{G}_S = 0, \quad (3.36)$$

em que a anomalia quiral de fato se anula.

⁷ Para haver cancelamento de fato, também é preciso que $\tilde{V}^{\mu\nu} S_\nu = 0$ e que a parte vetorial seja livre de anomalias, visto que a expressão para a anomalia quiral não será exatamente igual a $\mathcal{W}$, como será mostrado no próximo capítulo.

⁸ Como mostrado em mais detalhes nas seções D.3 e D.4 do livro dos autores Hehl e Obukhov (2003), e discutido não tão explicitamente no artigo do Wilczek (1987).

⁹ Modos com energia cinética negativa, que sinalizam instabilidade do sistema. Para mais informações, veja o capítulo 19 do livro escrito por Buchbinder e Shapiro (2021).

¹⁰ Como discutido em Shapiro (2002).

4. *Tipo Rainich–Misner–Wheeler Teleparalela*: Se $\mathcal{V} = 0$ e $\mathcal{W} = 0$, então

$$\kappa_{\pm}^{(\pm)} = \pm\eta\mathcal{H}_5 \pm 2i\eta mS, \quad (3.37)$$

onde $S = \sqrt{S_\mu S^\mu}$. Portanto, $\mathcal{H}_R$ será Hermitiano se, e somente se, $S = 0$, isto é, o vetor axial for do tipo luz, além de não haver explosão de $\mathcal{H}_5$, de forma que o Hessiano reduza a

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} (\Pi_\mu + \eta S_\mu)^2 - m^2 & 0 \\ 0 & (\Pi_\mu - \eta S_\mu)^2 - m^2 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Neste caso, além de valer o cancelamento de anomalias e violações de CP em (3.32), tem-se

$$e^2 \mathcal{F}_A = -\eta^2 \mathcal{F}_S \quad \text{e} \quad \tilde{S}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -2(\mathbf{E}_S \cdot \mathbf{B}_A + \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{E}_A) = 0, \quad (3.39)$$

ou seja, os campos $\mathbf{E}_V, \mathbf{B}_V \subset V^{\mu\nu}$ constituem ondas planas, além de $V_{\mu\nu}$ ser auto-dual, isto é,

$$\tilde{V}^{\mu\nu} = \pm i V^{\mu\nu}. \quad (3.40)$$

Como curiosidade, observe que, quando o pseudo-vetor advém da torção, estas condições são análogas às de Rainich–Misner–Wheeler (MISNER; WHEELER, 1957), porém relacionando o campo eletromagnético à torção, ao invés da curvatura.

5. *Tipo Relatividade Muito Especial*: Quando S_μ é tipo luz e $(\tilde{V}^{\mu\nu} S_\nu)^2 = 0$.

$$\kappa_{\pm}^{(\pm)} = \pm\mathcal{H}_5 \pm \sqrt{2\mathcal{V} \pm 2i\mathcal{W}}, \quad (3.41)$$

estando os sinais de $\mathcal{H}_5$ e $\mathcal{W}$ correlacionados. Neste caso, $\mathcal{H}_R$ é diagonalizável para toda a região em que $\mathcal{H}_5 \not\rightarrow \infty$, e, novamente

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} (\Pi_\mu + \eta S_\mu)^2 - m^2 + \sqrt{2\mathcal{V} + 2i\mathcal{W}}\sigma_z & 0 \\ 0 & (\Pi_\mu - \eta S_\mu)^2 - m^2 + \sqrt{2\mathcal{V} - 2i\mathcal{W}}\sigma_z \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

onde σ_z é a matriz de Pauli na direção z . Este caso é muito parecido ao do eletromagnetismo, porém com influência da Helicidade (na direção de S_μ) no momento generalizado dos férmions. Se $(\tilde{V}^{\mu\nu} S_\nu)^2 \neq 0$, os autovalores voltam a ficar tão complicados quanto o caso geral.

Durante o período em que S_μ “estiver ligado”, o grupo de Lorentz é quebrado de $SO(1, 3)$ para $SIM(2)$ em casos como este e (3.37), de forma que estes contextos lembram a Relatividade muito especial (COHEN; GLASHOW, 2006b). Vetores clássicos de fundo, em geral, “selecionam” uma direção preferencial enquanto estão presentes (e não se anulam), portanto essa quebra da simetria de Lorentz se apresenta nos outros casos também, porém de maneira mais sutil ou complicada.

Este tipo de quebra da simetria pode ser problemática se S_μ de fato assume um valor esperado de vácuo não nulo a nível quântico, não como campo de fundo que foi “ligado” em algum momento e poderá ser “desligado” em outro. Ainda assim, se essa quebra for de fato fundamental, este caso permaneceria bem comportado¹¹, de acordo com Rocha (2021), e poderia apresentar fenomenologia interessante, como a de conferir massas a neutrinos sem que houvesse a necessidade do mecanismo de “gangorra”¹² (COHEN; GLASHOW, 2006a).

Além destes casos particulares mais simples, as raízes rapidamente voltam a ter uma estrutura mais complicada como a de (3.24), exceto quando algum dos outros termos presentes em um destes casos mais simples também se anula, de maneira a transitar entre estas regiões limítrofes do espaço de parâmetros.

Em geral, quando $\mathcal{H}_5 \neq 0$ (isto é, nos três últimos casos), pode ser mais difícil de manter estabilidade e consistência em altas energias. De fato, observe que os dois últimos (talvez) se comportem bem em configurações muito restritas de S_μ , sendo instáveis nas demais (qualquer flutuação na direção de S_μ torna o sistema instável). Já a terceira condição pode funcionar bem em baixas energias, quando M_S é muito grande, mas ainda requer cuidado no tratamento. As únicas configurações que são (quase) tão estáveis quanto o caso eletromagnético são as duas primeiras, sendo que a primeira está contida no domínio da segunda. Sendo assim, nas seções e capítulos subsequentes, o foco deste trabalho será no subespaço de parâmetros em que $\mathcal{H}_5 = 0$, com $2\eta^2 m^2 S^2 \leq \mathcal{V}$ ou S_μ tipo tempo.

3.2 Ação de Euler–Heisenberg generalizada

Ao diagonalizar $\mathcal{H}_R$, pode-se escrever duas classes de Hessianos, em geral,

$$\mathcal{H} = (\Pi \pm \eta S)^2 - \Sigma_z - m^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{H} = \Pi^2 + \eta^2 S^2 - \Sigma_z - m^2, \quad (3.43)$$

onde Σ_z corresponde aos autovalores de $\mathcal{H}_R$ no domínio de interesse, tendo uma estrutura bloco diagonal na forma $\Sigma_z = \text{diag}(\Sigma_+ \sigma_z, \Sigma_- \sigma_z)$, sendo novamente, $\sigma_z = \text{diag}(1, -1)$ a matriz de Pauli na direção z , com

$$\Sigma_\pm = \left[2\mathcal{V} - 4\eta^2 m^2 S_\mu^2 \pm 2\sqrt{4\eta^2 m^2 (\tilde{V}^{\mu\nu} S_\nu)^2 - \mathcal{W}^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.44)$$

em que o primeiro termo na raiz também pode ser escrito como

$$(\tilde{V}^{\mu\nu} S_\nu)^2 = -2S_\mu^2 \mathcal{V} + (V^{\mu\nu} S_\nu)^2. \quad (3.45)$$

¹¹ Se existissem campos quânticos que fossem representações deste grupo, porém já que não há, como demonstrado por Rodrigues, Matzenbacher, Caires da Rocha e Hoff da Silva (2025), este sistema se torna inviável.

¹² Tradução livre para “Seesaw mechanism”.

Assuma, por simplicidade, que S_μ se encontra em configuração quase-estática (OMANOVIĆ, 1997), ou onde houver monopolos (GARCIA DE ANDRADE, 1999; MOURA-MELO; HELAYËL-NETO, 2001), ou outras situações em que a dinâmica interna deste permite separar

$$S_\mu = -\frac{1}{2}S^\mu_\nu x^\nu + \bar{S}^\mu \quad \text{e} \quad S^2_\mu = \frac{1}{4}(S^\mu_\nu x^\nu)^2 + \bar{S}^2_\mu, \quad (3.46)$$

com $S^{\mu\nu}\bar{S}_\mu = 0$, sendo $\bar{S}^2_\mu$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ e $(\tilde{V}^{\mu\nu}S_\nu)^2$ todos constantes. Neste caso, é possível escrever os Hessianos como

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}^2_\pm - M^2 - \Sigma_z, \quad (3.47)$$

onde

$$M^2 := m^2 - \eta^2 \bar{S}^2_\mu. \quad (3.48)$$

e

$$\mathcal{P}^2_\pm := \left[p_\mu - \frac{1}{2}(eF_{\mu\nu} \pm \eta S_{\mu\nu})x^\nu \right]^2 \quad \text{ou} \quad \mathcal{P}^2_\pm = \mathcal{P}^2 := \Pi^2 + \eta^2 (S^\mu_\nu x^\nu)^2. \quad (3.49)$$

Definindo $\bar{V}^{(\pm)}_{\mu\nu} = eF_{\mu\nu} \pm \eta S_{\mu\nu}$ e assumindo que $F_{\mu\nu}$ e $S_{\mu\nu}$ constituem um feixe regular¹³ de matrizes, isto é,

$$\det \left(F^\mu_\nu \pm \frac{\lambda\eta}{e} S^\mu_\nu \right) \neq 0, \quad (3.50)$$

é possível colocar $\bar{V}^\mu_\nu$ em uma forma canônica, em direta analogia à (2.60), com

$$\begin{aligned} \chi_+ &= \sqrt{-\bar{\mathcal{V}} + \sqrt{\bar{\mathcal{V}}^2 + \bar{\mathcal{W}}^2}}, \\ i\chi_- &= i\sqrt{\bar{\mathcal{V}} + \sqrt{\bar{\mathcal{V}}^2 + \bar{\mathcal{W}}^2}}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{V}} := \frac{1}{4}\bar{V}^2_{\mu\nu} = e^2\mathcal{F}_A + \eta^2\mathcal{F}_S + \frac{e\eta}{2}F_{\mu\nu}S^{\mu\nu}, \\ \bar{\mathcal{W}} := -\frac{1}{4}\tilde{\bar{V}}^{\mu\nu}\bar{V}_{\mu\nu} = e^2\mathcal{G}_A + \eta^2\mathcal{G}_S - \frac{e\eta}{2}\tilde{F}^{\mu\nu}S_{\mu\nu}, \end{cases} \quad (3.52)$$

que difere de (3.13) nos últimos termos. Com isso, no primeiro caso, pode-se parametrizar

$$V^\mu = A^\mu + \tilde{S}^\mu = (-x\chi_+, 0, -y\chi_-, 0), \quad (3.53)$$

onde $\tilde{S} = S - \bar{S}$, enquanto

$$\chi_+^2 - \chi_-^2 = -2\bar{\mathcal{V}} \quad \text{e} \quad \chi_+\chi_- = i\bar{\mathcal{W}}. \quad (3.54)$$

¹³ “Matrix pencil”, em inglês. Para mais informações, veja o livro do Gantmacher (1974).

Aplicando o operador de translação em cada setor separadamente ¹⁴, de forma que

$$x \rightarrow x \pm \frac{p_t}{\chi_{\pm}} \quad \text{e} \quad z \rightarrow z \pm \frac{p_y}{\chi_{\pm}}, \quad (3.55)$$

obtém-se

$$\mathcal{H} = -(p_x^2 - \chi_+^2 x^2) - (p_z^2 + \chi_-^2 z^2) - \Sigma_z, \quad (3.56)$$

após separar $e^{-iM^2\tau}$.

No segundo caso tem-se

$$\mathcal{P}^2 := \left(p_\mu - \frac{1}{2} e F_{\mu\nu}^x x^\nu \right)^2 + \eta^2 (S_{\nu}^\mu x^\nu)^2, \quad (3.57)$$

sendo preciso tomar coordenadas onde ambas $F_{\mu\nu}$ e $S_{\mu\nu}$ estejam em forma canônica *com seus autovalores posicionados nos mesmos planos* ¹⁵, seguido da reparametrização de A_μ e $\tilde{S}_\mu$ (através de rotações e boosts) para que seja feita a aplicação do operador de translação,

$$x \rightarrow x - \frac{p_t}{eE_A} \quad \text{e} \quad z \rightarrow z - \frac{p_y}{eB_A}, \quad (3.58)$$

para obter

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -p_x^2 + (e^2 E_A^2 + \eta^2 E_S^2) x^2 - p_z^2 - (e^2 B_A^2 + \eta^2 B_S^2) z^2 - \frac{2\eta^2 E_S^2 x p_t}{eE_A} + \\ & + \frac{2\eta^2 B_S^2 z p_y}{eB_A} + \frac{\eta^2 E_S^2}{e^2 E_A^2} p_t^2 - \frac{\eta^2 B_S^2}{e^2 B_A^2} p_y^2 - \Sigma_z. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Depois, é preciso aplicar novamente o operador de translação para completar quadrados fazendo

$$x \rightarrow x + \frac{\eta^2 E_S^2 p_t}{eE_A (e^2 E_A^2 + \eta^2 E_S^2)} \quad \text{e} \quad z \rightarrow z + \frac{\eta^2 B_S^2 p_y}{eB_A (e^2 B_A^2 + \eta^2 B_S^2)}, \quad (3.60)$$

que resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -p_x^2 + (e^2 E_A^2 + \eta^2 E_S^2) x^2 - p_z^2 - (e^2 B_A^2 + \eta^2 B_S^2) z^2 + \\ & + \frac{\eta^2 E_S^2}{e^2 E_A^2} \left[1 + \frac{\eta^2 E_S^2}{(e^2 E_A^2 + \eta^2 E_S^2)} \right] p_t^2 - \frac{\eta^2 B_S^2}{e^2 B_A^2} \left[1 + \frac{\eta^2 B_S^2}{(e^2 B_A^2 + \eta^2 B_S^2)} \right] p_y^2 - \Sigma_z. \end{aligned} \quad (3.61)$$

¹⁴ Uma opção seria aplicar $e^{-i\frac{p_t p_x}{\chi}} \gamma^0$ diretamente à forma matricial do Hessiano após diagonalização.

¹⁵ Caso as duas não possam ser postas com seus respectivos autovalores nos mesmos planos, não será possível reduzir o Hessiano a QHOs, pois

$$e^{-i\frac{p_t p_x}{a}} \left[(p_t - ax)^2 + b^2 t^2 \right] e^{i\frac{p_t p_x}{a}} = a^2 x^2 + b^2 \left(t + \frac{p_x}{a} \right)^2,$$

ou seja, a estrutura final é essencialmente idêntica à inicial.

Observe um artefato ¹⁶ matemático curioso: as escalas dos momentos nas direções t e y mudam, como se o Hessiano correspondesse a um Hamiltoniano de partícula livre, porém com massas diferentes nessas direções. Em ambos os casos, o Hessiano se assemelha ao Hamiltoniano de QHOs em duas direções e partículas livres nas demais, cujos autovalores de energia serão

$$E_{n_+, n_-}^\lambda = i(1 + 2n_+) \chi_+ + (1 + 2n_-) \chi_- - 2\lambda \Sigma_\pm + E_0^{(t, y)}, \quad (3.62)$$

onde $E_0^{(t, y)}$ é a energia da partícula livre em t e y , enquanto os autoestados serão

$$\Psi_{n_+, n_-}^{p_t, p_y} = \sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} f_{n_+} \left(x \pm \frac{p_t}{\chi_+} \right) f_{n_-} \left(z \mp \frac{p_y}{\chi_-} \right) \varphi_\lambda e^{ip_t t - ip_y y}, \quad (3.63)$$

para o primeiro caso e

$$\begin{aligned} \Psi_{n_+, n_-}^{p_t, p_y} = & \sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} f_{n_+} \left(x - \frac{eE_A p_t}{e^2 E_A^2 + \eta^2 E_S^2} \right) f_{n_-} \left(z - \frac{eB_A p_t}{e^2 B_A^2 + \eta^2 B_S^2} \right) \times \\ & \times \varphi_\lambda e^{\frac{i\eta E_S p_t t}{eE_A} \sqrt{1 + \frac{\eta^2 E_S^2}{(e^2 E_A^2 + \eta^2 E_S^2)}} - i \frac{\eta B_S p_y y}{eB_A} \sqrt{1 + \frac{\eta^2 B_S^2}{(e^2 B_A^2 + \eta^2 B_S^2)}}} \end{aligned} \quad (3.64)$$

para o segundo.

Tirando o traço,

$$\text{Tre}^{-i\tau\mathcal{H}} = \int d^4x \frac{dp_t dp_y}{(2\pi)^2} \sum_{\lambda, n_+, n_-} |\Psi_{n_+, n_-}^{p_t, p_y}|^2 \text{tr}_{\text{Dirac}} e^{-i\tau E_{n_+, n_-}^\lambda}, \quad (3.65)$$

chega-se a

$$\bar{\Gamma}[A, S] = -\frac{i}{8\pi^2} \int d^4x \frac{d\tau}{\tau} \left[e^{-iM^2\tau} \frac{\Re \cos(\tau \Sigma_+)}{\Im \cos(\tau \bar{\Sigma}_+)} - \frac{e^{-im^2\tau}}{\tau^2} \right], \quad (3.66)$$

para ambos os casos, onde

$$\bar{\Sigma}_+ = \sqrt{\bar{\mathcal{V}} - 2\eta^2 m^2 S_\mu^2 + i\bar{\mathcal{W}}}. \quad (3.67)$$

Note que, agora, os argumentos das funções trigonométricas no numerador e denominador são diferentes, isto é, o argumento da integral não se trata mais do produto de cotangentes. Observe que a densidade de modos é influenciada apenas pelas frequências efetivas dos osciladores no segundo caso. Além disso, a massa na exponencial que acompanha o termo de normalização é diferente.

¹⁶ Pois, pode-se fazer mudança e redefinição da escala para que estes coeficientes reduzam à unidade, voltando a corresponder à escala física.

Por fim, expandindo em série através de (C.7) para encontrar os termos de subtração mínima ¹⁷ e performando uma rotação de Wick no tempo próprio, chega-se à ação generalizada de Euler-Heisenberg,

$$\bar{\Gamma}[A, S] = \frac{1}{8\pi^2} \int d^4x \frac{d\tau}{\tau} e^{-M^2\tau} \left[\frac{\Re \cosh(\tau \Sigma_+)}{\Im \cosh(\tau \bar{\Sigma}_+)} - \frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{3} (\bar{\mathcal{V}} - 3\mathcal{V} - 4\eta^2 m^2 S_\mu^2) \right]. \quad (3.68)$$

O termo de quarta ordem será

$$I_4 = \frac{\tau^2}{180} \left(7\bar{\mathcal{V}}^2 + \bar{\mathcal{W}}^2 - 30\bar{\mathcal{V}}\mathcal{V} + 15\mathcal{V}^2 - 15\mathcal{W}^2 \right) + \frac{2\tau^2}{3} \eta^4 m^4 \bar{S}_\mu^4, \quad (3.69)$$

que, no segundo caso, se resumem a

$$\frac{1}{3} (\bar{\mathcal{V}} - 3\mathcal{V}) = \frac{2}{3} (e^2 \mathcal{F}_A + \eta^2 \mathcal{F}_S) = \frac{1}{6} (e^2 F_{\mu\nu}^2 + \eta^2 S_{\mu\nu}^2) \quad (3.70)$$

e

$$\begin{aligned} I_4 &= -\frac{4\tau^2}{45} \left[(e^2 \mathcal{F}_A + \eta^2 \mathcal{F}_S)^2 + \frac{7}{4} (e^2 \mathcal{G}_A + \eta^2 \mathcal{G}_S)^2 \right] + \frac{2\tau^2}{3} \eta^4 m^4 \bar{S}_\mu^4, \\ &= -\frac{1}{180} \left[(e^2 F_{\mu\nu}^2 + \eta^2 S_{\mu\nu}^2)^2 + \frac{7}{4} (e^2 \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \eta^2 \tilde{S}^{\mu\nu} S_{\mu\nu})^2 \right] + \frac{2\tau^2}{3} \eta^4 m^4 \bar{S}_\mu^4, \end{aligned} \quad (3.71)$$

após utilizar $A_\mu S^\mu = 0$.

Naturalmente, o próximo passo é checar se a solução exata condiz com o primeiro termo não trivial da ação efetiva obtida via análise perturbativa.

3.3 Análise perturbativa

Começa-se comparando (3.68) com a ação obtida perturbativamente à partir de (3.3), isto é,

$$\Gamma[A, S] = i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{Tr} \left[(i\not{\partial} - m)^{-1} (\not{V}_R \text{P}_R + \not{V}_L \text{P}_L) \right], \quad (3.72)$$

tomando cuidado com relação à γ^5 durante regularização dimensional ¹⁸. Em segunda ordem, tem-se

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}[A, S] &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4x d^4y \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x-y)} \left[I_1 (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) V_R^\mu(y) V_R^\nu(x) + \right. \\ &\quad \left. + m^2 I_2 (V_R^\mu(y) V_\mu^L(x) - V_R^\mu(y) V_\mu^R(x)) \right] + \left(\begin{matrix} V_R \leftrightarrow V_L \\ P_R \leftrightarrow P_L \end{matrix} \right), \end{aligned} \quad (3.73)$$

¹⁷ Que agora também incluirá os termos necessários para que, quando somados ao fator de normalização, “corrijam” a exponencial que acompanha este, que passa a conter M^2 ao invés de m^2 .

¹⁸ Como discutido no Apêndice C, no artigo escrito por t’Hooft e Veltman (1972) e no livro do Collins (1984).

onde p_μ é o momento dos campos externos. Segue que

$$\begin{cases} V_R^\mu V_R^\nu + V_L^\mu V_L^\nu = 2(e^2 A^\mu A^\nu + \eta^2 S^\mu S^\nu), \\ \left(V_R^\mu V_\mu^L - V_R^\mu V_\mu^R\right) + \left(V_L^\mu V_\mu^R - V_L^\mu V_\mu^L\right) = -4\eta^2 S_\mu^2. \end{cases} \quad (3.74)$$

Por sua vez,

$$\begin{cases} I_1 := \frac{\Delta}{6} - \int_0^1 du (1-u)u \ln \left[1 - u(1-u) \frac{p^2}{m^2} \right], \\ I_2 := \Delta - \int_0^1 du \ln \left[1 - u(1-u) \frac{p^2}{m^2} \right], \end{cases} \quad (3.75)$$

são os fatores de forma, com

$$\Delta = \frac{2}{\varepsilon} + \ln(4\pi) - \gamma - \ln \frac{m^2}{\mu^2} \rightarrow \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-\tau m^2}, \quad (3.76)$$

sendo γ a constante de Euler-Mascheroni e $\varepsilon = D - 4$. Em baixas energias ($p^2 \ll m^2$), (3.73) resulta em

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}[A, S] = & \frac{-1}{8\pi^2} \int d^4x \left[\frac{2\Delta}{3} \left(e^2 \mathcal{F}_A + \eta^2 \mathcal{F}_S + 2\eta^2 m^2 S_\mu^2 \right) - \eta^2 S_\mu \square S^\mu - \right. \\ & \left. - \frac{1}{15m^2} \left(e^2 F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} + \eta^2 S_{\mu\nu} \square S^{\mu\nu} + 5\eta^2 S_\mu \square \square S^\mu \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{m^4} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Por sua vez, o termo de segunda ordem da (3.68) quando $S_\mu A^\mu = 0$ será

$$\Gamma^{(2)}[A, S] = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-M^2 \tau} \frac{2}{3} \left[e^2 \mathcal{F}_A + \eta^2 \mathcal{F}_S + 2\eta^2 m^2 \bar{S}_\mu^2 \right], \quad (3.78)$$

que concorda com (3.77) na aproximação de campos constantes, como esperado, ao utilizar (D.3),

$$\Delta_M := \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-M^2 \tau} = \lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(z) = N_\varepsilon - \ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) = \Delta - \ln \left(1 - \frac{\eta^2 S^2}{m^2} \right), \quad (3.79)$$

e nota-se que $\Delta_M \approx \Delta$, visto que o segundo termo é finito, enquanto os demais termos desacoplam, concordando com o teorema de Appelquist-Carrazzone, ou se anulam (por serem constantes). Pode-se ver então que, se $\mathcal{H}_5 = 0$, isto é,

$$(\partial_\mu S^\mu + 2eiA_\mu S^\mu + 2S^\mu \partial_\mu) \psi = 0, \quad (3.80)$$

como fora discutido anteriormente, o modelo é “seguro”. Se não, este termo volta a causar problemas na análise perturbativa, por causa de termos como $S_\mu \square S^\mu$.

Pode-se ver que, quando os férmions não são massivos, então $m^2 I_2 = 0$. Neste caso, se o campo axial for constante, não há influencia nesta ordem e portanto ele não é capaz de criar partículas não massivas sozinho (MAROTO, 1999), como será mostrado em mais detalhes no próximo capítulo.

Com este resultado em mãos, será possível investigar as consequências das correções quânticas para a dinâmica dos campos envolvidos neste modelo.

4 RESULTADOS E APLICAÇÕES

Neste capítulo, obtém-se a anomalia quiral induzida pelo pseudo-vetor, tanto perturbativamente quanto via ação de Euler-Heisenberg Generalizada obtida no capítulo anterior, aproveitando para confirmar novamente a consistência da solução exata. Depois explora-se a aplicação para o cálculo da taxa de criação dos pares de partículas, que, neste contexto, contribui para a assimetria entre matéria e anti-matéria, explorada mais a fundo em um modelo simplificado de bariogênese ao final.

4.1 Anomalia quiral

Como o campo axial está associado à corrente quiral, ao continuar a análise perturbativa de (3.72) até a terceira ordem, obtém-se

$$\begin{aligned} \Gamma^{(3)}[A, S] = & \frac{-i}{3} \int d^4x d^4y d^4z \frac{1}{(i\rlap{\not{D}} - m)_{x,z}} \times \\ & \times (e\rlap{\not{A}} + \eta\rlap{\not{S}}\gamma_5)_z \frac{1}{(i\rlap{\not{D}} - m)_{z,y}} \times \\ & \times (e\rlap{\not{A}} + \eta\rlap{\not{S}}\gamma_5)_y \frac{1}{(i\rlap{\not{D}} - m)_{y,x}} (e\rlap{\not{A}} + \eta\rlap{\not{S}}\gamma_5)_x, \end{aligned} \quad (4.1)$$

que se anula (via teorema de Furry), para todos os termos com exceção dos dois diagramas anômalos da Figura 2, isto é,

$$\begin{aligned} \Gamma^{(3)}[A, S] = & \frac{-i\eta}{3} \int d^4x d^4y d^4z \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \times \\ & \times e^{ik_1 \cdot x + ik_2 \cdot y} \delta(p - k_1 - k_2) \times \\ & \times \left(3e^2 A_x^\mu A_y^\nu S_z^\tau I_{\mu\nu\tau} + \eta^2 S_x^\mu S_y^\nu S_z^\tau I_{\mu\nu\tau}^{(5)} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu\tau} := & \int \frac{d^D\tilde{q}}{(2\pi)^D} \text{tr} \left[\frac{i}{\rlap{\not{q}} - m} \bar{\gamma}_\tau \gamma_5 \frac{i}{\rlap{\not{q}} - \rlap{\not{p}} - m} \times \right. \\ & \times \bar{\gamma}_\nu \frac{i}{\rlap{\not{q}} - \rlap{\not{k}}_1 - m} \bar{\gamma}_\mu \left. \right] + \left[\begin{array}{l} \mu \leftrightarrow \nu \\ k_1 \leftrightarrow k_2 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

e

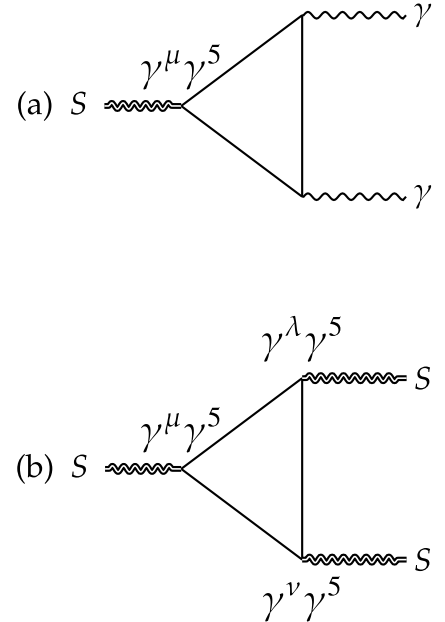
$$I_{\mu\nu\tau}^{(5)} := \int \frac{d^D\tilde{q}}{(2\pi)^D} \text{tr} \left[\frac{i}{\rlap{\not{q}} - m} \bar{\gamma}_\tau \gamma_5 \frac{i}{\rlap{\not{q}} - \rlap{\not{p}} - m} \bar{\gamma}_\nu \gamma_5 \frac{i}{\rlap{\not{q}} - \rlap{\not{k}}_1 - m} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \right] + \left[\begin{array}{l} \mu \leftrightarrow \nu \\ k_1 \leftrightarrow k_2 \end{array} \right], \quad (4.4)$$

em que utiliza-se a notação do Collins (1984)¹. Essas integrais devem ser tratadas com cuidado, por serem linearmente divergentes². Expandindo em série de Taylor,

¹ Conforme discussão no Apêndice C.

² Para mais detalhes do tratamento neste contexto, veja Bertlmann (2000).

Figura 2 – Diagramas triangulares correspondentes aos processos (a) $S \rightarrow \gamma\gamma$ (e permutações) e (b) $S \rightarrow SS$.



Fonte: Diagramas de Feynman elaborados pelo autor utilizando tikz-feynman (ELLIS, 2016).

transladando as coordenadas para $q \rightarrow q + a$ e $q \rightarrow q + b$ em cada termo da integral, denominada de $I_{\mu\nu\tau}(a, b)$ e subtraindo de $I_{\mu\nu\tau}(0, 0)$, obtém-se

$$I_{\mu\nu\tau}(a, b) - I_{\mu\nu\tau}(0, 0) = -\frac{i\varepsilon_{\lambda\tau\nu\mu}(a-b)^\lambda}{8\pi^2}. \quad (4.5)$$

Para o diagrama (a), busca-se satisfazer a identidade de Ward correspondente à conservação de corrente,

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \implies k_1^\mu I_{\mu\nu\tau} = k_2^\mu I_{\mu\nu\tau} = 0. \quad (4.6)$$

Por sua vez, quanto à corrente axial, utiliza-se o resultado (D.14) para obter

$$p^\lambda I_{\mu\nu\lambda} = 2imI_{\mu\nu} - \Delta_{\mu\nu}, \quad (4.7)$$

onde

$$I_{\mu\nu} := \int \frac{d^D \tilde{q}}{(2\pi)^D} \text{tr} \left[\frac{i}{\not{q} - m} \gamma_5 \frac{i}{\not{q} - \not{p} - m} \bar{\gamma}_\nu \frac{i}{\not{q} - \not{k}_1 - m} \bar{\gamma}_\mu \right] + \left[\begin{matrix} \mu \leftrightarrow \nu \\ k_1 \leftrightarrow k_2 \end{matrix} \right], \quad (4.8)$$

que é finito, e

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu} &= \int \frac{d^D \tilde{q}}{(2\pi)^D} k^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \text{tr} \left[\frac{1}{\not{q} - \not{k}_2 - m} \gamma_5 \gamma_\nu \frac{1}{\not{q} - \not{k}_1 - m} \bar{\gamma}_\mu \right] + \left[\begin{matrix} \mu \leftrightarrow \nu \\ k_1 \leftrightarrow k_2 \end{matrix} \right], \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_{\alpha\nu\beta\mu} k_2^\alpha k_1^\beta, \end{aligned} \quad (4.9)$$

resultando na anomalia quirar de Adler-Bell-Jackiw (ADLER, 1969; BELL; JACKIW, 1969)

$$\partial_\mu \langle j_5^\mu \rangle_{(a)} = 2im \langle j_5 \rangle_{(a)} - \frac{e^2}{8\pi^2} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (4.10)$$

onde $\langle j_5 \rangle_{(a)} := \frac{i}{3} A^\mu A^\nu I_{\mu\nu}$. O procedimento para resolução do diagrama (b) é similar, porém, ao invés da conservação de corrente, utiliza-se a simetria do diagrama para obter

$$\partial_\mu \langle J_5^\mu \rangle_{(b)} = 2im \langle J_5 \rangle_{(b)} - \frac{\eta^2}{24\pi^2} \tilde{S}^{\mu\nu} S_{\mu\nu}. \quad (4.11)$$

Pode-se, por exemplo, calcular as taxas de decaimento dos processos $S \rightarrow \gamma\gamma$ e $S \rightarrow SS$ separadamente, em analogia com o caso do pión em aproximação de campo fraco,

$$\Gamma(S \rightarrow \gamma\gamma) \propto \frac{e^4 m^3}{256\pi^3} \quad \text{e} \quad \Gamma(S \rightarrow SS) \propto \frac{\eta^4 m^3}{2304\pi^3}, \quad (4.12)$$

cujas proporção será

$$\frac{\Gamma(S \rightarrow \gamma\gamma)}{\Gamma(S \rightarrow SS)} = \frac{9e^4}{\eta^4}, \quad (4.13)$$

o que indica uma clara preferência de ocorrência do processo $S \rightarrow \gamma\gamma$ caso $\eta < \sqrt{3} e$, provendo um mecanismo para magnetogênese em contextos como o de universo primordial (BENEVIDES; DABHOLKAR; KOBAYASHI, 2018). Estes diagramas induzem os termos

$$\Gamma^{(3)} = -\frac{\eta}{4\pi^2} \int d^4x \left[e^2 S_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{\eta^2}{6} \int d^4y (\partial_\alpha S^\alpha)_x \square_{xy}^{-1} (S_{\mu\nu} \tilde{S}^{\mu\nu})_y \right], \quad (4.14)$$

na ação obtida perturbativamente, onde o subíndice x, y indica as coordenadas. Portanto, o conteúdo de férmions do modelo padrão é suficiente para cancelar a anomalia nesta teoria ³. Quando o vetor axial está relacionado à torção, o primeiro termo é chamado Carroll-Field-Jackiw-Torção (NASCIMENTO; PAGANELLY; PETROV; PORFIRIO, 2025).

A ação efetiva (3.68) pode passar a impressão de não conter anomalias, o que não é verdade, visto que estas estão relacionadas com a medida funcional (FUJIKAWA; SUZUKI, 2004). Portanto, para conectar (3.68) à anomalia, utiliza-se a definição clássica da corrente quirial, isto é,

$$\langle j_5^\mu \rangle = \frac{\delta \Gamma[A, S]}{\delta S_\mu}. \quad (4.15)$$

O problema pode ser simplificado ao escrever a ação efetiva como

$$\Gamma[A, S] = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau} e^{-m^2\tau} f[A, S] - \frac{1}{8\pi^2} R, \quad (4.16)$$

onde

$$f[A, S] := \text{Tr} [e^{-\tau \mathcal{H}}] = \frac{1}{4\pi^2} \int d^4x e^{\tau \eta^2 S^2} \overline{\mathcal{W}} \frac{\Re \cosh(\tau \Sigma_+)}{\Im \cosh(\tau \bar{\Sigma}_+)}, \quad (4.17)$$

é o traço do Hessiano,

$$\mathcal{H} = (\Pi + \eta S \gamma^5)^2 - \frac{1}{2} (e F_{\mu\nu} - \eta S_{\mu\nu} \gamma^5) \sigma^{\mu\nu} - 2\eta m \not{S} \gamma^5, \quad (4.18)$$

e

$$R := -\Delta_M \int d^4x \left[\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{6} \left(e^2 F_{\mu\nu}^2 + \eta^2 S_{\mu\nu}^2 + 8\eta^2 m^2 S_\mu^2 \right) \right] \quad (4.19)$$

é o termo de subtração mínima, com Δ_M dado por (3.79). Particularmente, observe que

$$\frac{\delta \Delta_M(y)}{\delta S_\mu(x)} = -\frac{2\eta^2}{M^2} S^\mu(y) \delta^4(x-y). \quad (4.20)$$

Aplicando a derivada variacional no termo de subtração mínima, obtém-se então

$$\frac{\delta R}{\delta S_\mu} = -\frac{\eta^2}{M^2} S^\mu \left[\frac{2}{\tau^2} + \frac{1}{3} \left(e^2 F_{\alpha\beta}^2 + \eta^2 S_{\alpha\beta}^2 + 4\eta^2 m^2 S_\mu^2 \right) \right] + \frac{8\Delta_M}{3} \eta^2 m^2 S^\mu, \quad (4.21)$$

³ Conforme discutido nos artigos escritos por Dobado e Maroto (1996) e Batra, Dobrescu e Spivak (2006).

após integração no espaço-tempo e utilizando a aproximação de $S_{\mu\nu}$ constante, com a qual esta ação efetiva fora construída.

Prosseguindo com a conta para o primeiro termo chega-se ao resultado

$$\begin{aligned} \langle j_5^\mu \rangle = & \frac{1}{2} \int \frac{d\tau}{\tau} e^{-M^2\tau} \frac{\delta f}{\delta S_\mu} + \eta^2 S^\mu \left\{ \int_0^\infty d\tau e^{-M^2\tau} f - \frac{1}{2M^2\pi^2} \left[\frac{1}{\tau^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{6} \left(e^2 F_{\alpha\beta}^2 + \eta^2 S_{\alpha\beta}^2 + 8\eta^2 m^2 S_\mu^2 \right) \right] \right\} + \frac{8\Delta_M}{3} \eta^2 m^2 S^\mu. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Tomando o divergente desta expressão na aproximação de invariantes estáticos, é possível concluir que

$$\partial_\mu \langle j_5^\mu \rangle = 2\eta^2 (\partial_\mu S^\mu) \mathcal{L}_{\text{EH}} + \int d\tau e^{-M^2\tau} \left(\eta^2 S^\mu \partial_\mu + \frac{1}{2\tau} \partial_\mu \frac{\delta}{\delta S_\mu} \right) f. \quad (4.23)$$

E, claro, quando $\mathcal{H}_5 = 0$, então

$$\partial_\mu \langle j_5^\mu \rangle = \frac{1}{2} \int \frac{d\tau}{\tau} e^{-M^2\tau} \partial_\mu \frac{\delta}{\delta S_\mu} f. \quad (4.24)$$

Resta calcular o termo sobrevivente, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta S_\mu} f &= -\tau \text{Tr} \left[\left(\frac{\delta}{\delta S_\mu} \mathcal{H} \right) e^{-\tau \mathcal{H}} \right] \\ &= -\tau \text{Tr} \left[\eta \left(\{ \gamma^5, \Pi^\mu \} + 2\eta S^\mu - 2m \gamma^\mu \gamma^5 \right) e^{-\tau \mathcal{H}} \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

A expressão completa vai corresponder à soma de valores esperados dos operadores presentes

$$\partial_\mu \langle j_5^\mu \rangle = \eta \left(m \partial_\mu \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \rangle - \frac{1}{2} \partial_\mu \langle \bar{\psi} \{ \gamma^5, \Pi^\mu \} \psi \rangle \right), \quad (4.26)$$

que, após utilização das equações de movimento,

$$(\not{D} - m) \psi = 0 \implies \Pi^\mu \psi = (\eta S^\mu \gamma^5 + m \gamma^\mu) \psi, \quad (4.27)$$

isto é,

$$\{ \gamma^5, \Pi^\mu \} \psi = 2\eta S^\mu \psi + m \{ \gamma^5, \gamma^\mu \} \psi = 2\eta S^\mu \psi, \quad (4.28)$$

se traduz à expressão

$$\partial_\mu \langle j_5^\mu \rangle = \eta m \partial_\mu \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \rangle, \quad (4.29)$$

que já sinaliza consistência do subespaço de parâmetros da solução exata aqui obtida.

Vale fazer uma pequena pausa para ressaltar que, no caso geral de invariantes não constantes e $\mathcal{H}_5 \neq 0$, o termo de subtração mínima poderia introduzir, através da equação de Proca,

$$\Delta_M \int d^4x \frac{\delta S_{\alpha\beta}^2}{\delta S^\mu} = -2\Delta_M \partial_\nu S^{\nu\mu} = 2 (M_S^2 S^\mu - \langle j_5^\mu \rangle), \quad (4.30)$$

que levaria à expressão

$$\langle j_5^\mu \rangle = \mathcal{N} \left(\langle j_5^\mu \rangle_0 - \frac{M_S^2}{24\pi^2} S^\mu \right), \quad (4.31)$$

onde $\langle j_5^\mu \rangle_0$ equivale à expressão em (4.22) e

$$\mathcal{N} = \frac{24\pi^2}{24\pi^2 - \Delta_M} \quad (4.32)$$

é uma constante de normalização, enquanto seu divergente seria dado por

$$\partial_\mu \langle j_5^\mu \rangle = \mathcal{N} \left[\partial_\mu \langle j_5^\mu \rangle_0 + (\langle j_5^\mu \rangle + \mathcal{L}_{\text{EH}} S^\mu) \partial_\mu S^2 + 2S^\mu \partial_\mu \mathcal{L}_{\text{EH}} - \frac{M_S^2}{24\pi^2} \partial_\mu S^\mu \right], \quad (4.33)$$

com $\partial_\mu \langle j_5^\mu \rangle_0$ equivalente a (4.23). Em partes desta expressão, podem ser vistas outras contribuições, como uma similar ao termo de Nieh-Yan (M. RASULIAN; TORABIAN, 2023), porém elas acompanham expressões complicadas (contendo derivadas dos invariantes) escondidas nos demais termos, o que pode ser indicativo de potenciais instabilidades inconsistentes com as identidades e equações de continuidade clássicas, exceto em condições muito especiais onde algumas dessas expressões possam corresponder a vínculos, quando for possível. Porém, como o foco aqui é investigar a solução exata obtida na aproximação de invariantes contantes, esta análise não será aprofundada.

Voltando à (4.23), é possível obter analiticamente a anomalia à partir deste resultado da seguinte maneira: Sabe-se que o valor esperado de observáveis obedecem às identidades de seus equivalentes clássicos. No caso da corrente quiral, vale a equação de continuidade

$$\partial_\mu \langle j_5^\mu \rangle = 2im \langle j_5 \rangle, \quad (4.34)$$

onde $\langle j_5 \rangle := \langle \bar{\psi} \gamma^5 \psi \rangle$. Por sua vez, como a anomalia está relacionada com a parte divergente dos diagramas anômalos, pode-se calcular diretamente

$$\langle J_5 \rangle \sim \frac{im}{32\pi^2} \int_0^\infty d\tau e^{-i\tau m^2} \frac{\bar{\mathcal{W}}}{\Im \cosh(\tau \bar{\Sigma}_+)} \text{tr} \left(\gamma^5 e^{-\frac{i\tau}{2} V_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}} \right) \quad (4.35)$$

que é o **único** termo que contribui para a anomalia (no subespaço de interesse), visto que os traços do produto contendo um número ímpar de matrizes γ^μ e ou de γ^5 com menos que 4 outras γ^μ se anulam e que as contribuições das potências ímpares de outras componentes do Hessiano dependem dos termos proporcionais a $(\partial_\mu S^\mu)$ e $A_\mu S^\mu$ que se anulam quando $\mathcal{H}_5 = 0$ vale. Assim, tem-se

$$\text{tr} \left(\gamma^5 e^{-\frac{i\tau}{2} V_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}} \right) = -4im \Im \cosh(\tau \bar{\Sigma}_+) \quad (4.36)$$

resultando em

$$\partial_\mu \langle J_5^\mu \rangle = 2im \langle J_5 \rangle = \frac{m^2}{2\pi^2 M^2} \bar{\mathcal{W}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi^2} \bar{\mathcal{W}}. \quad (4.37)$$

Depois disso, em linhas gerais, regularizando a corrente por método de Pauli-Villars, ao trocar $\mathcal{H} \rightarrow \frac{\mathcal{H}}{m_R^2}$ e tomar $\lim m_R \rightarrow \infty$, como feito por ⁴ Bastianelli e Broccoli (2019) e nos capítulos 4.5 do livro escrito por Dobado, Gomez–Nicola, Maroto e Pelaez (1997) e 4.8 no livro do ⁵ Bertlmann (2000). Segue que é possível manter (4.10) já presente em (4.37), porém recuperando a expressão correta da anomalia quiral em (4.11), o que fornece suporte à consistência da solução exata aqui obtida. Curiosamente, mesmo assumindo campos abelianos, note que a estrutura da anomalia (o coeficiente que acompanha o pseudo-vetor) é a mesma de teorias não abelianas (como se o vetor axial fosse não abeliano).

4.2 Criação de partículas

Assim como fora discutido rapidamente ao final do capítulo 2, quando feita a integração do funcional gerador das funções de Green sobre os férmions, o domínio de validade da ação efetiva aqui está limitado a configurações onde estes se encontram em estado de vácuo. Isso implica em perda de unitariedade após certa escala de energia. Portanto a quantidade

$$P_{\text{trans}}[A, S] := 1 - |\langle A, S | S_{\text{eff}} | A, S \rangle|^2 = 1 - \exp(-2\Im\Gamma_{\text{eff}}[A, S]), \quad (4.38)$$

em que S_{eff} é a matriz de espalhamento construída com base na ação efetiva $\Gamma[A, S]$, mede a probabilidade de criar partículas reais (SCHWINGER, 1951), em outras palavras, $P_{\text{trans}}[A, S]$ é denominado “probabilidade de transição do vácuo”. Por sua vez, quando os invariantes são constantes, pode-se notar que, em geral,

$$\Gamma_{\text{EH}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{EH}} = TV \mathcal{L}_{\text{EH}}, \quad (4.39)$$

onde T é o intervalo de tempo e V é o volume do espaço.

Este fenômeno pode ser modelado como um processo Poissoniano ⁶, isto é, imagine que a probabilidade de criação de um certo número N dos pares de partículas seja ditado por uma distribuição de Poisson,

$$P[N] = \frac{\lambda^N e^{-\lambda}}{N!}, \quad (4.40)$$

onde $\lambda = \langle N \rangle = r\Delta t$ é o número médio de pares criados a uma taxa r no intervalo de tempo Δt . Observe então que $\exp(-2\Im\Gamma_{\text{eff}}[A, S])$ corresponde à probabilidade que nenhum par de partículas seja criado, enquanto $P_{\text{trans}}[A, S]$ mede a probabilidade de criar qualquer quantidade (exceto zero) dos pares e $\mathcal{L}_{\text{EH}}$ corresponde à taxa (r) de

⁴ Que também analisa férmions acoplados à corrente vetorial e pseudo-vetorial através do mesmo formalismo por “Heat-Kernel”, de maneira que a regularização da equação (79) deste livro resulta na corrente da Eq. (83), contendo o fator correto de 1/3 no setor pseudo-vetorial.

⁵ Especificamente na equação (4.382) deste.

⁶ Para mais detalhes, veja o artigo escrito por Ruffini, Vereshchagin e Xue (2010).

criação das partículas por volume. Portanto, definindo a densidade de probabilidade e expandindo a exponencial, obtém-se

$$\rho[A, S] := \frac{P_{\text{trans}}[A, S]}{TV} \approx 2\Im \mathcal{L}_{\text{EH}}. \quad (4.41)$$

Quando a ação efetiva é bem comportada, existem domínios fisicamente realizáveis onde $\Im \mathcal{L} \simeq 0$. A transição do vácuo ocorre quando o sistema se aproxima das configurações em que as contribuições dos polos de $\Im \mathcal{L}_{\text{EH}}$ passa a ser dominante. Para (2.86), apenas o campo elétrico cria partículas, visto que só o seno continua tendo polos após a renormalização⁷, situados em

$$\tau_n = \frac{n\pi}{eE_A}. \quad (4.42)$$

Tomando o limite em que $B_A \rightarrow 0$, (2.88), pode-se ignorar a constante $\mathcal{F}_A = -\frac{1}{2}E_A^2$ e integrar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EH}} &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\tau^3} e^{-m^2\tau} [e\tau E_A \cot(e\tau E_A)] = \frac{i}{8\pi} \sum_{n=1}^\infty \text{Res} \left[\frac{eE_A \cot(e\tau E_A)}{\tau^2} e^{-\tau m^2}, \tau_n \right], \\ &= \frac{i}{8\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{e^2 E_A^2}{n^2 \pi^2} e^{-\frac{n\pi m^2}{eE_A}} = \frac{i\alpha E_A^2}{2\pi^2} \text{Li}_2 \left(e^{-\frac{\pi m^2}{eE_A}} \right), \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$ é a constante de estrutura fina e $\text{Li}_2(x)$ é a função dilogarítmo. Portanto, a taxa de criação dos pares de partículas neste caso será

$$\rho[A] = \frac{\alpha E_A^2}{\pi^2} \text{Li}_2 \left(e^{-\frac{\pi m^2}{eE_A}} \right), \quad (4.44)$$

que pode ser visualizada na Figura 3. Quando os férmions não tem massa, é possível ver que há uma taxa de criação das partículas que coincide com a componente imaginária do fator de forma (2.96), conforme discutido no artigo dos autores Dobado e Maroto (1999), isto é,

$$\rho[A] = \frac{e^2 E_A^2}{24\pi}. \quad (4.45)$$

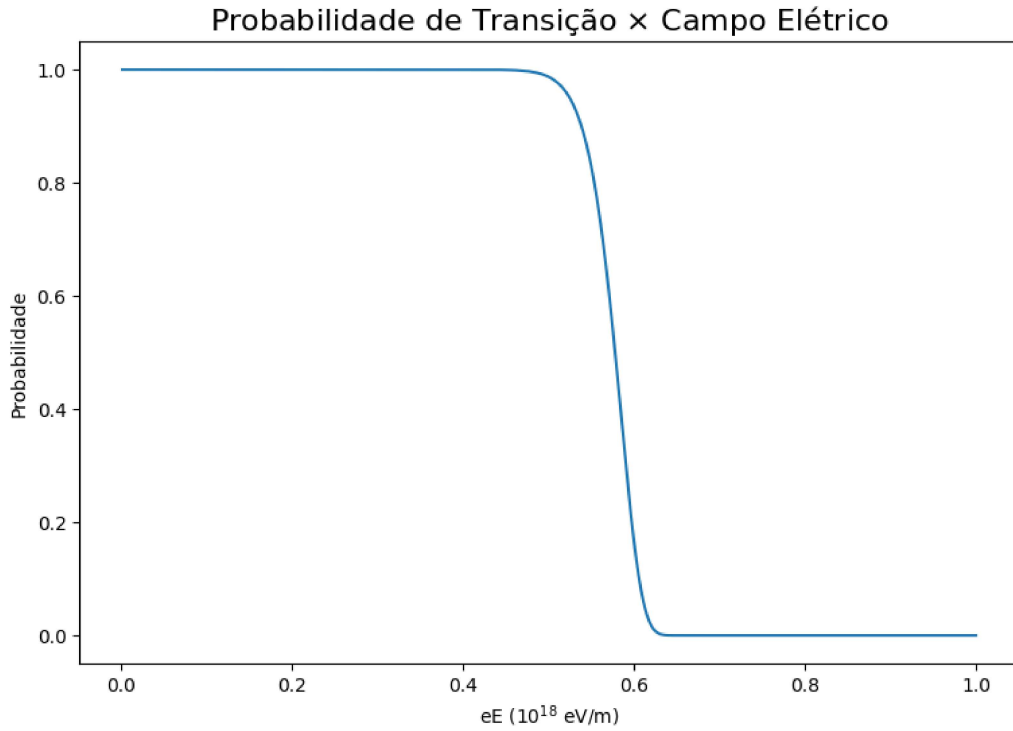
Observe que os valores do campo elétrico em que a probabilidade de transição do vácuo se torna relevante são da ordem do campo crítico, que é definido como aquele que realiza trabalho igual à energia de repouso da partícula através de uma distância do comprimento de Compton desta, isto é, voltando para o sistema internacional de unidades momentaneamente, $E_{\text{crit}} = \frac{m^2 c^3}{\hbar e} = \frac{mc^2}{\lambda_{\text{ce}}}$. Para elétrons, E_{crit} é da ordem de $\sim 10^{18} \text{ V/m}$.

Quando há campo axial constante presente, segue, de (3.68), que

$$\rho[A, S] = \frac{e^2 E_A^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left(n\pi \sqrt{1 - \frac{4\eta^2 m^2 S_\mu^2}{e^2 E_A^2}} \right) e^{-\frac{n\pi M^2}{eE_A}}, \quad (4.46)$$

⁷ Pois o polo em $\tau = 0$ advindo de ambos os senos e de $\frac{1}{\tau}$ fora excluído.

Figura 3 – Probabilidades de transição de vácuo para um pulso adiabático de laser usual (ALKOFER *et al.*, 2001), de duração $\sim 80 fs$ e comprimento de onda $\lambda \sim 0.15 nm$.



Fonte: Adaptado pelo autor à partir do relatório técnico escrito por Ott (2016).

em concordância com o resultado anterior obtido por Maroto (1999), porém válida em condições um pouco mais abrangentes, estando limitada a $4\eta^2 m^2 S^2 \leq e^2 E^2$ ou vetor axial tipo espaço. Para campo axial propagante, possuindo campos “eletromagnéticos” análogos E_S e B_S , pode-se obter

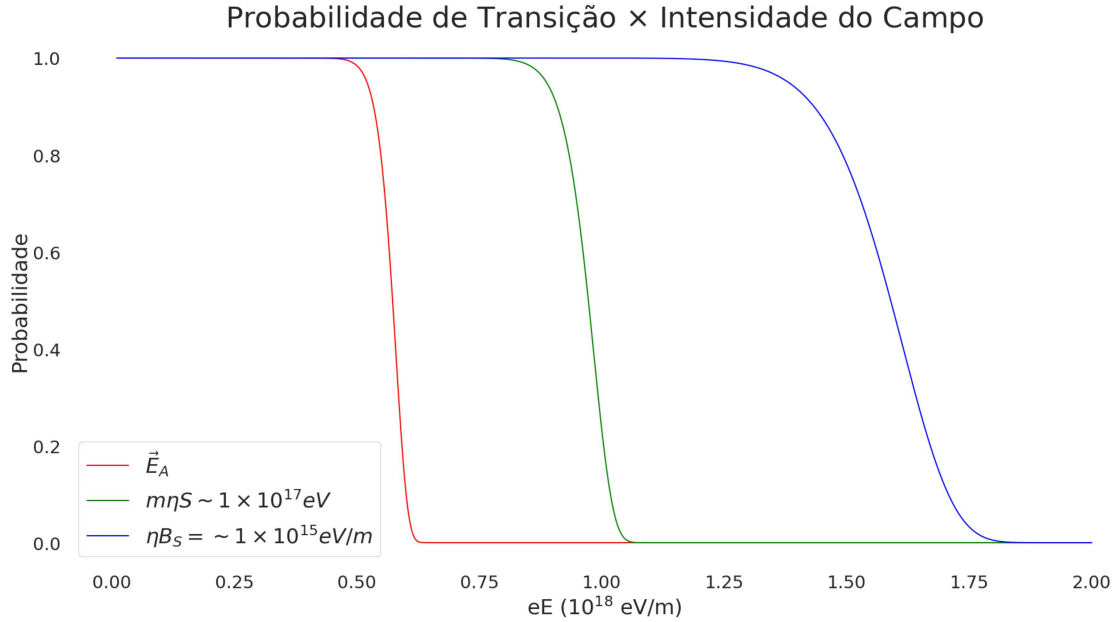
$$\rho[A, S] = \frac{e\eta E_A B_S}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{\cos\left(n\pi\sqrt{1 + \frac{\eta^2(B_S^2 - 4m^2 S_\mu^2)}{e^2 E_A^2}}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi\eta B_S}{eE_A}\right)} e^{-\frac{n\pi M^2}{eE_A}}, \quad (4.47)$$

que representa, segundo a revisão bibliográfica anteriormente conduzida, uma expressão original para a taxa de criação de pares no cenário de potencial eletromagnético e vetor axial propagantes. O campo “elétrico” axial E_S pode criar partículas assim como o campo elétrico na expressão (4.46), se reduzindo ao caso (4.44) quando o vetor axial é tipo luz, bem como a (4.45) se os férmions não forem massivos, trocando-se $e \rightarrow \eta$, $E_A \rightarrow E_S$ e $m \rightarrow M$.

Pode-se ver que, em geral, o campo axial tende a estabilizar o vácuo, como visto na Figura 4, ou seja, quando há pseudo-vetor não nulo, o campo elétrico necessário para desencadear o processo de criação de partículas é maior do que o necessário quando não há vetor axial presente. Isso é consequência direta da contribuição deste para a anomalia, que está relacionada com o número mínimo de partículas que podem ser

criadas adiabaticamente ⁸.

Figura 4 – Probabilidades de transição de vácuo para o mesmo pulso adiabático de laser usual anterior. Os casos (4.44), (4.46) e (4.47) correspondem às linhas vermelha, verde e azul respectivamente.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025b). Código disponível em:
<https://github.com/8stringtheorist/Schwinger-Effect>.

4.3 Assimetria bariônica

Por fim, nessa seção, considera-se uma análise da viabilidade do modelo “de brinquedo” ⁹ em que um pseudo-vetor, como o presente na teoria eletro-axial, gera a assimetria bariônica requerida para explicar o universo atual. Para isso, é preciso entreter, a nível de estudo conceitual, a ideia de torção dinâmica (ou outro campo pseudo-vetorial) ter existido no universo primordial, cuja consequência permitirá comentar rapidamente nesta relação entre a criação de partículas e a anomalia quirial.

Aqui, no entanto, o problema será tratado de maneira qualitativa, aproximada e direta, partindo do fato de que apenas o pseudo-traço do tensor de torção (vetor axial S^μ) acopla aos férmions, ficando recomendado a leitura dos artigos escritos por Shapiro (2002), Hehl e Obukhov (2003) e Mavromatos e Sarkar (2014), caso o leitor queira se aprofundar nos aspectos físicos por trás do campo de torção. Também serão utilizados resultados e dados de cosmologia, baseados nas referências dos autores Rubakov e Shaposhnikov (1996), Kim, Lee e Yoon (2009), Kolb e Turner (2019) e Aghanim *et al.* (2020), sem introduzi-los criteriosamente, pois este não é o objetivo principal do presente

⁸ Como explicado por Navarro-Salas (2021).

⁹ Tradução livre para “toy model”.

trabalho. No que segue, assume-se um espaço de curvatura nula, porém possivelmente contorcido, como justificativa para a existência de um vetor axial primordial massivo.

Em um modelo aproximado do universo primordial com torção, cuja consistência requer que seu pseudo-traço apresente uma massa (BERREDO-PEIXOTO; HELAYËL-NETO; SHAPIRO, 2000)

$$M_S \sim M_{\text{Planck}}, \quad (4.48)$$

a densidade de energia armazenada em S^μ , quando em equilíbrio térmico, será

$$\langle \mathcal{E} \rangle_S = \frac{3}{2\pi^2} \int_{M_S}^{\infty} \frac{\sqrt{\omega^2 - M_S^2}}{e^{\omega/T} - 1} \omega^2 d\omega, \quad (4.49)$$

Em que desconsidera-se o potencial químico, que não será necessário para o desenvolvimento a seguir. Pode-se começar a tratar o campo axial como clássico (de fundo), para fins práticos, quando a temperatura do universo atinge a escala de energia do próprio campo, isto é,

$$T \sim M_S. \quad (4.50)$$

Abaixo dessa temperatura tem-se

$$\langle \mathcal{E} \rangle_S \approx 3 (M_S)^{5/2} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{M_S}{T}}, \quad (4.51)$$

ou seja, a excitação de modos do campo S_μ deve diminuir em uma taxa $\propto e^{-M_S/T}$, de maneira que ele assume uma configuração de campo clássica¹⁰ por volta de $T \sim 10^{-1} M_S$, oscilando num regime aproximadamente não relativístico, com energia média por partícula

$$\langle E \rangle \approx M_S + \frac{3T}{2}. \quad (4.52)$$

Graças à dinâmica interna deste campo, o armazenamento da energia oscila entre $\frac{1}{2} M_S^2 \langle S_\mu^2 \rangle$ e os termos $\frac{1}{2} E_S^2$ e $\frac{1}{2} B_S^2$. Observe que, mesmo à temperatura zero, a energia restante é mais que suficiente para geração de partículas, visto que $M_S \gg m$. É claro que, com a diluição da energia por expansão do universo e dada a magnitude de M_S , a probabilidade de as partículas criadas voltarem a excitar modos do pseudo-vetor diminui em conjunto com a temperatura, de maneira que o campo de torção vai esgotando sua energia, até que o restante seja menor do que a energia do campo “elétrico” crítico associado ao férmion com o qual ela está acoplada ou até que a temperatura leve a uma taxa de interações menor do que a taxa de expansão do universo¹¹. Deste momento em diante, a energia restante é diluída até os momentos atuais.

¹⁰ Portanto um instanton similar aos descritos por Chandía e Zanelli (1997).

¹¹ Os detalhes relacionados a este critério podem ser vistos nos capítulos 3, 5 e 6 do livro escrito por Kolb e Turner (2019).

Antes de prosseguir, é preciso entender um pouco melhor a densidade de corrente. Observe que

$$\langle j^\mu \rangle = \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rangle = \langle \bar{\psi} \gamma^\mu (P_R + P_L) \psi \rangle = \langle j^\mu \rangle_R + \langle j^\mu \rangle_L, \quad (4.53)$$

enquanto a corrente quirál será

$$\langle j_5^\mu \rangle = \langle j^\mu \rangle_R - \langle j^\mu \rangle_L. \quad (4.54)$$

Como comentado antes, espera-se que a energia armazenada em S_μ seja transferida para as partículas e o campo eletromagnético de maneira que a anomalia gerada é conservada ao final (embora seja diluída com a expansão do universo). Então, à partir da temperatura em que $\tilde{S}^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \approx 0$, a anomalia estará associada ao campo vetorial, cuja integral do termo anômalo em (4.10) está relacionado à característica de Chern que, neste contexto, resulta em um número inteiro ¹², dado por

$$\int d^4x \partial_\mu \langle j^\mu \rangle_5 = \int d^4x \left(\partial_\mu \langle j^\mu \rangle_R - \partial_\mu \langle j^\mu \rangle_L \right) = N_R - N_L = N_5 \neq 0, \quad (4.55)$$

onde $N_{R/L}$ ¹³ está relacionado com a densidade de partículas no estado de vácuo (modos “zero”) em uma dada quiralidade. Sendo assim, embora não se tenha informação sobre S_μ satisfazer às condições que o tornariam uma característica de Chern ¹⁴, ou seja, embora à priori a integral do segundo termo em (4.11) possa assumir qualquer valor não necessariamente inteiro, o acoplamento e troca de energia entre estes setores acabam “permitindo que o conteúdo topológico de um setor seja transferido para o outro”, isto é, quando há um campo vetorial de calibre presente e também acoplado aos férmions, as configurações permitidas do pseudo-vetor S_μ de fundo são aquelas em que (4.55) vale.

Agora observe que

$$\begin{aligned} \int d^4x \partial_\mu \langle j^\mu \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \left(\partial_\mu \langle j^\mu \rangle_R + \partial_\mu \langle j^\mu \rangle_L \right), \\ &= [N_R(\infty) - N_R(-\infty)] + [N_L(\infty) - N_L(-\infty)] = 0 \implies \Delta N_R = -\Delta N_L. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Portanto, (4.55) implica em violação na conservação do número de partículas, representando a diferença na ocupação de “modos zero” em cada quiralidade após um tunelamento entre instantons ¹⁵, o que, mais tarde, leva à não conservação no número

¹² Para mais detalhes quanto à obtenção deste resultado, relação com o teorema de Atiyah-Singer, dentre outras informações, recomenda-se a leitura das seções 6.5 e 6.6 do livro do Bertlmann (2000).

¹³ Que também é chamado “winding number” na literatura, visto que, intuitivamente, ele conta o número de voltas que uma curva faz ao redor de um ponto.

¹⁴ Isto é, não foi discutida a possibilidade de S_μ ser um campo de calibre e não foi investigado seu comportamento como parte do fibrado principal de $SO(1, 3)$, quando ele advém da torção.

¹⁵ Para mais informações especificamente quanto a este contexto de bariogênese, recomenda-se consultar o artigo do Rubakov e Shaposhnikov (1996).

de bárions por processos da interação eletrofraca¹⁶. Este cenário, então, satisfaz todas as condições de Sakharov¹⁷ para bariogênese. Assim, pode-se concluir que

$$\rho[A, S] = \partial_\mu \langle j_5^\mu \rangle, \quad (4.57)$$

ou seja, o campo axial funciona como uma espécie de potencial químico, contribuindo para a assimetria entre matéria e anti-matéria, o que é uma consequência direta da quebra de simetria por inversão temporal (ou, equivalentemente, por conjugação de carga em conjunto com a inversão de paridade, via teorema CPT) induzida pelo pseudovetor, ainda que a ação não apresente termos que violem essas simetrias explicitamente.

Dadas as escalas de temperatura envolvidas, assuma que o processo todo é muito rápido, conservando a assimetria no número final de léptons após “desligamento” da torção. Assim, primeiro recorde, à partir de (4.40), que

$$N_5 = \int_{t_i}^{t_f} \rho[A, S] dt. \quad (4.58)$$

Porém, de acordo com Kolb e Turner (2019) e Navas *et al.* (2024), em termos da escala de temperatura do universo, que era dominado por radiação nesta época, tem-se que

$$t = \frac{3\sqrt{10}M_{\text{Planck}}}{\sqrt{g_*(T)}T^2} \implies dt \approx -\frac{6\sqrt{10}M_{\text{Planck}}}{\sqrt{g_*}T^3}dT, \quad (4.59)$$

onde fora utilizado $g_* \approx 106,75 \implies dg_* \approx 0$. Para prosseguir, porém, é preciso encontrar a taxa de criação dos pares à temperatura finita. Seguindo a prescrição de Kim, Lee e Yoon (2009), o número de partículas criado à temperatura finita é dado por

$$N_5(T) = \int N_5 \tanh\left(\frac{\omega}{2T}\right) d^3\mathbf{k}. \quad (4.60)$$

Aqui vale ressaltar que será feita uma granulação¹⁸ similar à que fora feita por Álvarez-Domínguez, Garay, Martín-Martínez e Polo-Gómez (2024), isto é, imagine que a criação e escape dos pares do ponto de interesse ocorre em um intervalo de tempo $\tau \ll t$, sendo t a escala de tempo adotada aqui, de maneira que pode-se assumir um processo Markoviano¹⁹ de invariantes aproximadamente constantes durante o mecanismo de criação. Sendo assim, como o processo ocorre em temperaturas nas quais os férmions ainda não adquirem massa, então basta integrar

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \tanh\left(\frac{\omega}{2T}\right) \omega^2 d\omega = 3\zeta(3) \left(\frac{T}{4\pi}\right)^3, \quad (4.61)$$

¹⁶ Cujos estados são curiosamente chamados de “Spharellons” na literatura, o que, de maneira talvez não intencionalmente cômica, faz o autor deste trabalho imaginar “farelos de pão” ou “sujeira no chão”.

¹⁷ Veja a seção 30.5.1 do livro do Schwartz (2014).

¹⁸ Mais uma tradução livre, dessa vez para “coarse graining”.

¹⁹ Sem “memória” do passado, isto é, as partículas criadas anteriormente já deixaram de influenciar a criação das novas.

sendo $\zeta(3) \approx 1,202$ a mesma função zeta de Riemann mostrada no capítulo 2. Para a estimativa, pode-se avaliar o processo de criação dos pares em eficiência máxima, isto é, quando toda a densidade de energia do vetor axial está armazenada em seu “campo elétrico” (E_S), o que leva a

$$N_5 = -\frac{\sqrt{10}\zeta(3)\eta^2 E_S^2 M_{\text{Planck}}}{(4\pi)^4 \sqrt{g_*}} \Delta T, \quad (4.62)$$

onde $\Delta T = T_f - T_i$, sendo T_f a temperatura em que o processo termina.

O próximo passo é extrapolar o valor experimental de N_5 para essa época da vida do universo. Isso será feito baseado no resultado de Aghanim *et al.* (2020), isto é, $\eta = \frac{N_5}{n_\gamma} \approx 6,12 \times 10^{-10}$, e que, após o estabelecimento da assimetria causada pela anomalia (isto é, após $T = T_f$), vale a razão

$$\frac{N_5}{s} = \text{constante}, \quad (4.63)$$

onde

$$s \approx \begin{cases} 7,04n_\gamma, & \text{atualmente, e} \\ \frac{2\pi^2}{45} g_* T_f^3 & \text{quando dominado por radiação,} \end{cases} \quad (4.64)$$

em que fora utilizada a aproximação $g_{*s} \approx g_*$ válida nesta época. Da primeira relação, segue que

$$\frac{N_5}{s} \approx 8,6932 \times 10^{-11} \sim 10^{-10}. \quad (4.65)$$

Da segunda, é possível ver que

$$N_5 \approx \frac{2\pi^2 g_* T_f^3}{45} (8,6932 \times 10^{-11}). \quad (4.66)$$

Depois, utilizando o fato de a energia oscilar entre os invariantes do vetor axial, pois

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} [E_S^2 + B_S^2 + M_S^2 (S_0^2 + \mathbf{S}^2)], \quad (4.67)$$

de maneira que cada parte carrega um valor esperado igual a 1/3 da energia total, isto é,

$$\frac{1}{2} \langle E_S^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle B_S^2 \rangle = \frac{1}{2} M_S^2 \langle S_\mu^2 \rangle = \frac{\mathcal{E}}{3}, \quad (4.68)$$

pode-se substituir então $E_S^2 \rightarrow \langle E_S^2 \rangle = M_S^2 \langle S_\mu^2 \rangle$, o que resulta em

$$\eta \sqrt{\langle S_\mu^2 \rangle} = \frac{2(2\pi)^3 T_f}{M_S \sqrt{45 M_{\text{Planck}}}} \sqrt{\frac{T_i}{T_f} - 1} \left(\frac{2g_*^3}{5\zeta^2(3)} \right)^{\frac{1}{4}} (9,324 \times 10^{-6}) \text{ GeV}^{\frac{3}{2}}. \quad (4.69)$$

Suponha que $T_{i/f} = b_{i/f} M_S$, sendo $b_{i/f}$ constantes adimensionais, visto que todo este processo deve ocorrer em temperaturas na ordem da massa do pseudo-vetor, segue então que

$$\eta \sqrt{\langle S_\mu^2 \rangle} = \frac{2(2\pi)^3 b_f}{\sqrt{45 M_{\text{Planck}}}} \sqrt{\frac{b_i}{b_f} - 1} \left(\frac{2g_*^3}{5\zeta^2(3)} \right)^{\frac{1}{4}} (9,324 \times 10^{-6}) \text{ GeV}^{\frac{3}{2}}. \quad (4.70)$$

Isto é, um valor esperado na ordem de $\approx 4,754 \frac{b_f}{\sqrt{b_i/b_f - 1}} 10^{-13} \text{ GeV}$. Dito de outra maneira, caso seja preferível estimar a ordem de grandeza da temperatura final e a diferença entre as temperaturas final e inicial, obtém-se

$$b_i = b_f + b_{\text{diff}} \implies \eta \sqrt{\langle S_\mu^2 \rangle} \approx 4,754 \frac{(b_f)^{3/2}}{\sqrt{b_{\text{diff}}}} 10^{-13} \text{ GeV}, \quad (4.71)$$

de maneira que, se o processo acaba quando $T_f \sim 10^{-2} M_S$ a $10^{-3} M_S$ e a diferença entre a temperatura inicial e final estiver entre 10^{-1} e 10^1 , então $\eta \sqrt{\langle S_\mu^2 \rangle} = \eta \langle |S_\mu| \rangle \sim 10^{-12} \text{ GeV}$ a 10^{-10} GeV neste período do universo já seria suficiente para gerar a assimetria entre matéria e anti-matéria necessária para explicar o universo atual.

A energia restante armazenada no campo deve corresponder a uma norma menor do que (4.70). Porém, para entender o que isso seria atualmente, pode-se utilizar (4.70) como limite superior e calcular qual seria este valor atualmente. Para isso, observe de (4.67) que a densidade de energia é proporcional a $\langle S_\mu^2 \rangle$, e recorde que ela diminui numa taxa $\propto a^{-3}$, onde $a^3(T) \propto [T^3 g_{*s}(T)]^{-1}$ é o fator de escala, de maneira que, seja $\langle \mathcal{E}(T) \rangle$ a densidade de energia quando o universo estava em uma temperatura T , então

$$\frac{\langle \mathcal{E}(T_{\text{atual}}) \rangle}{\langle \mathcal{E}(T_f) \rangle} = \frac{g_{*s}(T_{\text{atual}})}{g_{*s}(T_f)} \left[\frac{T_{\text{atual}}}{T_f} \right]^3 = \frac{\langle S_\mu^2 \rangle_{T_{\text{atual}}}}{\langle S_\mu^2 \rangle_{T_f}}, \quad (4.72)$$

onde fora assumido que η é constante quando o campo pode ser tomado como clássico. Assim, dado que atualmente $T = 2,73 \text{ K} \approx 2,3 \times 10^{-13} \text{ GeV}$ e $g_{*s}(T_{\text{atual}}) = 3,91$, segue que,

$$\eta \left\langle \left| S_\mu^{(\text{resto})} \right| \right\rangle_{T_{\text{atual}}} \lesssim \frac{1}{M_S \sqrt{M_S (b_i - b_f)}} \times 10^{-32} \text{ GeV}^{\frac{5}{2}}, \quad (4.73)$$

ou, definindo a razão $M_S := m_s M_{\text{Planck}}$, onde m_s é uma constante adimensional, então

$$\eta \left\langle \left| S_\mu^{(\text{resto})} \right| \right\rangle_{T_{\text{atual}}} \lesssim \frac{2,35}{m_s \sqrt{m_s (b_i - b_f)}} \times 10^{-61} \text{ GeV} = \frac{2,35}{m_s \sqrt{m_s b_{\text{diff}}}} \times 10^{-61} \text{ GeV}, \quad (4.74)$$

ou seja, atualmente este campo pode ser extraordinariamente fraco, o que é consistente com limites experimentais impostos sobre interações que violam simetria de Lorentz (CARROLL; FIELD; JACKIW, 1990), mostrando que uma construção mais rigorosa deste modelo pode vir a ser uma opção viável para tratar de bariogênese, sendo esta outra contribuição original deste trabalho.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Finalmente, aqui será feita uma recapitulação do desenvolvimento e principais resultados deste trabalho, discutindo as limitações da abordagem e das aproximações adotadas. Ao final, serão apontadas direções promissoras para investigações futuras.

5.1 Síntese e implicações

Este trabalho dedicou-se à obtenção e análise de uma ação efetiva exata de Euler-Heisenberg, que codifica efeitos quânticos em uma ação semi-clássica a nível não perturbativo, generalizada para férmions de Dirac acoplados simultaneamente a um campo vetorial A_μ e a um campo pseudo-vetorial S_μ massivo, buscando investigar aspectos de estabilidade e possíveis consequências fenomenológicas desta extensão para o cenário tradicional da QED, intitulada teoria eletro-axial. Este tipo de sistema surge atualmente em diversas áreas da Física, o que motiva este estudo, enquanto o interesse por aspectos não perturbativos da fenomenologia motiva a abordagem escolhida, conforme comentado no primeiro capítulo, seguido do estabelecimento da notação, convenções e base conceitual necessária para o desenvolvimento subsequente.

O trabalho começa de fato a partir do capítulo 2, onde fora revisada a construção da ação efetiva de Euler-Heisenberg, obtida originalmente no contexto da QED usual, de maneira a introduzir os conceitos e ferramentas necessários. Para isso, foram discutidos os métodos funcionais e definição da ação efetiva à partir da integração do funcional gerador sobre férmions, a qual fora manipulada para obtenção de um Hessiano quadrático com estrutura similar ao de Klein-Gordon. Para obter a ação, fora introduzida a representação do tempo próprio de Fock-Schwinger e o método de Weisskopf-Landau, que, juntos, equivalem à regularização por função zeta de Riemann. Essa abordagem possibilita estabelecer uma analogia entre o Hessiano da ação clássica, após diagonalização, e um Hamiltoniano de QHOs da mecânica quântica não relativística, o que culmina no traço funcional adquirindo uma forma fechada em termos dos invariantes do campo eletromagnético, quando estes forem constantes. Ao final desta parte, o método perturbativo fora revisado para comparação com a solução não perturbativa, como forma de checar a consistência da solução.

O terceiro capítulo representa o núcleo teórico desta dissertação, onde foram aplicados os métodos desenvolvidos no capítulo anterior para obtenção e análise da ação efetiva na teoria eletro-axial propriamente dita. Começa-se por adicionar o acoplamento com o campo axial na derivada covariante e manipular a ação efetiva, através da aplicação do operador de conjugação da carga, para obter a expressão do Hessiano quadrático conveniente para o tratamento neste contexto, de onde obtém-se, então, os autovalores e condições para diagonalizabilidade deste. Depois fora feita a divisão do espaço de parâmetros em algumas regiões cujos limites simplificam consideravelmente os

autovalores do Hessiano, para que fosse possível identificar o subespaço de soluções fisicamente viáveis. Neste domínio, fora encontrada a solução exata, cuja consistência fora atestada com a ação perturbativa até segunda ordem, no limite de campos constantes e com a ação de Euler-Heisenberg da QED, quando o campo axial tende a zero.

Finalmente, no capítulo 4, foram exploradas as consequências fenomenológicas da ação efetiva obtida. Primeiramente, recupera-se a anomalia quirial de Adler-Bell-Jackiw perturbativamente e mostra-se que, no domínio de interesse, a anomalia calculada via solução exata (após regularização) é consistente com o resultado perturbativo, enquanto os outros subespaços podem incorrer em expressões inconsistentes, que inclusive demonstram suscetibilidade a instabilidades (exceto, talvez, se vínculos forem impostos sobre algumas destas expressões).

Depois fora feita uma modelagem da probabilidade de transição do vácuo como um processo de Poisson e foram obtidas as taxas de criação de partículas em campos fortes para alguns cenários diferentes: Revisa-se a taxa original obtida por Schwinger (1951), recupera-se o resultado do Maroto (1999) para campo axial não propagante e obtém-se uma nova expressão (4.47), que vale quando o vetor axial propaga. Depois disso, segue uma discussão sobre a possibilidade da geração de pares ser causada pelo vetor axial, que resultaria em expressões similares às do campo vetorial. Observou-se que, em geral, quando o processo é causado pelo campo eletromagnético, a presença de um campo pseudo-vetorial não nulo tende a estabilizar o vácuo.

Este capítulo é fechado com a construção de um modelo didático do universo primordial com campo axial massivo, onde fora explorada a relação entre anomalia e criação de pares para estimar os parâmetros que culminariam na assimetria bariônica do universo atual, o que sugere viabilidade de modelos desta natureza, onde um vetor axial poderia desempenhar um papel importante na violação de CP necessária para a geração do excesso bariônico observado no universo.

Desta maneira, essa dissertação apresenta como contribuições originais para este cenário: (i) a diagonalização completa do Hessiano e classificação dos subespaços de interesse físico com base em análises anteriores; (ii) a obtenção analítica de uma forma exata da ação de Euler-Heisenberg generalizada; (iii) uma nova taxa de produção de partículas com vetor axial propagante e (iv) a proposta de um mecanismo de bariogênese baseado na presença do pseudo-vetor massivo possivelmente compatível com limites observacionais. A revisão bibliográfica não revelou publicação que reúna estes elementos de maneira equivalente aos resultados aqui apresentados. Assim, este trabalho fornece um ponto de partida para análises mais profundas envolvendo campos axiais em contextos astrofísicos, cosmológicos ou em materiais topológicos.

5.2 Limitações do estudo

Como todo estudo desta natureza, é fundamental reconhecer as limitações inerentes ao presente trabalho, a começar pela checagem de consistência com a solução perturbativa, que foi feita até a terceira ordem. Portanto comparar a expansão da solução exata com mais ordens da ação perturbativa se faz necessário para garantir maior confiabilidade.

Em segundo lugar, foram utilizados invariantes constantes, o que simplifica substancialmente os cálculos, mas restringe a aplicabilidade dos resultados a regimes homogêneos e quasi-estáticos dos campos (OMANOVIĆ, 1997). Por este motivo, termos estruturalmente similares ao invariante de Nieh-Yan (que em espaço-plano teria uma forma similar a $S_\mu \partial S^\mu = \frac{1}{2} \partial S^2$) não surgiram como contribuição para a anomalia quiral, mas é esperado que haja contribuições deste tipo, no caso mais geral (CHANDÍA; ZANELLI, 1997). Em cenários físicos mais realistas, como em explosões de supernovas ou transições de fases do universo primordial, essa aproximação pode não capturar completamente a dinâmica envolvida. Também vale ressaltar que é possível obter termos do tipo $F_{\mu\nu} \tilde{S}^{\mu\nu}$ (que não viola CP, visto que S_μ é pseudo-vetor) como parte dos invariantes $\mathcal{V}$ e $\bar{\mathcal{V}}$ e $F_{\mu\nu} S^{\mu\nu}$ (que viola CP) como parte dos invariantes $\mathcal{W}$ e $\bar{\mathcal{W}}$ em outros subespaços dos campos, o que pode introduzir mais contribuições para a anomalia, embora a forma da solução exata permaneça a mesma.

No modelo didático de universo primordial ao final da dissertação, foram feitas diversas simplificações que devem ser analisadas e ajustadas cuidadosamente para que o modelo passe de aplicação didática para uma proposta séria de descrição do universo primordial. Para isso, deve-se atentar para possíveis simetrias obedecidas pelo vetor axial e sua dinâmica interna, cuja rica fenomenologia é tópico de debate atualmente (ADELBERGER; DVALI; GRUZINOV, 2007; RYUTOV; BUDKER; FLAMBAUM, 2019). Além disso, cabe investigar criteriosamente a hipótese de equilíbrio térmico dos campos nas temperaturas discutidas, bem como tratar das taxas de interação, dos congelamentos de campos pesados e afins, que podem alterar consideravelmente a dinâmica do processo.

Adicionalmente, questões relacionadas à renormalização da teoria generalizada não foram completamente exploradas. De fato, a renormalização do vetor massivo, especialmente em espaços curvos, não é trivial (BUCHBINDER; VALE; OYADOMARI; SHAPIRO, 2024), o que requer cuidado na análise. Embora tenha sido demonstrada a consistência perturbativa no subespaço de interesse dos parâmetros, uma análise detalhada da estrutura de renormalização (incluindo mais laços) seria necessária para estabelecer definitivamente a viabilidade da teoria em escalas de energia arbitrárias.

Por fim, esta análise foi feita em espaço plano, ou seja, um espaço-tempo de fundo trivial. Essa escolha inviabiliza uma análise mais robusta dos efeitos gravitacionais,

que são esperados em contextos de energia elevada, como no universo primordial, e poderiam influenciar diretamente a estrutura da ação efetiva e os mecanismos de geração das anomalias, isto é, a curvatura do espaço-tempo pode vir a introduzir alterações tanto às predições quantitativas quanto ao comportamento qualitativo dos fenômenos estudados.

5.3 Perspectivas futuras e problemas em aberto

A análise aqui apresentada abre um leque de possibilidades para estudos futuros, como a possibilidade de extensão para sistemas similares, porém envolvendo campos de Yang-Mills ao invés do campo eletromagnético. Também seria interessante analisar consequências da introdução do vetor axial em outros sistemas que possuem solução exata em forma fechada conhecida para a ação efetiva, como feito por Nikishov e Ritus (1964), Dunne e Schubert (2001, 2002), Kim, Lee e Yoon (2008), Ozaki, Arai, Hattori e Itakura (2015), Ednén, Gasenzer e Kimura (2021) e Copinger, Hattori e Yang (2023a).

A mais imediata extensão do trabalho consiste em generalizar a construção da ação efetiva para espaços curvos, considerando métricas não triviais e a possibilidade de o vetor axial ser o pseudo-traço do tensor de torção. Esse passo exige a incorporação de técnicas da gravitação quântica (AVRAMIDI, 1995, 2006). Em particular, a fenomenologia não perturbativa resultante da investigação em espaços curvos altamente simétricos, onde for possível a obtenção de uma solução exata, pode ser enriquecedora para o entendimento do sistema com presença do pseudo-vetor.

Outra linha promissora de pesquisa envolve o papel do campo pseudo-vetorial no problema CP-forte, pois, reescrevendo o primeiro termo em (4.14) na forma não-local e localizando-a via campos auxiliares, o modo longitudinal do vetor axial poderia estar relacionado ao Axion¹ (WEINBERG, 1978; WILCZEK, 1978; DINE; FISCHLER; SREDNICKI, 1981; PRESKILL; WISE; WILCZEK, 1983), quando o campo vetorial representar o Gluon. Neste caso, o mecanismo que leva $\theta \rightarrow 0$ pode estar associado com uma “tendência” ao subespaço em que $\mathcal{H}_5 = 0$. Isso promove outra questão a ser investigada futuramente: Que mecanismos fariam com que $\mathcal{H}_5 \rightarrow 0$? Ou será que $\mathcal{H}_5$ tende à escala da Cromodinâmica Quântica? Poderia ser um mecanismo como Peccei-Quinn (PECCEI; QUINN, 1977) ou como dos modelos atuais de axions “invisíveis”? O foco deste trabalho fora em obter uma solução no subespaço onde $\mathcal{H}_5 = 0$ sem investigar como, quando ou porquê essa condição é atingida, se ela o for de fato. Pode ser preciso empregar métodos mais gerais, como o grupo de renormalização funcional (DUPUIS *et al.*, 2021), o que trará uma compreensão mais profunda da fenomenologia não perturbativa por trás deste tipo de sistema.

Além disso, as possibilidades de investigação de magnetogênese, via (4.13), e a introdução deste campo em modelos cosmológicos mais concretos de bariogênese,

¹ Que aqui seria um campo auxiliar.

considerando transições de fase eletrofraca ou inserido em teorias de grande unificação para calcular de forma mais precisa a assimetria bariônica gerada pelo mecanismo proposto, incorporando efeitos de expansão cósmica e campos de fundo dinâmicos, seriam frentes muito promissoras, pois permitem dialogar com propostas onde a energia escura estaria relacionada com um campo vetorial massivo (BÖHMER; HARKO, 2007), visto que estes podem apresentar equação de estado com pressão negativa. De fato, uma conta rápida feita à partir de (4.74) sugere que a densidade de energia atual deste campo seria $\sim \frac{1}{\eta^2 m_S b_{\text{diff}}} 10^{-84} \text{ GeV}^4$, que poderia coincidir com o valor medido para a energia escura no universo atual, a depender dos parâmetros envolvidos, ou ser considerada inviável após correções de modelos mais concretos. Vale ressaltar que pode ser interessante ter $\mathcal{H}_5 \neq 0$ para alguns destes modelos (TASINATO, 2014; NAKAMURA; DE FELICE; KASE; TSUJIKAWA, 2019), o que requer uma análise de estabilidade mais cuidadosa.

A anomalia quiral e o decaimento $S \rightarrow \gamma\gamma$ também abrem caminho para investigar a possibilidade da produção de pares de monopólos e anti-monopólos magnéticos (RAJANTIE, 2024) via Mecanismo de Schwinger Dual ², o que já está a ser testado no LHC, através da colaboração MoEDAL (ACHARYA *et al.*, 2024), bem como no RHIC (GOULD; HO; RAJANTIE, 2021), configurando mais possibilidades de testes experimentais desta teoria.

A exploração de aplicações em física da matéria condensada, por sua vez, seria uma das frentes de maior impacto, pois materiais de Dirac (GRUSHIN; VENDERBOS; VISHWANATH; ILAN, 2016; GORBAR; MIRANSKY; SHOVKOVY; SUKHACHOV, 2018), que também podem apresentar vetores axiais assim como os semi-metais de Weyl (CHEN; HU; LIN, 2018; FERREIROS; KEDEM; BERGHOLTZ; BARDARSON, 2019; CHU; MIAO, 2023), requerem defeitos topológicos e/ou campos eletromagnéticos não tão intensos, isto é, de intensidades acessíveis à tecnologia atual, para a ocorrência de fenômenos não-lineares advindos das correções quânticas à ação efetiva (KESER; LYANDA-GELLER; SUSHKOV, 2022), o que pode permitir a observação da anomalia, violações de Lorentz (KOSTELECKÝ; LEHNERT; SCHRECK; SERADJEH, 2025a,b) e dos efeitos não perturbativos discutidos neste trabalho, cujas consequências talvez impliquem em novas fases e fenômenos de transporte exóticos, havendo, portanto, futura aplicabilidade tecnológica em potencial.

A ação efetiva aqui obtida serve como mais uma ferramenta para estas explorações futuras. Assim, espera-se que a convergência destes diversos caminhos de investigação levem ao aprofundamento futuro da compreensão sobre questões fundamentais na cosmologia, matéria condensada e teoria quântica de campos.

² Onde a criação de partículas é causada pelo campo magnético, não o elétrico.

REFERÊNCIAS

ACHARYA, B. *et al.* MoEDAL Search in the CMS Beam Pipe for Magnetic Monopoles Produced via the Schwinger Effect. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 133, n. 7, 2024. ISSN 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.133.071803. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.133.071803>.

ADELBERGER, E.; DVALI, G.; GRUZINOV, A. Photon-Mass Bound Destroyed by Vortices. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 98, 1 2007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.010402. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.010402>.

ADLER, S. L. Axial-Vector Vertex in Spinor Electrodynamics. **Physical Review**, v. 177, 1969. DOI: 10.1103/PhysRev.177.2426.

AGHANIM, N. *et al.* Planck2018 results: VI. Cosmological parameters. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 641, 2020. ISSN 1432-0746. DOI: 10.1051/0004-6361/201833910. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>.

ALEXANDRE, J. *et al.* Gauge invariance and the Englert-Brout-Higgs mechanism in non-Hermitian field theories. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 99, 7 2019. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.075024. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.075024>.

ALKOFER, R. *et al.* Pair Creation and an X-Ray Free Electron Laser. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 87, n. 19, 2001. ISSN 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.87.193902. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.193902>.

ÁLVAREZ-DOMÍNGUEZ, Á. *et al.* No Black Holes from Light. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 133, n. 4, 2024. ISSN 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.133.041401. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.133.041401>.

ATLAS COLLABORATION. Evidence for light-by-light scattering in heavy-ion collisions with the ATLAS detector at the LHC. **Nature Physics**, v. 13, 2017. DOI: 10.1038/nphys4208.

AVRAMIDI, I. G. **Covariant methods for the calculation of the effective action in quantum field theory and investigation of higher-derivative quantum gravity**. [S. l.], 1995. arXiv: hep-th/9510140 [hep-th].

AVRAMIDI, I. G. **Heat Kernel Asymptotics on Symmetric Spaces**. [S. l.: s. n.], 2006. arXiv preprint. arXiv: math/0605762 [math.DG].

BASTIANELLI, F.; BROCCOLI, M. On the trace anomaly of a Weyl fermion in a gauge background. **The European Physical Journal C**, Springer Science e Business Media LLC, v. 79, n. 4, 2019. ISSN 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6799-z. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6799-z>.

BATRA, P.; DOBRESCU, B. A.; SPIVAK, D. Anomaly-free sets of fermions. **Journal of Mathematical Physics**, AIP Publishing, v. 47, n. 8, 2006. ISSN 1089-7658. DOI: 10.1063/1.2222081. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1063/1.2222081>.

BELL, J. S.; JACKIW, R. A PCAC Puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ -Model. **Il Nuovo Cimento A**, v. 60, 1969. DOI: 10.1007/BF02823296.

BENEVIDES, A.; DABHOLKAR, A.; KOBAYASHI, T. To B or not to B: primordial magnetic fields from Weyl anomaly. **Journal of High Energy Physics**, Springer Science e Business Media LLC, v. 2018, n. 11, 2018. ISSN 1029-8479. DOI: 10.1007/jhep11(2018)039. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11\(2018\)039](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11(2018)039).

BEREZIN, F. A.; KIRILLOV, A. A. **Introduction to Superalysis**. 1. ed. [S. l.]: Springer, 1987. (Mathematical Physics and Applied Mathematics №9). ISBN 9789401719636; 9048183928; 9401719632; 9789027716682; 9027716684; 9789048183920.

BERREDO-PEIXOTO, G. de; HELAYËL-NETO, J. A.; SHAPIRO, I. L. On the consistency of a fermion-torsion effective theory. **Journal of High Energy Physics**, Springer Science e Business Media LLC, v. 2000, n. 02, 2000. ISSN 1029-8479. DOI: 10.1088/1126-6708/2000/02/003. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2000/02/003>.

BERRY, M. V. Physics of non-Hermitian degeneracies. **Czech. J. Phys.**, v. 54, n. 10, 2004.

BERTLMANN, R. A. **Anomalies in Quantum Field Theory**. [S. l.]: Oxford University Press, 2000. ISBN 9780198507628. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198507628.001.0001. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198507628.001.0001>.

BLUHM, R. *et al.* Constraints and stability in vector theories with spontaneous Lorentz violation. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 77, 12 2008. DOI: 10.1103/PhysRevD.77.125007. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.125007>.

BÖHMER, C. G.; HARKO, T. Dark energy as a massive vector field. **The European Physical Journal C**, Springer Science e Business Media LLC, v. 50, n. 2, 2007. ISSN 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-007-0210-1. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-007-0210-1>.

BRANDENBERGER, R.; FRÖHLICH, J. Dark Energy, Dark Matter and baryogenesis from a model of a complex axion field. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2021, n. 04, 2021. ISSN 1475-7516. DOI:

10.1088/1475-7516/2021/04/030. Disponível em:
<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2021/04/030>.

BUCHBINDER, I. L.; SHAPIRO, I. L. **Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity**. [S. l.]: Oxford University Press, 2021. (Oxford Graduate Texts).

BUCHBINDER, I. L. *et al.* Renormalization of massive vector field theory coupled to scalar in curved spacetime. **Physical Review D**, v. 110, n. 12, 2024. DOI: 10.1103/PhysRevD.110.125015. arXiv: 2410.00991 [hep-th].

CARROLL, S. M.; FIELD, G. B.; JACKIW, R. Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 41, 4 1990. DOI: 10.1103/PhysRevD.41.1231. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.41.1231>.

CAYLEY, A. A Memoir on the Theory of Matrices. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 148, 1858.

CHANDÍA, O.; ZANELLI, J. Topological invariants, instantons, and the chiral anomaly on spaces with torsion. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 55, 12 1997. DOI: 10.1103/PhysRevD.55.7580. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.7580>.

CHEN, C.-Y.; HU, C. D.; LIN, Y.-C. Effective lagrangian for axial anomaly and its applications in Dirac and Weyl semimetals. **Scientific Reports**, v. 8, n. 1, p. 11271, 2018. DOI: 10.1038/s41598-018-29676-0.

CHU, C.-S.; MIAO, R.-X. Chiral current induced by torsional Weyl anomaly. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 107, 20 2023. DOI: 10.1103/PhysRevB.107.205410. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.107.205410>.

COHEN, A. G.; GLASHOW, S. L. A Lorentz-Violating Origin of Neutrino Mass?, 2006. arXiv: hep-ph/0605036 [hep-ph]. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0605036>.

COHEN, A. G.; GLASHOW, S. L. Very Special Relativity. **Physical Review Letters**, American Physical Society (APS), v. 97, n. 2, 2006. ISSN 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.97.021601. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.021601>.

COLLINS, J. C. **Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion**. Cambridge: Cambridge University Press, 1984. v. 26. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). DOI: 10.1017/9781009401807.

COPINGER, P.; HATTORI, K.; YANG, D.-L. Effective action for axial vector fields in background electromagnetic fields. **Physical Review D**, v. 107, 5 2023. DOI: 10.1103/PhysRevD.107.056012.

COPINGER, P.; HATTORI, K.; YANG, D.-L. Euler-Heisenberg Lagrangian under an axial gauge field. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 107, n. 5, 2023. ISSN 2470-0029. DOI: 10.1103/physrevd.107.056016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.107.056016>.

COPINGER, P.; PU, S. Chirality production with mass effects – Schwinger pair production and the axial Ward identity. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 35, n. 28, 2020. ISSN 1793-656X. DOI: 10.1142/s0217751x2030015x. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X2030015X>.

DINE, M.; FISCHLER, W.; SREDNICKI, M. A Simple Solution to the Strong CP Problem with a Harmless Axion. **Physics Letters B**, v. 104, 1981. DOI: 10.1016/0370-2693(81)90590-6.

DINU, V. *et al.* Measuring vacuum birefringence at XFELs using phase-contrast Fourier imaging. **Nature Physics**, v. 18, 2022. DOI: 10.1038/s41567-021-01403-0.

DOBADO, A.; MAROTO, A. L. Standard model anomalies in curved space-time with torsion. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 54, 8 1996. DOI: 10.1103/PhysRevD.54.5185. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.54.5185>.

DOBADO, A.; MAROTO, A. L. Particle production from nonlocal gravitational effective action. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 60, 10 1999. DOI: 10.1103/PhysRevD.60.104045. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.60.104045>.

DOBADO, A. *et al.* **Effective lagrangians for the standard model**. [S. l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1997.

DUNNE, G. V. HEISENBERG–EULER EFFECTIVE LAGRANGIANS: BASICS AND EXTENSIONS. In: FROM Fields to Strings: Circumnavigating Theoretical Physics. [S. l.]: WORLD SCIENTIFIC, 2005. DOI: 10.1142/9789812775344_0014. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1142/9789812775344_0014.

DUNNE, G. V.; SCHUBERT, C. Two-Loop Self-Dual Euler–Heisenberg Lagrangians. I: Real Part and Borel Analysis. **Journal of High Energy Physics**, n. 11, 2001. DOI: 10.1088/1126-6708/2001/11/048.

DUNNE, G. V.; SCHUBERT, C. Two-Loop Self-Dual Euler–Heisenberg Lagrangians. II: Imaginary Part and Prefactor. **Journal of High Energy Physics**, n. 05, 2002. DOI: 10.1088/1126-6708/2002/05/044.

DUPUIS, N. *et al.* The nonperturbative functional renormalization group and its applications. **Physics Reports**, Elsevier BV, v. 910, 2021. ISSN 0370-1573. DOI: 10.1016/j.physrep.2021.01.001. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2021.01.001>.

EDNÉN, J.; GASENZER, T.; KIMURA, T. Exact dynamics of quantum bosonic fields in plane-wave backgrounds. **Physical Review D**, v. 104, 2021. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.045011.

ELLIS, J. **tikz-feynman: Feynman diagrams with TikZ**. [S. l.], 2016. Versão 1.1.0 2016-02-05; pacote LaTeX para geração de diagramas de Feynman. Disponível em: <https://ctan.org/pkg/tikz-feynman>. Acesso em: 25 set. 2025.

FERREIROS, Y. *et al.* Mixed Axial-Torsional Anomaly in Weyl Semimetals. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 122, 5 2019. DOI: 10.1103/PhysRevLetters122.056601. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLetters122.056601>.

FOCK, V. A. Die Eigenzeit in der klassischen und in der Quantenmechanik. **Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion**, v. 12, p. 404–425, 1937.

FUJIKAWA, K.; SUZUKI, H. **Path integrals and quantum anomalies**. [S. l.: s. n.], 2004. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198529132.001.0001.

FURTADO, J.; MARIZ, T. Lorentz-violating Euler-Heisenberg effective action. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 89, n. 2, 2014. ISSN 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.89.025021. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.89.025021>.

GANTMACHER, F. R. **The Theory of Matrices, Vol. 2**. 1. ed. [S. l.]: Chelsea Publishing Company, 1974. v. 2.

GARCIA DE ANDRADE, L. C. Global monopoles and massless dilatons in Einstein–Cartan gravity. **arXiv e-prints**, 1999. eprint: gr-qc/9905010.

GHASEMKHANI, M. *et al.* Impossibility of obtaining a CP-violating Euler–Heisenberg effective theory from a viable modification of QED. **The European Physical Journal C**, Springer Science e Business Media LLC, v. 82, n. 4, 2022. ISSN 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10351-8. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10351-8>.

GIES, H.; SCHIRRMESTER, J. Renormalization flow of nonlinear electrodynamics. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 110, n. 7, 2024. ISSN 2470-0029. DOI: 10.1103/physrevd.110.076010. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.110.076010>.

GORBAR, E. V. *et al.* Anomalous transport properties of Dirac and Weyl semimetals (Review Article). **Low Temperature Physics**, AIP Publishing, v. 44, n. 6, 2018. ISSN 1090-6517. DOI: 10.1063/1.5037551. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1063/1.5037551>.

GOULD, O.; HO, D. L.-J.; RAJANTIE, A. Schwinger pair production of magnetic monopoles: Momentum distribution for heavy-ion collisions. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 104, 1 2021. DOI: 10.1103/PhysRevD.104.015033. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.015033>.

GRUSHIN, A. G. *et al.* Inhomogeneous Weyl and Dirac Semimetals: Transport in Axial Magnetic Fields and Fermi Arc Surface States from Pseudo-Landau Levels. **Physical Review X**, American Physical Society (APS), v. 6, n. 4, 2016. ISSN 2160-3308. DOI: 10.1103/physrevx.6.041046. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevX.6.041046>.

HEHL, F. W.; OBUKHOV, Y. N. How Does the Electromagnetic Field Couple to Gravity, in Particular to Metric, Nonmetricity, Torsion, and Curvature? *In: GYROS, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space.* [S. l.]: Springer Berlin Heidelberg. ISBN 9783540412366. DOI: 10.1007/3-540-40988-2_25. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1007/3-540-40988-2_25.

HEHL, F. W.; OBUKHOV, Y. N. (**Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric.** 1. ed. [S. l.]: Birkhäuser, 2003. (Progress in Mathematical Physics №33). ISBN 9781461265900; 1461265908; 9781461200512; 1461200512.

HEISENBERG, W.; EULER, H. H. Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons. **Zeitschrift für Physik**, v. 98, 1936. DOI: 10.1007/BF01343663.

HEISS, W. D. The physics of exceptional points. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 45, n. 44, 2012.

HULL, C. M.; TOWNSEND, P. K. World-sheet supersymmetry and anomaly cancellation in the heterotic string. **Physics Letters B**, v. 178, n. 2, 1986. ISSN 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(86\)91493-0](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)91493-0). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269386914930>.

IVANOV, A. V.; KHARUK, N. V. Heat Kernel: Proper-Time Method, Fock–Schwinger Gauge, Path Integral, and Wilson Line. **Theoretical and Mathematical Physics**, v. 205, n. 2, 2020. DOI: 10.1134/S0040577920110057. eprint: arXiv:1906.04019[hep-th].

KAMADA, K.; LONG, A. J. Baryogenesis from decaying magnetic helicity. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 94, n. 6, 2016. ISSN 2470-0029. DOI: 10.1103/physrevd.94.063501. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.94.063501>.

KESER, A. C.; LYANDA-GELLER, Y.; SUSHKOV, O. P. Nonlinear Quantum Electrodynamics in Dirac Materials. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 128, 6 2022. DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.066402. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.066402>.

KIM, S. P.; LEE, H. K.; YOON, Y. Effective Action of QED in Electric Field Backgrounds II: Spatially Localized Fields. **Physical Review D**, v. 78, 10 2008. DOI: 10.1103/PhysRevD.78.105013.

KIM, S. P.; LEE, H. K.; YOON, Y. Schwinger pair production at finite temperature in QED. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 79, n. 4, 2009. ISSN 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.79.045024. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.045024>.

KOLB, E. W.; TURNER, M. S. **The Early Universe**. [S. l.]: Taylor e Francis, maio 2019. v. 69. ISBN 978-0-429-49286-0, 978-0-201-62674-2. DOI: 10.1201/9780429492860.

KOSTELECKÝ, V. A. *et al.* Nonperturbative Lorentz violation and field quantization. **Physics Letters B**, Elsevier BV, v. 865, 2025. ISSN 0370-2693. DOI: 10.1016/j.physletb.2025.139414. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2025.139414>.

KOSTELECKÝ, V. A. *et al.* Physical interpretation of large Lorentz violation via Weyl semimetals. **New Journal of Physics**, v. 27, n. 7, 2025. DOI: 10.1088/1367-2630/ade737. arXiv: 2412.18034 [hep-ph].

LANDAU, L. D. Diamagnetismus der Metalle. **Zeitschrift für Physik**, v. 64, 1930. DOI: 10.1007/BF01397213.

LOUNESTO, P. **Clifford Algebras and Spinors**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2001.

M. RASULIAN, I.; TORABIAN, M. On torsion contribution to chiral anomaly via Nieh–Yan term. **The European Physical Journal C**, Springer Science e Business Media LLC, v. 83, n. 12, 2023. ISSN 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-023-12331-y. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-023-12331-y>.

MAROTO, A. L. Particle production from axial fields. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 59, 6 1999. DOI: 10.1103/PhysRevD.59.063501. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.063501>.

MAVROMATOS, N. E.; SARKAR, S. Neutrinos in the Early Universe, Kalb-Ramond Torsion and Matter-Antimatter Asymmetry. Edição: L. Bravina, Y. Foka e S. Kabana. **EPJ Web of Conferences**, EDP Sciences, v. 71, 2014. ISSN 2100-014X. DOI:

10.1051/epjconf/20147100085. Disponível em:
<http://dx.doi.org/10.1051/epjconf/20147100085>.

MISNER, C. W.; WHEELER, J. A. Classical physics as geometry. **Annals of Physics**, v. 2, n. 6, 1957. DOI: 10.1016/0003-4916(57)90049-0.

MOURA-MELO, W. A.; HELAYËL-NETO, J. A. Remarks on Dirac-like monopoles in (2+1)D Maxwell and Maxwell-Chern-Simons theories. **Physical Review D**, v. 63, 2001. DOI: 10.1103/PhysRevD.63.105018.

NAKAMURA, S. *et al.* Constraints on massive vector dark energy models from integrated Sachs-Wolfe-galaxy cross-correlations. **Physical Review D**, American Physical Society, v. 99, 6 2019. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.063533. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.063533>.

NASCIMENTO, J. R. *et al.* **Mixed gauge-gravity term and proper time**. [S. l.: s. n.], 2025. arXiv: 2507.14055 [hep-th]. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2507.14055>.

NAVARRO-SALAS, J. **Particle creation by strong fields and quantum anomalies**. [S. l.: s. n.], 2021. arXiv: 2111.10534 [hep-th]. Disponível em:
<https://arxiv.org/abs/2111.10534>.

NAVAS, S. *et al.* Review of particle physics. **Physical Review D**, v. 110, n. 3, 2024. DOI: 10.1103/PhysRevD.110.030001.

NIKISHOV, A. I.; RITUS, V. I. Quantum Processes in the Field of a Plane Electromagnetic Wave and in a Constant Field 1. Pair Production. **Soviet Physics - Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 19, 1964.

OMANOVIĆ, G. Static and Quasistatic Solutions of the Real Proca Field. **Foundations of Physics Letters**, v. 10, 1997. DOI: 10.1023/A:1018585325688.

OTT, R. **The Schwinger Effect**. [S. l.: s. n.], 2016. Relatório técnico. Disponível em:
https://javierrubioblog.wordpress.com/wp-content/uploads/2016/09/report_rott.pdf. Acesso em: 25 set. 2025.

OZAKI, S. *et al.* Euler-Heisenberg-Weiss action for QCD + QED. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), v. 92, n. 1, 2015. ISSN 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.92.016002. Disponível em:
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.92.016002>.

PECCEI, R. D.; QUINN, H. R. CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 38, 25 1977. DOI:

10.1103/PhysRevLett.38.1440. Disponível em:
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.38.1440>.

PRESKILL, J.; WISE, M. B.; WILCZEK, F. Cosmology of the invisible axion. **Physics Letters B**, v. 120, n. 1, 1983. ISSN 0370-2693. DOI:
[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(83\)90637-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90637-8). Disponível em:
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269383906378>.

RAJANTIE, A. **Magnetic monopoles – theory overview**. [S. l.: s. n.], 2024. arXiv: 2411.05753 [hep-ph]. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2411.05753>.

REUTER, M.; SCHOLLMAYER, G. M. The metric on field space, functional renormalization, and metric–torsion quantum gravity. **Annals of Physics**, Elsevier BV, v. 367, 2016. ISSN 0003-4916. DOI: 10.1016/j.aop.2015.12.004. Disponível em:
<http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2015.12.004>.

RHAM, C. de *et al.* Positivity bounds in vector theories. **Journal of High Energy Physics**, Springer Science e Business Media LLC, v. 2022, n. 12, 2022. ISSN 1029-8479. DOI: 10.1007/jhep12(2022)086. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12\(2022\)086](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP12(2022)086).

ROCHA, G. M. C. da. **Estados de uma partícula e representações na relatividade muito especial**. Nov. 2021. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Engenharia e Ciências, Campus de Guaratinguetá – FEG. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/215950>.

RODRIGUES, J. E. *et al.* **From Lorentz to $SIM(2)$: contraction, four-dimensional algebraic relations and projective representations**. [S. l.: s. n.], 2025. arXiv: 2504.13306 [math-ph]. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2504.13306>.

RUBAKOV, V. A.; SHAPOSHNIKOV, M. E. Electroweak baryon number non-conservation in the early Universe and in high-energy collisions. **Physics-Uspekhi**, Uspekhi Fizicheskikh Nauk (UFN) Journal, v. 39, n. 5, 1996. ISSN 1468-4780. DOI: 10.1070/pu1996v039n05abeh000145. Disponível em:
<http://dx.doi.org/10.1070/PU1996v039n05ABEH000145>.

RUFFINI, R.; VERESHCHAGIN, G.; XUE, S.-S. Electron–Positron Pairs in Physics and Astrophysics: From Heavy Nuclei to Black Holes. **Physics Reports**, Elsevier, v. 487, n. 1, 2010. DOI: 10.1016/j.physrep.2009.10.004. Disponível em:
<https://doi.org/10.1016/j.physrep.2009.10.004>.

RYUTOV, D. D.; BUDKER, D.; FLAMBAUM, V. V. A Hypothetical Effect of the Maxwell–Proca Electromagnetic Stresses on Galaxy Rotation Curves. **The Astrophysical Journal**, The American Astronomical Society, v. 871, n. 2, 2019. DOI: 10.3847/1538-4357/aaf63a. Disponível em:
<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aaf63a>.

SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.

SAUTER, F. Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs. **Zeitschrift für Physik**, v. 69, 1931. DOI: 10.1007/BF01339461.

SCHWARTZ, M. D. **Quantum Field Theory and the Standard Model**. [S. l.]: Cambridge University Press, 2014.

SCHWINGER, J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. **Physical Review**, v. 82, n. 5, 1951. DOI: 10.1103/PhysRev.82.664.

SEKINE, A.; NOMURA, K. Axion electrodynamics in topological materials. **Journal of Applied Physics**, AIP Publishing, v. 129, n. 14, 2021. ISSN 1089-7550. DOI: 10.1063/5.0038804. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0038804>.

SHAPIRO, I. L. Physical aspects of the space-time torsion. **Physics Reports**, Elsevier BV, v. 357, n. 2, 2002. ISSN 0370-1573. DOI: 10.1016/s0370-1573(01)00030-8. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573\(01\)00030-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-1573(01)00030-8).

SHAPIRO, I. L. **A Primer in Tensor Analysis and Relativity**. [S. l.]: Springer International Publishing, 2019. (Undergraduate Lecture Notes in Physics). ISBN 9783030268947.

SOUZA, L. P. d. **Hessian-Diagonalization**. [S. l.: s. n.], 2025. Github. Não publicado oficialmente; versão 1.0. Disponível em: <https://github.com/8stringtheorist/Hessian-Diagonalization>.

SOUZA, L. P. d. **Schwinger-Effect**. [S. l.: s. n.], 2025. Github. Não publicado oficialmente; versão 1.0. Disponível em: <https://github.com/8stringtheorist/Schwinger-Effect>.

SYNGE, J. L. **Relativity: The General Theory**. [S. l.]: North-Holland Publishing Company, 1960. (North-Holland series in physics, v. 1). ISBN 9780444102799.

T'HOOFT, G.; VELTMAN, M. J. G. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. **Nuclear Physics B**, v. 44, 1972. DOI: 10.1016/0550-3213(72)90279-9.

TASINATO, G. Cosmic acceleration from Abelian symmetry breaking. **Journal of High Energy Physics**, Springer Science e Business Media LLC, v. 2014, n. 4, 2014. ISSN 1029-8479. DOI: 10.1007/jhep04(2014)067. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP04\(2014\)067](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP04(2014)067).

VASSILEVICH, D. V. Heat Kernel Expansion: User's Manual. **Physics Reports**, v. 388, 2003. DOI: 10.1016/j.physrep.2003.09.002. eprint: hep-th/0306138.

WEINBERG, S. A New Light Boson? **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 40, 4 1978. DOI: 10.1103/PhysRevLett.40.223. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.40.223>.

WEISSKOPF, V. F. Über die Elektrodynamik des Vakuums auf Grund der Quantentheorie des Elektrons. **Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Meddelelser**, v. 14, n. 6, 1936.

WILCZEK, F. Problem of Strong P and T Invariance in the Presence of Instantons. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 40, 5 1978. DOI: 10.1103/PhysRevLett.40.279. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.40.279>.

WILCZEK, F. Two applications of axion electrodynamics. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 58, 18 1987. DOI: 10.1103/PhysRevLett.58.1799. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.1799>.

YAMASHITA, K. *et al.* Generalized Heisenberg–Euler formula in Abelian gauge theory with parity violation. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, Oxford University Press (OUP), v. 2017, n. 12, dez. 2017. ISSN 2050-3911. DOI: 10.1093/ptep/ptx157. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1093/ptep/ptx157>.

APÊNDICE A – Notação, convenções e definições básicas

Neste trabalho serão adotadas as seguintes convenções, válidas em todo o texto a menos que indicado de outra forma explicitamente:

1. Índices:

- (*Gregos*): $\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$ – denotam índices espaço-temporais;
- (*Latinos*): $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ – denotam índices puramente espaciais.

2. Convenção da Soma de Einstein:

Contrações de índices repetidos, sendo um em cima e outro abaixo, implicam somatório neste, isto é

$$A_{\mu\nu}B^{\nu\alpha} = \sum_{\nu=0}^3 A_{\mu\nu}B^{\nu\alpha}. \quad (\text{A.1})$$

3. Espaço-tempo e métrica:

Tudo será desenvolvido em espaço-tempo plano de quatro dimensões, que corresponde a uma variedade Lorentziana, denotada $\mathbb{M}^{1,3}$, munida de todas as estruturas e propriedades necessárias (produto interno, espaço tangente, ...), com coordenadas $x^\mu = (ct, x, y, z)$ e métrica de Minkowski,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

que possui inversa $g^{\mu\nu}$ tal que $g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta^\mu_\alpha$. Índices são abaixados com a métrica e levantados com sua inversa, isto é, seja $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$, então

$$A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu \iff A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu, \quad (\text{A.3})$$

com $A_\mu = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$.

4. Unidades naturais:

No decorrer do texto, serão utilizadas unidades tais que

$$\hbar = c = 1 \quad \text{e} \quad [p_\mu] = [x^\mu]^{-1} = [\text{massa}] = eV, \quad (\text{A.4})$$

onde a unidade “elétron-Volt” (eV) é a energia de um elétron acelerado por um potencial de 1 volt. Em particular, a escala de energia utilizada no capítulo (4.3) será em unidades de $GeV = 10^9 eV$.

5. Tensor de Levi-Civita:

Aqui, adotam-se as convenções do livro do Shapiro (2019), definindo o tensor totalmente anti-simétrico $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ de Levi-Civita no espaço de Minkowski à partir de

$$\epsilon^{0123} = 1 \implies \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1, & \text{para permutações pares dos índices,} \\ -1, & \text{para permutações ímpares dos índices,} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

que satisfaz

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\epsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} = \delta_{\alpha\beta\lambda\rho}^{\mu\nu\sigma\tau} = -\det \begin{bmatrix} \delta_{\alpha}^{\mu} & \delta_{\beta}^{\mu} & \delta_{\lambda}^{\mu} & \delta_{\rho}^{\mu} \\ \delta_{\alpha}^{\nu} & \delta_{\beta}^{\nu} & \delta_{\lambda}^{\nu} & \delta_{\rho}^{\nu} \\ \delta_{\alpha}^{\sigma} & \delta_{\beta}^{\sigma} & \delta_{\lambda}^{\sigma} & \delta_{\rho}^{\sigma} \\ \delta_{\alpha}^{\tau} & \delta_{\beta}^{\tau} & \delta_{\lambda}^{\tau} & \delta_{\rho}^{\tau} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

cujas contrações notáveis são

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\lambda\rho\alpha\beta} &= -2!\delta_{\lambda\rho}^{\mu\nu} = -2\left(\delta_{\lambda}^{\mu}\delta_{\rho}^{\nu} - \delta_{\rho}^{\mu}\delta_{\lambda}^{\nu}\right), \\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\lambda\nu\alpha\beta} &= -3!\delta_{\lambda}^{\mu} = -6\delta_{\lambda}^{\mu}, \\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} &= -4! = -24. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

No apêndice B também utiliza-se

$$\epsilon^{ijk}, \quad \text{com} \quad \epsilon^{123} = 1, \quad (\text{A.8})$$

que satisfaz

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{lmn}^{ijk} = \det \begin{bmatrix} \delta_l^i & \delta_m^i & \delta_n^i \\ \delta_l^j & \delta_m^j & \delta_n^j \\ \delta_l^k & \delta_m^k & \delta_n^k \end{bmatrix}, \quad (\text{A.9})$$

e cujas contrações resultam em

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijk}\epsilon_{mnk} &= \left(\delta_m^i\delta_n^j - \delta_n^i\delta_m^j\right), \\ \epsilon^{ijk}\epsilon_{ljk} &= 2!\delta_l^i, \\ \epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} &= 3! = 6. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

6. Transformada de Fourier, Rotação de Wick e Teorema de Resíduos: Para uma função genérica $f(x)$, usa-se

$$f(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} f(p), \quad f(p) = \int d^4x e^{ip \cdot x} f(x). \quad (\text{A.11})$$

Para tornar convergentes certas integrais em p_0 , deforma-se o eixo real no plano complexo da parte temporal do momento, isto é,

$$\begin{aligned} p_0 &\rightarrow ip_4, \\ \int d^4p f(p_0, \mathbf{p}) &\rightarrow i \int d^4p f(\mathbf{p}, ip_4), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

assumindo que $f(z)$ seja analítica no semiplano em que gira-se o contorno e que a contribuição do arco no infinito se anule. Embora esse procedimento por deformação contínua do caminho de integração feche um contorno, o teorema de resíduos não será utilizado explicitamente. Quando, por outro lado, for preciso avaliar

integrais que envolvam singularidades isoladas de $f(z)$, invoca-se explicitamente o teorema de resíduos,

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_k \in V} \text{Res} [f, z_k], \quad (\text{A.13})$$

onde V é o interior cuja borda é $\partial V = C$ e cada resíduo $\text{Res} [f, z_k]$ é o coeficiente de $(z - z_k)^{-1}$ na série de Laurent da f em torno de z_k no interior do contorno. No caso de polo simples,

$$\text{Res} [f, z_k] = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z). \quad (\text{A.14})$$

7. Comutadores e Anti-comutadores: No que segue, os comutadores são denotados como

$$[A, B] := AB - BA, \quad (\text{A.15})$$

enquanto os anticomutadores serão

$$\{A, B\} := AB + BA. \quad (\text{A.16})$$

Quando os objetos comutados ou anticomutados são operadores em um contexto de teoria quântica, então assume-se aplicação a um estado quântico $|\Psi\rangle$ qualquer, $[A, B] \implies [A, B]|\Psi\rangle$, ainda que este não seja escrito explicitamente.

8. Números de Grassmann: São elementos de uma álgebra anticomutativa gerada por n variáveis $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n\}$ tais que

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i \implies \theta_i^2 = 0, \quad (\text{A.17})$$

isto é, de modo geral, qualquer monômio de grau maior que 1 em uma mesma variável se anula. A derivada em relação a uma variável de Grassmann é definida como

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \prod_{n=1}^k \theta_{j_n} := \sum_{n=1}^k (-1)^{n-1} \delta_{ij_n} \prod_{m \neq n} \theta_{j_m}, \quad (\text{A.18})$$

de maneira que a segunda derivada em uma mesma variável se anula. Por este motivo, pode-se definir as derivadas tomadas pela direita e esquerda, como

$$\vec{\partial}_i \theta_i \theta_j = \theta_j = -\theta_i \theta_j \overleftarrow{\partial}_i, \quad (\text{A.19})$$

em que $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta_i}$. Por sua vez, a integral é definida como

$$\int d\theta_i = 0 \quad \text{e} \quad \int d\theta_i \theta_j = \delta_{ij} = \vec{\partial}_i \theta_j. \quad (\text{A.20})$$

Seja $f(\theta)$ uma função qualquer, quando transformadas para as variáveis ξ_j de tal maneira que $\theta_i = \theta_i(\xi)$, onde θ e ξ representam “vetores” contendo todas as variáveis no papel de coordenadas, então

$$\int f(\theta) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n = \int f(\xi) (\det J)^{-1} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n, \quad (\text{A.21})$$

onde

$$J = \left\| \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi_j} \right\| \quad (\text{A.22})$$

é o Jacobiano da transformação de coordenadas. Essas definições e propriedades levam a alguns resultados importantes:

- A exponencial de uma variável de Grassmann resulta em

$$\exp(\theta) = 1 + \theta. \quad (\text{A.23})$$

- O produtório de n variáveis pode ser escrito como

$$\prod_{i=1}^n \theta_i = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \theta_{i_1} \theta_{i_2} \dots \theta_{i_n}. \quad (\text{A.24})$$

- Seja uma matriz A anti-simétrica $2n \times 2n$, de componentes $A^{ij} = -A^{ji}$, a integral, denominada “integral Gaussiana”, dos produtos quadráticos envolvendo contrações das $2n$ variáveis de Grassmann com as componentes desta matriz resulta em

$$\begin{aligned} \int d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{2n} \exp\left(-\frac{1}{2} \theta_i A^{ij} \theta_j\right) &= \int d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{2n} \left(\theta_i A^{ij} \theta_j\right)^n \\ &= \int d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{2n} \left[\frac{1}{(2n)!} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_{2n-1} i_{2n}} A^{i_1 i_2} \dots A^{i_{2n-1} i_{2n}} \right] \theta_1 \theta_2 \dots \theta_{2n}, \\ &= \sqrt{\det A}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Se ao invés de um tipo de variável, houverem dois, chamados de θ e η , então

$$\int d\theta_1 \dots d\theta_n d\eta_1 \dots d\eta_n \exp\left(-\theta_i A^{ij} \eta_j\right) = \det A. \quad (\text{A.26})$$

9. **Espinores de Dirac:** Denotados por $\psi = \psi(x)$ e $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x)$, em que define-se o conjugado como $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$, sendo γ^0 a matriz de Dirac ¹ dada por $\gamma^0 := \text{diag}(1, 1, -1, -1)$, são campos de Grassmann de quatro componentes

$$\psi = \psi_\alpha := \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\psi} = \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \begin{bmatrix} \bar{\psi}^{\dot{0}} & \bar{\psi}^{\dot{1}} & \bar{\psi}^{\dot{2}} & \bar{\psi}^{\dot{3}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

¹ Mais informações sobre essas matrizes se encontram no Apêndice A.

que descrevem partículas e suas anti-partículas, respectivamente, de spin $\frac{1}{2}$, denominadas férmions. Estes campos e seus conjugados obedecem, em nível clássico, à equação de Dirac

$$\left(i\vec{D} - m\right)\psi = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\psi}\left(i\overleftarrow{D} - m\right) = 0, \quad (\text{A.28})$$

onde $\vec{D} = \gamma^\mu \vec{D}_\mu$, com a seta indicando novamente o sentido de aplicação deste operador, sendo a derivada covariante (que também será chamada “operador de Dirac”) D_μ definida como

$$D_\mu = \partial_\mu + i \sum_n g_n A_\mu^{(n)}, \quad (\text{A.29})$$

onde $A_\mu^{(n)}$ é o n -ésimo campo vetorial de calibre da teoria, cuja “intensidade” da interação com os férmions é expressa através da constante de acoplamento g_n . Em especial, quando acoplado ao 4-potencial eletromagnético A^μ , o acoplamento será $g = -e$, a carga fundamental do elétron. Se quaisquer acoplamentos forem com pseudo-vetores S_μ , estes tomam uma forma como $-\eta S_\mu \gamma^5$, por exemplo, onde $\eta \in \mathbb{R}$.

A expansão do campo espinorial em modos é dada por

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[a_{\mathbf{p}}^{(\lambda)} u_\lambda(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^{(\lambda)\dagger} v_\lambda(p) e^{ip \cdot x} \right], \\ \bar{\psi}(x) &= \sum_{\lambda=\pm\frac{1}{2}} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \left[a_{\mathbf{p}}^{(\lambda)\dagger} \bar{u}_\lambda(p) e^{ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^\lambda \bar{v}_{(\lambda)}(p) e^{-ip \cdot x} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

com $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ sendo o índice relacionado ao autovalor de spin e

$$\left\{ a_{\mathbf{p}}^{(\lambda)}, a_{\mathbf{q}}^{(\lambda')\dagger} \right\} = \left\{ b_{\mathbf{p}}^{(\lambda)}, b_{\mathbf{q}}^{(\lambda')\dagger} \right\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{\lambda \lambda'}, \quad (\text{A.31})$$

sendo todos os demais anti-comutadores nulos. Quando quantizados, a (b) e $a^\dagger$ ($b^\dagger$) serão promovidos a operadores de criação e aniquilação de partículas (anti-partículas), respectivamente. Isso implica em

$$\left\{ \psi_\alpha(\mathbf{x}), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{y}) \right\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.32})$$

enquanto todos os demais se anulam, com os “vetores” constantes definidos como

$$u_\lambda(p) := \sqrt{m} \begin{bmatrix} \xi_\lambda \\ \xi_\lambda \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_\lambda(p) := -\sqrt{m} \begin{bmatrix} \eta_\lambda \\ \eta_\lambda \end{bmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

onde ξ_λ e η_λ são vetores bidimensionais, de maneira que a normalização será

$$\bar{u}_\lambda(p) u_{\lambda'}(p) = 2m \delta_{\lambda \lambda'} \quad \text{e} \quad \bar{v}_\lambda(p) v_{\lambda'}(p) = -2m \delta_{\lambda \lambda'}. \quad (\text{A.34})$$

10. **Campos clássicos externos:** Os campos $A_\mu(x)$ e $S_\mu(x)$, que representam respectivamente o 4-potencial eletromagnético (campo vetorial não massivo) e um pseudo-vetor (campo de Proca com massa M_S) são tratados como campos clássicos de fundo, que satisfazem às equações de movimento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{e} \quad \partial_\mu S^{\mu\nu} + M_S^2 S^\nu = j_5^\nu \quad (\text{A.35})$$

respectivamente, onde os tensores de força são definidos como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \text{e} \quad S_{\mu\nu} = \partial_\mu S_\nu - \partial_\nu S_\mu \quad (\text{A.36})$$

e as correntes se relacionam com os espinores através de

$$j^\mu = \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rangle \quad \text{e} \quad j_5^\mu = \langle \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \rangle. \quad (\text{A.37})$$

Quando for conveniente, serão utilizados campos constantes, onde $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, por exemplo.

11. **Integral de Caminho e Determinante Funcional:** A evolução temporal de um sistema, partindo do estado inicial $|\Phi_i, t_i\rangle$ para o final $|\Phi_f, t_f\rangle$, em Mecânica Quântica pode ser escrita através do operador de evolução temporal, definido como

$$\langle \Phi_f, t_f | \Phi_i, t_i \rangle = \langle \Phi_f | U(t_f, t_i) | \Phi_i \rangle := \langle \Phi_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | \Phi_i \rangle, \quad (\text{A.38})$$

onde $H = H[\Phi]$ é o Hamiltoniano clássico do campo em questão. O operador de evolução temporal possui a propriedade de composição, isto é, $U(t_f, t_i) = U(t_f, t) U(t, t_i)$. Portanto, uma evolução temporal pode ser decomposta em um processo de $N \rightarrow \infty$ etapas, mantendo-se $t_f - t_i = N\Delta t$, de maneira que, expandindo nas bases completas de $\int d\Phi |\Phi\rangle \langle \Phi| = 1$ e de seu conjugado, $\int d\Pi |\Pi\rangle \langle \Pi| = 1$, que satisfaz $\langle \Pi | \Phi \rangle = \exp \left[-i \int d^4x \Pi(x) \Phi(x) \right]$, pode-se mostrar que

$$\langle \Phi_f, t_f | \Phi_i, t_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi]} := \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \mathcal{N} \int \prod_{j=1}^N d\Phi_j e^{-i\Delta t \mathcal{L}}, \quad (\text{A.39})$$

onde $\mathcal{N}$ é uma constante (infinita) de normalização, $\mathcal{L} = \mathcal{L}[\Phi, \Pi]$ é o lagrangiano clássico e $S[\Phi]$ a ação clássica do sistema. Normalmente trabalha-se com estados inicial e final de vácuo, nos limites assintóticos $t_i \rightarrow -\infty$ e $t_f \rightarrow \infty$, isto é,

$$\langle 0 | 0 \rangle := \langle 0, -\infty | 0, \infty \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi]}. \quad (\text{A.40})$$

Para sistemas envolvendo campos interagentes Φ^j e Ψ_{ext} tais que Ψ_{ext} sejam externos, então troca-se para o estado de vácuo interagente, $|0, t\rangle \rightarrow |\Omega\rangle$, com limite assintótico $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\Omega\rangle = |\Psi_{\text{ext}}\rangle$.

De modo análogo, define-se o funcional gerador das funções de Green, também nomeados “funções de correlação”, para um campo com fonte $J(x)$:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi] + i \int d^4x J(x)\Phi(x)}, \quad (\text{A.41})$$

de onde consegue-se extrair funções de correlação em qualquer ordem n (função da correlação de n pontos) de interesse,

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) := \langle 0 | T [\Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n)] | 0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\Phi \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n) e^{iS[\Phi]}}{\int \mathcal{D}\Phi e^{iS[\Phi]}}, \quad (\text{A.42})$$

em que $T [\Phi(x_1) \cdots \Phi(x_n)]$ representa o produto com ordenamento temporal entre os n campos. Em geral a ação pode ser escrita como $S = - \int d^4x d^4y \Phi^T(x) \mathcal{H}(x, y) \Phi(y)$, de maneira que, definindo o inverso² do operador $\mathcal{H}$ tal que

$$\int d^4y \mathcal{H}(x, y) \mathcal{H}^{-1}(y, z) = -i\delta^4(x - z), \quad (\text{A.43})$$

pode-se reescrever

$$Z[J] = Z[0] e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \mathcal{H}_{xy}^{-1} J(y)}. \quad (\text{A.44})$$

Quando os campos em questão se tratam de férmions, que são variáveis de Grassmann, então $Z[0]$ é uma integral Gaussiana como (A.26), isto é,

$$Z[0] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-i \int d^4x \bar{\psi} \mathcal{H} \psi} = \mathcal{N} \det(\mathcal{H}) = \mathcal{N} e^{\text{Tr} \ln(\mathcal{H})}. \quad (\text{A.45})$$

onde $\mathcal{H}(x, y) = \delta^4(x - y) (i\mathcal{D} - m)_y$ é o operador de Dirac com derivada covariante da equação de movimento clássica. Neste caso, o traço funcional presume tomada do traço em componentes de matrizes de Dirac além do traço funcional usual, isto é,

$$\text{Tr} A = \int d^4x \text{tr}_{\text{Dirac}} \langle x | A | x \rangle. \quad (\text{A.46})$$

12. **Teorema de Furry:** Afirma que, em teorias de férmions acoplados a campos de calibre vetorial (como a QED), todas as amplitudes de diagrama de Feynman com um número ímpar de vértices de interação com o campo vetorial se anulam. Em diversos momentos neste trabalho este resultado será utilizado para simplificar os cálculos, eliminando automaticamente toda contribuição com número ímpar de acoplamentos ao campo vetorial. Porém este teorema não é necessariamente válido para o campo axial (ADLER, 1969).

² Que é basicamente a função de correlação de dois pontos.

APÊNDICE B – MATRIZES DE DIRAC

Neste apêndice, será feita a definição das matrizes de Dirac, seguido da enumeração de resultados importantes. Para isso, é preciso começar definindo as matrizes de Pauli,

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

que satisfazem à álgebra de Clifford ¹, isto é,

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = \sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j = 2\delta_{kj} \mathbf{1}, \quad (\text{B.2})$$

onde os índices $j = 1, 2$ e 3 correspondem a x, y e z respectivamente. Elas também satisfazem

$$[\sigma_j, \sigma_k] = \sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j = 2i\varepsilon_{jkl} \sigma^l, \quad (\text{B.3})$$

onde ε_{jkl} é o tensor totalmente anti-simétrico em 3 dimensões. Com essas matrizes, é possível construir as matrizes de Dirac em 4 dimensões que, na representação padrão são dadas por

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

sendo útil definir também

$$\gamma^4 = i\gamma^0, \quad (\text{B.5})$$

para quando for necessária a passagem ao espaço Euclidiano. Essas matrizes também satisfazem à álgebra de Clifford, porém em 4 dimensões, isto é,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \begin{cases} 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}; & \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}, \\ -2\delta^{\mu\nu} \mathbf{1}; & \mu, \nu \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Define-se também as matrizes

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{bmatrix} g^{\mu j} g^{\nu k} \varepsilon_{jkl} \sigma^l & i(g^{\mu 0} g^{\nu j} - g^{\mu j} g^{\nu 0}) \sigma_j \\ i(g^{\mu 0} g^{\nu j} - g^{\mu j} g^{\nu 0}) \sigma_j & g^{\mu j} g^{\nu k} \varepsilon_{jkl} \sigma^l \end{bmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

que permitem a construção de uma base completa para o grupo $\text{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$ em conjunto com a matriz identidade, dada por

$$\Gamma = \{\mathbf{1}, \gamma^\mu, \gamma^5, \gamma^5 \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}\}. \quad (\text{B.8})$$

Com essas matrizes, pode-se definir dois operadores importantes para o contexto a ser discutido aqui:

¹ Para mais detalhes, veja o livro do Lounesto (2001).

- Projetores de helicidade:

$$P_{R/L} := \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5), \quad (B.9)$$

que, de fato, satisfazem

$$\begin{aligned} P_{R/L}^2 &= P_{R/L}, & P_R P_L &= 0, \\ P_R + P_L &= 1, & P_R - P_L &= \gamma^5, \end{aligned} \quad (B.10)$$

e cuja ação projeta férmions em suas componentes de cada quiralidade, isto é,

$$\psi = \psi_R + \psi_L \rightarrow P_{R/L} \psi = \psi_{R/L}, \quad (B.11)$$

que, por sua vez, são autoestados de γ^5 , isto é,

$$\gamma^5 \psi_R = \psi_R \quad \text{e} \quad \gamma^5 \psi_L = -\psi_L. \quad (B.12)$$

- O operador de conjugação da carga:

$$C := \gamma^0 \gamma^2, \quad (B.13)$$

cuja aplicação resulta em

$$C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T \quad \text{e} \quad \psi^{(c)} = C \bar{\psi}^T, \quad (B.14)$$

equivalente a trocar as partículas por suas anti-partículas equivalentes, que obedecem à equação de Dirac

$$(i \not{D}^* - m) \psi^{(c)} = 0, \quad (B.15)$$

em que troca-se $e \rightarrow -e$ na derivada covariante.

Os produtos entre estas matrizes resultam em:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} \mathbf{1} - i \sigma^{\mu\nu}, \quad (B.16)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (B.17)$$

$$\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu = i (g^{\mu\alpha} \gamma^\beta - g^{\mu\beta} \gamma^\alpha) - \varepsilon^{\mu\alpha\beta\lambda} \gamma^5 \gamma_\lambda, \quad (B.18)$$

$$\gamma^5 \gamma^\mu \sigma^{\alpha\beta} = i [\eta^{\mu\alpha} (\gamma^5 \gamma^\beta) - \eta^{\mu\beta} (\gamma^5 \gamma^\alpha)] - \varepsilon^{\mu\alpha\beta\lambda} \gamma_\lambda, \quad (B.19)$$

$$\sigma^{\mu\nu} \sigma^{\alpha\beta} = (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) \mathbf{1} - i (g^{\mu\alpha} \sigma^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} \sigma^{\nu\alpha} - g^{\nu\alpha} \sigma^{\mu\beta} + g^{\nu\beta} \sigma^{\mu\alpha}) + i \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^5. \quad (B.20)$$

Como consequência, seguem alguns resultados particularmente úteis para o contexto aqui trabalhado:

$$\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad \gamma^5 \gamma^\mu = -\frac{1}{6} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma_\nu \sigma_{\alpha\beta}, \quad (\text{B.21})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4 g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu) &= \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda) = \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^5) = \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^5) = \\ &= \text{tr}(\text{número ímpar de matrizes}) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\text{Tr}(\sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu}) = 4(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}), \quad (\text{B.24})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - 4(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}), \quad (\text{B.25})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = \text{Tr}(\gamma^5 \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu}) = -4i \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (\text{B.26})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \mathbf{1}, \quad (\text{B.27})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -6 \gamma^\nu, \quad (\text{B.28})$$

$$\gamma_\mu \sigma^{\mu\beta} = 5i \gamma^\beta, \quad (\text{B.29})$$

$$g_{\mu\beta} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} = -8 \gamma^\alpha \gamma^\nu - 2i \sigma^{\alpha\nu}, \quad (\text{B.30})$$

$$g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} = -32 \mathbf{1}. \quad (\text{B.31})$$

APÊNDICE C – EXPANSÃO DA AÇÃO DE EULER–HEISENBERG

Para expandir o integrando da ação (2.86) em série, é preciso partir de

$$\cosh(a + ib)x = \cos(bx) \cosh(ax) + i \sin(bx) \sinh(ax), \quad (C.1)$$

que implica, portanto, em

$$\frac{\Re \cosh[x(a + ib)]}{\Im \cosh[x(a + ib)]} = \cot(bx) \coth(ax). \quad (C.2)$$

O objetivo aqui é expandir o produto deste termo com $\mathcal{G} = ab$ em série quando $x \ll 1$. Para isso, cada termo deve ser expandido separadamente, a começar pela cotangente

$$\begin{aligned} \cot(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}} = \frac{1}{x} \left[\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}} \right] \\ &= \frac{1}{x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right] \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} \right]^2 - \dots \right\} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} \right] x^{2n} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(2n+1)!} \left[\frac{1}{(2m+1)!} - \frac{1}{(2m)!} \right] x^{2(n+m)} + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!} x^{2n} - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(-1)^n (n-m)}{(n-m+1)!(n+m+1)!} x^{2n} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left[\sum_{m=-n}^n \frac{2n(n-m+1)!(n+m+1)! - (n-m)(2n+1)!}{(2n+1)!(n-m+1)!(n+m+1)!} \right] x^{2n-1} + \dots \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \dots, \end{aligned} \quad (C.3)$$

ao passo que, para a cotangente hiperbólica, como o procedimento é muito similar, encontra-se

$$\coth(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots \quad (C.4)$$

O próximo passo é tomar o produto,

$$\cot(bx) \coth(ax) ab = \frac{1}{x^2} - \frac{(a^2 - b^2)}{3} - \frac{[(a^2 - b^2)^2 + 7a^2 b^2]}{45} x^2 + \dots, \quad (C.5)$$

isto é,

$$\frac{\Re \cosh(e\tau \Sigma_+)}{\Im \cosh(e\tau \Sigma_+)} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{4}{e^2 \tau^2} + \frac{2}{3} F_{\mu\nu}^2 - \frac{e^2 \tau^2}{45} \left[F_{\mu\nu}^4 + \frac{7}{4} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2 \right] + \dots \quad (C.6)$$

Quando ao invés das cotangentes, tem-se frações de senos e cossenos com argumentos diferentes entre si, obtém-se, da mesma maneira:

$$cd \frac{\cos(ax) \cosh(bx)}{\sin(cx) \sinh(dx)} = \frac{1}{x^2} + \frac{c^2 - d^2 - 3(a^2 - b^2)}{6} + \frac{x^2}{360} \left[7(c^2 - d^2)^2 + 4c^2 d^2 - \right. \\ \left. - 30(c^2 - d^2)(a^2 - b^2) + 15(a^2 - b^2)^2 - 60a^2 b^2 \right] + \dots \quad (\text{C.7})$$

APÊNDICE D – REGULARIZAÇÃO DIMENSIONAL

Neste apêndice, serão listadas algumas fórmulas e resultados úteis, com base no livro do Collins (1984), a começar pelos principais resultados:

$$q_\mu q_\nu = \frac{q^2}{D} g_{\mu\nu}, \quad (\text{D.1})$$

$$\int \frac{\mu^\varepsilon d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(q^2)^r}{(q^2 - R^2)^m} = \frac{i(-1)^{r-m} \Gamma(r + \frac{D}{2}) \Gamma(m - r - \frac{D}{2}) \mu^\varepsilon}{(4\pi)^{D/2} \Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(m) (R^2)^{m-r-D/2}}, \quad (\text{D.2})$$

com

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (\text{D.3})$$

quando $\Re(z) > 0$, de forma que $\Gamma(n) = (n-1)!$, se n for um número inteiro positivo. Particularmente,

$$\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) = \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{(1 - \frac{D}{2})} \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mu^\varepsilon}{(R^2)^{2-\frac{D}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) = N_\varepsilon - \ln \frac{R^2}{\mu^2}, \quad (\text{D.4})$$

sendo

$$N_\varepsilon := \frac{2}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma, \quad (\text{D.5})$$

em que $\gamma \approx 0,577$ é a constante de Euler-Mascheroni. As aplicações de interesse aqui são as que seguem:

$$\int \frac{\mu^\varepsilon d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2}{(q^2 - R^2)^2} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{8\pi^2} \frac{\Gamma(-1 - \frac{\varepsilon}{2}) \mu^\varepsilon}{(R^2)^{-1-\varepsilon/2}}, \quad (\text{D.6})$$

$$\int \frac{\mu^\varepsilon d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 - R^2)} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\pi^2} \frac{\Gamma(-1 - \frac{\varepsilon}{2}) \mu^\varepsilon}{(R^2)^{-1-\varepsilon/2}}, \quad (\text{D.7})$$

$$\int \frac{\mu^\varepsilon d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 - R^2)^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(-\frac{\varepsilon}{2}) \mu^\varepsilon}{(R^2)^{-\varepsilon/2}} = N_\varepsilon - \ln \frac{R^2}{\mu^2}. \quad (\text{D.8})$$

Se houverem matrizes γ_5 presentes no traço, é preciso ter cuidado extra, pois a mudança do número de dimensões impacta no comportamento dessa matriz, de maneira que este é um problema em aberto na literatura. Porém, o procedimento indicado por t'Hooft e Veltman (1972) e Collins (1984) é o seguinte:

1. Primeiro, é importante fixar a notação, isto é, passa-se a trabalhar com $\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, enquanto γ^5 pode significar uma outra γ^μ , isto é, $\gamma^5 \neq \gamma_5$.
2. Segundo, define-se a métrica geral

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} \bar{g}_{\mu\nu}, & \mu \text{ e } \nu < 4, \\ \tilde{g}_{\mu\nu} & \mu \text{ ou } \nu \geq 4, \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

observando que

$$\bar{\gamma}^\mu = \bar{g}_{\mu\nu} \gamma^\nu = \begin{cases} \gamma^\mu, & \text{quando } \mu \leq 3, \\ 0 & \text{em todo o resto,} \end{cases} \implies \{\gamma_5, \bar{\gamma}^\mu\} = 0 \quad (\text{D.10})$$

e

$$\tilde{\gamma}_\mu = \tilde{g}_{\mu\nu} \gamma^\nu = \begin{cases} 0, & \text{quando } \mu \leq 3, \\ \gamma^\mu & \text{em todo o resto,} \end{cases} \implies [\gamma_5, \tilde{\gamma}^\mu] = 0, \quad (\text{D.11})$$

isto é, a matriz γ_5 anti-comuta com as 4 matrizes gama usuais, mas comuta com todas as outras que “surgem” ao tomar $D = 4 + \varepsilon$.

3. Note quais γ^μ estão associadas aos momentos dos campos externos e quais estão ligadas aos férmions (internos ao laço), de forma que as externas serão

$$\gamma_{(\text{ext})}^\mu := \bar{\gamma}^\mu \implies \not{q}^{(\text{ext})} = \bar{\not{q}}^{(\text{ext})}, \quad (\text{D.12})$$

enquanto as dos laços podem acessar todo o espaço, isto é,

$$\gamma_{(\text{int})}^\mu := \bar{\gamma}^\mu + \tilde{\gamma}^\mu \implies \not{q}^{(\text{int})} = \bar{\not{q}}^{(\text{int})} + \not{\tilde{q}}^{(\text{int})}, \quad (\text{D.13})$$

portanto a γ_5 anti-comuta com os momentos externos, porém

$$\gamma_5 \not{q}^{(\text{int})} = -\bar{\not{q}}^{(\text{int})} \gamma_5 + \not{\tilde{q}}^{(\text{int})} \gamma_5 = -2\bar{\not{q}}^{(\text{int})} \gamma_5 + \not{q}^{(\text{int})} \gamma_5. \quad (\text{D.14})$$

4. É preciso atentar, durante a integração dos momentos, para o fato de que $[\not{q}^{(\text{int})}]^2 = \frac{[q^{(\text{int})}]}{D} g_{\mu\nu}$, ao passo que $[\bar{\not{q}}^{(\text{int})}]^2 = \frac{[q^{(\text{int})}]^2}{4} \bar{g}_{\mu\nu}$.
5. Os traços serão não nulos quando houver um número ímpar de vértices contendo γ^5 (se o número total de vértices for menor que 4) no diagrama ou potências de (B.26).
6. Para todo o resto, deve-se proceder do mesmo jeito que o prescrito quando não há γ_5 presente para renormalização do diagrama.