UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**PRODUTO EDUCACIONAL**

# **TAREFAS SOBRE PENSAMENTO PROPORCIONAL:** A NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS.

Sinai Elizabeth Ferreira dos Santos
Rosana de Oliveira
Amarildo Melchiades da Silva

Juiz de Fora
2025

Este trabalho está licenciado com uma Licença Creative Commons – Atribuição – NãoComercial 4.0 Internacional.

<a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/"><img alt="Licença Creative Commons" style="border-width:0" src="https://i.creativecommons.org/l/by-nc/4.0/80x15.png" /></a><br />Este trabalho está licenciado com uma Licença <a rel="license" href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/">Creative Commons - Atribuição-NãoComercial 4.0 Internacional</a>.

**SUMÁRIO**

1. APRESENTAÇÃO ..... 4
2. PENSAMENTO PROPORCIONAL E A NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS ..... 6
2.1. CARACTERIZAÇÕES E CONCEPÇÕES SOBRE RACIOCÍNIO E PENSAMENTO PROPORCIONAL. ..... 6
2.2. A NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS ..... 9
3. AS TAREFAS ..... 12
3.1. TAREFA 1 ..... 13
3.2. TAREFA 2 ..... 14
3.3. TAREFA 3 ..... 16
3.4. TAREFA 4 ..... 19
3.5. TAREFA 5 ..... 24
4. SUGESTÕES DE LEITURA ..... 30
REFERÊNCIAS ..... 31
APÊNDICE ..... 32

## 1. APRESENTAÇÃO

Cara(o) professora(o),

Este Produto Educacional é parte integrante da dissertação desenvolvida por mim no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora para a obtenção do título de mestra. O produto é resultado de um dos subprojetos do macroprojeto de pesquisa intitulado *Educação Matemática Escolar no Século XXI: a formação de estudantes e professores da Educação Básica* desenvolvido no PPGEM e no Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática (NIDEEM). Este macroprojeto compõe um programa de investigação interinstitucional denominado *Programa Linsiano de Investigação* em homenagem ao educador matemático Romulo Campos Lins (1955-2017).

Nossa pesquisa compõe a proposta do desenvolvimento de design de tarefas na construção do pensamento proporcional, especificamente sobre a investigação da produção de tarefas sobre a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Vale destacar que este produto educacional foi desenhado como parte do processo da produção de significados por parte dos estudantes. Para isso, é recomendado que o educador utilize este conjunto de tarefas associado a metodologia baseada no Modelo dos Campos Semânticos.

O processo de elaboração do produto educacional foi desenvolvido em íntima relação com nosso problema de pesquisa. As tarefas que compõem o produto contemplam as noções de variáveis diretamente e inversamente proporcionais e que envolve a noção variável e constante (em particular, a constante de proporcionalidade) em matemática. O conjunto de tarefas foi elaborado considerando sua aplicação em turmas do 9º ano do Ensino Fundamental II com a finalidade de dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento proporcional no ensino fundamental I, iniciado com a pesquisa de Fernandes (2024) e na sequência, no ensino fundamental II com a proposta de Cruz (2024) sobre a noção de razão; Schincariol (2025), sobre a noção de taxa e, na sequência a pesquisa de Pedrosa (2024) com tarefas sobre proporção finalizando neste nível de ensino com nosso estudo sobre grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Tomando estas pesquisas em conjunto, nossa proposta diverge do ensino tradicional baseado em aulas expositivo-explicativas e daqueles presentes nos livros didáticos que se apoiam, desde o início, em definições, exemplos e exercícios de fixação e treino. Nosso foco será bem diferente e será sustentada por uma metodologia de ensino em que os alunos estudam sobre fichas de tarefas, para posterior discussão com a turma e o(a) professor(a), em que eles

são estimulados a produzir significados para os objetos acima citados, operar segundo uma lógica com a finalidade de desenvolver o pensamento proporcional. As ações enunciativas dos estudantes serão analisadas com base na leitura positiva presente no MCS.

Consideramos como parte relevante desta pesquisa o fato de buscar promover o desenvolvimento do pensamento proporcional como ferramenta a ser utilizadas em situações cotidianas de um cidadão comum. De igual modo, tem por objetivo o desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo.

O conjunto de tarefas é composto por 5 itens, disponibilizado a seguir como uma parte de uma sequência de trabalhos cujo tema orientador é o pensamento proporcional. Portanto, é recomendado a utilização de todas as tarefas em ordem, desde a noção de razão, que sugerimos aplicar para estudantes a partir do 6° ano, até as grandezas diretamente e inversamente proporcionais, que propomos aplicar para alunos que estejam cursando o 9° ano. Esta indicação visa que o processo de produção de significados na sala de aula possa contemplar os objetos centrais do pensamento proporcional durante os anos finais do ensino fundamental.

Sinai, Rosana e Amarildo

# 2. PENSAMENTO PROPORCIONAL E A NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Neste capítulo, organizados em duas seções. Na primeira, apresentamos caracterizações e concepções do pensamento proporcional, conforme compreendido por educadores. Na segunda, exploramos o que esses educadores entendem pela noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais e sua relevância para a pesquisa.

## 2.1. CARACTERIZAÇÕES E CONCEPÇÕES SOBRE RACIOCÍNIO E PENSAMENTO PROPORCIONAL.

A noção de pensamento proporcional, indiscutivelmente, é considerada pela comunidade de educadores como fundamental para muitas áreas do conhecimento escolar, como a biologia, física, geografia e química. De acordo com Lamon (2012) merecem todo tempo e dedicação para assegurar cuidadosamente seu desenvolvimento. Além do contexto escolar, essa habilidade é essencial para a formação de um cidadão crítico do século XXI, perspectiva esta que se alinha com o objetivo desta macro pesquisa que é: como formar um estudante educado matematicamente.

A relevância do pensamento proporcional também é considerada nos documentos oficiais de orientações curriculares brasileiras, como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental (Brasil, 1998) e na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018).

Contudo, o pensamento proporcional é um conhecimento complexo, que exige um extenso conjunto de conhecimentos necessários para a sua compreensão. De acordo com a pesquisadora estadunidense Susan Lamon,

> "o termo raciocínio proporcional tem sido um termo genérico, uma frase abrangente que se refere a uma certa facilidade com conceitos e contextos de números racionais. O termo é mal definido e os pesquisadores tem sido melhores em determinar quando um estudante ou um adulto não raciocina proporcionalmente em vez de definir as características de quem o faz." (Lamon, 2012, p.3, tradução nossa)

Segundo a autora, mais de 90% dos adultos não raciocinam proporcionalmente, e que por "não desenvolverem a sua capacidade de raciocínio proporcional, têm sido capazes de compensar

através da utilização de regras" (Lamon, 2012, p.3, tradução nossa). Assim, a pesquisadora define:

> "raciocínio proporcional se referirá à capacidade de aumentar e diminuir a escala em situações apropriadas e de fornecer justificativas para afirmações feitas sobre relacionamentos em situações que envolvem proporções diretas simples e proporções inversas" (Lamon, 2012, p.3, tradução nossa).

Ou seja, embora estudantes demonstrem habilidades em problemas escolares utilizando ferramentas procedimentais como regra de três, isso não garante que estejam pensando proporcionalmente. De acordo com Lamon, um aluno que raciocina proporcionalmente, precisa justificar as operações que realiza, indo além de mera aplicação mecânica de algoritmos.

O Educador matemático Van de Walle (2009) defende a ideia de que quando um estudante faz uso de regras antes de conseguir pensar em como os problemas podem ser resolvidos sem elas, há um prejuízo do desenvolvimento da habilidade de raciocinar proporcionalmente. Para o educador, "O raciocínio proporcional é difícil de definir em uma ou duas frases simples. Não é algo que você possa fazer ou não. É um processo tanto qualitativo como quantitativo." (Van de Walle, 2009, p.384). Ele também afirma que de acordo com Lamon (1999), as pessoas que pensam proporcionalmente possuem algumas das características a seguir:

> - "Possuem um senso de covariação. Isto é, eles compreendem relações em que duas quantidades variam juntas e são capazes de perceber como a variação de uma coincide com a variação de outra.
> - Reconhecem relações proporcionais como distintas de relações não proporcionais em contextos do mundo real.
> - Desenvolvem uma ampla variedade de estratégias para resolver proporções ou comparar razões, a maioria baseadas em estratégias informais em vez de algoritmos prescritos.
> - Compreendem razões como entidades distintas representando uma relação diferente das quantidades que elas comparam." (Van de Walle, 2009, p.384)

Lins e Gimenez (1997) também contribuem para essa discussão ao descrever o pensamento proporcional como "aquele que corresponde a uma estrutura de comparação entre partes ou entre todos, ou entre as partes e um todo, ou como um esquema instrumental que resolve algumas situações especiais de comparação em forma multiplicativa e não aditiva." (Lins, Gimenez, 1997, p.52). Essa perspectiva contribui para refletirmos sobre o papel da instrumentalização no ensino de proporcionalidade, desde que com sentido e significado.

Sendo assim, é possível observar que, mesmo quando alunos sabem usar mecanismos para resolver problemas, não significa que possuem a habilidade de pensar proporcionalmente.

Ainda há casos em que os alunos sequer sabem operar usando procedimentos elementares. Para ambos os casos, a pretensão de levá-los a pensar proporcionalmente.

Para Posh e Lesh (1995), "o raciocínio com proporções abarca um espectro mais complexos de faculdades cognitivas" (Posh e Lesh, 1995, p.90). Entretanto, comumente são tratados de forma simplista abordando problemas de valor ausente, como na clássica estrutura: $\frac{a}{b}$ assim como $\frac{c}{x}$, em que $a, b\ e\ c$ são valores informados e $x$ o valor que se deve encontrar. Para os autores, raciocinar proporcionalmente envolve aspectos tanto matemáticos como psicológicos e abrange métodos de pensamento qualitativos e quantitativos, envolvendo senso de covariação, comparações múltiplas e a capacidade de armazenar e processar simultaneamente várias informações.

Esses autores também destacam a importância do pensamento proporcional para o aprendizado de álgebra, já que ele pode ser considerado uma forma elementar de função linear. Tal perspectiva converge com nossa, especialmente no desenvolvimento da noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Para eles, envolver diferentes modos de representações e fazer associações multiformes em uma diversidade de situações proporcionais, são alternativas mais eficazes que o ensino centrado em algoritmos.

Essa abordagem se aproxima das demandas da vida cotidiana de qualquer pessoa inserida em uma sociedade que nunca foi tão pluralizada. Desenvolver habilidades críticas, entre ela o pensamento proporcional, torna-se essencial. Educar matematicamente um estudante para viver neste século XXI requer práticas que promovam reflexão, participação ativa e valorização dos saberes prévios dos alunos.

Nesse sentido, nossa proposta para o desenvolvimento do pensamento proporcional traz o estudante e sua realidade para o centro do processo de ensino e aprendizagem. Vemos nisso a oportunidade de construir uma sala de aula colaborativa e reflexiva, onde o ensino de grandezas diretamente e inversamente proporcional, um dos componentes do pensamento proporcional possa ser explorado de maneira significativa e contextualizada.

## 2.2. A NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Nesta seção abordaremos as noções conhecidas no Brasil como grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Dizemos isto, pois o termo grandeza não é utilizado nas literaturas internacionais que investigamos, que preferem as palavras quantidade e medida. Segundo o dicionário online Oxford Languages, o termo grandeza quer dizer "1. imponência, grandiosidade, magnificência., 2. qualidade ou propriedade do que é grande, extenso; amplidão, vastidão" o que de fato não tem uma relação direta com o conceito matemático ao qual nos referimos. Já a palavra quantidade, segundo o mesmo dicionário é: "qualidade do que pode ser medido, contado, diminuído ou aumentado".

O estudo de grandezas está inserido dentro do pensamento proporcional na matemática escolar. Para nós, o desenvolvimento do pensamento proporcional está dividido em 4 noções: razão, taxa, proporção e grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Essas noções estão interligadas, e serão abordadas de forma sequencial no sexto, sétimo, oitavo e nono ano do Ensino Fundamental respectivamente.

Para Van de Walle (2009), reconhecer as relações entre duas quantidades (grandezas) em diferentes situações é uma habilidade essencial no desenvolvimento do raciocínio proporcional. Ele afirma que:

> "muita das atividades mais valiosas para o desenvolvimento do raciocínio proporcional não envolvem resolver proporções de todo, ... . Resolver uma proporção envolve aplicar uma razão conhecida a uma situação que seja proporcional (medidas relevantes estão na mesma razão) e encontrar uma dessas medidas quando a outra é conhecida" (Van de Walle, 2009, p.383).

Assim percebemos quão importante é compreender a relação que existe entre as grandezas e não apenas de saber resolvê-las mecanicamente. Ter as noções de razão e proporção bem estabelecidas, é fundamental para resolver proporções. Van de Walle ainda alerta que:

> "que os métodos simbólicos ou mecânicos como o algoritmo do produto cruzado usado para resolver proporções não desenvolveram o raciocínio proporcional e não devem ser introduzidos até os alunos terem muitas experiências com métodos intuitivos e conceituais." (Van de Walle, 2009, p.385)

Ou seja, procedimentos e técnicas formais devem ser deixados para última instância, somente após terem sido esgotadas as mais diversas formas de solução. Desafiar os estudantes a explicar suas estratégias e compreender soluções diferentes das suas é uma forma eficaz de promover o raciocínio proporcional (Van de Walle, 2012).

Lamon (2012) descreve as grandezas diretamente e inversamente proporcionais da seguinte maneira:

> "O modelo matemático para relações diretamente é uma função linear da forma $y = kx$, onde $k$é chamada de constante de proporcionalidade. Assim, $y$ é um múltiplo constante de $x$. De forma equivalente, duas quantidades (grandezas) são proporcionais quando variam de tal forma que mantem uma razão constante: $\frac{y}{x} = k$. A constante $k$ também desempenha um papel essencial na compreensão das relações inversamente proporcionais. No modelo matemático para proporções inversas, $k = xy$. Apesar da sua importância, k é extremamente negligenciada no ensino." (Lamon, 2012, p.3, tradução nossa)

A educadora estadunidense considera a constante de proporcionalidade $k$ algo que requer atenção na perspectiva pedagógica do ensino de grandezas proporcionais, pois o fato de $k$ poder ter diferentes significados em diferentes contextos nas relações proporcionais, ele é um elemento estrutural deste conceito. Ela ainda ressalta que "simplesmente não podemos realizar operações sem pensar sobre quais quantidades (grandezas) estão relacionadas, como elas mudam juntas (ou covariam), qual é a constante de proporcionalidade e o que essa constante de proporcionalidade significa" Lamon, 2012, p.4, tradução nossa).

Outro ponto importante para Lamon (2012) quanto a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais é

> "saber o que ele não é e quando não se aplica. Duas quantidades (grandezas) podem não estar relacionadas; uma quantidade pode estar relacionada de forma inversamente proporcional a outra quantidade (grandeza), ou pode ser que uma quantidade seja proporcional a mudança em outra quantidade (diretamente proporcional)" (Lamon, 2012, p.5, tradução nossa)

Oferecer uma variedade de situações em que os estudantes possam avaliar qualitativamente as relações antes de partir para os cálculos, é uma estratégia que a autora considera essencial ao desenvolvimento da noção de grandezas proporcionais. Vejamos alguns exemplos propostos por ela, em que os alunos deverão falar sobre as variações das quantidades:

a. se um saco de terra pesa 40 libras, quanto pesarão 3 sacos de solo?

b. se um jogador de futebol pesa 225 libras, quanto pesarão 3 jogadores?

c. Se Ed consegue pintar o quarto sozinho em 3 horas e seu amigo Jake, trabalhar no mesmo ritmo que Ed, quanto tempo levará para pintar o quarto se os dois trabalharem junto?

Esse é uma visão que nos ajuda a pensar em um ponto de partida para introduzir esta noção na sala de aula que estamos idealizando, diferente do que normalmente se pratica.

Por fim, Carraher e Schliemann (1997) afirmam

> “nas ciências, a proporção aparece tipicamente sob a forma de funções diretamente proporcionais. Uma variável y é diretamente proporcional a uma variável x se y=ax, onde x representa uma variável e a é uma constante de proporcionalidade. Esse tipo de função pode ser representado graficamente como uma linha reta que passa pela origem de um gráfico cartesiano”. (Schliemann, Carraher, 1997, p.16)

No entanto, os autores enfatizam a ideia de que os alunos não compreendem sentenças formais sem antes adquirirem as noções de razão e proporção em uma gama de situações práticas. Isto nos dá indícios importantes de como podemos repensar a abordagem do assunto em sala de aula e reforça a necessidade de desenvolver a compreensão conceitual antes de introduzir formalismos.

## 3. AS TAREFAS

Na elaboração das tarefas, adotamos a concepção de pesquisadores que usam o MCS, que caracterizam uma boa tarefa como algo familiar e não usual. Para Silva (2003), uma boa tarefa deve ser:

> Familiar, no sentido de permitir que as pessoas falem a partir daquele texto e, não usual, no sentido de que a pessoa tenha que desprender um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-lo. O fato de a tarefa ser não usual tem como objetivo nos permitir – enquanto professores ou pesquisadores - observar até onde a pessoa pode ir falando. Além disso, será nosso caminho para investigar a dinâmica do processo de produção de significados dos sujeitos de pesquisa. É importante ressaltar que a crença de que uma tarefa seja familiar e não usual está presente apenas nas expectativas do pesquisador. (SILVA, 2003, p.41)

De acordo com essa perspectiva, as tarefas foram idealizadas para que os sujeitos participantes da pesquisa estivessem, presumidamente, familiarizados com os contextos sugeridos em sua aplicação. No entanto, essa suposição parte unicamente do pesquisador, uma vez que não há garantias de que tal familiaridade se concretize. O termo não usual atribuído a uma boa tarefa, nos leva a crer que se trata de uma tarefa que demande certo esforço cognitivo, ou seja, uma tarefa onde o sujeito precise vencer uma barreira na tentativa de encontrar uma solução e não apenas, de maneira banal consiga alcançar um resultado. Com isso, as tarefas iniciais trazem primeiramente um texto motivador, que chamamos de texto para discussão, cujo o objetivo é que incentivar os participantes a falarem o que sabem e o que pensam a respeito do tema apresentado.

É relevante frisar que esse é um instrumento pedagógico que pode complementar e/ou substituir os livros didáticos usuais, pois ao nosso ver, os livros propõem conceitos rígidos e engessados sem que se dê a devida importância aos significados produzidos. Durante a aplicação das tarefas, o professor pesquisador foi orientado a adotar uma postura de facilitador na dinâmica dos participantes, ou seja, caso houvesse necessidade, o professor pesquisador estava livre para intervir na dinâmica, tirando dúvidas ou propondo sugestões. Essa foi uma conduta intencional, pois pretendíamos reproduzir o que ocorre no dia a dia de uma sala de aula, tendo em vista de que se trata de um mestrado profissional. Os alunos a todo momento solicitam a atenção do professor quando sentem necessidade de tirar dúvidas ou quando querem orientações a respeito das atividades que estão executando.

As tarefas são compostas por itens distintos, todos envolvem a noção de pensamento proporcional, cada uma com seus objetivos específicos. Nesta etapa da pesquisa o foco foi dado a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Cabe destacar que os

participantes já passaram por três estágios anteriores, sendo eles: a noção de razão, a noção de taxa e a noção de proporção.

## 3.1. TAREFA 1

A primeira tarefa é denominada de tarefa disparadora do processo de produção de significados dos estudantes com o objetivo de que eles desenvolvam a noção de variável, constante e variáveis diretamente e inversamente proporcionais.

A esta altura os estudantes, em seus processos de desenvolver o pensamento proporcional já estudaram as noções de razão, taxa e proporção e investigaram vários problemas envolvendo proporções em que foi introduzida a noção de incógnita em tais problemas.

Assim, a primeira tarefa é um texto para leitura e discussão em que, em nossa expectativa, os alunos sejam introduzidos na noção de variável e na interdependência entre variáveis:

**Tarefa 1 – Interdependência entre variáveis**

**Texto para discussão**

Em matemática, para o estudo de diferentes problemas, utilizamos a ideia de **variável**. Uma **variável** é um termo que numa relação pode assumir diferentes valores. Ela é representada por uma letra do alfabeto a qual pode ser atribuído diferentes valores numéricos. Por exemplo, suponha que você queira analisar a distância percorrida pelo carro em que você está viajando durante o momento que você partiu (o tempo zero) até duas horas depois. Então a variável em questão seria o tempo, denotado pela letra t, em horas, apresentado na tabela abaixo:

| t (em horas) | 0 | 1/4 | 1/2 | 1 | 1,5 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|

Uma outra variável envolvida é a distância, que pode ser calculada e representada pela letra d, em quilômetros, expressa na tabela:

| d (em km) | 0 | 25 | 50 | 100 | 150 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|

Mas estamos muito interessados em analisar a relação de *interdependência* que pode existir entre duas variáveis, isto é, quando uma varia a outra também varia segundo um padrão que se repete relacionando-as, como mostra a tabela abaixo com relação ao exemplo anterior:

| t | 0 | 1/4 | 1/2 | 1 | 1,5 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| d | 0 | 25 | 50 | 100 | 150 | 200 |

(a) Você conseguiria dizer o que esta tabela está informando a partir da relação entre as variáveis tempo e distância?

(b) Você consegue exibir um exemplo de duas variáveis que estão em relação de interdependência?

**Resolução**: no item *a* temos que a variável distância varia conforme a variável tempo varia, ou seja, com o passar do tempo, a distância percorrida aumenta. O item *b* deve ser respondido de maneira pessoal.

**Sugestão**: Considerando o professor em sala de aula, sua função neste momento é estimular os alunos a produzirem significados para o texto. Em particular, discutindo as questões simbólicas que envolvem a definição de variáveis y e x e como e como é possível descrever seus comportamentos, ou seja, se são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. O ensino tradicional de matemática não estimula os alunos a esta reflexão, mas nossa proposição é que eles sejam levados a falar dessas questões para entende-las. A ideia é que o contexto da relação tempo e distância percorrida, sirva de motivação para a reflexão dos contextos apresentados pelos alunos como resposta ao item *b*.

## 3.2. TAREFA 2

Na segunda tarefa, nosso propósito foi verificar se os alunos utilizariam as informações da Tarefa 1 na discussão sobre a tarefa. Apresentamos dois tipos fundamentais de interdependência entre variáveis matemáticas: a proporcionalidade direta e a proporcionalidade inversa. Além dessas principais relações, há um destaque para os casos que não se enquadram em nenhum desses dois tipos.

## Tarefa 2

Existem interdependências entre variáveis em matemática que são de grande interesse em ser identificadas, veremos dois casos a seguir.

Consideremos duas variáveis x e y de modo que as variáveis são expressas por valores atribuídos a elas conforme mostra a tabela:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |

Pode ocorrer duas situações especiais de interdependência entre as duas variáveis que analisaremos como casos:

**Primeiro caso**: Com relação aos valores atribuídos as variáveis y e x pode ocorrer uma de duas situações:

- Os valores de x aumentam juntamente com os correspondentes valores de y; ou
- Os valores de x diminuem juntamente com os correspondentes valores de y;

de tal forma que a razão $\frac{y}{x}$ é constante, isto é,

$$\frac{y1}{x1} = \frac{y2}{x2} = \frac{y3}{x3} = \frac{y4}{x4} = \frac{y5}{x5} = k$$

Logo,

$\frac{y}{x} = k$ (constante), ou seja, $y = kx$.

para algum número real k diferente de zero.

Neste caso, diremos que as **variáveis** y e x são **proporcionais ou diretamente proporcionais.**

**Segundo caso:** Com relação aos valores atribuídos as variáveis y e x pode ocorrer uma de duas situações:

- Os valores de x aumentam quando os correspondentes valores de y diminuem; ou
- Os valores de x diminuem quando os correspondentes valores de y aumentam;

de tal forma que o produto x.y é constante, isto é,

$x_1 . y_1 = x_2 . y_2 = x_3 . y_3 = x_4 . y_4 = x_5 . y_5 = k$

Logo,

$x.y = k$, ou seja, $y = \frac{k}{x}$ para algum número real k.

Neste caso, diremos que as variáveis y e x são **inversamente proporcionais**.

Existem casos em que existe uma relação entre as variáveis, mas elas **não são** nem diretamente e nem inversamente proporcionais, como veremos a seguir.

O que você pode gostaria esclarecer, discutir e dizer sobre o que apresentamos nesse texto? Anote as suas dúvidas, questões e afirmações no quadro abaixo para estimular uma conversa sobre o texto.

**Sugestão**: Esta tarefa tem por objetivo promover uma discussão sobre as variáveis diretamente e inversamente proporcionais e responder a possíveis dúvidas que possam surgir durante a aplicação. Não há um gabarito fechado para esta tarefa, visto que a demanda pode variar de acordo com a participação dos estudantes.

## 3.3. TAREFA 3

A tarefa 3, traz uma série de tabelas com valores organizados, com o objetivo que os estudantes analisem os dados à luz dos conceitos discutidos na Tarefa 2. Neste momento, mesmo sem a presença de uma contextualização, são levados a examinar as relações entre os valores e classificá-las como diretamente proporcional, inversamente proporcional ou, ainda, identificar quando não se trata de nenhum desses casos.

### Tarefa 3 - Diretamente ou inversamente proporcionais?

(a) Identifique, nas tabelas abaixo se as variáveis são diretamente ou inversamente proporcionais, ou se não ocorre nenhum dos dois casos? [**Sugestão**: use as informações da tarefa 2 para resolver os itens desta tarefa]

(1)

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |

(2)

| n | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 1 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | 1/7 |

(3)

| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Q | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |

(4)

| u | 3 | 6 | 9 | 12 | 18 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 7 | 14 | 21 | 28 | 42 | 70 |

(5)

| h | 2 | 3 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 75 | 50 | 30 | 15 | 10 | 7,5 |

(6)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Z | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 |

(7)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 5 | 10 | 20 | 40 | 80 | 160 |
| T | 1/2 | 1/4 | 1/8 | 1/16 | 1/32 | 1/64 |

(8)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| V | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

**Resolução**: Analisemos caso a caso de modo a responder à pergunta proposta. Com isso também apresentamos a perspectiva da resolução do professor:

(1) Observamos que quando os valores de x aumentam e variam de 1 a 6, os valores de y também aumentam de 2 a 12. Porém, esta informação ainda não é suficiente para afirmamos que as grandezas são proporcionais. Pois é possível que as duas variáveis aumentam sem que sejam proporcionais. Para podermos concluir nossa suposição devemos verificar ainda a razão $\frac{y}{x}$ para todas as variáveis envolvidas:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = 2$$

Assim, $\frac{y}{x} = k = 2$, para todas as razões.

Logo, y e x são diretamente proporcionais.

Na segunda resolução variamos um pouco a nossa resolução para chamar a atenção dos alunos sobre alguns pontos:

(2) Notamos que a partir de n = 1, os valores de n crescem e os valores correspondentes de p decrescem. Logo, podemos concluir que n e p não são diretamente proporcionais.

Verifiquemos então se n e p são inversamente proporcionais, verificando o produto $x_i.y_i$ para todo x e y da tabela:

$$1.1 = 3.\frac{1}{3} = 4.\frac{1}{4} = 5.\frac{1}{5} = 6.\frac{1}{6} = 7.\frac{1}{7} = 1$$

Logo as grandezas são inversamente proporcionais pois seus produtos são iguais a 1.

(3) Note que quando os valores de t aumentam e variam de 1 a 6, os valores de Q também aumentam de 1 a 36. Então, a única possibilidade é que as grandezas sejam diretamente proporcionais, mas devemos verificar se isto acontece. Assim, tomando o quociente $\frac{Q}{t}$ obtemos:

$$\frac{1}{1} = 1,\ \frac{4}{2} = 2,\ \frac{9}{3} = 3,\ \frac{16}{4} = 4,\ \frac{25}{5} = 5,\ \frac{36}{6} = 6$$

Assim,

$$\frac{1}{1} \neq \frac{4}{2} \neq \frac{9}{3} \neq \frac{16}{4} \neq \frac{25}{5} \neq \frac{36}{6}$$

Portanto, as grandezas não são nem diretamente proporcionais e nem inversamente proporcionais.

(4) Quando os valores de u aumentam, os valores de v também aumentam. Então podemos descartar a hipótese das grandezas serem inversamente proporcionais. E existe a possibilidade de serem, diretamente proporcionais ou não ser uma coisa nem outra. Verificando a razão $\frac{v}{u}$, encontramos:

$$\frac{7}{3} = \frac{14}{6} = \frac{21}{9} = \frac{28}{12} = \frac{42}{18} = \frac{70}{30}$$

Logo, v e u são diretamente proporcionais.

(5) Quando os valores de h aumentam, os valores de T diminuem a partir de n = 1. Então tais grandezas variáveis não são diretamente proporcionais. Devemos então verificar se h e T são inversamente proporcionais:

2.75 = 3.50 = 5. 30= 10. 15= 15. 10 = 20.7,5

Logo as grandezas h e T inversamente proporcionais pois seus produtos são iguais a 150.

(6) Quando os valores de x aumentam, os valores de Z também aumentam seus valores a partir de 1. Então podemos descartar a hipótese das grandezas serem inversamente proporcionais. Logo existe a possibilidade de serem diretamente proporcionais ou não ser uma coisa nem outra. Verificando a razão $\frac{v}{u}$, observamos que:

$$\frac{8}{2} = 4 \text{ e } = \frac{27}{3} = 9$$

Logo, essa informação é suficiente para afirmar que as variáveis x e Z também não são diretamente proporcionais.

(7) Quando os valores de y aumentam, os valores de T diminuem (pois os denominadores das frações ficam menores). Com esta evidência, devemos verificar se y e T são variáveis inversamente proporcionais e já descartamos a possibilidade de serem diretamente proporcionais. Daí, tomando o produto yi . $T_i$ , temos:

$$\frac{1}{2} . 5 = \frac{1}{4} . 10 = \frac{1}{8} . 20 = \frac{1}{16} . 40 = \frac{1}{32} .80 = \frac{1}{64} = 160$$

Logo as grandezas y e T inversamente proporcionais pois seus produtos são iguais a 5/2.

(8) Note que quando os valores de x aumentam e variam de 1 a 6, os valores de V também aumentam de 2 a 7. Então, a única possibilidade é que as grandezas sejam diretamente proporcionais, mas devemos verificar se isto acontece. Assim, tomando o quociente $\frac{V}{x}$ obtemos:

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{4}{3} \neq \frac{5}{4} \neq \frac{6}{5} \neq \frac{7}{6}$$

Portanto, as grandezas não são nem diretamente proporcionais e nem inversamente proporcionais.

**Sugestão**: é importante que os alunos esgotem ao máximo suas tentativas de resolver as tarefas. No entanto, o papel de mediador no processo de produção de significado dos estudantes, deve ser se de atuar na zona proximal de desenvolvimento deles, de forma atenta e cautelosa.

## 3.4. TAREFA 4

A Tarefa 4 pode ser entendida como uma extensão das Tarefas 2 e 3, portanto tem como principal característica a abordagem de situações-problemas contextualizadas. Seu texto inicial versa sobre o conceito de grandeza como um número acompanhado de uma unidade que informa sobre o que estamos falando ou nos referindo. As grandezas são atribuídas às variáveis x e y. O devido destaque a constante de proporcionalidade é reforçado pelos autores, termo este sempre presente em situações-problemas desse tipo. O objetivo é que os participantes consigam identificar se as grandezas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais, ou nenhuma das duas, e se possível, determinar a constante de proporcionalidade. Concluindo, o item 4.1 aborda 2 questões para reflexão dos participantes quanto a relações que não são proporcionais e estratégia de vendas de produtos envazados em embalagens de diferentes tamanhos.

## Tarefa 4 – Situações Problemas

Em problemas em que se simula situações reais do dia a dia as variáveis x e y são também chamadas de grandezas (diretamente ou inversamente proporcionais ou, como vimos, pode não ser nem uma coisa nem outra). Uma grandeza em matemática é expressa por um número seguido de uma unidade que informa sobre o quê estamos falando ou nos referindo. Podemos também dizer que grandeza é sinônimo de quantidade cujos valores são dados em números. São exemplos de grandezas: a idade de uma pessoa, seu peso, o número de filhos, a temperatura, a área de uma sala, o volume de um recipiente.

Ao estudar um problema envolvendo grandezas pode acontecer que exista um valor que é sempre o mesmo e a ele chamaremos de **constante**. E pode acontecer que outras grandezas sejam variáveis enquanto a situação analisada acontece, neste caso a grandeza é chamada **variável**. Por exemplo, pode existir um problema que envolva a área e a temperatura de uma sala em um dia. Nesse caso a área da sala é constante ao longo do dia, enquanto a temperatura da sala pode ser variável no mesmo período. Em outro problema, a temperatura no interior de um Freezer pode permanecer constante, enquanto a espessura da camada de gelo no seu interior é variável.

Esses dois exemplos sugerem que para afirmar se uma grandeza é variável ou constante é necessário analisar bem o problema em estudo, pois uma grandeza pode ser variável em determinada situação e uma constante em outra.

O valor de **k**, mencionado nas tarefas 1 e 2 é uma constante importante quando as grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais e por isso recebe o nome de **constante de proporcionalidade** ou **fator de proporcionalidade**.

Com essas informações em mente, nas situações abaixo, analise a situação seguindo a seguinte ordem de procedimento:

1º) verifique se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais ou se não são uma coisa nem outra.

2º) Caso seja possível identifique a constante de proporcionalidade.

**Situação 1**: Uma lancha de competição, em fase de testes, tem a velocidade e o tempo anotados no seu deslocamento do continente a uma Ilha, avaliada em 5 tentativas, em que se desloca em velocidade constante em um percurso em linha reta. A tabela abaixo mostra os resultados:

| Velocidade (km) | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Tempo (minutos) | 12 | 6 | 4 | 3 | 2,4 |

**Situação 2**: A tabela abaixo mostra o deslocamento de um avião em velocidade constante de 100 km e a distância percorrida:

| Tempo (h) | Distância (Km) |
|---|---|
| 1/4 | 25 |
| 1/2 | 50 |
| 1 | 100 |
| 1,5 | 150 |
| 2 | 200 |
| 2,5 | 250 |

**Situação 3**: Numa escola a professora de educação física realizou a medida da altura de todos os alunos de 1 a 6 anos obtendo a seguinte tabela relacionando a altura média dos alunos em relação a idade:

| Idade (em anos) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Altura média (em cm) | 73,2 | 84,1 | 91,1 | 99,1 | 105,9 | 112,20 |

**Situação 4**: Uma empresa de água mineral lançou uma nova água gaseificada e com sabor de fruta com a seguinte tabela de preços:

| Garrafa (ml) | Preço(R$) |
|---|---|
| 100 | 5,00 |
| 350 | 8,00 |
| 500 | 10,00 |
| 1000 | 18,00 |
| 1500 | 25,00 |
| 2500 | 40,00 |

## Tarefa 4.1: Outras questões para discussão

**(a)Com base na situação 3,** é possível afirmar que pode existir uma relação de proporcionalidade entre idade e altura?

**(b)Com base na situação 4,** suponha que você, sendo o diretor da empresa de água mineral, queira transformar a tabela de preços de acordo com a quantidade de água de modo que a relação preço/conteúdo da garrafa sejam proporcionais, como seria essa tabela? Você acha que a tabela apresentada na situação 4, tem algum objetivo comercial para ela ser como é?

**Resolução**:

**Situação 1**:

a) Note que a velocidade (V) aumenta e o tempo (t) de deslocamento diminui. Pois quando a velocidade da lancha dobra (de 30 km para 60 km); o tempo se reduz a metade. E quando a velocidade triplica (de 30 km para 90 km), o tempo de percurso de reduz a terça parte; quando a velocidade quintuplica (de 30 km para 150 km), o tempo de percurso se reduz a quinta parte. Assim, V e t não são diretamente proporcionais.

Verifiquemos então se V e t são inversamente proporcionais:

$$30.12 = 60.6 = 90.\ 4 = 120.\ 3 = 150.\ (2{,}4) = 360$$

Logo as grandezas V e t são inversamente proporcionais.

b) A constante de proporcionalidade é k = 360.

**Situação 2**:

a) Observamos que o tempo (t) aumenta a distância percorrida (d) também aumenta. Logo a relação d/t não é inversamente proporcional. Verifiquemos se as grandezas variáveis são diretamente proporcionais.

Calculando a razão d/t para todas as variáveis temos:

$$\frac{d}{t} = \frac{25}{1/4} = \frac{50}{1/2} = \frac{100}{1} = \frac{150}{1{,}5} = \frac{200}{2} = \frac{250}{2{,}5}$$

Concluímos que as grandezas são diretamente proporcionais.

b) A constante de proporcionalidade é k = 100.

**Situação 3**:

a) Observamos que **nesta escola** quando a idade aumenta a altura média dos alunos também aumenta. Assim, a relação entre as variáveis idade e altura não são inversamente proporcionais. Verifiquemos então se elas são diretamente proporcionais:

Note que verificando duas delas obtemos:

$\frac{A}{I} = \frac{73,2}{1} = 73,2$ e $\frac{A}{I} = \frac{84,1}{2} = 42,05$

Logo o teste de duas taxas já nos indica que elas são diferentes. Portanto, as variáveis idade e altura não são diretamente proporcionais.

b) Não há constante de proporcionalidade.

**Situação 4**:

a) Note que quando o conteúdo da garrafa aumenta o preço também aumenta. Assim, a taxa quantidade/preço não é inversamente proporcional. Vamos verificar então se elas são diretamente proporcionais:

Note que verificando duas delas obtemos:

$\frac{G}{P} = \frac{100}{5} = 20$ ml/real e $\frac{G}{P} = \frac{350}{8} = 43,75$ ml/real

Logo o teste das duas taxas já nos informa que elas são diferentes. Portanto, as variáveis, quantidade em ml por preço em reais não são diretamente proporcionais. (Discutir os alunos se eles observaram que quando se suspeita que as variáveis não são diretamente, nem inversamente proporcionais, não é necessário verificar todas as razões ou taxas, basta só que duas delas sejam diferentes.

**Tarefa 4.1**:

Nas expectativas do professor está que a turma apresente respostas que aproximei das seguintes resoluções:

(a) Observamos que, quando uma idade é duplicada como, por exemplo, de 5 para 10 anos e depois para 20 anos, a altura não dobra e nem se reduz a metade. A altura simplesmente aumenta sem respeitar nenhuma proporção em relação a idade nos seres humanos. Nesse caso, temos um bom exemplo de grandezas que não são proporcionais.

(b) Montemos a tabela de modo que a proporcionalidade aconteça:

Esbocemos antes a nossa proposta para a tabela:

Se 100 ml _____ 5,00, então:

300 ml _____ 15,00

350 ml _____ 15,00 + 2,50 = 17,50

500 ml (5 x 100 ml) _____ 25,00

| Garrafa (ml) | Preço(R$) |
|---|---|

| | |
|---|---|
| 100 | 5,00 |
| 350 | 17,50 |
| 500 | 25,00 |
| 1000 | 50,00 |
| 1500 | 75,00 |
| 2500 | 125,00 |

No mercado, a ideia é que o consumidor compre a maior quantidade do produto, no caso de água. Por isso, na prática, enquanto mais quantidade, mais em barato fica o produto em relação aos produtos de menor quantidade.

## 3.5. TAREFA 5

A Tarefa 5 aborda a interdependência entre as variáveis dada por uma regra/fórmula que traduza essa associação. Os 12 itens da tarefa trazem valores numéricos organizados em tabelas e situações problemas em que o objetivo é que os participantes analisem e encontrem, caso exista, uma regra que expresse a interdependência entre as variáveis. Na sequência, deverão indicar as variáveis dependente e independentes.

### Tarefa 5 - Interdependência especial entre variáveis

A interdependência entre duas variáveis pode ser, às vezes, apresentada por uma **fórmula** que expressa uma **regra** que associa as duas variáveis. Nas tarefas abaixo, já estudadas anteriormente:

(a) Encontre, se possível, a fórmula que expressa a interdependência entre as variáveis;

(b) Identifique, se possível, a regra que associa as variáveis sabendo que na relação entre as variáveis uma delas é **independente** e a outra é **dependente**, isto é, enquanto para a variável independente pode ser atribuídos valores numéricos arbitrários (quaisquer), a outra variável dependerá desses valores para se encontrar o seu valor numérico. Diga qual é a variável independente e qual é a dependente em cada caso.

(1)

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |

(2)

| n | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 1 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | 1/7 |

(3)

| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Q | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |

(4)

| u | 3 | 6 | 9 | 12 | 18 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 7 | 14 | 21 | 28 | 42 | 70 |

(5)

| h | 2 | 3 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 75 | 50 | 30 | 15 | 10 | 7,5 |

(6)

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 |

(7)

| y | 5 | 10 | 20 | 40 | 80 | 160 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 1/2 | 1/4 | 1/8 | 1/16 | 1/32 | 1/64 |

(8)

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

(9) Uma lancha de competição, em fase de testes, tem a velocidade e o tempo anotados no seu deslocamento do continente a uma Ilha, avaliada em 5 tentativas, em que se desloca em velocidade constante em um percurso em linha reta. A tabela abaixo mostra os resultados:

| Velocidade (km) | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tempo (minutos) | 12 | 6 | 4 | 3 | 2,4 |

(10) A tabela abaixo mostra o deslocamento de um avião em velocidade constante de 100 km e a distância percorrida:

| Tempo (h) | Distância (Km) |
|---|---|
| 1/4 | 25 |
| 1/2 | 50 |
| 1 | 100 |
| 1,5 | 150 |
| 2 | 200 |
| 2,5 | 250 |

(11) Numa escola a professora de educação física realizou a medida da altura de todos os alunos de 1 a 6 anos obtendo a seguinte tabela relacionando a altura média dos alunos em relação a idade:

| Idade (em anos) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Altura média (em cm) | 73,2 | 84,1 | 91,1 | 99,1 | 105,9 | 112,20 |

(12) Uma empresa de água mineral lançou uma nova água gaseificada e com sabor de fruta com a seguinte tabela de preços:

| Garrafa (ml) | Preço(R$) |
|---|---|
| 100 | 5,00 |
| 350 | 8,00 |
| 500 | 10,00 |
| 1000 | 18,00 |
| 1500 | 25,00 |
| 2500 | 40,00 |

**Resolução:** segue nossa proposta de solução para as tarefas

**(1)**

a) As grandezas x e y são diretamente proporcionais.

b) Seja x é a variável independente e y a variável dependente. Assim, a cada valor de x se relaciona um valor de y.

c) Caminho 1 :(de acordo com nosso estudo): Como x e y são proporcionais, temos que:

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{1} \quad \text{ou } y = 2x,$$

Pois a constante de proporcionalidade é 2.

Caminho 2:

x y

1 _____ 2 = 2.1

2 _____ 4 = 2.2

3 _____ 6 = 2.3

e sucessivamente. Daí, concluímos que:

$$y = 2x$$

**(2)**

a) As variáveis n e P são inversamente proporcionais.

b) Seja n, a variável independente, e P a variável dependente, assim a cada valor de n se relaciona um valor de P.

c) Como, n e P são inversamente proporcionais temos que:

$$n.\ P = 1 \text{ ou } P = \frac{1}{n}, \text{ pois } 1.1 = 1.\ 1/3 = .....$$

**(3)**

a) As variáveis t e Q NÃO são nem diretamente e nem inversamente proporcionais.

b) Seja t, a variável independente, e Q a variável dependente, assim a cada valor de t se relaciona um valor de Q.

c) Note que:

t _____ Q

1 _____ $1 = 1.1 = 1^2$

2 _____ $4 = 2.2 = 2^2$

3 _____ $9 = 3.3 = 3^2$

.....

t _____ $t^2$

Logo, $Q = t^2$

**(4)**

a) As grandezas u e V são diretamente proporcionais.

b) Seja u é a variável independente e V a variável dependente. Assim, a cada valor de u se relaciona um valor de V.

c) Como u e V são proporcionais, temos que:

$$\frac{V}{u} = \frac{7}{3} \text{ ou } V = \frac{7}{3}\,u$$

Pois a constante de proporcionalidade é 7/3.

Obs. Usar o caminho de encontrar a relação entre u e V (caminho 2 da tarefa 1), neste caso, fica mais trabalhoso perceber a relação.

**(5)**

a) As variáveis h e T são inversamente proporcionais.

b) Seja h, a variável independente, e T a variável dependente, assim a cada valor de n se relaciona um valor de P.

c) Como, h e T são inversamente proporcionais temos que:

h. T = 150 (constante de proporcionalidade) ou $T = \frac{150}{h}$.

**(6)**

a) As variáveis x e Z NÃO são nem diretamente e nem inversamente proporcionais.

b) Seja x, a variável independente, e Z a variável dependente, assim a cada valor de x se relaciona um valor de Z.

c) x _____ Z

1 _____ 1

2 _____ $8 = 2^3$

3 _____ $27 = 3^3$

4 _____ $64 = 4^3$

.....

Logo, Z = x3.

**(7)**

a) As variáveis y e T são inversamente proporcionais.

b) Seja y, a variável independente, e T a variável dependente, assim a cada valor de y se relaciona um valor de T.

c) Como, y e T são inversamente proporcionais temos que:

$$T.\ y = 5.\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad T = \frac{5}{2y}$$

**(8)**

a) As variáveis x e Z NÃO são nem diretamente e nem inversamente proporcionais.

b) Seja x, a variável independente, e Z a variável dependente, assim a cada valor de x se relaciona um valor de Z.

c) x _____ Z

1 _____ 2 = 1 + 1

2 _____ 3 = 2 + 1

3 _____ 4 = 3 + 1

.....

x _____ Z = x + 1

**(9)**

a) As variáveis V e t são inversamente proporcionais.

b) Seja t, a variável independente, e V a variável dependente, assim a cada valor de t se relaciona um valor de V.

c) Como, V e t são inversamente proporcionais temos que:

V. t = 360 (constante de proporcionalidade) ou $V = \frac{360}{t}$ .

**(10)**

a) As grandezas t e d são diretamente proporcionais.

b) Seja t é a variável independente e d a variável dependente. Assim, a cada valor de t se relaciona um valor de d.

c) Como u e V são proporcionais, temos que:

$$\frac{d}{t} = 100 \quad \text{ou d} = 100.\text{t.}$$

**(11)**

a) As variáveis idade e altura média NÃO são nem diretamente e nem inversamente proporcionais.

b) Não é possível relacionar as variáveis idade dos alunos e altura média.

c) Não é possível produzir uma regra ou fórmula que relaciona a idade dos estudantes e sua altura média.

**(12)**

a) As variáveis preço e quantidade de água NÃO são nem diretamente e nem inversamente proporcionais.

b) Não é possível relacionar as variáveis vasilhame (quantidade de líquido) e preço.

c) Não é possível produzir uma regra ou fórmula que relaciona as variáveis vasilhame (quantidade de líquido) e preço.

## 4. SUGESTÕES DE LEITURA

Esta pesquisa teve como objetivo a produção de um conjunto de tarefas para o desenvolvimento do pensamento proporcional em específico sobre a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, baseada no Modelo dos Campos Semânticos como referencial teórico-epistemológico e metodológico.

Sendo assim as sugestões de leitura para as(os) professoras(os) são

- **Pensamento proporcional na matemática escolar:** a noção de razão. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática de Kaio S. Cruz, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2024.
- **Pensamento proporcional nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática de Letícia F. Fernandes, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2024.
- **Pensamento proporcional na matemática escolar**: o ensino da noção de taxa. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática de Taynara Schincariol, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2025.
- **Pensamento proporcional na matemática escolar**: o ensino da noção de razão. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática de Maria Eduarda Pedrosa, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 2025.
- **"Teaching Fractions And Ratios For Understanding"** de Susan Lamon, 2012.
- **"Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula." de Jonh A. Van de Walle, 2009.
- **"O Modelo dos Campos Semânticos:** Um modelo epistemológico em Educação Matemática." de Amarildo Melchiades da Silva, 2022.
- **"Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história." organizado por Claudia Laus Angelo, 2012. Disponível em https://drive.google.com/file/d/1AigbhJrZ9RAKINJg31420Nqz02NwxWHC/view. Acesso em 09 de março de 2025.

**REFERÊNCIAS**


LAMON, Susan. J. **Teaching Fractions And Ratios For Understanding.** 3ed. Nova Iorque: Routledge, 2012.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. Matemática e Realidade: 9º ano. 10. ed. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2022.

LINS, Romulo Campos. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, Claudia Laus et al (org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p.11-30.

POST, T. R., BEHER, M. J. e LESH, R. **A Proporcionalidade o Desenvolvimento de Noções Pré-Álgebra**. Coxford, Arthur F. e Schulte, Albert P. (org.). As Idéias da Álgebra, 89-103, Atual Ed., São Paulo, 1995.

SILVA, Amarildo Melchiades da. **O Modelo dos Campos Semânticos:** Um modelo epistemológico em Educação Matemática. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2022.

SILVA, Amarildo M.; BASTOS, Ronaldo R.; OLIVEIRA, Rosana. **Educação Matemática Escolar no século XXI: a formação de estudantes e professores da educação básica.** In: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática: perspectiva de pesquisa e implicações no ensino e na aprendizagem de matemática. Silva, A.M.; Rodrigues, C.K; Cruz, W.J. (orgs.). Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2024. p. 92-109.

VAN DE WALLE, John A**. Matemática no Ensino Fundamental**: Formação de Professores e Aplicações em Sala de Aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

**APÊNDICE**

**Apêndice 1:** Conjunto de Tarefas sobre a Noção de Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais.
Ou acesse: Noção de Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais - Tarefas-PPGEM-UFJF.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

**Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/PPGEM**

**Tarefa 1 – Interdependência entre variáveis**
**Texto para discussão**

Em matemática, para o estudo de diferentes problemas, utilizamos a ideia de **variável**. Uma **variável** é um termo que numa relação pode assumir diferentes valores. Ela é representada por uma letra do alfabeto a qual pode ser atribuído diferentes valores numéricos. Por exemplo, suponha que você queira analisar a distância percorrida pelo carro em que você está viajando durante o momento que você partiu (o tempo zero) até duas horas depois. Então a variável em questão seria o tempo, denotado pela letra t, em horas, apresentado na tabela abaixo:

| t (em horas) | 0 | 1/4 | 1/2 | 1 | 1,5 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|

Uma outra variável envolvida é a distância, que pode ser calculada e representada pela letra d, em quilômetros, expressa na tabela:

| d (em km) | 0 | 25 | 50 | 100 | 150 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|

Mas estamos muito interessados em analisar a relação de *interdependência* que pode existir entre duas variáveis, isto é, quando uma varia a outra também varia segundo um padrão que se repete relacionando-as, como mostra a tabela abaixo com relação ao exemplo anterior:

| t | 0 | 1/4 | 1/2 | 1 | 1,5 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| d | 0 | 25 | 50 | 100 | 150 | 200 |

(a) Você conseguiria dizer o que esta tabela está informando a partir da relação entre as variáveis tempo e distância?

(b) Você consegue exibir um exemplo de duas variáveis que estão em relação de interdependência?

## Tarefa 2

Existem interdependências entre variáveis em matemática que são de grande interesse em ser identificadas, veremos dois casos a seguir.

Consideremos duas variáveis x e y de modo que as variáveis são expressas por valores atribuídos a elas conforme mostra a tabela:

| x | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ |

Pode ocorrer duas situações especiais de interdependência entre as duas variáveis que analisaremos como casos:

**Primeiro caso**: Com relação aos valores atribuídos as variáveis y e x pode ocorrer uma de duas situações:

- Os valores de x aumentam juntamente com os correspondentes valores de y; ou
- Os valores de x diminuem juntamente com os correspondentes valores de y;

de tal forma que a razão $\frac{y}{x}$ é constante, isto é,

$$\frac{y1}{x1} = \frac{y2}{x2} = \frac{y3}{x3} = \frac{y4}{x4} = \frac{y5}{x5} = k$$

Logo,

$$\frac{y}{x} = k \text{ (constante), ou seja, } y = kx.$$

para algum número real k diferente de zero.

Neste caso, diremos que as **variáveis** y e x são **proporcionais ou diretamente proporcionais.**

**Segundo caso:** Com relação aos valores atribuídos as variáveis y e x pode ocorrer uma de duas situações:

- Os valores de x aumentam quando os correspondentes valores de y diminuem; ou
- Os valores de x diminuem quando os correspondentes valores de y aumentam;

de tal forma que o produto x.y é constante, isto é,

$$x_1 . y_1 = x_2 . y_2 = x_3 . y_3 = x_4 . y_4 = x_5 . y_5 = k$$

Logo,

$$x.y = k, \text{ ou seja, } y = \frac{k}{x}$$

para algum número real k.

Neste caso, diremos que as variáveis y e x são **inversamente proporcionais**.

Existem casos em que existe uma relação entre as variáveis, mas elas **não são** nem diretamente e nem inversamente proporcionais, como veremos a seguir.

O que você pode gostaria esclarecer, discutir e dizer sobre o que apresentamos nesse texto? Anote as suas dúvidas, questões e afirmações no quadro abaixo para estimular uma conversa sobre o texto.

**Tarefa 3 - Diretamente ou inversamente proporcionais?**

(a) Identifique, nas tabelas abaixo se as variáveis são diretamente ou inversamente proporcionais, ou se não ocorre nenhum dos dois casos?

[**Sugestão**: use as informações da tarefa 2 para resolver os itens desta tarefa]

(1)

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |

(2)

| n | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 1 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | 1/7 |

(3)

| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Q | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |

(4)

| u | 3 | 6 | 9 | 12 | 18 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 7 | 14 | 21 | 28 | 42 | 70 |

(5)

| h | 2 | 3 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 75 | 50 | 30 | 15 | 10 | 7,5 |

(6)

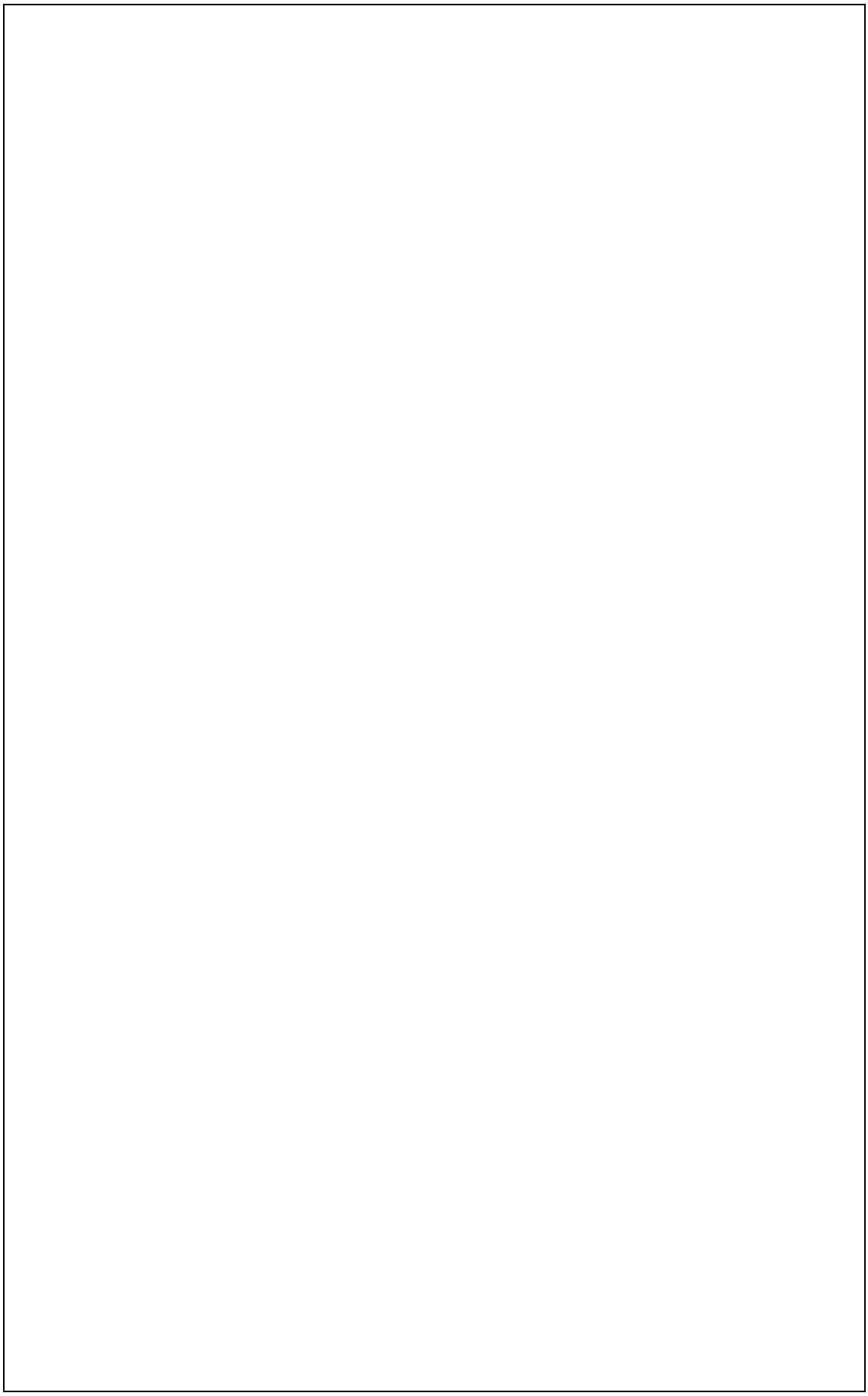
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 |

(7)

| y | 5 | 10 | 20 | 40 | 80 | 160 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 1/2 | 1/4 | 1/8 | 1/16 | 1/32 | 1/64 |

(8)

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |



## Tarefa 4 – Situações Problemas

Em problemas em que se simula situações reais do dia a dia as variáveis x e y são também chamadas de grandezas (diretamente ou inversamente proporcionais ou, como vimos, pode não ser nem uma coisa nem outra). Uma grandeza em matemática é expressa por um número seguido de uma unidade que informa sobre o quê estamos falando ou nos referindo. Podemos também dizer que grandeza é sinônimo de quantidade cujos valores são dados em números. São exemplos de grandezas: a idade de uma pessoa, seu peso, o número de filhos, a temperatura, a área de uma sala, o volume de um recipiente.

Ao estudar um problema envolvendo grandezas pode acontecer que exista um valor que é sempre o mesmo e a ele chamaremos de **constante**. E pode acontecer que outras grandezas sejam variáveis enquanto a situação analisada acontece, neste caso a grandeza é chamada **variável**. Por exemplo, pode existir um problema que envolva a área e a temperatura de uma sala em um dia. Nesse caso a área da sala é constante ao longo do dia, enquanto a temperatura da sala pode ser variável no mesmo período. Em outro problema, a temperatura no interior de um Freezer pode permanecer constante, enquanto a espessura da camada de gelo no seu interior é variável.

Esses dois exemplos sugerem que para afirmar se uma grandeza é variável ou constante é necessário analisar bem o problema em estudo, pois uma grandeza pode ser variável em determinada situação e uma constante em outra.

O valor de **k**, mencionado nas tarefas 1 e 2 é uma constante importante quando as grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais e por isso recebe o nome de **constante de proporcionalidade** ou **fator de proporcionalidade**.

Com essas informações em mente, nas situações abaixo, analise a situação seguindo a seguinte ordem de procedimento:

1º) verifique se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais ou se não são uma coisa nem outra.

2º) Caso seja possível identifique a constante de proporcionalidade.

**Situação 1**: Uma lancha de competição, em fase de testes, tem a velocidade e o tempo anotados no seu deslocamento do continente a uma Ilha, avaliada em 5 tentativas, em que se desloca em velocidade constante em um percurso em linha reta. A tabela abaixo mostra os resultados:

| Velocidade (km) | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tempo (minutos) | 12 | 6 | 4 | 3 | 2,4 |

**Situação 2**: A tabela abaixo mostra o deslocamento de um avião em velocidade constante de 100 km e a distância percorrida:

| Tempo (h) | Distância (Km) |
|---|---|
| 1/4 | 25 |
| 1/2 | 50 |
| 1 | 100 |
| 1,5 | 150 |
| 2 | 200 |
| 2,5 | 250 |

**Situação 3**: Numa escola a professora de educação física realizou a medida da altura de todos os alunos de 1 a 6 anos obtendo a seguinte tabela relacionando a altura média dos alunos em relação a idade:

| Idade (em anos) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Altura média (em cm) | 73,2 | 84,1 | 91,1 | 99,1 | 105,9 | 112,20 |

**Situação 4**: Uma empresa de água mineral lançou uma nova água gaseificada e com sabor de fruta com a seguinte tabela de preços:

| Garrafa (ml) | Preço(R$) |
|---|---|
| 100 | 5,00 |
| 350 | 8,00 |
| 500 | 10,00 |
| 1000 | 18,00 |
| 1500 | 25,00 |
| 2500 | 40,00 |

**Tarefa 4.1: Outras questões para discussão**

**(a)Com base na situação 3,** é possível afirmar que pode existir uma relação de proporcionalidade entre idade e altura?

**(b)Com base na situação 4,** suponha que você, sendo o diretor da empresa de água mineral, queira transformar a tabela de preços de acordo com a quantidade de água de modo que a relação preço/conteúdo da garrafa sejam proporcionais, como seria essa tabela? Você acha que a tabela apresentada na situação 4, tem algum objetivo comercial para ela ser como é?

## Tarefa 5 – Interdependência especial entre variáveis

A interdependência entre duas variáveis pode ser, às vezes, apresentada por uma **fórmula** que expressa uma **regra** que associa as duas variáveis. Nas tarefas abaixo, já estudadas anteriormente:

(a) Encontre, se possível, a fórmula que expressa a interdependência entre as variáveis;

(b) Identifique, se possível, a regra que associa as variáveis sabendo que na relação entre as variáveis uma delas é **independente** e a outra é **dependente**, isto é, enquanto para a variável independente pode ser atribuídos valores numéricos arbitrários (quaisquer), a outra variável dependerá desses valores para se encontrar o seu valor numérico. Diga qual é a variável independente e qual é a dependente em cada caso.

(1)

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |

(2)

| n | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 1 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | 1/7 |

(3)

| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Q | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |

(4)

| u | 3 | 6 | 9 | 12 | 18 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| v | 7 | 14 | 21 | 28 | 42 | 70 |

(5)

| h | 2 | 3 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 75 | 50 | 30 | 15 | 10 | 7,5 |

(6)

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Z | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 |

(7)

| y | 5 | 10 | 20 | 40 | 80 | 160 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | 1/2 | 1/4 | 1/8 | 1/16 | 1/32 | 1/64 |

(8)

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

(9) Uma lancha de competição, em fase de testes, tem a velocidade e o tempo anotados no seu deslocamento do continente a uma Ilha, avaliada em 5 tentativas, em que se desloca em velocidade constante em um percurso em linha reta. A tabela abaixo mostra os resultados:

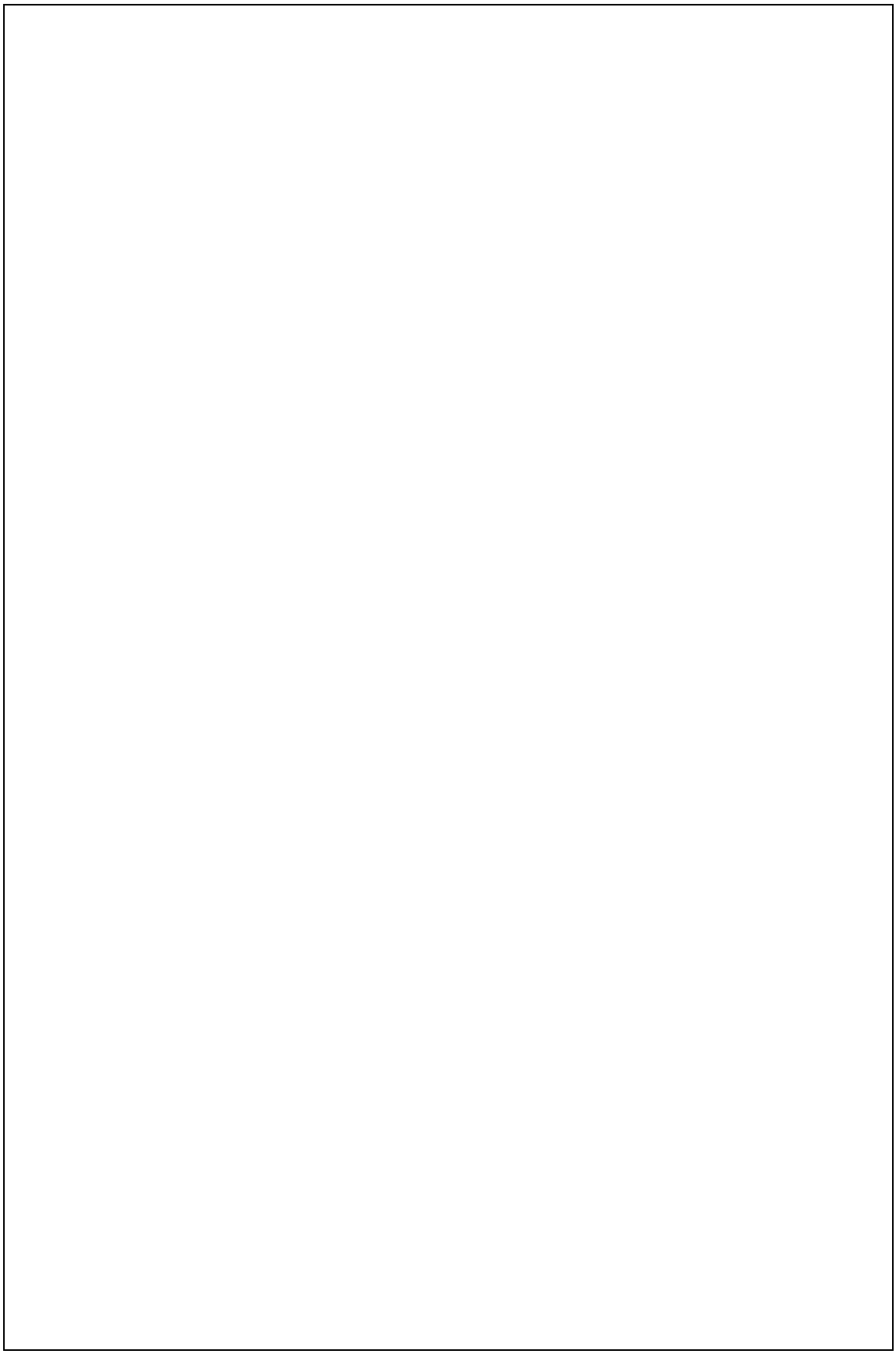
| Velocidade (km) | 30 | 60 | 90 | 120 | 150 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tempo (minutos) | 12 | 6 | 4 | 3 | 2,4 |

(10) A tabela abaixo mostra o deslocamento de um avião em velocidade constante de 100 km e a distância percorrida:

| Tempo (h) | Distância (Km) |
|---|---|
| 1/4 | 25 |
| 1/2 | 50 |
| 1 | 100 |
| 1,5 | 150 |
| 2 | 200 |
| 2,5 | 250 |

(11) Numa escola a professora de educação física realizou a medida da altura de todos os alunos de 1 a 6 anos obtendo a seguinte tabela relacionando a altura média dos alunos em relação a idade:

| Idade (em anos) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Altura média (em cm) | 73,2 | 84,1 | 91,1 | 99,1 | 105,9 | 112,20 |

(12) Uma empresa de água mineral lançou uma nova água gaseificada e com sabor de fruta com a seguinte tabela de preços:

| Garrafa (ml) | Preço(R$) |
|---|---|
| 100 | 5,00 |
| 350 | 8,00 |
| 500 | 10,00 |
| 1000 | 18,00 |
| 1500 | 25,00 |
| 2500 | 40,00 |