UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SINAI ELIZABETH FERREIRA DOS SANTOS

PENSAMENTO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA ESCOLAR: O ENSINO DA NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS.

Juiz de Fora
2025

SINAI ELIZABETH FERREIRA DOS SANTOS

PENSAMENTO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA ESCOLAR: O ENSINO DA NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rosana de Oliveira

Coorientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades

Juiz de Fora

2025

Sinai Elizabeth Ferreira dos Santos

Pensamento proporcional na Matemática Escolar: o ensino da noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática. Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 03 de julho de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Rosana de Oliveira - Orientadora

Universidade Federal de Juiz de Fora

Profa. Dra. Andreia Carvalho Maciel Barbosa

Colégio Pedro II

Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva

Universidade Federal de Juiz de Fora

Juiz de Fora, 03/07/2025.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Rosana de Oliveira**, **Usuário Externo**, em 18/07/2025, às 15:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Andreia Carvalho Maciel Barbosa**, **Usuário Externo**, em 18/07/2025, às 16:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

"É preciso ter esperança, mas ter esperança do verbo esperançar; porque tem gente que tem esperança do verbo esperar."

Paulo Freire

AGRADECIMENTOS

A chegada até este momento foi um pisar em nuvens, tamanho vislumbre era cursar uma pós graduação stricto sensu em uma universidade como a UFJF. A trajetória foi árdua em todos os quesitos, no entanto o sentimento de conquista e vitória não seria o mesmo se assim não fosse.

Com o coração extremamente triunfante, reconheço que sem o apoio, sustento e incentivo de tantos não teria chegado até aqui. Ao Princípio e o Fim, agradeço por tudo o que tenho e o que sou, pois tudo provém Dele.

Ao meu companheiro de vida, Igor, que sempre me incentivou e apoiou e que por muitos momentos patrocinou minhas viagens a cidade de Juiz de Fora, tornando possível o sonho de cursar o mestrado. Além disso, sacrificou os seus próprios desejos em favor daquilo que considerou o melhor pra mim. Registro aqui o meu reconhecimento e expresso a minha profunda gratidão.

Aos meus pais, Maria Cristina e Luiz Fernando, que, mesmo sem saber, ajudaram a construir a pessoa que me tornei. Em especial à minha mãe que sempre fez tudo o que estava ao seu alcance para investir em meus estudos. Ao meu filho Tito, por ter estado sempre ao meu lado.

Aos meus orientadores, Rosana e Amarildo, pela amizade, confiança e dedicação a esta pesquisa. Ao professor Amarildo pelos momentos de convivência nas aulas, nos cafés dos intervalos, e nas tantas oportunidades que me proporcionou.

Aos professores amigos do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, pela inspiração e motivação de seguir em frente na profissão docente. Aos colegas do grupo de pesquisa, Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática pelo ambiente de estudos, pesquisa e partilha.

Às minhas queridas amigas de turma, Maria Eduarda e Taynara, pela parceria fundamental durante a construção deste trabalho. Não consigo imaginar essa jornada sem elas, que me acolheram e por tantas vezes me fizeram levantar e me apoiaram para seguir em frente.

Aos meus colegas de turma de 2023, que proporcionaram momentos enriquecedores nas trocas de experiências e na partilha de conhecimento.

A todos os professores que fizeram parte da minha história e trajetória acadêmica, muito obrigada a todos vocês!

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo investigar a produção de um conjunto de tarefas, à luz do referencial teórico e metodológico intitulado Modelo dos Campos Semânticos (MCS), para o ensino da noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais no Ensino Fundamental. A investigação fez parte do projeto de pesquisa intitulado *Educação Matemática Escolar no Século XXI: a formação de estudantes e professores da Educação Básica*, em particular, como parte do estudo sobre o desenvolvimento do pensamento proporcional na proposta de educar matematicamente um estudante do ensino fundamental. A pesquisa teve uma abordagem qualitativa, do tipo pesquisa de campo, a ser realizada em uma sala de aula de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental regular de uma escola particular na cidade de Juiz de Fora. Como parte do projeto de investigação, foi elaborado um produto educacional, constituído por um conjunto de tarefas para a sala de aula de matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática; Produção de significados; Ensino e Aprendizagem de matemática; Pensamento Proporcional; Grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

ABSTRACT

This research aimed to investigate the development of a set of tasks, based on the theoretical and methodological framework of the Semantic Fields Model (SFM), for teaching the notion of directly and inversely proportional quantities in elementary school. The investigation was part of the research project entitled *School Mathematics Education in the 21st Century: the education of basic education students and teachers*, particularly as part of the study on the development of proportional reasoning within the proposal of mathematically educating an elementary school student. The research had a qualitative approach, characterized as field research, conducted in a regular mathematics classroom in the final years of elementary education at a private school in the city of Juiz de Fora. As part of the investigation project, an educational product was developed, consisting of a set of tasks designed for the mathematics classroom.

Keywords: Mathematics Education. Production of meanings. Mathematics teaching and learning. Proportional Thinking. Directly and Inversely Proportional Quantities.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas) 14
Figura 2 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas) .... **Erro! Indicador não definido.**
Figura 3 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas) 15
Figura 4 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas) .... **Erro! Indicador não definido.**
Figura 5 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas) 16
Figura 6 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas) 17
Figura 7 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas) 17
Figura 8 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas) 18
Figura 9 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas) 19
Figura 10 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas) 19
Figura 11 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas) 20
Figura 12 - Tabela de levantamento bibliográfico 22
Figura 13 – Registro escrito de Alfa - Tarefa 1 47
Figura 14 - Registro escrito de Ômega - Tarefa 1 47
Figura 15: Registro escrito de Alfa - Tarefa 2 50
Figura 16: Registro escrito de Ômega - Tarefa 2 50
Figura 17: Registro escrito de Alfa - Tarefa 3 55
Figura 18: Registro escrito de Ômega - Tarefa 3 56
Figura 19: Registro escrito de Alfa - Tarefa 4 - Situação1 65
Figura 20 - Registro escrito de Ômega - Tarefa 4 - Situação1 65
Figura 21 - Registro escrito de Alfa - Tarefa 4 - Situação 2 67
Figura 22 - Registro escrito de Ômega - Tarefa 4 - Situação 2 67
Figura 23 - Registro escrito de Alfa - Tarefa 4 - Situação 3 69
Figura 24 - Registro escrito de Ômega - Tarefa 4 - Situação 4 69
Figura 25- Registro escrito de Alfa - Tarefa 4 - Situação 4 69
Figura 26 - Registro escrito de Ômega - Tarefa 4 - Situação 4 70
Figura 27 - Registro escrito de Alfa - Tarefa4.1 72
Figura 28 - Registro escrito de Ômega - Tarefa 4.1 72
Figura 29: Registro escrito de Alfa - Tarefa 5 - 1 a 4 77
Figura 30: Registro escrito de Alfa - Tarefa 5 - 5 a 8 78

Figura 31: Registro escrito de Ômega - Tarefa 5 - 1 a 4 79
Figura 32: Registro escrito de Ômega - Tarefa 5 - 5 a 8 79
Figura 33: Registro escrito de Alfa e Ômega-Tarefa 5 (9) 80
Figura 34: Registro escrito de Alfa e Ômega-Tarefa 5 (10) 81
Figura 35: Registro escrito de Alfa e Ômega-Tarefa 5 (11) 81
Figura 36: Registro escrito de Alfa e Ômega-Tarefa 5 (12) 82

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
MCS	Modelo dos Campos Semânticos
NIDEEN	Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 5

2 PENSAMENTO PROPORCIONAL E A NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS........ 8

2.1 CARACTERIZAÇÕES E CONCEPÇÕES SOBRE RACIOCÍNIO E PENSAMENTO PROPORCIONAL. 8

2.2 A NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS. 11

2.3 COMO A NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS É ENSINADAS EM UM LIVRO DIDÁTICO. 13

3 REVISÃO DE LITERATURA........ 21

4 QUADRO TEÓRICO E PROBLEMA DE PESQUISA 25

4.1 O REFERENCIAL TEÓRICO 25

4.2 A ESCOLA QUE QUEREMOS 29

4.3 QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO........ 30

5 METODOLOGIA........ 32

5.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA 32

5.2 AS TAREFAS 34

Tarefa 4 – Situações Problemas 40

6 ANÁLISE DA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO DOS ESTUDANTES........ 45

6.1 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA TAREFA 1 46

6.2 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA TAREFA 2 49

6.3 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA TAREFA 3 53

6.4 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA TAREFA 4........ 63

6.5 ANÁLISE DA TAREFA 5 74

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS........ 84

REFERÊNCIAS 87

APÊNDICES 89

1 INTRODUÇÃO

O trabalho que apresentaremos ao longo dos capítulos a seguir é fruto de uma pesquisa desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e no Núcleo de Investigação, Divulgação e Estudos em Educação Matemática (NIDEEM) em cujo laboratório são desenvolvidos os produtos educacionais.

Nosso projeto de pesquisa se insere na proposta mais ampla do Programa Linsiano de Investigação, um programa interinstitucional, que homenageia o educador matemático brasileiro Romulo Campos Lins (1955-2007) e mais localmente no macroprojeto de pesquisa intitulado *Educação Matemática Escolar no Século XXI: a formação de estudantes e professores de matemática da Educação Básica*, cadastrado na Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF).

O Programa Linsiano de Investigação abrange duas questões norteadoras amplas; a saber: (i) Como formar um(a) estudante educado(a) matematicamente ao longo da Educação Básica no século XXI; (ii) Como deve ser a formação inicial de professores(as) no interior das licenciaturas em Matemática e Pedagogia para educar matematicamente estudantes da Educação Básica neste século? (Silva, Oliveira e Bastos, 2024, p.95). Pelo fato de o macroprojeto estar ramificado por diversas instituições, nossos interesses quanto pesquisa em grupo, buscam responder, em âmbito regional, às questões orientadoras mencionadas. Essas questões orientam os projetos de pesquisas desenvolvidos nas diferentes instituições que compõe o programa.

Esta investigação se propõe a responder parte da primeira questão orientadora, que busca caracterizar o pensamento matemático. De acordo com Silva, Oliveira e Bastos (2024):

> "(...) se constitui em um conjunto de modos de pensar – histórico e culturalmente produzidos – que se entrelaçam e se complementam, a saber: pensamento aritmético, algébrico, geométrico, estatístico, pensamento proporcional, pensamento lógico e pensamento financeiro" (Silva, Oliveira e Bastos, 2024, p.99)

Assim, nosso foco está na fase de desenvolvimento do design de um currículo baseado em modos de pensar, investigando a produção de tarefas para a construção do pensamento proporcional, que se subdivide em cinco frentes, cada uma delas coordenada por um(a) pesquisador(a) responsável. São elas: Pensamento proporcional nos anos iniciais do ensino fundamental (Fernandes, 2024), PENSAMENTO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA ESCOLAR: A NOÇÃO DE RAZÃO (Silva, 2024), PENSAMENTO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA

ESCOLAR: O ENSINO DA NOÇÃO DE TAXA (Alves, 2024) e PENSAMENTO PROPORCIONAL NA MATEMÁTICA ESCOLAR: O ENSINO DA NOÇÃO DE PROPORÇÃO (Pedrosa, 2024) e a pesquisa atual.

No presente trabalho, nosso interesse volta-se à produção de tarefas para o ensino da noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais nos anos finais do Ensino Fundamental.

Nesta dissertação, a partir da introdução, o texto está dividido em sete capítulos. No capítulo 2, na primeira seção, trazemos algumas caracterizações sobre pensamento proporcional, de acordo com pesquisas já realizadas. Na segunda seção, discutimos como a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais são apresentadas por pesquisadores que abordaram uma proposta de investigação próximas à nossa. Por fim, na terceira seção, analisamos como este assunto é apresentado em um livro didático e as possíveis evidências geradas pela abordagem desse material didático para o estudante.

O capítulo 3 é dedicado a revisão de literatura, onde apresentamos os resultados das buscas realizadas sobre pesquisas relativas ao ensino de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Nosso intuito é compreender o que já foi produzido sobre o tema até o momento, considerando as delimitações de nosso interesse de investigação e a relevância dos documentos encontrados. Cabe sinalizar que outras pesquisas sobre o desenvolvimento do pensamento proporcional caminham em paralelo, servindo de referência complementar para este trabalho.

O capítulo 4 traz, na primeira seção, o referencial teórico e metodológico sobre o qual esta pesquisa está baseada, intitulado por Modelo dos Campos Semânticos (MCS). Nele apresentamos as noções-categorias que utilizadas nesta investigação. Em seguida descrevemos brevemente o tipo de escola que desejamos construir em conformidade com o macroprojeto de pesquisa, que trata sobre a formação do estudante no século XXI, em outras palavras, como seria um estudante educado matematicamente no século XXI. E por fim, apresentaremos a questão de investigação.

No capítulo 5, descrevemos a metodologia adotada e os procedimentos metodológicos adotados, incluindo a caracterização do tipo de pesquisa realizada, e o perfil participantes. Também detalhamos parte do processo da produção de tarefas que compõem o produto educacional proposto.

O capítulo 6 apresenta e analisa os resultados obtidos com a aplicação das tarefas, com foco na produção de significados dos participantes, à luz do referencial teórico adotado.

Por fim, o capítulo 7 reúne as considerações finais, destacando as contribuições da pesquisa para a prática docente e para a comunidade escolar.

2 PENSAMENTO PROPORCIONAL E A NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Este capítulo foi organizado em três seções. Na primeira, apresentamos caracterizações e concepções do pensamento proporcional, conforme compreendido por pesquisadores de literaturas em Educação Matemática. Na segunda, exploramos o que esses educadores entendem pela noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Por fim, na terceira seção, analisamos como o pensamento proporcional é apresentado em um livro didático, discutindo as implicações dessa abordagem em sala de aula e refletindo sobre possíveis contribuições para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

2.1 CARACTERIZAÇÕES E CONCEPÇÕES SOBRE RACIOCÍNIO E PENSAMENTO PROPORCIONAL.

A noção de pensamento proporcional, indiscutivelmente, é considerada pela comunidade de educadores como fundamental para muitas áreas do conhecimento escolar, como a biologia, física, geografia e química. De acordo com Lamon (2012), o pensamento proporcional merece todo tempo e dedicação para assegurar cuidadosamente seu desenvolvimento. Além do contexto escolar, essa habilidade é essencial para a formação de um cidadão crítico do século XXI, perspectiva esta que se alinha com o objetivo deste macro pesquisa que é formar um estudante educado matematicamente.

A relevância do pensamento proporcional também é considerada nos documentos oficiais de orientação curricular brasileiros, como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental (Brasil, 1998) e na Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018).

Contudo, trata-se de um conhecimento complexo, que exige um conjunto amplo de conhecimentos para a sua compreensão. De acordo com a pesquisadora estadunidense Susan Lamon,

> "o termo raciocínio proporcional têm sido um termo genérico, uma frase abrangente que se refere a uma certa facilidade com conceitos e contextos de números racionais. O termo é mal definido e os pesquisadores tem sido melhores em determinar quando um estudante ou um adulto não raciocina proporcionalmente em vez de definir as características de quem o faz." (Lamon, 2012, p.3, tradução nossa)

Segundo a autora, mais de 90% dos adultos não raciocinam proporcionalmente e, por "não desenvolverem essa capacidade, acabam compensando com o uso de regras" (Lamon, 2012, p.3, tradução nossa). Assim, a pesquisadora define:

> "(...) raciocínio proporcional se referirá à capacidade de aumentar e diminuir a escala em situações apropriadas e de fornecer justificativas para afirmações feitas sobre relacionamentos em situações que envolvem proporções diretas simples e proporções inversas" (Lamon, 2012, p.3, tradução nossa).

Ou seja, ainda que estudantes demonstrem habilidades em problemas escolares utilizando ferramentas procedimentais, como regra de três, isso não garante que estejam pensando proporcionalmente. De acordo com Lamon, um aluno que raciocina proporcionalmente, precisa justificar as operações que realiza, indo além de mera aplicação mecânica de algoritmos.

O Educador matemático Van de Walle (2009) defende a ideia de que quando um estudante faz uso de regras antes de conseguir pensar em como os problemas podem ser resolvidos sem elas, há um prejuízo do desenvolvimento da habilidade de raciocinar proporcionalmente. Para o educador, "O raciocínio proporcional é difícil de definir em uma ou duas frases simples. Não é algo que você possa fazer ou não. É um processo tanto qualitativo como quantitativo." (Van de Walle, 2009, p.384). Ele também afirma que de acordo com Lamon (1999), as pessoas que pensam proporcionalmente possuem algumas das características a seguir:

> - "Possuem um senso de covariação. Isto é, eles compreendem relações em que duas quantidades variam juntas e são capazes de perceber como a variação de uma coincide com a variação de outra.
> - Reconhecem relações proporcionais como distintas de relações não proporcionais em contextos do mundo real.
> - Desenvolvem uma ampla variedade de estratégias para resolver proporções ou comparar razões, a maioria baseadas em estratégias informais em vez de algoritmos prescritos.
> - Compreendem razões como entidades distintas representando uma relação diferente das quantidades que elas comparam." (Van de Walle, 2009, p.384)

Lins e Gimenez (1997) também contribuem para essa discussão ao descrever o pensamento proporcional como "aquele que corresponde a uma estrutura de comparação entre partes ou entre todos, ou entre as partes e um todo, ou como um esquema instrumental que resolve algumas situações especiais de comparação em forma multiplicativa e não aditiva." (Lins, Gimenez, 1997, p.52). Essa perspectiva contribui para refletirmos sobre o papel da instrumentalização no ensino de proporcionalidade, desde que tal instrumentalização possua sentido e significado.

Sendo assim, mesmo quando alunos conseguem usar mecanismos para resolver problemas, isso não significa que possuem a habilidade de pensar proporcionalmente. Ainda há casos em que alunos sequer sabem operar usando procedimentos matemáticos elementares. Em ambos os casos, a pretensão é levá-los a desenvolver tal habilidade.

Para Posh e Lesh (1995), "o raciocínio com proporções abarca um espectro mais complexo de faculdades cognitivas" (Posh e Lesh, 1995, p.90). Entretanto, comumente são tratados de maneira simplista, restrito a problemas de valor ausente, como na clássica estrutura: $\frac{a}{b}$ assim como $\frac{c}{x}$, em que a, b e c são valores informados e x o valor que se deve encontrar. Para os autores, raciocinar proporcionalmente envolve aspectos tanto matemáticos como psicológicos e abrange métodos de pensamento qualitativos e quantitativos, envolvendo senso de covariação, comparações múltiplas e capacidade de armazenar e processar simultaneamente várias informações.

Eles também destacam a importância do pensamento proporcional para o aprendizado de álgebra, já que pode ser considerado uma forma elementar de função linear. Essa visão converge com a nossa, especialmente no desenvolvimento da noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Para eles, é mais eficaz envolver diferentes modos de representações e fazer associações multiformes em uma diversidade de situações proporcionais do que centrar o ensino apenas em algoritmos.

Essa abordagem se aproxima das demandas da vida cotidiana de qualquer pessoa inserida em uma sociedade que nunca foi tão pluralizada. Desenvolver habilidades críticas, entre ela o pensamento proporcional, torna-se essencial. Educar matematicamente um estudante para viver neste século XXI requer práticas que promovam reflexão, participação ativa e valorização dos saberes prévios dos alunos.

Nesse sentido, nossa proposta para o desenvolvimento do pensamento proporcional traz o estudante e sua realidade para o centro do processo de ensino e aprendizagem. Vemos aí a oportunidade de construir uma sala de aula colaborativa e reflexiva, onde o ensino de grandezas diretamente e inversamente proporcional, um dos componentes do pensamento proporcional possa ser explorado de maneira significativa e contextualizada.

2.2 A NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS.

Nesta seção, abordaremos as noções conhecidas no Brasil como grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Dizemos isso porque, nas literaturas internacionais consultadas, o termo “grandeza” não é utilizado, mas sim os termos “quantidade” ou “medida”. Segundo o dicionário online Oxford Languages, o termo grandeza quer dizer “1. imponência, grandiosidade, magnificência., 2. qualidade ou propriedade do que é grande, extenso; amplidão, vastidão” o que de fato não tem uma relação direta com o conceito matemático ao qual nos referimos. Já a palavra quantidade, segundo o mesmo dicionário é: “qualidade do que pode ser medido, contado, diminuído ou aumentado”.

O estudo de grandezas está inserido dentro do pensamento proporcional na matemática escolar. Para nós, o desenvolvimento desse pensamento está dividido em 4 noções: razão, taxa, proporção e grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Essas noções estão interligadas e serão abordadas de forma sequencial no sexto, sétimo, oitavo e nono ano do Ensino Fundamental respectivamente.

Para Van de Walle (2009), reconhecer as relações entre duas quantidades (grandezas) em diferentes situações é uma habilidade essencial no desenvolvimento do raciocínio proporcional. Ele afirma que:

> “(...) muita das atividades mais valiosas para o desenvolvimento do raciocínio proporcional não envolvem resolver proporções de todo, ... Resolver uma proporção envolve aplicar uma razão conhecida a uma situação que seja proporcional (medidas relevantes estão na mesma razão) e encontrar uma dessas medidas quando a outra é conhecida” (Van de Walle, 2009, p.383).

Assim percebemos quão importante é compreender a relação que existe entre as grandezas e não apenas de saber resolvê-las mecanicamente. Ter as noções de razão e proporção bem estabelecidas, é fundamental para resolver proporções. Van de Walle ainda alerta que:

> “(...) que os métodos simbólicos ou mecânicos como o algoritmo do produto cruzado usado para resolver proporções não desenvolveram o raciocínio proporcional e não devem ser introduzidos até os alunos terem muitas experiências com métodos intuitivos e conceituais.” (Van de Walle, 2009, p.385)

Ou seja, procedimentos e técnicas formais devem ser deixados para última instância, somente após terem sido esgotadas as mais diversas formas de solução. Desafiar os estudantes a explicar suas estratégias e compreender soluções diferentes das suas é uma forma eficaz de promover o raciocínio proporcional (Van de Walle, 2012).

Lamon (2012) descreve as grandezas diretamente e inversamente proporcionais da seguinte forma:

> "O modelo matemático para relações diretamente é uma função linear da forma $y = kx$, onde ké chamada de constante de proporcionalidade. Assim, y é um múltiplo constante de x. De forma equivalente, duas quantidades (grandezas) são proporcionais quando variam de tal forma que mantem uma razão constante: $\frac{y}{x} = k$. A constante k também desempenha um papel essencial na compreensão das relações inversamente proporcionais. No modelo matemático para proporções inversas, $k = xy$. Apesar da sua importância, k é extremamente negligenciada no ensino." (Lamon, 2012, p.3, tradução nossa)

A autora estadunidense considera a constante de proporcionalidade k algo que requer atenção na perspectiva pedagógica do ensino de grandezas proporcionais, pois o fato de k poder ter diferentes significados em diferentes contextos nas relações proporcionais, ele é um elemento estrutural deste conceito. Ela ainda ressalta que "simplesmente não podemos realizar operações sem pensar sobre quais quantidades (grandezas) estão relacionadas, como elas mudam juntas (ou covariam), qual é a constante de proporcionalidade e o que essa constante de proporcionalidade significa" Lamon, 2012, p.4, tradução nossa).

Outro ponto importante para Lamon (2012) quanto a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais é

> "(...) saber o que ele não é e quando não se aplica. Duas quantidades (grandezas) podem não estar relacionadas; uma quantidade pode estar relacionada de forma inversamente proporcional a outra quantidade (grandeza), ou pode ser que uma quantidade seja proporcional a mudança em outra quantidade (diretamente proporcional)" (Lamon, 2012, p.5, tradução nossa)

Oferecer uma variedade de situações em que os estudantes possam avaliar qualitativamente as relações antes de partir para os cálculos, é uma estratégia que a autora considera essencial ao desenvolvimento da noção de grandezas proporcionais. Vejamos alguns exemplos propostos por ela, em que os alunos deverão falar sobre as variações das quantidades:

a. se um saco de terra pesa 40 libras, quanto pesarão 3 sacos de solo?

b. se um jogador de futebol pesa 225 libras, quanto pesarão 3 jogadores?

c. Se Ed consegue pintar o quarto sozinho em 3 horas e seu amigo Jake, trabalhar no mesmo ritmo que Ed, quanto tempo levará para pintar o quarto se os dois trabalharem junto?

Esse é uma visão que nos ajuda a pensar em um ponto de partida para introduzir esta noção na sala de aula que estamos idealizando, diferente do que normalmente se pratica.

Por fim, Carraher e Schliemann (1997) afirmam

> "(...) nas ciências, a proporção aparece tipicamente sob a forma de funções diretamente proporcionais. Uma variável y é diretamente proporcional a uma variável x se y=ax, onde x representa uma variável e a é uma constante de proporcionalidade. Esse tipo de função pode ser representado graficamente como uma linha reta que passa pela origem de um gráfico cartesiano". (Schliemann, Carraher, 1997, p.16)

No entanto, os autores enfatizam a ideia de que os alunos não compreendem sentenças formais sem antes adquirirem as noções de razão e proporção em uma gama de situações práticas. Isto nos dá indícios importantes de como podemos repensar a abordagem do assunto em sala de aula e reforça a necessidade de desenvolver a compreensão conceitual antes de introduzir formalismos.

2.3 COMO A NOÇÃO DE GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS É ENSINADAS EM UM LIVRO DIDÁTICO.

Nesta seção analisaremos como o pensamento proporcional é abordado em um livro didático, com ênfase em grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Contudo, não queremos deixar de comentar sobre as noções que antecedem esse conceito, isto é, razão, taxa e proporção, fundamentais para sua compreensão.

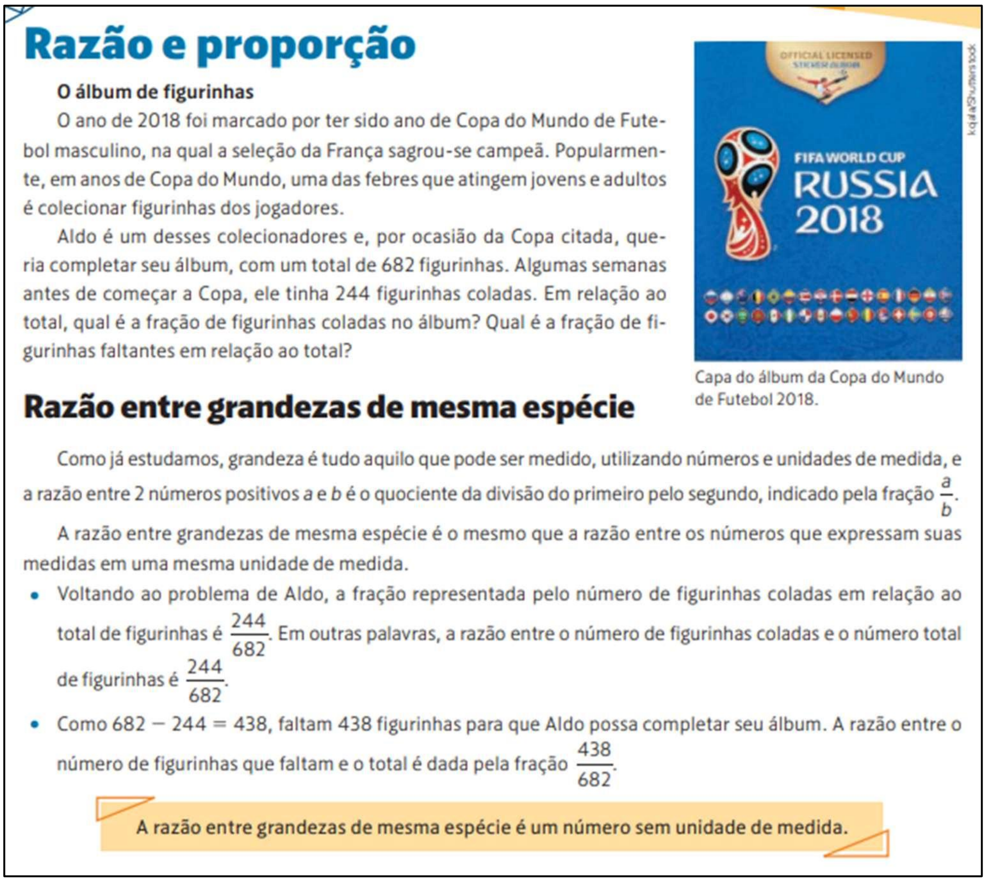
A escolha de um único livro foi devido ao fato de que, em geral, os livros didáticos do Ensino Fundamental seguem uma estrutura semelhante, com pouca variação significativamente na forma como os conteúdos são apresentados.

O livro selecionado, após a análise de algumas obras, é uma edição destinada ao nono ano do EF, considerando que este é o público alvo da nossa investigação. Além disso, a escolha se deu pelo fato da pesquisadora utilizar este material em sua prática docente na rede pública de um município do estado do Rio de Janeiro.

A obra faz parte da coleção Matemática e Realidade, dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado, publicado pela editora Saraiva, em sua 10ª edição, 2022. A temática proporcionalidade faz parte da Unidade 4, sendo o conteúdo Relações entre Grandezas o foco do sétimo capítulo.

A abordagem inicial do capítulo é razão e proporção, com uma contextualização que envolve o álbum da copa do mundo. A proposta de reflexão é com base na seguinte situação-problema: “Em relação ao total, qual é a fração de figurinhas coladas no álbum? Qual é a fração de figurinhas faltantes em relação ao total? ” (p. 90).

Figura 1 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas)



Razão e proporção

O álbum de figurinhas

O ano de 2018 foi marcado por ter sido ano de Copa do Mundo de Futebol masculino, na qual a seleção da França sagrou-se campeã. Popularmente, em anos de Copa do Mundo, uma das febres que atingem jovens e adultos é colecionar figurinhas dos jogadores.

Aldo é um desses colecionadores e, por ocasião da Copa citada, queria completar seu álbum, com um total de 682 figurinhas. Algumas semanas antes de começar a Copa, ele tinha 244 figurinhas coladas. Em relação ao total, qual é a fração de figurinhas coladas no álbum? Qual é a fração de figurinhas faltantes em relação ao total?

Capa do álbum da Copa do Mundo de Futebol 2018.

Razão entre grandezas de mesma espécie

Como já estudamos, grandeza é tudo aquilo que pode ser medido, utilizando números e unidades de medida, e a razão entre 2 números positivos *a* e *b* é o quociente da divisão do primeiro pelo segundo, indicado pela fração $\frac{a}{b}$.

A razão entre grandezas de mesma espécie é o mesmo que a razão entre os números que expressam suas medidas em uma mesma unidade de medida.

- Voltando ao problema de Aldo, a fração representada pelo número de figurinhas coladas em relação ao total de figurinhas é $\frac{244}{682}$. Em outras palavras, a razão entre o número de figurinhas coladas e o número total de figurinhas é $\frac{244}{682}$.
- Como $682 - 244 = 438$, faltam 438 figurinhas para que Aldo possa completar seu álbum. A razão entre o número de figurinhas que faltam e o total é dada pela fração $\frac{438}{682}$.

A razão entre grandezas de mesma espécie é um número sem unidade de medida.

Fonte: Matemática e Realidade 9º. Ano (2022)

Em seguida, apresenta-se a noção de razão entre grandezas da mesma espécie, com ênfase no conceito de razão como fração. Ao final, os autores destacam que: “a razão entre grandezas de mesma espécie é um número sem unidade de medida” (p.90), o que indica aquilo que consideram mais relevante sobre o conceito.

Na sequência, os autores relembram ao leitor que “duas razões iguais formam uma proporção”. Curiosamente não foi apresentada nenhuma situação para exemplificar esta definição, mas de forma direta afirma que $\frac{5}{2}$ e $\frac{25}{10}$ são iguais a 2,5 e por isso formam uma proporção $\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$. Ou seja, segundo os autores 5 bolas estão para 2 meninos, assim como 25 maçãs estão para 10 caixotes, segundo a afirmação dos autores, podem ser interpretados da mesma maneira apesar de tratarem de contextos distintos.

Figura 2 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas)

Proporção

Note que as razões $\frac{5}{2}$ e $\frac{25}{10}$ são ambas iguais a 2,5 e, portanto, são iguais entre si.

Recordemos que 2 razões iguais formam uma proporção.

Por ser verdadeira a igualdade $\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$, também dizemos que os números 5 e 25 são diretamente proporcionais aos números 2 e 10, nessa ordem.

Em $\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$ o fator de proporcionalidade é 2,5.

Recorde também que há outra maneira de comprovar a igualdade $\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$: fazendo as multiplicações cruzadas: $5 \cdot 10 = 50$ e $2 \cdot 25 = 50$.

A proporção $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, com a' e b' não nulos, é verdadeira quando $a \cdot b' = a' \cdot b$.
Esta é chamada de **propriedade fundamental da proporção**.

a' lê-se: "a linha";
b' lê-se: "b linha".

Fonte: Matemática e Realidade 9º. Ano (2022)

A seção é seguida por um conjunto de 7 atividades culminando no conceito de divisão proporcional.

Nesse ponto, os termos diretamente proporcionais e inversamente proporcionais são mencionados pela primeira no capítulo, para explicar uma divisão proporcional. Essa abordagem pode gerar problemas para a compreensão tanto da noção de divisão proporcional, quanto da noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Van de Walle (2009), Lamon (2012) e Posh e Lesh (1995), defendem que, para que os estudantes compreendam esta noção, é necessário trabalhar o máximo de situações possíveis. Assim, para que o estudante consiga compreender e ser capaz de justificar quando as grandezas se comportam diretamente ou inversamente proporcionais, o que não ocorre neste material.

Cabe destacar ainda que o tema proporcionalidade, isto é, razão, proporção e grandezas diretamente e inversamente proporcionais, é abordado de forma inédita do 7º ano, ao longo de 17 páginas, não sendo retomado no 8º. ano. Assim, quando volta a aparecer no 9º ano, é como se o tema estivesse sendo tratado pela primeira vez pelos alunos.

Dando prosseguimento, após a proposta de quatro exercícios sobre divisão proporcional, o tópico grandezas diretamente proporcionais aparece, sendo introduzido com uma receita de bolo na página 94.

Figura 3 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas)

Grandezas diretamente proporcionais

Receita de bolo

Uma confeitaria é especializada em bolos de aniversário e de casamento. Luana, a confeiteira-chefe, desenvolveu uma receita para a massa e a compartilhou com os demais funcionários. Com essa receita, para um bolo de 20 fatias são necessários 4 ovos além dos outros ingredientes.

Para atender a uma encomenda de bolo de 250 fatias, quantos ovos serão necessários?

No problema dado temos 2 situações:

1ª) para um bolo de 20 fatias, gastam-se 4 ovos;

2ª) para um bolo de 250 fatias, *x* ovos.

Queremos determinar o valor de *x*.

Dobrando-se o número de fatias de bolo, vai dobrar o número de ovos necessários. Triplicando-se o número de fatias, vai triplicar o número de ovos. Então, conforme estudamos em anos anteriores, o número de ovos é uma grandeza diretamente proporcional ao número de fatias de bolo. Assim, a razão $\frac{\text{número de ovos}}{\text{número de fatias}}$ é constante.

$$\frac{x}{250} = \frac{4}{20} \Rightarrow 20 \cdot x = 250 \cdot 4 \Rightarrow x = \frac{250 \cdot 4}{20} \Rightarrow x = 50$$

Serão necessários 50 ovos.

Duas grandezas variáveis são chamadas de **grandezas diretamente proporcionais** quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os valores correspondentes da segunda é sempre a mesma.

Fonte: Matemática e Realidade 9º. Ano (2022)

A situação problema trata a quantidade de ovos necessários para uma receita de 250 fatias de bolo, a partir da informação que um bolo de 20 fatias leva 4 ovos em sua receita. Repare que o texto direciona o leitor a trazer a memória algo que foi tratado há aproximadamente dois anos antes, como se isso fosse suficiente para elucidar o que se pretende ensinar. Daí conclui que “duas grandezas variáveis são chamadas de grandezas diretamente proporcionais quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os valores correspondentes da segunda é sempre a mesma” (p.94), e então, algebricamente define a relação entre duas variáveis que se relacionam de forma diretamente proporcional. Um ponto positivo foi a ilustração usando uma tabela relacionando a quantidade de fatias de bolo com a quantidade de ovos, o que poderia ter sido empregado inicialmente como recurso.

Figura 4 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas)

Quando 2 grandezas são diretamente proporcionais, se para um valor positivo x de uma delas corresponde o valor positivo y na outra, a razão $\frac{y}{x}$ é sempre a mesma para todo valor de x. A razão $\frac{y}{x}$ é uma constante k. De $\frac{y}{x} = k$ decorre a relação algébrica:

$$\boxed{y = k \cdot x}$$

que é a relação característica entre os valores de 2 grandezas diretamente proporcionais.

No problema dado, sendo x o número de fatias e y o de ovos, temos:

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{20}, \text{ logo } y = \frac{1}{5} \cdot x.$$

A tabela a seguir apresenta os valores correspondentes das 2 grandezas.

Ovos e fatias de um bolo

Número de fatias (x)	Número de ovos (y)
0	0
20	4
40	8
60	12
80	16
100	20

Dados elaborados para fins didáticos.

Fonte: Matemática e Realidade 9º. Ano (2022)

Complementa com a representação gráfica na página 95 e interessantemente chama a atenção sobre a ligação dos pontos ser apenas para verificar o alinhamento dos pontos. Mais uma vez, nos chama a atenção o fato do assunto construção de gráficos ter sido dado no sétimo ano, ou seja, há aproximadamente 2 anos atrás, o que provavelmente será um ponto de atenção, e um desafio para os estudantes.

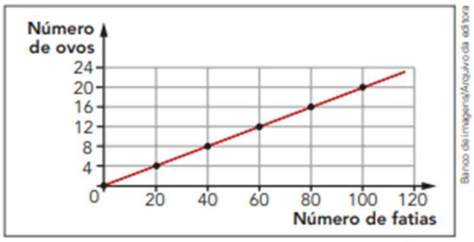
Figura 5 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas)

Representação gráfica

Podemos representar os dados da tabela em um gráfico do número de ovos pelo número de fatias do bolo. Atenção! A linha que une os pontos do gráfico é apenas ilustrativa, pois, neste caso, trabalhamos com números inteiros de fatias de bolo e de ovos, considerando bolo de, no mínimo, 20 fatias.

A representação gráfica apresenta pontos alinhados começando pela origem (0, 0).

Ovos e fatias de um bolo



Dados elaborados para fins didáticos.

Fonte: Matemática e Realidade 9º. Ano (2022)

A sessão de grandezas inversamente proporcionais é introduzida com a situação dos 8 gatos de Claudete que possuem ração suficiente para se alimentarem durante 15 dias, porém mais 2 gatos chegam e a questão é descobrir quanto tempo a ração irá dura com a chegada de mais gatos. O texto resolve o problema usando o algoritmo de (número de gatos) . (número de dias) é igual a uma constante.

Figura 6 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas)

Grandezas inversamente proporcionais

Claudete tem 8 gatos e a ração que tem é suficiente para apenas 15 dias. Ela adotou mais 2 gatos. Supondo que todos os gatos comem a mesma quantidade de ração, para quantos dias Claudete vai ter ração suficiente para alimentar os 10 gatos?

Nesse problema temos as seguintes situações:

1ª) para 8 gatos, a ração *é suficiente* para 15 dias;

2ª) para 10 gatos, y dias.

Queremos determinar o valor de y.

Aumentando o número de gatos, a ração vai dar para menos dias. Se dobrasse o número de gatos, a ração daria para a metade do número de dias. Triplicando o número de gatos, a ração vai dar para um terço dos dias. Então, o número de dias é uma grandeza inversamente proporcional ao número de gatos. Assim, o produto (número de gatos) · (número de dias) é constante.

$$10 \cdot y = 8 \cdot 15 \Rightarrow y = \frac{120}{10} \Rightarrow y = 12$$

A ração será suficiente para 12 dias.

Duas grandezas variáveis são chamadas de **grandezas inversamente proporcionais** quando o produto de cada valor da primeira grandeza pelo valor correspondente da segunda é sempre o mesmo.

Quando 2 grandezas são inversamente proporcionais, se para um valor positivo x de uma delas corresponde o valor positivo y na outra, o produto xy é sempre o mesmo para todo valor de x. O produto xy é uma constante k. De $x \cdot y = k$ decorre a relação algébrica:

$$\boxed{y = \frac{k}{x}}$$

Fonte: Matemática e Realidade 9º. Ano (2022)

O destaque da sessão é a definição de grandezas variáveis: “Duas grandezas variáveis são chamadas de grandezas inversamente proporcionais quando o produto de cada valor da primeira grandeza pelo valor correspondente da segunda é sempre o mesmo” (p. 95). Em seguida expressa a relação algébrica $y = \frac{k}{x}$, e completa “que é a relação característica entre as medidas de 2 grandezas inversamente proporcionais” (p.95). A sessão é encerrada com a apresentação de uma tabela relacionando o número de gatos ao número de dias e o gráfico a hipérbole que representa essa relação.

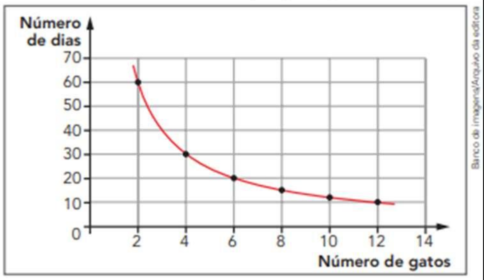
Figura 7 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas)

Quantidade da ração para gatos

Número de gatos (x)	Número de dias (y)
2	60
4	30
6	20
8	15
10	12
12	10

Dados elaborados para fins didáticos.

Quantidade da ração para gatos



Dados elaborados para fins didáticos.

Fonte: Matemática e Realidade 9º. Ano (2022)

Dando prosseguimento, a noção de grandezas não proporcionais é apresentada em forma de tabela, utilizando uma situação envolvendo as idades de um filho e de uma mãe em datas importante da vida de ambos.

Figura 8 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas)

Grandezas não proporcionais

Na tabela a seguir registramos a idade, em anos, de Juninho e da mãe, Maria, nas ocasiões em que ocorreram fatos importantes na vida deles.

Idades em ocasiões especiais

Ocorrências: quando Juninho...	Idade de Juninho	Idade de Maria
... ingressou no Ensino Fundamental Anos Iniciais	6	34
... ingressou no Ensino Fundamental Anos Finais	11	39
... ingressou no Ensino Médio	15	43
... ingressou na faculdade	18	46
... formou-se em Direito	22	50
... casou-se com Gabriela	30	58

Dados elaborados para fins didáticos.

É claro que, se a idade de Juninho vai aumentando, a de Maria também vai aumentando. A idade de Maria é proporcional à de Juninho?

Quando Juninho tinha 11 anos, Maria tinha 39. Quando Juninho tinha 22 anos, Maria tinha 50. Note que a idade de Juninho dobrou de 11 para 22, mas a de Maria não dobrou, passou de 39 para 50. Quando a idade de Juninho triplicou de 6 para 18 anos, a de Maria não triplicou, ela foi de 34 para 46. Dessa maneira, **a idade de Maria não é proporcional à idade de Juninho**.

Essa conclusão também pode ser justificada por meio das razões: $\frac{34}{6} \neq \frac{39}{11}$.

Então, qual deve ser a relação algébrica entre a idade, y, de Maria e a idade, x, de Juninho?

A cada ano que passa, adicionamos 1 a ambas as idades. Desse modo, a diferença entre a idade de Maria e a idade de Juninho é sempre a mesma.

$34 - 6 = 28$ $\quad$ $39 - 11 = 28$ $\quad$ $43 - 15 = 28$

E assim por diante. Então, a relação algébrica entre as idades y e x é:

$$y - x = 28$$
$$y = x + 28$$

A idade de Maria é igual à idade do Juninho adicionada a 28.

Fonte: Matemática e Realidade 9º. Ano (2022)

São usados basicamente três argumentos para justificar o fato das grandezas não serem proporcionais: 1) as razões entre as idades não formarem uma proporção; 2) a relação algébrica entre as idades da mãe do filho não ser do tipo $y = x + 28$; 3) a representação gráfica são pontos de uma reta que não passa na origem.

Figura 9 - Página do livro Matemática e Realidade 9o. ano (Relação entre grandezas)

Idades de Maria e Juninho

x	y
0	28
6	34
12	40
18	46
24	52
30	58

Dados elaborados para fins didáticos.

Fonte: Matemática e Realidade 9º. Ano (2022)

Na sequência o capítulo é concluído com 2 tópicos intitulados: comparando mais de duas grandezas e regra de três composta, que estão entre as páginas 98 e 102 do livro. Esta é um direcionamento que estamos habituados a vivenciar, pois foi dessa forma que aprendemos e a forma que sabemos ensinar. No entanto, o parecer dos educadores que trouxemos na sessão 2.1 deste capítulo, condena a ênfase que é dada aos métodos considerados mais eficientes no ensino de proporcionalidade, e que, portanto, não tem sido suficiente para o ensino desta noção.

Dessa maneira, a análise mais detalhada desse livro, e as análises feitas informalmente durante nosso tempo dedicado a pesquisa no laboratório de educação matemática em nossos encontros semanais, nos ajudaram a encontrar os possíveis problemas provenientes dos materiais didáticos adotados pelas escolas. Em contrapartida, o referencial teórico e às pesquisas publicadas nos livros que estamos usando como referência nos servirão de direcionamento na elaboração do nosso currículo pretendido e na elaboração da sequência de tarefas.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, buscamos fundamentar nossa investigação por meio da análise de pesquisas realizadas sobre o pensamento proporcional e sobre a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. O objetivo é oferecer suporte teórico e metodológico da nossa investigação e do produto educacional. Para tanto, a busca foi conduzida a partir de algumas tomadas de decisão de cunho teórico e metodológico que delimitaram o universo de pesquisas da seguinte maneira:

(i) Consideramos o referencial teórico - o Modelo dos Campos Semânticos – e a sua relação com a Teoria Histórico-Cultural. Partindo desse pressuposto, buscamos por pesquisas que apresentassem alinhamento teórico com nossos referenciais;

(ii) Para a análise de artigos científicos, dissertações e teses em Educação Matemática, delimitamos um período específico de 20 anos – 1995 a 2024 - para seleção das pesquisas desenvolvidas;

(iii) Focamos nosso interesse em dissertações e teses da Educação Matemática, tanto em programas profissionais da área de Ensino quanto acadêmicos e também em livros que identificamos como sendo resultados de pesquisas sobre o tema (alguns deles ligados a Psicologia Cognitiva);

(iv) Nosso interesse foi centrado na discussão do pensamento proporcional, especialmente em sua interseção com o pensamento aritmético e pensamento algébrico. Reconhecemos que o pensamento proporcional também pode se articular com o pensamento geométrico, por exemplo, no entanto, essa não é a abordagem investigativa que nos propomos a seguir neste momento;

(v) Não é de nosso interesse pesquisas provenientes do Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional (PROFMAT), por se distanciarem do escopo e dos objetivos do nosso objeto de estudo;

(vi) As palavras-chave para a nossa busca foram: ensino e aprendizagem, grandezas diretamente e inversamente e matemática escolar no ensino fundamental.

Nosso projeto de investigação contempla tanto a pesquisa quanto a elaboração de um produto educacional, que, conforme mencionamos, integra o design de currículo voltado para o Ensino Fundamental focado no desenvolvimento da noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Por isso, nossa busca englobou informações teóricas e propostas de sequências didáticas que puderam subsidiar a construção do nosso produto.

As pesquisas foram feitas nos seguintes repositórios e periódicos: Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Periódicos da CAPES – Comunidade Acadêmica Federal (CAFe), Boletim GEPEM, ZETETIKÉ, Bolema, Scielo e Repositório de Dissertações UFJF.

Elaboramos o quadro a seguir com os resultados das buscas:

Figura 10 - Tabela de levantamento bibliográfico

Repositório	Resultados	Tipo	Título	Programa	Instituição
BDTD	4 resultados encontrados	Dissertação	Uma proposta ao estudo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.	PROFMAT	UFJF
		Tese	Uma análise do Observatório da Educação Matemática da Bahia à luz da teoria social da aprendizagem e da teoria dos códigos.	Programa de pós graduação em Ensino, Filosofia e História da Ciência - UFB	UFB
		Dissertação	O potencial dos grupos interativos para o ensino de proporcionalidade: um estudo de caso com alunos do 8o ano do ensino fundamental.	PPG em ensino de ciências exatas - UFSCAR	UFSCAR
		Dissertação	Geometria Planae Espacial aplicada em curso Técnico em Agropecuária.	Profmat - UNESP	UNESP
Bolema	-	-	-	-	-
CAFe	-	-	-	-	-
Repositório UFJF	2 resultados encontrados	Dissertação	Uma proposta ao estudo de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.	PROFMAT	UFJF
		Dissertação	Uma abordagem ecológica envolvendo proporcionalidade na educação básica.	Programa de Pós Graduação em Educação Matemática	UFJF
Scielo	-	-	-	-	-
ZEZETIQUE	-	-	-	-	-

Fonte: O autor, 2024

Conforme apresentado na tabela acima, nossas buscas resultaram, ao todo, em seis pesquisas: quatro localizadas na BDTD e duas encontradas no Repositório da UFJF. Nos demais repositórios não houve nenhum resultado.

Analisando os trabalhos encontrados na BDTD, verificamos que dois deles são provenientes do PROFMAT, o que os exclui automaticamente do escopo deste estudo, uma vez que as pesquisas desenvolvidas nesse programa possuem objetos de pesquisa diferentes dos nossos, e não se fundamentam nos princípios da Educação Matemática.

A tese intitulada “Uma análise do observatório de Educação Matemática da Bahia à luz da teoria social da aprendizagem e da teoria dos códigos” aborda o ensino de grandezas diretamente e inversamente proporcionais dentro de um contexto específico de uma comunidade da Bahia, estado brasileiro, com base nas teorias de Etienne Wenger e Basil Bernstein. No entanto, essa abordagem teórica e metodológica não converge com os objetivos e fundamentos da nossa investigação.

A pesquisa intitulada “O potencial dos grupos interativos para o ensino de proporcionalidade: um estudo de caso com alunos do 8º ano do ensino fundamental”, traz o ensino de proporcionalidade com ênfase no ensino de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, no entanto, apenas como um meio para compreender o potencial de Grupos interativos em tal processo de ensino. O referencial teórico adotado foi utilizado para fazer uma leitura das atividades realizadas pelo grupo, que segundo o autor, consistiu na utilização de uma técnica de triangulação dos dados coletados. Mais uma vez, observamos que o referencial teórico e o foco da pesquisa não dialogam com os objetivos e fundamentos da nossa investigação. Por esse motivo, optamos por não considerar este trabalho como uma referência relevante para nosso estudo.

Em relação às pesquisas encontradas no repositório da UFJF, uma delas é proveniente do PROFMAT, e como já mencionado, está fora dos limites de interesse da nossa investigação. A outra dissertação intitulada “Uma abordagem ecológica envolvendo proporcionalidade na educação básica”, utiliza um referencial teórico baseado na perspectiva ecológica do saber, e adotou como procedimento metodológico, uma pesquisa bibliográfica de quatro coleções de livros didáticos. Seu objetivo era identificar como o conteúdo proporcionalidade foi explorado nos anos finais do Ensino Fundamental nos livros didáticos e analisá-los a luz da teoria escolhida. Vemos que neste trabalho, a relação direta com o ensino de grandezas diretamente proporcionais não foi o foco de investigação. Dessa forma não consideramos como uma referência útil à nossa investigação.

Sendo assim, daremos continuidade à discussão do desenvolvimento do Pensamento Proporcional na matemática escolar. Atualmente, esse campo encontra-se em expansão e pode ser compreendido em cinco frentes de trabalhos como ilustrado no quadro a seguir:

Figura 13: Pesquisas sobre Pensamento Proporcional em andamento

Desenvolvimento do Pensamento Proporcional					
Etapa	**Ano escolar**		**Título**	**Pesquisador(a)**	**Situação**
Ensino Fundamental	Anos Iniciais	1º ao 5º ano	Pensamento proporcional nos anos iniciais do Ensino Fundamental.	Letícia Freitas Fernandes	Defendido em set/24
	Anos Finais	6º ano	Pensamento proporcional na matemática escolar: a noção de razão.	Kaio Cruz e Silva	Defendido em set/24
		7º ano	Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de taxa.	Taynara Schincariol Alves	Defendido em abr/25
		8º ano	Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de proporção.	Maria Eduarda A. Pedrosa	Qualificado em set/24
		9º ano	Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.	Sinai E. F. dos Santos	Qualificado em set/24

Fonte: o autor, 2024

Antes de abordar as pesquisas concluídas, consideramos pertinente fazer uma breve digressão ao ano de 2012, onde a aspiração pelo desenvolvimento do pensamento proporcional começou. A pesquisa “Razão como taxa: uma proposta de ensino para a sala de aula” (PAULA, 2012) representou o ponto de partida dessa trajetória. Embora ainda de forma tímida e despretensiosa, nos levou a chegar a uma estrutura sólida e consistente sobre o que estamos desenvolvendo atualmente.

Com a pesquisa de Fernandes (2023), iniciamos o desenvolvimento do pensamento proporcional nos anos iniciais do EF. Na sequência, na segunda etapa no EF, prosseguimos com a pesquisa de Silva (2023), que investigou a produção de significados para a noção de razão no sexto ano. Tanto o trabalho de Fernandes (2023) quanto o de Silva (2023), foram concluídos em setembro de 2024.

A pesquisa de Schincariol (2024), “Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de taxa” foi desenvolvido com estudantes do sétimo ano do EF. A pesquisa de Pedrosa (2024), “Pensamento proporcional na matemática escolar: o ensino da noção de proporção” foi realizada com alunos do oitavo ano do EF. Ambas antecedem a presente investigação, que tem como foco o ensino de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

4 QUADRO TEÓRICO E PROBLEMA DE PESQUISA

Este capítulo está organizado em três subseções. Na primeira, apresentamos o referencial teórico que fundamenta esta pesquisa. Na segunda, discutimos a concepção de escola que pretendemos construir a partir desse projeto, em contraste com o modelo que até então temos vivenciado. Por fim, expomos a questão de investigação, elaborada a partir de nossas inquietações e que nos orienta o desenvolvimento deste trabalho.

4.1 O REFERENCIAL TEÓRICO

Como embasamento teórico para esta pesquisa, utilizamos o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), de autoria do educador matemático brasileiro Romulo Campos Lins. Este referencial compartilha algumas concepções com a Teoria Histórico-Cultural, em particular, as de Vygotsky e Leontiev. De acordo com o próprio autor, esta teoria é qualificada como um modelo epistemológico, que fornece elementos que possibilitem ao professor realizar uma leitura de seu aluno durante o processo de ensino, em outras palavras, pode ser considerado uma ferramenta que diga mais do que simplesmente "ele sabe" ou "ele não sabe", mas que possa dar indícios de que lugar o estudante se encontra.

É um referencial que contrapõe-se às teorias educacionais baseadas em modelos cognitivistas. Apesar de ser dita uma teoria epistemológica, ao longo de sua construção, "foram agregados as noções de significado, processo comunicativo e campo semântico, que proporcionam em conjunto, uma leitura peculiar sobre o processo de produção de significado para a Matemática" (Silva, 2022, p.6).

Sobre Epistemologia, uma caracterização elaborada por Lins (1993) afirma que se trata de uma atividade humana que estuda o que é conhecimento, como se produz o conhecimento e como se conhece o que é conhecido. Sobre conhecimento, Lins formulou sua própria caracterização: "Conhecimento é entendido como uma crença – algo que o sujeito acredita e expressa, e que se caracteriza, portanto, como uma afirmação – junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para sua crença-afirmação" (Lins, 1993, p.86). Assim, reunindo todos esses elementos, temos uma posição epistemológica relativa à aprendizagem.

Com isso, segundo Silva (2022) o referencial nos oferece três aspectos essenciais para a designação de conhecimento: a crença, a afirmação e a justificação que são explicados a seguir por Lins:

> “Primeiro, a pessoa deve acreditar em algo para constituir parte de um conhecimento que ela/ele produz, e isso implica que ela/ele está ciente de manter essa crença. Segundo a única maneira de termos certeza dessa conscientização é se a pessoa afirma, e aqui estou usando o termo 'afirma' livremente, significando alguma forma de comunicação aceita por um interlocutor; não precisa ser de forma linguística. Terceiro, não é suficiente considerar o que a pessoa acredita e afirma, pois diferentes justificações com a mesma crença-afirmação correspondem a conhecimentos diferentes. Além disso, as justificativas estão relacionadas ao que pode ser feito com os objetos que um conhecimento tem a ver; no caso da criança dizer que '2+ 3 = 5', por exemplo, '2 + 3' é o mesmo que '3 + 2', uma vez que o arranjo dos dedos não faz diferença. Do ponto de vista de uma justificativa baseada na teoria dos conjuntos, arranjos espaciais não têm nada a ver com '2' e '3' ou com sua adição. As justificações, portanto, desempenham um papel duplo em relação ao conhecimento. Primeiro, eles estão realmente relacionados à concessão do direito de conhecer, e essa concessão é sempre feita por um interlocutor para quem esse conhecimento está sendo enunciado. Segundo eles estão relacionados à constituição de objetos.” (Lins, 2001, p.42)

Ou seja, não basta que o indivíduo acredite e expresse sua crença, mas é preciso que uma justificação, seja academicamente válida ou não, que valide seu conhecimento. Esses três elementos não são mutuamente excludentes entre si, mas apesar de serem três, estão amalgamados formando o que é o conhecimento.

Outra noção teórica central do Modelo dos Campos Semânticos é o termo “significado” e “produção de significado” caracterizado por Lins após um processo de refinamento deste conceito. Ao falar de significado, este está associado a um objeto, que para Lins (1996) é o que se sabe dizer e se diz sobre ele. Em uma das versões finais sobre a noção de significado de um objeto, temos:

- “Significado é o conjunto de coisas que se diz a respeito de um objeto. Ou,” (Lins 1997, p.15)
- “Significado de um objeto é aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto, no interior de uma atividade” (Lins, 2012, p.28)

Há duas importantes considerações a respeito da noção de significado que devem ser mencionadas.

> “A primeira diz respeito ao papel desempenhado pela noção de atividade. Esta noção, tomada no sentido proposto por Leontiev, pretende indicar no MCS que existe um sujeito da enunciação que está imerso em uma atividade. Isto quer dizer que ele está potencialmente[22] produzindo significados e operando a partir de um determinado contexto sociocultural em que está em jogo, um

> processo psicológico consciente, o qual é orientado por necessidades, ações conscientes, motivos, fins a serem alcançados.
> A importância de se observar o sujeito no interior de uma atividade – participando ou não dela – é a possibilidade de podermos entender de maneira mais efetiva a sua produção de significados; entender, por exemplo, por que esse sujeito diz o que diz, e por que diz certas coisas e não outras.” (Silva, 2022, p.89)

E ainda

> “A segunda consideração que desejamos explicitar sobre a noção de significado é que produzir significados não se refere a tudo o que o sujeito poderia ou deveria dizer de um objeto numa dada situação e, sim, o que ele efetivamente diz sobre aquele objeto no interior daquela atividade. Assim, os objetos são constituídos enquanto tais a partir do que o sujeito diz que eles são.” (Lins, 1996, p.40)

O que nos deixa a par do que vem a ser o processo de produção de significados, a partir da caracterização de significado dada por Lins e considerando a noção de atividade dada pelo teórico russo Leontiev, que usaremos nesta investigação. Então, um sujeito produz significados quando, no interior de uma atividade, enuncia um conjunto de coisas sobre determinado objeto.

Quando se menciona a respeito do que o sujeito efetivamente diz, e não o que ele pode dizer, precisamos elucidar uma importante noção do MCS que é a de espaço comunicativo, onde ocorre o processo de comunicação. Para Lins (2001), em sua nova proposta para o processo comunicativo, é preciso considerar três elementos: autor, texto e leitor.

> “O autor é aquele que, no processo, produz a enunciação: um professor em uma aula expositivo-explicativa, um artista plástico expondo seus trabalhos ou um escritor apresentando sua obra. O leitor é aquele que, no processo, se propõe a produzir significados para o resíduo das enunciações como, por exemplo, o aluno que, assistindo a uma aula expositiva e explicativa, busca entender o que o professor diz; um crítico de arte, que analisa a obra de um artista plástico; ou uma pessoa que, lendo um romance, busca entender a história do autor. Já o texto, é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza algum significado” (Silva, 2022, p.93)

Quanto a enunciação e a produção de significado que são elaboradas pelo autor e pelo leitor respectivamente, já discutimos em parágrafos anteriores como essa dinâmica ocorre. Quanto ao texto, que passa a ser concebido como um resíduo de enunciação, só é caracterizado desta maneira, quando esse texto, que pode ser escrito, uma imagem ou sons, está à mercê de quem se propõem a produzir significado. Oliveira (2002) nos ajuda a entender um pouco melhor e considera:

> “Por isso dizemos que textos não possuem essências; e, portanto, não há o que muitos chamam de interpretações para um texto – há, sim, diferentes significados produzidos para um mesmo resíduo de enunciação. E é exatamente na/pela produção de significados para resíduos de enunciação que objetos são constituídos pelo sujeito que produz significados. Sob a nossa

> ótica, expressões como "os significados contidos no texto" não fazem sentido; *textos não possuem significados*! (destaque da autora)" (Oliveira, 2002, Apud Silva, 2022, p.94)

Desta maneira, temos que a noção de comunicação popularmente conhecida, fica reduzida para expressar a essência do que é o espaço comunicativo para o MCS. Não temos aqui uma pessoa falando com a outra, mas "dois sujeitos cognitivos falando na direção de um mesmo interlocutor" (Lins, 2012, p.24), e é nessa dialética que o espaço comunicativo acontece.

Dando segmento a apresentação do Modelo dos Campos Semânticos, desejamos falar da noção de Campo Semântico que é: "uma coleção de conhecimentos cujas justificações estão todas relacionadas a um mesmo modelo nuclear" (Lins, 1993, p.86), ou ainda "é um processo de produção de significados, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade" (Lins, 1993, p.17).

Para compreender de forma mais abrangente a noção de Campo Semântico, precisamos esclarecer o que vem a ser o termo modelo nuclear. De acordo com Silva,

> "(...) no processo de produção de significados, existem algumas afirmações que a pessoa faz e que, tomando-as como absolutamente válidas, não sente necessidade de justifica-las. A essas crenças afirmações, chamaremos de estipulações locais; e ao conjunto das estipulações locais constituídas no interior de uma atividade denominaremos núcleo" (Silva, 2022, p.100)

Um exemplo para ilustrar sobre esses conceitos, pode ser visto no caso em que um operador de caixa, ao atender um cliente que gastou R$82,50 e realizou o pagamento com uma nota de R$100,00. Se esta situação fosse fictícia e aparecesse em um problema dado pelo professor, o que se esperaria do aluno é que ele montasse o algoritmo da subtração e realizasse a operação 100,00 - 82,50. No entanto, é muito comum ver em estabelecimentos comerciais, o que Lins chamou de método de completamento, e nesse caso

> "(...) a pessoa tira uma moeda de cinquenta centavos da caixa registradora (e diz para si mesma, oitenta e três), pega uma nota de dois reais (e diz para si mesma, oitenta e cinco), pega uma nota de cinco reais (e diz para si mesma, noventa reais) e finaliza pegando no caixa uma nota de dez reais. Temos assim, uma operação com duas lógicas diferentes." (Lins, 1997a, p.20)

O operador de caixa durante sua atividade laboral, está operando em um núcleo diferente do da sala de aula. Veja que ele não precisa justificar ou argumentar como seu procedimento é feito, ele é validado tanto por quem dar o troco como por quem o recebe.

Sendo assim o Campo Semântico é considerado um processo e não uma estrutura fechada. Quando colocada em ação, gera transformação. Lins complementa:

> “Um campo semântico, *de modo geral,* é como se fosse um jogo no qual as regras (se existem) podem mudar o tempo todo e mesmo serem diferentes para os vários jogadores *dentro de limites*; que limites são estes, só sabemos *a posteriori*: enquanto a interação continua, tudo indica que as pessoas estão operando em um mesmo campo semântico.” (Lins, 2012, p.17. Grifo do autor.)

Com esse referencial em mãos, acreditamos ter uma ferramenta que permita fazer uma leitura e análise dos significados produzidos pelos estudantes em sala de aula. Veja que para isso acontecer, o nosso perfil de sala de aula deverá ser reestruturado, para que haja um ambiente propício a utilização do MCS, o que vamos abordar um pouco mais na próxima seção.

4.2 A ESCOLA QUE QUEREMOS

Há um adágio popular que afirma que o mundo mudou significativamente, exceto as escolas e as igrejas. A imagem a seguir compara uma sala de aula do século passado com o atual e evidencia, pelas fotografias, que a organização do espaço escolar - com estudantes dispostos em fileiras e a professora como única detentora do conhecimento, transmitindo-o por meio da fala enquanto os alunos apenas observam e escutam – reforça a percepção de que, de fato, a escola pouco se transformou. Essa constatação é especialmente sensível para nós, educadores.

Se dialogarmos com pessoas de diferentes gerações sobre suas lembranças do período escolar, constataremos que o que há de diferente é somente o comportamento da sociedade, no entanto, a dinâmica da escola, as práticas docentes e o sistema educacional, quase não sofreu transformações.

Fonte: https://miro.medium.com/v2/resize:fit:720/format:webp/1*MmTEKm233tixUnjSc5eXQg.png

A disposição dos ambientes: secretaria, coordenação, sala da direção, sala dos professores, pátio, quadra, salas de aula permanece exatamente o mesmo. Toca o sinal. Formam-se as filas separadas por turma, meninos para um lado e meninas para o outro, caminhando em fila, entram na sala para mais um dia letivo. “Professor, é pra copiar? Cai na prova?” As décadas passam, e tudo parece permanecer igual. O que vemos é um sistema de ensino paternalista, onde os estudantes sentam e aguardam o professor para dar todo e qualquer tipo de instrução. Não é nossa intenção abordar contextos históricos sobre esse cenário ou apontar responsáveis por esse contexto, o que desejamos é pensar em algo novo.

A escola que queremos, em cuja concepção este estudo será desenvolvido, é um ambiente em que todo trabalho é feito em equipe, cujas salas de aula apresentam uma dinâmica de trabalho em grupo em que professores e estudantes dialogam e cooperam em favor da aprendizagem de todos.

Sabemos que a escola com essa característica não vai surgir rapidamente. É preciso projetá-la e repensar o espaço da sala de aula onde boa parte dos processos de ensino e aprendizagem acontecem. Ter professores bem preparados, que saberão ler os seus alunos e orientá-los em suas dificuldades de aprendizagem.

Culturalmente, quem possui o conhecimento são os livros e os professores, mas para nós, os professores pesquisadores que se referenciam pelo MCS, essa não é uma afirmação verdadeira. Nossa investigação tem a premissa de que ensinar é uma tarefa concluída quando a quem se ensinou, aprendeu. Como dizia o educador matemático Roberto Ribeiro Baldino, matemática se ensina ouvindo e se aprende falando. Essa é a escola que queremos e que lutaremos para ter.

4.3 QUESTÃO DE INVESTIGAÇÃO

Nesta seção, apresentamos a motivação que originou esta pesquisa, bem como as justificativas que a sustentam. Em seguida, investigamos a produção de uma sequência didática, fundamentada teoricamente voltada para o ensino de grandezas diretamente e inversamente proporcionais no Ensino Fundamental II.

Nosso problema de pesquisa consistiu em investigar a produção de um conjunto de tarefas, referenciadas teoricamente conforme as premissas do MCS, voltadas à noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais compreendidas como parte do processo de incentivo e potencialização do desenvolvimento do pensamento proporcional nos estudantes.

Ao afirmar que as tarefas se fundamentam nas premissas do MCS, sugerimos que elas devem, em conjunto, promover e potencializar a produção de significados dos estudantes sobre a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, quanto sobre a forma como essa noção compõe o pensamento proporcional e dialoga com o pensamento algébrico. Esse conjunto de tarefas se constituirá em uma sequência didática e consequentemente, o produto educacional desta pesquisa.

5 METODOLOGIA

Nesta seção, apresentaremos a metodologia da pesquisa, suas características e procedimentos metodológicos adotados na investigação. Descrevemos, ainda, as tarefas elaboradas ao longo do estudo, que compõem o produto educacional, bem como as análises decorrentes da aplicação de cada uma dessas tarefas aos participantes da pesquisa.

5.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Esta é uma pesquisa de natureza qualitativa, configurada como uma pesquisa de campo. Está fundamentada segundo a caracterização proposta por Bogdan e Biklen (2013), descrita a partir de cinco aspectos principais:

> 1) Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. 2) A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. 3) Os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. 4) Os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente. 5) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. Os investigadores que fazem uso deste tipo de abordagem estão interessados no modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas. (Bogdan; Biklen, 2013, p. 47-51)

Dessa forma, a investigação foi conduzida em uma sala de aula, de acordo com Bogdan e Biklen (2013), com o objetivo de observar como um aluno de oitavo e um aluno de nono ano do Ensino Fundamental, de uma escola particular na cidade de Juiz de Fora, produziram significados, ao serem ensinados sobre grandezas diretamente e inversamente proporcional.

Cabe ressaltar que os participantes desta pesquisa foram voluntários em três das cinco pesquisas sobre Pensamento Proporcional desenvolvidas pelo NIDEEM. Esses estudantes passaram por todos os processos das investigações dedicados ao Ensino Fundamental compreendidos entre o sexto e o nono ano, que foram: a noção de razão, a noção de taxa, a noção de proporção e por fim, na aplicação da presente pesquisa a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Observou-se que os participantes já estavam familiarizados com a dinâmica proposta, de modo que, ao receberem as fichas de trabalho compreendiam como deveriam se portar e qual era a expectativa em relação à sua participação.

Utilizamos um conjunto de tarefas, aplicadas em sala de aula, em horário extraclasse, no contraturno do período escolar regular dos participantes. A duração da permanência no campo de pesquisa teve duração de 6 semanas, com totalizando três encontros de aproximadamente duas horas e meia cada um.

Por se tratar de uma investigação descritiva, a coleta de dados foi feita por anotações em diário de pesquisa e gravação de áudio, pois nosso principal interesse não está em resultados finais ou em produtos acabados, mas em cada detalhe do processo que investigamos (Silva, 2022).

De acordo com a perspectiva teórica do Modelo dos Campos Semânticos, foram elaboradas tarefas, referenciadas metodologicamente pela teoria. Nesse contexto, uma tarefa quando "entendida como qualquer situação problema apresentada aos participantes de uma pesquisa como demanda a produção de significado" (Silva, 2022 p.132) apresenta maior potencialidade para deflagrar os processos de produção de significados no âmbito do ensino. Uma boa tarefa deve ser familiar, para que quando apresentada ao participante, o permita falar sobre ela. E deve ser não-usual, para que gere no participante da pesquisa algum tipo de demanda cognitiva que ainda não foi explorada anteriormente.

As tarefas devem desempenhar o papel de gerar reflexão, reações e falas, que indiquem o desdobramento do processo da produção de significados. Essa produção somente ocorre a partir da enunciação dos sujeitos, o que chamamos de resíduo de enunciação, e é o que possibilita a leitura da mesma. Para realizar a leitura da produção de significados serão utilizadas as noções categorias a saber:

> i) A constituição de objetos – coisas sobre as quais aquele estudante sabe dizer algo e diz. Isto permite ao pesquisador observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos. ii) A constituição e a transformação de um núcleo (processo de nucleação): suas estipulações locais, as operações e suas lógicas associadas ao núcleo; iii) A produção de conhecimento: enunciação de crenças-afirmação e suas respectivas justificações; iv) A fala na direção de um interlocutor; v) As legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer (para quem está produzindo significados) no interior daquela atividade. (Silva, 2022, p.133)

Essas noções categorias não são mutuamente excludentes entre si e, para que a leitura da produção de significados seja realizada, não é necessário que todos os itens sejam verificados.

A constituição de objetos, segundo Lins (2012), é condição necessária na estruturação da cognição do sujeito. Isto quer dizer que, pelo modo como os objetos são constituídos, o sujeito cria, inventa, reinventa.

A constituição e a transformação de um núcleo, no que sugere o MCS, acontece toda vez que a produção de significados está ocorrendo. O estabelecimento de um núcleo tem a ver com a dinâmica que ocorre no interior da atividade a partir das estipulações locais, o que também pode ser entendido como a forma de operar do sujeito. Aqui, é possível verificar as operações que o sujeito realiza com os objetos e a lógica por ele utilizada. Isso é o que garante que ele pode fazer o que faz.

As demais categorizações, como a fala na direção de um interlocutor, as legitimidades e a produção de conhecimento, serão esclarecidas e descritas de forma mais detalhada no capítulo quatro.

Resumidamente, de acordo com Silva (2022), empregaremos as seguintes sugestões metodológicas:

i) Dar voz ao participante da pesquisa: diferente do ensino tradicional vigente, todo o processo de produção de significados em Matemática é desencadeado pelas enunciações dos sujeitos da pesquisa, em que a tarefa é o elemento utilizado para tal.
ii) Estimular a produção de significados: a ideia de haver expectativas por parte do professor deve ser completamente abandonada, e a singularidade dos sujeitos no processo de produção de significados deve ser notada e valorizada. Pode ser que em uma turma, cada um de seus integrantes produzam diferentes significados, e isso deve ser levado em conta. Enfatizando que o processo é o objeto de maior interesse, e não o produto final.
iii) Desenvolver uma escuta ativa: onde o professor deve aprimorar sua leitura dos resíduos de enunciação e por isso a importância de registrar essas ações, buscando sempre identificar nelas as noções categorias.
iv) Realizar uma leitura plausível e/ou positiva, isto é, uma leitura que não releve o que falta, mas considere de que lugar o participante está falando.
v) Identificar, caso exista, e analisar as dificuldades de aprendizagem (obstáculos e limites epistemológicos). Da mesma forma identificar e analisar a existência de um possível processo de impermeabilização.

5.2 AS TAREFAS

Na elaboração das tarefas, adotamos a concepção de pesquisadores que utilizam o MCS, os quais caracterizam uma boa tarefa como algo familiar e não usual. Para Silva (2003), uma boa tarefa deve ser:

> (...) familiar, no sentido de permitir que as pessoas falem a partir daquele texto e, não usual, no sentido de que a pessoa tenha que desprender um certo esforço cognitivo na direção de resolvê-lo. O fato de a tarefa ser não usual tem como objetivo nos permitir – enquanto professores ou pesquisadores - observar até onde a pessoa pode ir falando. Além disso, será nosso caminho para investigar a dinâmica do processo de produção de significados dos sujeitos de pesquisa. É importante ressaltar que a crença de que uma tarefa seja familiar e não usual está presente apenas nas expectativas do pesquisador. (SILVA, 2003, p.41)

De acordo com essa perspectiva, as tarefas foram idealizadas para que os sujeitos participantes da pesquisa estivessem, presumidamente, familiarizados com os contextos sugeridos em sua aplicação. No entanto, essa suposição parte unicamente do pesquisador, uma vez que não há garantias de que tal familiaridade se concretize.

O termo não usual atribuído a uma boa tarefa, nos leva a crer que se trata de uma tarefa que demande certo esforço cognitivo, ou seja, uma tarefa onde o sujeito precise vencer uma barreira na tentativa de encontrar uma solução e não apenas de maneira banal consiga alcançar um resultado.

Assim, as tarefas iniciais apresentam, em primeiro lugar, um texto motivador, denominado texto para discussão, cujo o objetivo é incentivar os participantes a falarem o que sabem e o que pensam a respeito do tema apresentado.

É relevante frisar que esse é um instrumento pedagógico que pode complementar e até mesmo substituir os livros didáticos usuais, uma vez que, ao nosso ver, tais livros apresentam conceitos rígidos e engessados, sem dar a devida importância aos significados produzidos. Durante a aplicação das tarefas, o professor pesquisador foi orientado a adotar uma postura de facilitador na dinâmica dos participantes, ou seja, caso houvesse necessidade, o professor pesquisador estava livre para intervir na dinâmica, tirando dúvidas ou propondo sugestões.

Essa foi uma conduta intencional, pois pretendíamos reproduzir o que ocorre no dia a dia de uma sala de aula, tendo em vista de que se trata de um mestrado profissional. Os alunos a todo momento solicitam a atenção do professor quando sentem necessidade de tirar dúvidas ou quando querem orientações a respeito das atividades que estão executando.

A sequência didática é composta por cinco tarefas distintas, todas envolvem a noção de pensamento proporcional, cada uma com seus objetivos específicos. Nesta etapa da pesquisa, o foco recai sobre a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. No entanto, como mencionado na seção 5.1, os participantes da pesquisa já haviam passado pelos três estágios anteriores a esta, que são: a noção de razão, a noção de taxa e a noção de proporção.

A Tarefa 1 tem como objetivo introduzir a noção de variável em Matemática, explorando a relação de interdependência entre elas. Para explicar a ideia, utilizamos a situação-problema em envolve o registro da distância percorrida por um carro durante uma viagem e o tempo para percorrê-la. As informações são apresentadas em forma de tabelas e, para motivar a conversa, pergunta-se o que se pode dizer sobre as informações contidas nas tabelas. Em seguida, questiona-se se os participantes conseguiriam dar um exemplo diferente deste, a respeito da interdependência entre as variáveis. A intenção é verificar se os participantes produzem significados para variáveis e a interdependência entre elas.

A Tarefa 2 apresenta dois tipos fundamentais de interdependência entre variáveis matemáticas: a proporcionalidade direta e a proporcionalidade inversa. Além dessas principais relações, há destaque também para os casos que não se enquadram em nenhum desses dois tipos. Trata-se de uma proposta de caráter teórico, pois não propõe situações contextualizadas que exemplifiquem essas relações. No entanto, seu principal objetivo é promover a discussão sobre o tema, solicitando a leitura atenta dos alunos e incentivando a manifestação de dúvidas, interpretações e reflexões acerca do conteúdo apresentado.

A Tarefa 3 traz uma série de tabelas com valores organizados, solicitando aos participantes que analisem à luz dos conceitos discutidos na Tarefa 2. Neste momento, mesmo sem a presença de uma contextualização, os alunos são convidados a examinar as relações entre os valores e classificá-las como diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou, ainda, identificar quando não se trata de nenhum desses casos. O aspecto inovador dessa proposta é que em vez de dar exemplos, colocamos os alunos para defrontarem-se com diferentes situações e também com aquelas que não são nem diretamente, nem inversamente proporcionais, diferentes dos livros didáticos que apenas exemplificam e tratam pouco de situações que não ocorrem proporcionalidade.

A Tarefa 4 pode ser compreendida como uma extensão das Tarefas 2 e 3, portanto tem como principal característica a abordagem de situações-problemas contextualizadas. Seu texto inicial trata do conceito de grandeza como um número acompanhado de uma unidade que informa sobre o que estamos falando ou nos referindo. As grandezas são atribuídas às variáveis x e y. O devido destaque a constante de proporcionalidade é reforçado pelos autores, termo este sempre presente em situações-problemas desse tipo. Os participantes devem, em cada situação apresentada, identificar se as grandezas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais, ou nenhuma das duas, e se possível, determinar a constante de proporcionalidade. Para concluir, o item 4.1 aborda 2 questões para reflexão dos participantes quanto a relações que não são proporcionais e estratégia de vendas de produtos envazados em embalagens de diferentes tamanhos.

Por fim, a Tarefa 5 aborda a interdependência entre as variáveis dada por uma regra/fórmula que traduza essa associação. Os 12 itens da tarefa apresentam valores numéricos organizados em tabelas que devem ser analisados e os participantes deverão encontrar, caso exista, uma regra que expresse a interdependência entre as variáveis. Na sequência, deverão indicar quais delas são variáveis dependente e independentes.

Vejamos agora as tarefas na íntegra:

Tarefa 1 – Interdependência entre variáveis

Texto para discussão

Em matemática, para o estudo de diferentes problemas, utilizamos a ideia de **variável**. Uma **variável** é um termo que numa relação pode assumir diferentes valores. Ela é representada por uma letra do alfabeto a qual pode ser atribuído diferentes valores numéricos. Por exemplo, suponha que você queira analisar a distância percorrida pelo carro em que você está viajando durante o momento que você partiu (o tempo zero) até duas horas depois. Então a variável em questão seria o tempo, denotado pela letra t, em horas, apresentado na tabela abaixo:

t (em horas)	0	1/4	1/2	1	1,5	2,0

Uma outra variável envolvida é a distância, que pode ser calculada e representada pela letra d, em quilômetros, expressa na tabela:

d (em km)	0	25	50	100	150	200

Mas estamos muito interessados em analisar a relação de *interdependência* que pode existir entre duas variáveis, isto é, quando uma varia a outra também varia segundo um padrão que se repete relacionando-as, como mostra a tabela abaixo com relação ao exemplo anterior:

t	0	1/4	1/2	1	1,5	2,0
d	0	25	50	100	150	200

(a) Você conseguiria dizer o que esta tabela está informando a partir da relação entre as variáveis tempo e distância?
(b) Você consegue exibir um exemplo de duas variáveis que estão em relação de interdependência?

Tarefa 2

Existem interdependências entre variáveis em matemática que são de grande interesse em ser identificadas, veremos dois casos a seguir.

Consideremos duas variáveis x e y de modo que as variáveis são expressas por valores atribuídos a elas conforme mostra a tabela:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

Pode ocorrer duas situações especiais de interdependência entre as duas variáveis que analisaremos como casos:

Primeiro caso: Com relação aos valores atribuídos as variáveis y e x pode ocorrer uma de duas situações:

- Os valores de x aumentam juntamente com os correspondentes valores de y; ou
- Os valores de x diminuem juntamente com os correspondentes valores de y;

de tal forma que a razão $\frac{y}{x}$ é constante, isto é,

$$\frac{y1}{x1} = \frac{y2}{x2} = \frac{y3}{x3} = \frac{y4}{x4} = \frac{y5}{x5} = k$$

Logo,

$$\frac{y}{x} = k \text{ (constante), ou seja, } y = kx.$$

para algum número real k diferente de zero.

Neste caso, diremos que as **variáveis** y e x são **proporcionais ou diretamente proporcionais.**

Segundo caso: Com relação aos valores atribuídos as variáveis y e x pode ocorrer uma de duas situações:

- Os valores de x aumentam quando os correspondentes valores de y diminuem; ou
- Os valores de x diminuem quando os correspondentes valores de y aumentam;

de tal forma que o produto x.y é constante, isto é,

$$x_1 .\ y_1 = x_2 .\ y_2 = x_3 .\ y_3 = x_4 .\ y_4 = x_5 .\ y_5 = k$$

Logo,

$$x.y = k, \text{ ou seja, } y = \frac{k}{x}$$

para algum número real k.

Neste caso, diremos que as variáveis y e x são **inversamente proporcionais**.

Existem casos em que existe uma relação entre as variáveis, mas elas **não são** nem diretamente e nem inversamente proporcionais, como veremos a seguir.

O que você pode gostaria esclarecer, discutir e dizer sobre o que apresentamos nesse texto? Anote as suas dúvidas, questões e afirmações no quadro abaixo para estimular uma conversa sobre o texto.

Tarefa 3 - Diretamente ou inversamente proporcionais?

(a) Identifique, nas tabelas abaixo se as variáveis são diretamente ou inversamente proporcionais, ou se não ocorre nenhum dos dois casos? [**Sugestão**: use as informações da tarefa 2 para resolver os itens desta tarefa]

(1)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	6	8	10	12

(2)

n	1	3	4	5	6	7
P	1	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7

(3)

t	1	2	3	4	5	6
Q	1	4	9	16	25	36

(4)

u	3	6	9	12	18	30
v	7	14	21	28	42	70

(5)

h	2	3	5	10	15	20
T	75	50	30	15	10	7,5

(6)

x	1	2	3	4	5	6
Z	1	8	27	64	125	216

(7)

y	5	10	20	40	80	160
T	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64

(8)

x	1	2	3	4	5	6
V	2	3	4	5	6	7

Tarefa 4 – Situações Problemas

Em problemas em que se simula situações reais do dia a dia as variáveis x e y são também chamadas de grandezas (diretamente ou inversamente proporcionais ou, como vimos, pode não ser nem uma coisa nem outra). Uma grandeza em matemática é expressa por um número seguido de uma unidade que informa sobre o que estamos falando ou nos referindo. Podemos também dizer que grandeza é sinônimo de quantidade cujos valores são dados em números. São exemplos de grandezas: a idade de uma pessoa, seu peso, o número de filhos, a temperatura, a área de uma sala, o volume de um recipiente.

Ao estudar um problema envolvendo grandezas pode acontecer que exista um valor que é sempre o mesmo e a ele chamaremos de **constante**. E pode acontecer que outras grandezas sejam variáveis enquanto a situação analisada acontece, neste caso a grandeza é chamada **variável**. Por exemplo, pode existir um problema que envolva a área e a temperatura de uma sala em um dia. Nesse caso a área da sala é constante ao longo do dia, enquanto a temperatura da sala pode ser variável no mesmo período. Em outro problema, a temperatura no interior de um Freezer pode permanecer constante, enquanto a espessura da camada de gelo no seu interior é variável.

Esses dois exemplos sugerem que para afirmar se uma grandeza é variável ou constante é necessário analisar bem o problema em estudo, pois uma grandeza pode ser variável em determinada situação e uma constante em outra.

O valor de **k**, mencionado nas tarefas 1 e 2 é uma constante importante quando as grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais e por isso recebe o nome de **constante de proporcionalidade** ou **fator de proporcionalidade**.

Com essas informações em mente, nas situações abaixo, analise a situação seguindo a seguinte ordem de procedimento:

1º) verifique se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais ou se não são uma coisa nem outra.

2º) Caso seja possível identifique a constante de proporcionalidade.

Situação 1: Uma lancha de competição, em fase de testes, tem a velocidade e o tempo anotados no seu deslocamento do continente a uma Ilha, avaliada em 5 tentativas, em que se desloca em velocidade constante em um percurso em linha reta. A tabela abaixo mostra os resultados:

Velocidade (km)	30	60	90	120	150
Tempo (minutos)	12	6	4	3	2,4

Situação 2: A tabela abaixo mostra o deslocamento de um avião em velocidade constante de 100 km e a distância percorrida:

Tempo (h)	Distância (Km)
1/4	25
1/2	50
1	100
1,5	150
2	200
2,5	250

Situação 3: Numa escola a professora de educação física realizou a medida da altura de todos os alunos de 1 a 6 anos obtendo a seguinte tabela relacionando a altura média dos alunos em relação a idade:

Idade (em anos)	1	2	3	4	5	6
Altura média (em cm)	73,2	84,1	91,1	99,1	105,9	112,20

Situação 4: Uma empresa de água mineral lançou uma nova água gaseificada e com sabor de fruta com a seguinte tabela de preços:

Garrafa (ml)	Preço(R$)
100	5,00
350	8,00
500	10,00
1000	18,00
1500	25,00
2500	40,00

Tarefa 4.1: Outras questões para discussão

(a)Com base na situação 3, é possível afirmar que pode existir uma relação de proporcionalidade entre idade e altura?

(b)Com base na situação 4, suponha que você, sendo o diretor da empresa de água mineral, queira transformar a tabela de preços de acordo com a quantidade de água de modo que a relação preço/conteúdo da garrafa sejam proporcionais, como seria essa tabela? Você acha que a tabela apresentada na situação 4, tem algum objetivo comercial para ela ser como é?

Tarefa 5 - Interdependência especial entre variáveis

A interdependência entre duas variáveis pode ser, às vezes, apresentada por uma **fórmula** que expressa uma **regra** que associa as duas variáveis. Nas tarefas abaixo, já estudadas anteriormente:

(a) Encontre, se possível, a fórmula que expressa a interdependência entre as variáveis;

(b) Identifique, se possível, a regra que associa as variáveis sabendo que na relação entre as variáveis uma delas é **independente** e a outra é **dependente**, isto é, enquanto para a variável independente pode ser atribuídos valores numéricos arbitrários (quaisquer), a outra variável dependerá desses valores para se encontrar o seu valor numérico. Diga qual é a variável independente e qual é a dependente em cada caso.

(1)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	6	8	10	12

(2)

n	1	3	4	5	6	7
P	1	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7

(3)

t	1	2	3	4	5	6
Q	1	4	9	16	25	36

(4)

u	3	6	9	12	18	30
v	7	14	21	28	42	70

(5)

h	2	3	5	10	15	20
T	75	50	30	15	10	7,5

(6)

x	1	2	3	4	5	6
Z	1	8	27	64	125	216

(7)

y	5	10	20	40	80	160
T	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64

(8)

x	1	2	3	4	5	6
V	2	3	4	5	6	7

(9) Uma lancha de competição, em fase de testes, tem a velocidade e o tempo anotados no seu deslocamento do continente a uma Ilha, avaliada em 5 tentativas, em que se desloca em velocidade constante em um percurso em linha reta. A tabela abaixo mostra os resultados:

Velocidade (km)	30	60	90	120	150
Tempo (minutos)	12	6	4	3	2,4

(10) A tabela abaixo mostra o deslocamento de um avião em velocidade constante de 100 km e a distância percorrida:

Tempo (h)	Distância (Km)
1/4	25
1/2	50
1	100
1,5	150
2	200
2,5	250

(11) Numa escola a professora de educação física realizou a medida da altura de todos os alunos de 1 a 6 anos obtendo a seguinte tabela relacionando a altura média dos alunos em relação a idade:

Idade (em anos)	1	2	3	4	5	6
Altura média (em cm)	73,2	84,1	91,1	99,1	105,9	112,20

(12) Uma empresa de água mineral lançou uma nova água gaseificada e com sabor de fruta com a seguinte tabela de preços:

Garrafa (ml)	Preço(R$)
100	5,00
350	8,00
500	10,00
1000	18,00
1500	25,00
2500	40,00

6 ANÁLISE DA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADO DOS ESTUDANTES

Nesta seção, analisaremos a produção de significados dos participantes da pesquisa. Para preservar suas identidades, foram atribuídos os pseudônimos Alfa e Ômega aos estudantes.

No processo de aplicação das tarefas desta pesquisa, que teve por objetivo o ensino de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, como parte do desenvolvimento do pensamento proporcional, algumas decisões de cunho metodológico foram tomadas. A primeira delas foi a de que a pesquisadora deveria intervir durante o processo de produção de significados dos estudantes de maneira análoga à sala de aula e observar na enunciação dos alunos evidências de tal intervenção. Outro procedimento adotado, foi o de pedir aos participantes que não apagassem seus registros escritos, e que se fosse necessário, fizessem apenas um risco e registrasse o que consideravam correto em outra parte do espaço reservado para resposta. Solicitamos, ainda que os participantes respondessem aos questionamentos com maior riqueza de detalhes possível.

As atividades foram aplicadas ao longo de três encontros distribuídos em um período de seis semanas, com o objetivo de discutir as tarefas sobre a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. É importante destacar que esta sequência integra um ciclo composto de cinco etapas voltadas ao desenvolvimento do Pensamento Proporcional. Assim, os alunos já estavam familiarizados com a dinâmica proposta e integrados ao modo de condução da pesquisa, o que contribuiu para um ambiente produtivo.

Os alunos receberam o bloco de tarefas impresso e foi concedido um tempo para que lessem e fizessem suas anotações. Em seguida, abria-se o momento de discussão para que pudessem expor seus resíduos de enunciação. Durante a leitura individual, houve momentos em que a pesquisadora foi questionada pelos participantes acerca de dúvidas ou dificuldades relacionadas à resoluções, e as devidas orientações foram dadas naturalmente

A seguir, com o intuito de facilitar a compreensão do leitor, apresentamos o texto de cada uma das tarefas elaboradas e aplicadas na pesquisa, e na sequência a análise da produção de significados produzida pelos participantes.

6.1 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA TAREFA 1

TAREFA 1 – INTERDEPENDENCIA ENTRE VARIÁVEIS

Texto para discussão

Em matemática, para o estudo de diferentes problemas, utilizamos a ideia de **variável**. Uma **variável** é um termo que numa relação pode assumir diferentes valores. Ela é representada por uma letra do alfabeto a qual pode ser atribuído diferentes valores numéricos. Por exemplo, suponha que você queira analisar a distância percorrida pelo carro em que você está viajando durante o momento que você partiu (o tempo zero) até duas horas depois. Então a variável em questão seria o tempo, denotado pela letra t, em horas, apresentado na tabela abaixo:

t (em horas)	0	1/4	1/2	1	1,5	2,0

Uma outra variável envolvida é a distância, que pode ser calculada e representada pela letra d, em quilômetros, expressa na tabela:

d (em km)	0	25	50	100	150	200

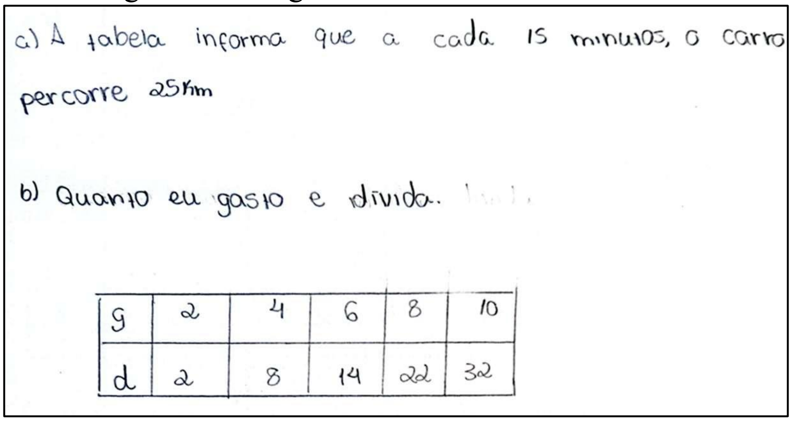
Mas estamos muito interessados em analisar a relação de *interdependência* que pode existir entre duas variáveis, isto é, quando uma varia a outra também varia segundo um padrão que se repete relacionando-as, como mostra a tabela abaixo com relação ao exemplo anterior:

t	0	1/4	1/2	1	1,5	2,0
d	0	25	50	100	150	200

(a) Você conseguiria dizer o que esta tabela está informando a partir da relação entre as variáveis tempo e distância?
(b) Você consegue exibir um exemplo de duas variáveis que estão em relação de interdependência?

Nesta tarefa, os dois participantes responderam aos itens (a) e (b) como pode ser observado nos registros escritos ilustrados a seguir:

Figura 11 – Registro escrito de Alfa - Tarefa 1

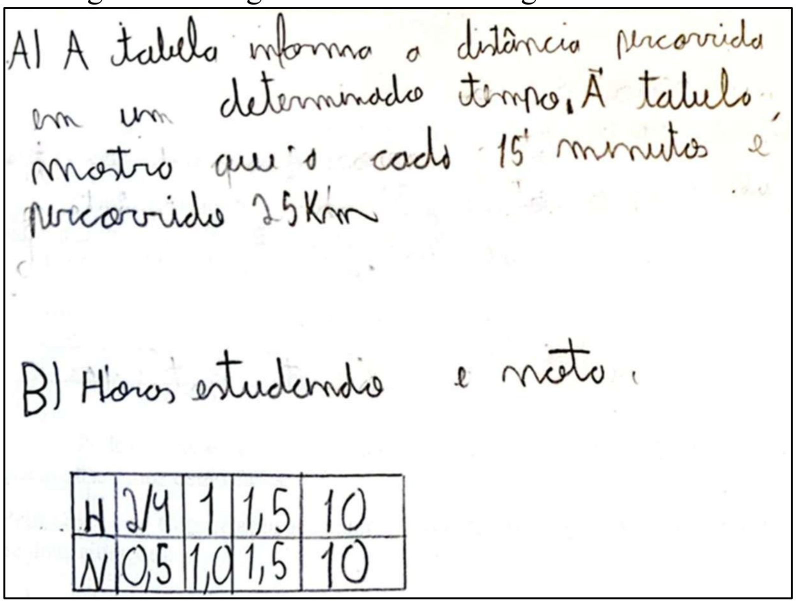

a) A tabela informa que a cada 15 minutos, o carro percorre 25km

b) Quanto eu gasto e dívida.

g	2	4	6	8	10
d	2	8	14	22	32

Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Figura 12 - Registro escrito de Ômega - Tarefa 1


A) A tabela informa a distância percorrida em um determinado tempo, À tabela mostra que a cada 15' minutos é percorrido 25Km

B) Horas estudando e nota.

H	2/4	1	1,5	10
N	0,5	1,0	1,5	10

Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

De acordo com a Figura 13 e Figura 14, tanto Alfa quanto ômega afirmam que o veículo percorre 25 km a cada 15 minutos, ao responderem o item (a) da tarefa. Na letra (b), Alfa exibe seu exemplo relacionando seus gastos a dívida, no sentido de que quanto mais gasta, mais a dívida aumenta. Já Ômega, descreve a relação entre horas de estudos e suas notas em uma prova.

Na perspectiva do MCS, podemos dizer que Alfa e Ômega produzem enunciações na mesma direção de um interlocutor. Os objetos que estão se constituindo possuem justificações semelhantes e que ancoram suas crenças. A seguir, apresentamos um trecho das falas entre os participantes e a pesquisadora:

Alfa*: Eu coloquei que a tabela informa que a cada 15 minutos, o carro percorre 25km.*

Ômega*: Eu coloque que a tabela informa a distância percorrida em um determinado tempo, e que a tabela mostra que a cada 15 minutos é percorrido 25 km.*

Pesquisadora*: Maravilha, perfeito. E na letra b, o que vocês conseguiram falar a respeito? A letra b foi um pouco mais difícil né? Pra exibir um exemplo precisa de um pouco mais de criatividade.*

Alfa*: é...eu não sei se seria ou se pode ser isso, eu coloquei quanto eu gasto e a dívida.*

Alfa mostrou o papel para Pesquisadora.

Pesquisadora*: então se eu gasto 2 a dívida é de 2, se eu gasto 4 a dívida é de 8. Ah, então aqui a dívida vai dobrando né... se gasto 6 a dívida é 14, você já está com essa dívida toda? (risos). E você, Ômega?*

Ômega*: Eu coloquei horas estudando e nota, foi o que eu consegui pensar. Aí eu fiz a tabelinha*

Ômega mostrou o papel para Pesquisadora.

Pesquisadora*: Nossa, legal hein. Então, as horas que você passa estudando e as notas que você tira. Aqui nessa hora 2/4 é o que? meia hora?*

Ômega*: isso*

Pesquisadora*: entendi, aí você tira meio, uma hora tira um e assim sucessivamente. Então se tu estudar 10 horas tu tira 10?*

Ômega*: sim (risos)*

No diálogo, a pesquisadora tinha a intenção de deixar o ambiente mais informal e tentar extrair dos participantes respostas além das que eles haviam registrado no papel. É possível observar, que mesmo durante a conversa, as enunciações foram muito próximas do que constava nos registros escritos, e que houve, por parte deles, uma produção de significado para a noção de interdependência entre variáveis.

Analisando suas enunciações, apesar do objetivo geral ser o desenvolvimento do pensamento proporcional, o senso de covariação, de acordo com Lamon (2012) é característica de quem pensa proporcionalmente. Dessa forma, ao nosso ver, esta primeira tarefa foi bem apropriada pois estimulou os participantes a começarem a olhar e a falar sobre a interdependência das variáveis.

Podemos dizer assim, que de acordo com o MCS, os participantes operam sugerindo constituir um núcleo, pois apresentam crenças afirmações, quando exemplificam um caso de relação de interdependência entre duas varáveis, sem a necessidade de justificá-las. Em outras palavras, a constituição de um núcleo pelos participantes é para nós os conhecimentos expressos pelos participantes quando analisam a forma como as variáveis se comportam e quando exemplificam da forma como fizeram. Embora a noção de proporcionalidade não tenha sido mencionada nas respostas, apesar de já tenham sido apresentados a noção de proporção anteriormente, suas estipulações locais, ou seja, as afirmações que fizeram, são legítimas.

6.2 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA TAREFA 2

Tarefa 2

Existem interdependências entre variáveis em matemática que são de grande interesse em ser identificadas, veremos dois casos a seguir.

Consideremos duas variáveis x e y de modo que as variáveis são expressas por valores atribuídos a elas conforme mostra a tabela:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

Pode ocorrer duas situações especiais de interdependência entre as duas variáveis que analisaremos como casos:

Primeiro caso: Com relação aos valores atribuídos as variáveis y e x pode ocorrer uma de duas situações:

- Os valores de x aumentam juntamente com os correspondentes valores de y; ou
- Os valores de x diminuem juntamente com os correspondentes valores de y;

de tal forma que a razão $\frac{y}{x}$ é constante, isto é,

$$\frac{y1}{x1} = \frac{y2}{x2} = \frac{y3}{x3} = \frac{y4}{x4} = \frac{y5}{x5} = k$$

Logo,

$$\frac{y}{x} = k \text{ (constante), ou seja, } y = kx.$$

para algum número real k diferente de zero. Neste caso, diremos que as **variáveis** y e x são **proporcionais ou diretamente proporcionais.**

Exibiremos agora a tarefa 2, analogamente a primeira. O texto será apresentado e em seguida mostraremos os registros escritos e a análise dos resíduos de enunciação dos participantes.

Segundo caso: Com relação aos valores atribuídos as variáveis y e x pode ocorrer uma de duas situações:

- Os valores de x aumentam quando os correspondentes valores de y diminuem; ou
- Os valores de x diminuem quando os correspondentes valores de y aumentam;

de tal forma que o produto x.y é constante, isto é,

$$x_1.\ y_1 = x_2.\ y_2 = x_3.\ y_3 = x_4.\ y_4 = x_5.\ y_5 = k$$

Logo,

$$x.y = k\text{, ou seja, } y = \frac{k}{x}$$

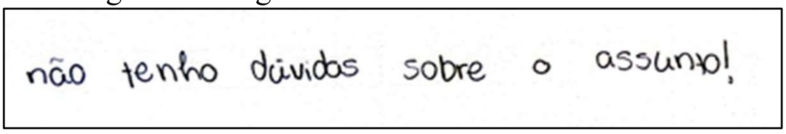
para algum número real k. Neste caso, diremos que as variáveis y e x são **inversamente proporcionais**.

Existem casos em que existe uma relação entre as variáveis, mas elas **não são** nem diretamente e nem inversamente proporcionais, como veremos a seguir.

O que você gostaria de esclarecer, discutir e dizer sobre o que apresentamos nesse texto? Anote as suas dúvidas, questões e afirmações no quadro abaixo para estimular uma conversa sobre o texto.

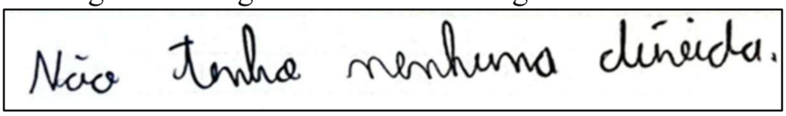
Agora vejamos os registros escrito dos participantes:

Figura 13: Registro escrito de Alfa - Tarefa 2


não tenho dúvidas sobre o assunto!

Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Figura 14: Registro escrito de Ômega - Tarefa 2


Não tenho nenhuma dúvida.

Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Recordamos que a importância desta tarefa reside no fato de que, ao contrário do que propõe o ensino tradicional, as definições e ideias matemáticas, em vez de explicadas pelo professor, são submetidas à apreciação dos estudantes, para que reflitam sobre o texto proposto. Em seguida, ocorre uma discussão sobre o texto entre professor(a) e aluno(a)s, com o objetivo de transformar este resíduo de enunciação em texto.

Nesta tarefa, os participantes foram bastante restritos em suas enunciações, como pode ser observado na Figura 15 e Figura 16. Apesar de receberem orientações para tentar expor tudo o que pensaram a respeito do texto, não responderam nada além de "não tenho dúvidas sobre o assunto” e “não tenho nenhuma dúvida”. Desta forma, a pesquisadora interferiu, sugerindo que a tarefa pudesse ser comentada, como pode ser visto no trecho a seguir:

Alfa: *A gente não teve nenhuma dúvida não.*

Pesquisadora: *Não? Foi tranquilo?*

Ômega: *Ahã*

Pesquisadora: *Beleza. Então vamos comentar rapidinho. O que vocês entenderam desse primeiro caso?*

Alfa: *Que elas são diretamente, quando elas crescem, elas crescem sempre numa mesma ... (tenta encontrar uma palavra fazendo gestos com a mão) proporção*

Pesquisadora: *Beleza, então eles crescem sempre obedecendo um mesmo padrão*

Ômega: *É..., como se multiplicasse o de cima e o de baixo por 2, por 3, por 4...*

Pesquisadora: *Ok, isso é importante a gente frisar, que não é apenas quando eles crescem, quando x cresce, y cresce também, mas cresce sempre do jeito que você falou (apontando para Alfa), numa mesma proporção. Então isso já está claro pra vocês. Tranquilo, beleza. Aí no segundo caso já tá um pouco diferente, não aparece uma divisão, o que que muda do primeiro pro segundo caso?*

Alfa: *No segundo tem essa mesma taxa de crescimento ou de diminuir as prop... fala! (direciona para o Ômega).*

Ômega: *O que?*

Pesquisadora (intervindo): *O de cima é diretamente, lembra? E o de baixo, como a gente chama?*

Alfa: *Inversamente.*

Pesquisadora: *E aí aqui nesse segundo caso, qual é a diferença? No primeiro a gente faz assim y1 sobre x1, y2 sobre x2, todas essas razões elas são equivalentes. Já no segundo caso, a gente faz do mesmo jeito?*

Ômega: *Não.*

Pesquisadora: *Como é que a gente faz, Ômega?*

Ômega: *A gente multiplica.*

Pesquisadora: *Multiplica um pelo outro, e essa multiplicação de um pelo outro quando elas são iguais, é o que confere, o caso ser inversamente proporcional.*

Alfa e ***Ômega*** *acenam positivamente com a cabeça.*

***Pesquisadora**: E em relação a essa letrinha k aí? Tá tudo bem pra vocês? O que seria esse k?*
***Alfa**: Seria o resultado.*
***Ômega**: Seria a letra do resultado da divisão dos dois.*
***Pesquisadora**: É importante a gente lembrar que esse k a gente vai chamar de constante de proporcionalidade, que é exatamente esse valorzinho aí que vai se repetir, beleza?*
***Alfa** e **Ômega** acenam positivamente com a cabeça.*

Inicialmente acreditamos que seja importante falar a respeito desta tarefa. Como mencionado, uma boa tarefa é aquela que leva os estudantes a produzirem significados. Ela precisa ser familiar e não usual, ou seja, familiar a ponto que se possa falar algo a respeito, e não usual à medida que gere uma demanda por parte de quem a executa. Quando os participantes enunciam que não possuem nenhuma dúvida, nos parece que a tarefa é familiar, mas quanto a ser não usual, nos gera uma reflexão a respeito.

Com isso, consideraremos alterar o texto desta tarefa, fazendo perguntas mais direcionadas e/ou pedindo que os alunos exibam exemplos para os casos diretamente e inversamente proporcionais. Uma sugestão é que voltem ao exemplo que registraram na tarefa 1 e classifiquem as grandezas que mencionaram e exibam um exemplo diferente do que deram. No caso de Alfa, que exemplificou o caso de gastos e dívidas, questioná-la se essa relação é uma relação diretamente ou inversamente proporcional ou se não é nenhuma das duas. Se for diretamente, solicitar que de um exemplo de grandezas inversamente proporcionais. E assim analogamente com os demais participantes.

Durante a intervenção da pesquisadora, quando se estabelece um espaço comunicativo através do diálogo com os participantes, é possível perceber que houve produção de significado para o texto da tarefa 2. Os resíduos de enunciação foram expressos via comunicação oral pelos estudantes, e conceitos como proporção apareceram em suas falas, indicando que os objetos constituídos são legítimos e que houve a produção de conhecimento.

Por outro lado, ainda é possível perceber que expressões como "resultado da divisão" para se referir a constante k é lançada por Ômega, quando a expectativa era que a expressão razão fosse utilizada. Ao nosso ver, entender a comparação entre grandezas como uma operação de divisão, pode gerar um obstáculo ou limite epistemológico, já que a razão entre grandezas e uma divisão, são noções que podem levar a produções de significados distintas. Quanto a expressão taxa, Alfa faz referência apenas quanto as grandezas inversamente proporcionais, o que nos dá a impressão de que o conceito de taxa aparece somente quando se multiplica um valor por outro.

6.3 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA TAREFA 3

A tarefa 3 pode ser considerada como uma aplicação dos conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, que foi apresentado na tarefa 2. Aqui, os participantes analisaram uma sequência de tabelas de duas linhas e sete colunas, onde estão indicadas as variáveis na primeira coluna e os valores nas demais colunas. Ao analisar os dados, deveriam

Tarefa 3 - Diretamente ou inversamente proporcionais?

(a) Identifique, nas tabelas abaixo se as variáveis são diretamente ou inversamente proporcionais, ou se não ocorre nenhum dos dois casos. [**Sugestão**: use as informações da tarefa 2 para resolver os itens desta tarefa]

(1)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	6	8	10	12

(2)

n	1	3	4	5	6	7
P	1	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7

(3)

t	1	2	3	4	5	6
Q	1	4	9	16	25	36

(4)

u	3	6	9	12	18	30
v	7	14	21	28	42	70

(5)

h	2	3	5	10	15	20
T	75	50	30	15	10	7,5

classificá-las em diretamente ou inversamente proporcionais ou ainda se não ocorreu nenhum dos dois casos. Segue o texto da tarefa 3:

(6)

x	1	2	3	4	5	6
Z	1	8	27	64	125	216

(7)

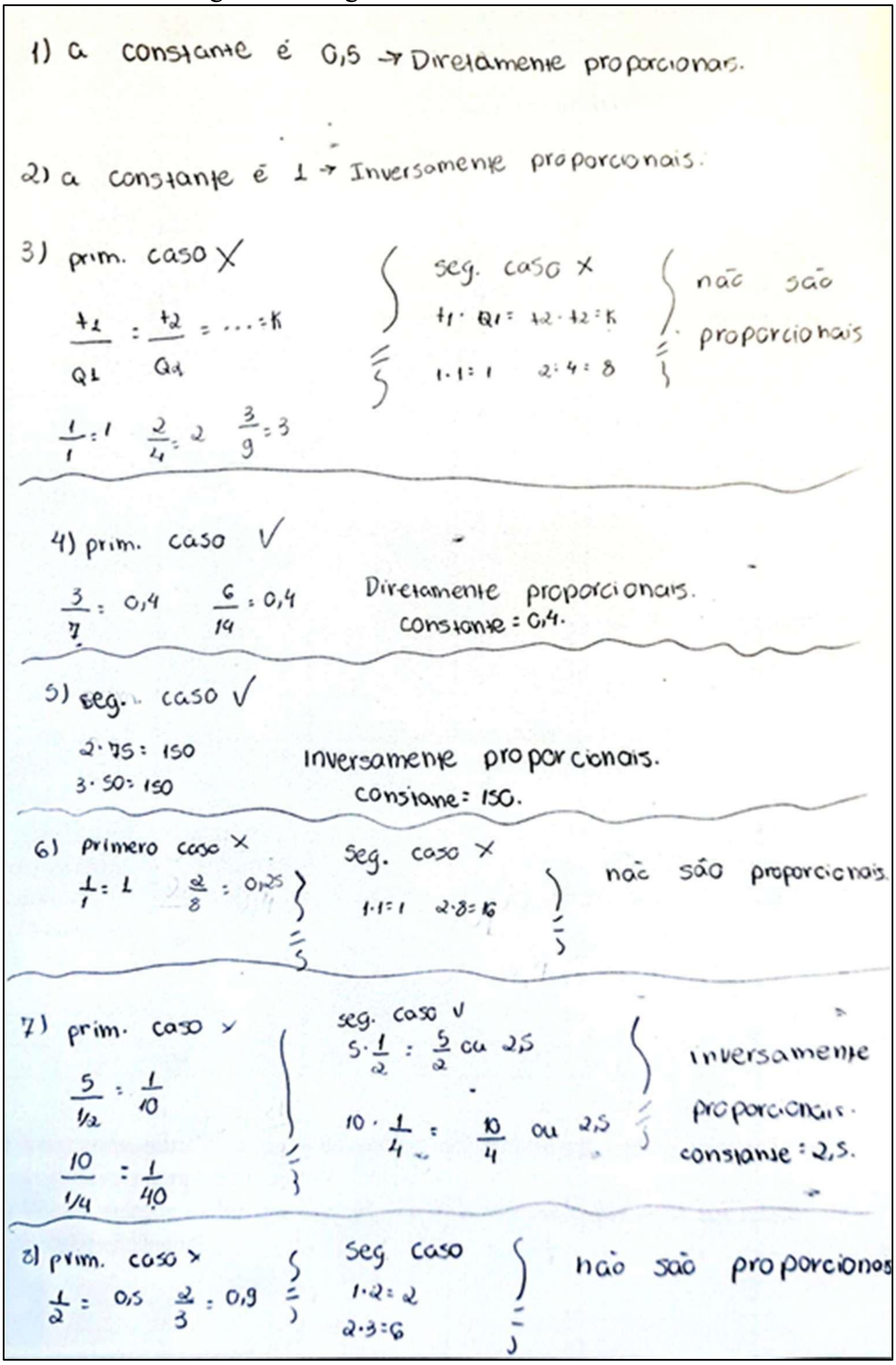
y	5	10	20	40	80	160
T	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64

(8)

x	1	2	3	4	5	6
V	2	3	4	5	6	7

Vejamos os registros escrito dos estudantes para a tarefa 3:

Figura 15: Registro escrito de Alfa - Tarefa 3



1) a constante é 0,5 → Diretamente proporcionais.

2) a constante é 1 → Inversamente proporcionais.

3) prim. caso ✗

$\frac{t_1}{Q_1} = \frac{t_2}{Q_2} = \ldots = K$

$\frac{1}{1} = 1$ $\frac{2}{4} = 2$ $\frac{3}{9} = 3$

seg. caso ✗

$t_1 \cdot Q_1 = t_2 \cdot t_2 = K$

$1 \cdot 1 = 1$ $2 \cdot 4 = 8$

não são proporcionais

4) prim. caso ✓

$\frac{3}{7} = 0{,}4$ $\frac{6}{14} = 0{,}4$

Diretamente proporcionais.
constante = 0,4.

5) seg. caso ✓

$2 \cdot 75 = 150$
$3 \cdot 50 = 150$

Inversamente proporcionais.
constante = 150.

6) primero caso ✗

$\frac{1}{1} = 1$ $\frac{2}{8} = 0{,}25$

seg. caso ✗

$1 \cdot 1 = 1$ $2 \cdot 8 = 16$

não são proporcionais.

7) prim. caso ✗

$\frac{5}{1/2} = \frac{1}{10}$

$\frac{10}{1/4} = \frac{1}{40}$

seg. caso ✓

$5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ ou 2,5

$10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{4}$ ou 2,5

inversamente proporcionais.
constante = 2,5.

8) prim. caso ✗

$\frac{1}{2} = 0{,}5$ $\frac{2}{3} = 0{,}9$

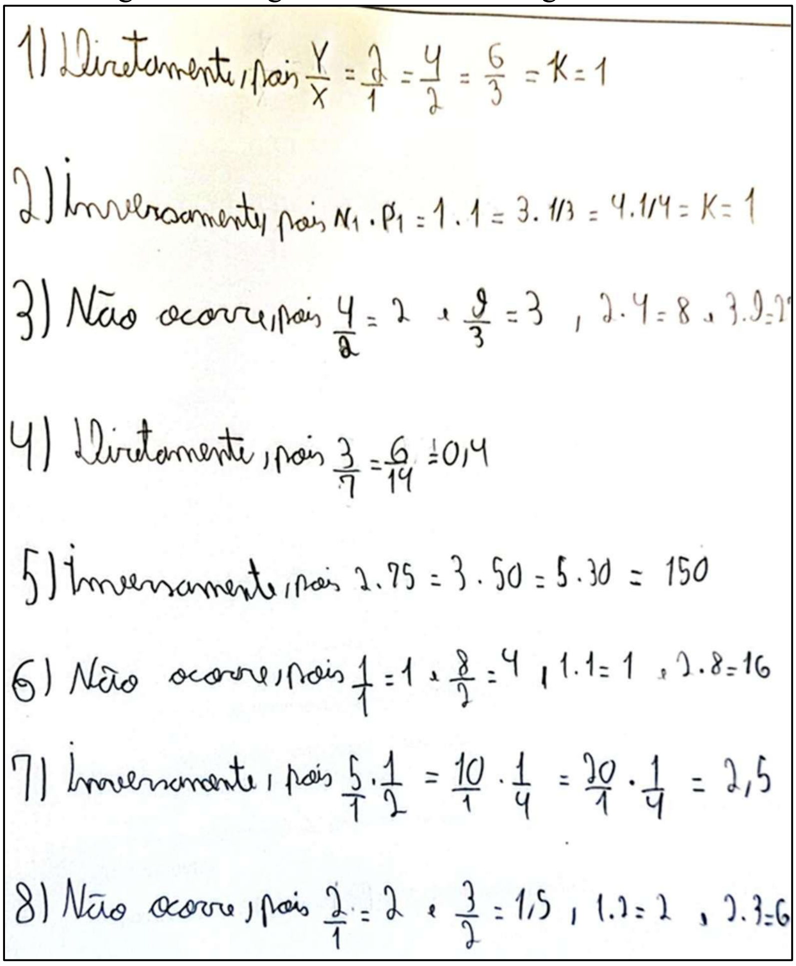
seg caso

$1 \cdot 2 = 2$
$2 \cdot 3 = 6$

não são proporcionais

Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Figura 16: Registro escrito de Ômega - Tarefa 3


1) Diretamente, pois $\frac{Y}{X} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = K = 1$

2) Inversamente, pois $N_1 \cdot P_1 = 1 \cdot 1 = 3 \cdot 1/3 = 4 \cdot 1/4 = K = 1$

3) Não ocorre, pois $\frac{4}{2} = 2$ e $\frac{9}{3} = 3$, $2 \cdot 4 = 8$ e $3 \cdot 9 = 2$

4) Diretamente, pois $\frac{3}{7} = \frac{6}{14} = 0,4$

5) Inversamente, pois $2 \cdot 75 = 3 \cdot 50 = 5 \cdot 30 = 150$

6) Não ocorre, pois $\frac{1}{1} = 1$ e $\frac{8}{2} = 4$, $1 \cdot 1 = 1$ e $2 \cdot 8 = 16$

7) Inversamente, pois $\frac{5}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{20}{1} \cdot \frac{1}{4} = 2,5$

8) Não ocorre, pois $\frac{2}{1} = 2$ e $\frac{3}{2} = 1,5$, $1 \cdot 2 = 2$ e $2 \cdot 3 = 6$

Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Nesta tarefa os participantes demonstraram certa inquietação ao discutirem entre si como resolvê-las. Após observar durante alguns minutos a discussão entre eles, a professora pesquisadora foi requisitada pelos alunos e algumas interferências foram necessárias, para que o andamento da solução ocorresse. Os registros tanto da Figura 17 quanto da Figura 18 foram elaborados após a intervenção da pesquisadora. No trecho do diálogo abaixo, vemos como essa intervenção ocorreu. Segue o trecho:

Alfa*: As letras que estão aqui são aleatórias?*

Pesquisadora*: São, aleatórias. Lembra que a gente falou que a variável normalmente é representada por uma letra? Pode ser uma letra qualquer.*

Alfa*: Então, mas a gente pode saber quais são as variáveis? Ou não vai mudar nada?*

Pesquisadora*: Não muda nada, são apenas letras, não tem uma variável definida, entendeu, Alfa? Não tem tipo, sei lá, t e q. Pode ser tempo e quantidade? De que? Sei lá! ... Olha só, importante aqui: a sugestão que ele dá pra gente no enunciado, que está até em negrito, "use* *as informações da tarefa 2 para resolver os itens desta tarefa". Então olha só, o que a tarefa 2 traz pra gente? Na verdade, a tarefa 2 era só pra gente fazer alguns comentários do que fosse importante, não tinha nenhum exercício propriamente dito pra fazer. Mas o que ele dizia pra gente? Que quando as variáveis aumentam juntas e obedecem a uma razão, como é que a gente obtém essa razão? É o y sobre o x, né? (Alfa acena positivamente com a cabeça). Quando todas essas relações acontecem de forma equivalente, a gente tem uma constante de proporcionalidade, que é o k. então vamos olhar pro primeiro, que está como o exercício 1 (da tarefa 3). Se a gente colocar aqui 2 sobre 1, isso é equivalente a 4 sobre 2?*

***Alfa e Ômega** acenam com a cabeça e respondem: sim*

***Pesquisadora**: É equivalente a 6 sobre 3? A 8 sobre 4?*

***Alfa e Ômega** acenam com a cabeça e respondem: sim*

***Pesquisadora**: Isso tá obedecendo? Tá?*

***Alfa** acena positivamente com a cabeça, de forma até empolgada*

***Pesquisadora**: Então a gente pode dizer que isso é diretamente proporcional?*

***Alfa e Ômega** acenam com a cabeça e respondem: sim*

***Pesquisadora**: Beleza. Bom agora vamos olhar a número 2. Se a gente for pegar o primeiro caso, 1 sobre 1, isso é equivalente a 1/3 sobre 3?*

***Alfa**: deve ser, porque vai dar 1*

(Ômega permanece atento olhando para o papel e não responde)

***Pesquisadora**: Então vamos lá, vou fazer no quadro hein. Lá na tarefa 2 ele faz y_1 sobre x_1, aí ele vai fazendo, isso tem que ser equivalente a y_2 sobre x_2, aí ele vai fazendo assim até dizer que se todo mundo é igual, isso é equivalente a um k. Tá. Vamos fazer então a mesma coisa no número 2? Só que aqui não é x e y, é n e P. Então eu vou ter que fazer P sobre n. Beleza, o meu primeiro é 1 sobre 1, aqui eu não tenho como saber de nada, eu só tenho uma relação. Agora, 1/3 sobre 3, como é que a gente resolve isso? Eu repito o de cima, né isso?*

***Ômega** (acena positivamente com a cabeça): E multiplica pelo inverso do de baixo.*

***Pesquisadora**: Qual é o inverso de 3?*

***Ômega**: 1/3*

***Pesquisadora**: E isso aqui dá 1?*

***Alfa** só presta atenção, **Ômega** acena negativamente com a cabeça*

***Pesquisadora**: Então, a gente já viu que no primeiro caso, não está acontecendo. Então, vocês concordam comigo que o primeiro caso não atende?*

***Alfa** e **Ômega** acenam positivamente com a cabeça e respondem: sim*

Pesquisadora*: Certo, então o primeiro caso morreu pra mim, vamos para o segundo caso. Será que é o segundo? Não sei, vou fazer, vou verificar se o segundo caso acontece aqui. Como que a gente vê lá na tarefa 2 o funcionamento do segundo caso? Ele faz assim ó: x_1 vezes*
Y_1, vai ser igual ao x_2 vezes y_2, não é isso? E isso tudo vai se repetir, e se isso for verdade, a gente tem uma constante. Vamos ver se isso vai acontecer então no exercício número 2? Quem é x_1 e y_1? 1 vezes 1. E agora, 3 vezes 1/3, aqui tá dando 1, agora dá. Agora a gente tem que verificar os outros, né? 4 vezes ¼?

Ômega*: Dá 1*

Pesquisadora*: 5 vezes 1/5*

Ômega*: dá 1*

Pesquisadora*: Preciso fazer o resto?*

Alfa*: Não*

Pesquisadora*: Peraí, mas tá todo mundo dando 1? Então quem é o k aqui? ... Existe um k?*

Alfa e Ômega*: é o 1*

Pesquisadora*: Então aqui, se está atendendo ao segundo caso, eles são o que?*

Alfa*: inversamente*

Pesquisadora*: Então você pode dizer que são inversamente proporcionais. Tudo bem? Agora vamos lá, só pra gente aproveitar um pouquinho o fio da meada. Testei o primeiro caso, não funcionou. Vamos supor que eu tivesse testado o segundo caso, se não funcionasse, o que está acontecendo?*

Alfa*: Não é proporcional.*

Pesquisadora*: Exatamente, então eles não são proporcionais. Ou seja, não são diretamente nem inversamente proporcionais. É o que eu falei pra vocês aqui, que se a gente pudesse considerar como o terceiro caso, fica a critério de vocês. Se vocês quiserem até deixar isso como sugestão, pode escrever na folha. Ficou mais tranquilo agora?*

Alfa *e* ***Ômega*** *acenam positivamente com a cabeça e respondem: ficou.*

A intervenção solicitada foi considerada necessária para que os participantes conseguissem dar andamento na execução da tarefa. Isso porque, embora já estivessem há bastante tempo debatendo entre si, não conseguiam compartilhar interlocutores e nem constituir objetos com as definições que haviam afirmado compreender anteriormente. Em outras palavras, não eram capazes de utilizá-las para avançar na resolução da atividade e dizer algo sobre ela. Este fato nos levou a refletir sobre alguns aspectos das Tarefas 2 e 3. Em relação à Tarefa 2, inicialmente acreditávamos que os conceitos apresentados haviam sido compreendidos e que seriam aplicados facilmente pelos participantes na Tarefa 3. Contudo, esta última nos levou a refletir sobre a necessidade de uma discussão mais prolongada sobre ambas as tarefas, porém o tempo da entrevista não nos permitiu.

Inicialmente Alfa questiona a respeito do que se tratava as letras que representavam as variáveis, como quem precisasse de algo além de letras e números para constituir objetos e por consequência produzir significados. A noção de variáveis que se comportam de forma diretamente ou inversamente proporcionais apresentados na tarefa 2 não foi suficiente para que os participantes pudessem falar sobre as sequências, e assim, não foi possível observar as estipulações locais que poderiam emergir na dinâmica.

Na Figura 17, Alfa registra as respostas dos itens 1 e 2 apenas com o que constatou durante a intervenção. Após a mediação da pesquisadora, Alfa consegue estabelecer um modo de operar que a leva a produzir significados durante a tarefa, e seus resíduos de enunciação passam a ser mais elaborados a partir do item 3 até o item 8. Em algumas situações, Alfa testa o primeiro caso (diretamente proporcional) e quando o teste não funciona, ela testa o segundo, como pode ser visto nos itens 6, 7 e 8. Ômega em seus registros na Figura 18, classifica primeiro o tipo de relação entre as grandezas e justifica apresentando os cálculos feitos. Não sabemos exatamente como ele concluiu que as grandezas eram diretamente ou inversamente proporcionais ou se não eram proporcionais. Ômega realizava muitos cálculos mentais, sem sentir a necessidade de escrever, e por isso verificava os casos mentalmente e registrava apenas para atender à solicitação da pesquisadora. Adiante ainda será relatado mais detalhes da intervenção.

A mediação foi para a pesquisa um momento muito oportuno e que, nitidamente, percebemos o que Lins (2012) fala sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vygotsky nos termos do MCS:

> “o processo no qual a pessoa passa a ser capaz de fazer algo com a ajuda/presença de uma pessoa mais “experiente”, para ser capaz de fazer aquele algo “sozinho”, é o processo no qual a pessoa passa de “precisar emprestar a legitimidade de um terceiro para poder dizer o que diz naquele lugar e momento” para “fazer de maneira autônoma por ter internalizado interlocutores, legitimidades” (é melhor ainda dizer “por ter sido internalizado por interlocutores, legitimidades”). Na ZDP, segundo o MCS, o que se internaliza não é conteúdo, não são conceitos e sim legitimidades: a pessoa já era capaz de fazer, mas não sabia que nesta ou naquela situação aquilo era legítimo, que nesta ou naquela situação aquele modo de produção de significado era legítimo” (LINS, 2012, p.20)

A intervenção da pesquisadora, foi exatamente a ajuda de uma pessoa mais experiente que os alunos precisavam. O auxílio consistiu em organizar os conceitos apresentados na tarefa 2 e mostrar como poderiam ser aplicados para fazer as verificações na tarefa 3. A partir disso, os participantes encontraram uma forma legítima de seguir adiante, restabelecendo uma nova forma de operar, em que pudemos observar a transformação do núcleo.

Ainda houve outro momento em que a pesquisadora foi solicitada. Segue trecho do diálogo referente ao item 4 da mesma tarefa:

Alfa*: Pesquisadora, quando for dividir, é só dividir 3 por 7, né?*

Pesquisadora*: Pode ser também.*

Ômega*: Não precisa, vamos supor o de baixo pelo de cima, ou o de cima pelo de baixo, pode ser de qualquer forma?*

Pesquisadora*: O importante é vocês fazerem sempre na mesma ordem. Se começa fazendo o de baixo pelo de cima, vai fazendo do mesmo jeito até o final.*

Neste exercício, foi interessante observar como os participantes se mostraram mais à vontade com a dinâmica da tarefa, o que resultou nos efeitos positivos da intervenção. Quando Alfa questionou, no item 4 da tarefa 3, se deveria dividir *u* por *v* ou *v* por *u*, percebeu-se novamente que ela buscava uma justificação – entendida como "aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz" (SILVA, 2022, p.111). Isso nos levou a concluir que Alfa já possuía essa informação como válida, mas que ainda não a tinha como uma estipulação local. A partir desse momento, a produção de significados foi ocorrendo de maneira mais fluida, e embora tenham ocorrido alguns erros em operações matemáticas durante a resolução, todo resíduo de enunciação produzido foi legítimo. Além disso, a lógica encontrada pelos participantes os levou a questionar e a instituir seus próprios modos de operar, como evidenciado no questionamento sobre a ordem das variáveis *u* e *v*.

Outro aspecto relevante, mencionado pelos próprios participantes ao comentarem a tarefa, surgiu quando a pesquisadora perguntou como estavam tentando responder os exercícios antes da intervenção. Eles responderam que "estavam tentando adivinhar" como fazer. Veja o trecho a seguir:

Alfa*: A gente tentou fazer, mas a gente não tava conseguindo fazer caso por caso, a gente tava tentando dar uma adivinhada... a gente foi fazendo só a conta.*

Pesquisadora*: Ahhhhh....entendi. Mas então o que vocês acham, é mais fácil fazer tentando adivinhar ou fazer?*

Alfa*: Pelas contas (testando pelos casos)*

Pesquisadora*: Pelas contas é mais fácil né?*

***Ômega**: eu não sei, eu to na dúvida, eu achei que alguns dava pra fazer sem precisar fazer as contas, dava pra fazer, vamos supor, no caso 4, era só a gente notar que sempre ia, vamos supor, no primeiro número, do 3 pro 6 dobrou, do 7 pro 14 dobrou também. Aí se eu pegasse do 3 pro 9, triplicou.*

***Pesquisadora**: ah sim, então no número 4 do 7 pro 14 foi vezes 2, do 7 pro 21 foi vezes 3...*

***Ômega**: isso*

***Pesquisadora**: foi assim?*

***Ômega**: eu pensei assim, mas eu coloquei daquele jeito (testando os casos) lá.*

***Pesquisadora**: ah tá, entendi. Uma outra coisa que a gente repara é como tá crescendo aqui, 7, 14, 21, 28... se a gente fosse pensar em...*

***Alfa**: Na tabuada do 7.*

Dessa forma, percebemos que eles estavam buscando uma maneira de operar, mas não estava clara a lógica correspondente. Quando Alfa afirma que estava tentando "dar uma adivinhada", entendemos que, embora houvesse certa compreensão sobre o conceito de variáveis diretamente e inversamente proporcionais, os objetos ainda não haviam sido constituídos. Suspeitamos que o modo de operar ainda ocorria no campo da intuição, e não de acordo com uma lógica. Fazemos essa afirmação, pois os participantes não conseguiam dizer nada a respeito da tarefa, logo não puderem estabelecer um modo de operar.

Nesse mesmo contexto, em determinado momento, Ômega expressa suas ideias sobre conseguir classificar as variáveis sem utilizar o modo de operar proposto inicialmente, ou seja, apenas observando as sequências de números, como ele mesmo exemplificou o caso no exercício 4. Ele observou que a variável u está sendo multiplicada por dois e a cada coluna ela vai se multiplicando por três, quatro, cinco e assim sucessivamente. A variável v se assemelhava com a tabuada do sete. Para ele, como as duas variáveis estão sendo multiplicadas por um mesmo valor, ele pensa e diz que é possível observar dessa maneira.

Entretanto, em nenhum momento conclui qual seria a classificação das variáveis, se diretamente ou inversamente proporcionais e reconheceu que nem sempre esse modo de operar funcionava. Diante disso, acabou adotando o modo de operar proposto pela pesquisadora, que se baseia em testar cada caso individualmente.

Nesta situação, pudemos observar a mudança da forma de operar do aluno. Ele pareceu voltar atrás e só então verbalizou o que vinha pensando desde o início. No entanto ele também deixou transparecer que percebeu que a forma de operar utilizada preferencialmente, não surtia efeito nos demais exercícios. Isso nos remeteu a um caso de obstáculo epistemológico, que de acordo com MCS, é um processo em que um aluno, operando dentro de um campo semântico, poderia produzir significado, mas não produz. Ômega transpôs este obstáculo rapidamente e modificou seu modo de operar.

No diálogo a seguir, a pesquisadora comenta sobre a autenticidade das perguntas feitas pelos participantes sobre o modo de operar na verificação do tipo de variável. Eles sugeriram que a ordem x/y ou y/x não faria diferença para verificar se as variáveis eram diretamente ou inversamente proporcionais ou, ainda se não eram proporcionais. Esse foi um indício de que os sujeitos estavam produzindo seus significados de maneira autônoma, e não apenas repetindo um procedimento. Vejamos:

***Pesquisadora**: Uma coisa só que eu quero comentar, Ômega, eu achei bacana que você conseguiu reparar e decidiu fazer essa pergunta, se vocês poderiam fazer o y... é ... lá na tarefa 2 tá sempre pra gente fazer* y_1/x_1*, e vocês repararam que se a gente fizer x/y, se for diretamente, vai aparecer a mesma constante de proporcionalidade. Vocês acham que muda alguma coisa, de uma coisa pra outra? (não a mesma constante, mas uma mesma constante)*

***Alfa**: Não, por mais que as vezes elas sejam diferentes, assim, elas sempre vão ser constantes, e aí são proporcionais*

***Pesquisadora**: E assim, se a gente for parar pra pensar também, o que que faz, se a gente for lá pra primeira tarefa que tem o t e o d, o tempo e a distância, é... parece que o movimento que a gente tá fazendo aqui é o seguinte: o carro vai começar a andar e eu vou começar a contar no relógio o tempo a partir do momento em que o carro começa a andar, né? Eu posso pensar que eu vou olhar pro relógio a partir do momento que o carro andar ou eu posso olhar pros quilômetros, lá pro hodômetro do veículo a partir do que o carro vai andar, né? E nessa observação vai depender de quem tá observando, pode ter gente que está observando a hora e pode ter quem vai observar o hodômetro. E é isso mesmo que você falou, Alfa, por mais que deem diferentes, o importante é que essa relação vai sempre acontecer. Beleza? Eaí? O que vocês acharam? Qual foi a impressão? Isso aqui pra vocês já era conhecido de alguma forma?*

***Alfa e Ômega**: Sim (acenam com a cabeça)*

***Ômega**: Essa forma de pensar, eu acho que não*

***Alfa**: É, eu acho que porque a gente vê mais esse negócio de diretamente e inversamente na .....(inaudível) aí faz aquele negócio da setinha assim.*

***Pesquisadora**: Ah... então vocês também são da setinha, ensinaram isso pra vocês...*

***Alfa**: Ahhh eu só sei usar com setinha*

***Pesquisadora**: Setinha é tranquilo pra vocês, Alfa?*

***Alfa**: Muito*

***Pesquisadora**: Então vamos tirar um dia pra vocês me ensinar como faz isso que até hoje eu não sei...rs.*

6.4 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DA TAREFA 4

A tarefa 4 leva o título de "Situações Problemas", abordando as grandezas em um contexto similar ao da realidade. A tarefa é iniciada com um texto detalhando como as grandezas são expressas por suas unidades de medidas e que elas podem ser constantes ou variáveis. Neste momento, é dado um destaque a constante de proporcionalidade ou fator de proporcionalidade.

Tarefa 4 – Situações Problemas

Em problemas em que se simula situações reais do dia a dia as variáveis x e y são também chamadas de grandezas (diretamente ou inversamente proporcionais ou, como vimos, pode não ser nem uma coisa nem outra). Uma grandeza em matemática é expressa por um número seguido de uma unidade que informa sobre o que estamos falando ou nos referindo. Podemos também dizer que grandeza é sinônimo de quantidade cujos valores são dados em números. São exemplos de grandezas: a idade de uma pessoa, seu peso, o número de filhos, a temperatura, a área de uma sala, o volume de um recipiente.

Ao estudar um problema envolvendo grandezas pode acontecer que exista um valor que é sempre o mesmo e a ele chamaremos de **constante**. E pode acontecer que outras grandezas sejam variáveis enquanto a situação analisada acontece, neste caso a grandeza é chamada **variável**. Por exemplo, pode existir um problema que envolva a área e a temperatura de uma sala em um dia. Nesse caso a área da sala é constante ao longo do dia, enquanto a temperatura da sala pode ser variável no mesmo período. Em outro problema, a temperatura no interior de um Freezer pode permanecer constante, enquanto a espessura da camada de gelo no seu interior é variável.

Esses dois exemplos sugerem que para afirmar se uma grandeza é variável ou constante é necessário analisar bem o problema em estudo, pois uma grandeza pode ser variável em determinada situação e uma constante em outra.

O valor de **k**, mencionado nas tarefas 1 e 2 é uma constante importante quando as grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais e por isso recebe o nome de **constante de proporcionalidade** ou **fator de proporcionalidade**.

Com essas informações em mente, nas situações abaixo, analise a situação seguindo a seguinte ordem de procedimento:

1º) verifique se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais ou se não são uma coisa nem outra.
2º) Caso seja possível identifique a constante de proporcionalidade.

Situação 1: Uma lancha de competição, em fase de testes, tem a velocidade e o tempo anotados no seu deslocamento do continente a uma Ilha, avaliada em 5 tentativas, em que se desloca em velocidade constante em um percurso em linha reta. A tabela abaixo mostra os resultados:

Velocidade (km)	30	60	90	120	150
Tempo (minutos)	12	6	4	3	2,4

Situação 2: A tabela abaixo mostra o deslocamento de um avião em velocidade constante de 100 km e a distância percorrida:

Tempo (h)	Distância (Km)
1/4	25
1/2	50
1	100
1,5	150
2	200
2,5	250

Situação 3: Numa escola a professora de educação física realizou a medida da altura de todos os alunos de 1 a 6 anos obtendo a seguinte tabela relacionando a altura média dos alunos em relação a idade:

Idade (em anos)	1	2	3	4	5	6
Altura média (em cm)	73,2	84,1	91,1	99,1	105,9	112,20

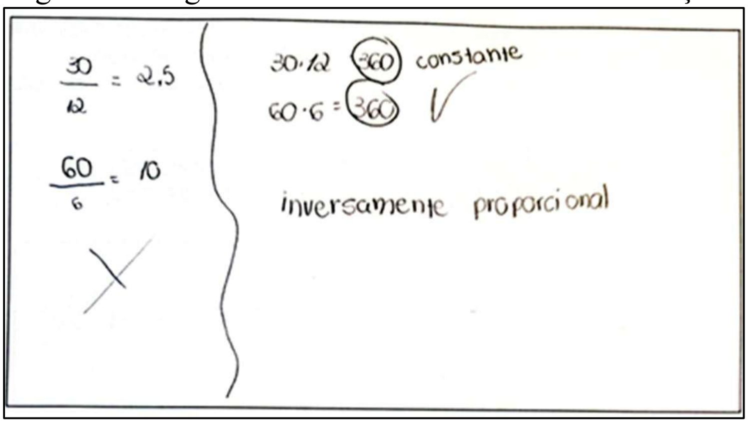
A tarefa 4 não é tão diferente da tarefa 3, a não ser pela contextualização que agora está sendo dada. Os participantes deverão seguir os procedimentos propostos, como mostramos a seguir no texto da Situação 4:

Situação 4: Uma empresa de água mineral lançou uma nova água gaseificada e com sabor de fruta com a seguinte tabela de preços:

Garrafa (ml)	Preço(R$)
100	5,00
350	8,00
500	10,00
1000	18,00
1500	25,00
2500	40,00

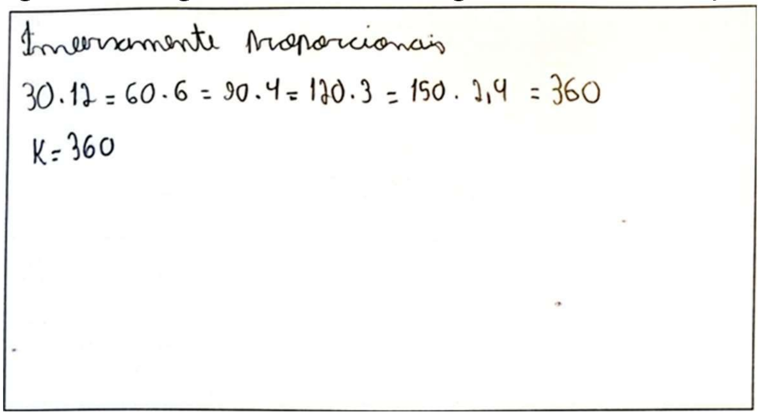
Vejamos os registros escrito dos estudantes Alfa e Ômega para a tarefa 4. Relacionaremos situação a situação, tecendo os comentários tanto da resolução de Alfa quanto de Ômega e as leituras de acordo com o MCS. Segue os registros e análises da Situação1:

Figura 17: Registro escrito de Alfa - Tarefa 4 - Situação1



Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Figura 18 - Registro escrito de Ômega - Tarefa 4 - Situação1



Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Na Figura 19, Alfa realiza suas enunciações semelhantemente as enunciações produzidas na Tarefa 3, o que nos leva a perceber que sua forma de operar permanece a mesma. Ela testa os casos e encontra a constante de proporcionalidade com facilidade. Ômega também permanece operando de igual modo ao operado na Tarefa 3. Ele afirma que as grandezas são inversamente proporcionais e apresenta os cálculos, em que o produto entre as grandezas é igual ao fator de proporcionalidade.

O diálogo abaixo traz os comentários sobre como os participantes pensaram a execução da Situação 1 da Tarefa 4:

***Pesquisadora**: Vamos começar? Vocês leram o texto da tarefa 4, certo? Foi tranquilo*

***Alfa** e **Ômega**: foi*

***Pesquisadora**: o que vocês poderiam dizer com as palavras de vocês?*

***Alfa**: eu acho que é a mesma coisa que a gente já tinha feito, sobre diretamente, inversamente e também das constantes.*

***Pesquisadora**: então vamos lá, vamos comentar sobre a situação1? (leitura da situação 1). E aí vem uma tabela que vocês já viram em outros momentos. Como é que vocês fizeram aqui a situação 1?*

***Alfa**: eu testando... como se fosse uma fórmula né, aquela formulazinha sabe? Se fosse diretamente seria a velocidade pelo tempo, a divisão deles teria que dar sempre o mesmo número. Aí depois eu testei a multiplicação.*

***Pesquisadora**: entendi. Quando você fez pela divisão você achou alguma coisa?*

***Alfa**: não deu iguais, não são proporcionais.*

***Pesquisadora**: não são proporcionais...*

***Alfa**: diretamente.*

***Pesquisadora**: diretamente proporcionais, beleza.*

***Alfa**: aí quando fui fazer pelo inversamente aí a gente percebe que é inversamente proporcional e a constante é 360.*

***Pesquisadora**: 360...ótimo. Você também, Ômega?*

***Ômega** acena positivamente com a cabeça*

***Pesquisadora**: e foi por esse mesmo caminho?*

***Ômega**: sim.*

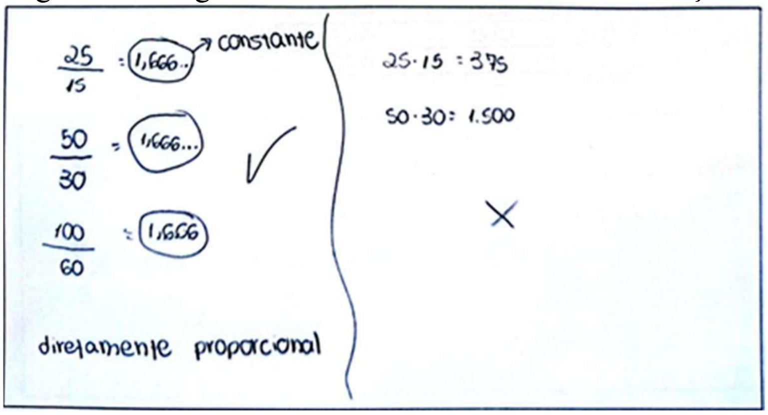
***Pesquisadora**: aí já ficou mais fácil fazer assim né, de quando a gente fez pela primeira vez.*

***Alfa** e **Ômega** acenam positivamente com a cabeça.*

Tanto Alfa quanto Ômega compartilham interlocutores apesar dos diferentes modos de operar. Podemos ver que os participantes produzem significados para a noção de grandezas inversamente proporcionais e nesta atividade apresentaram mais facilidade em executar a tarefa de maneira mais autônoma e independente da pesquisadora. O diálogo demonstra que os participantes percebem a semelhança entre as Tarefas 3 e 4 e operam de forma particular entre eles.

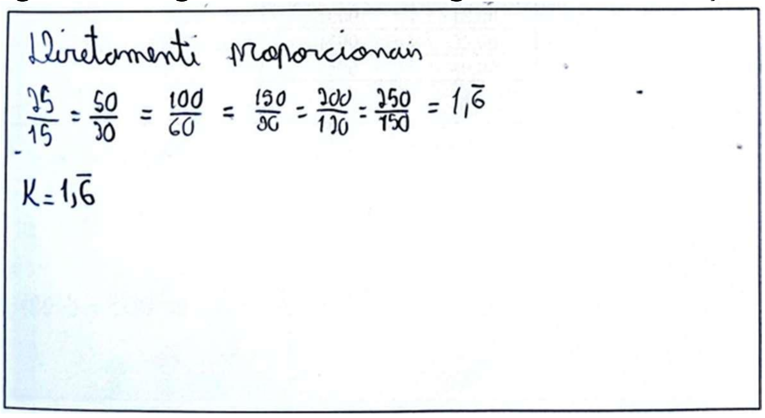
Seguimos com os registros escrito dos participantes e análise da Situação 2 da Tarefa 4.

Figura 19 - Registro escrito de Alfa - Tarefa 4 - Situação 2



Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Figura 20 - Registro escrito de Ômega - Tarefa 4 - Situação 2



Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Na Situação 2 da Tarefa 4, vimos mais uma vez o mesmo modo de operar dos participantes. Na Figura 21, Alfa testa os dados das 3 primeiras linhas da tabela e não sente necessidade de testar as demais linhas. Para o MCS, esta atitude de Alfa pode ser considerada uma estipulação local. Para ela, o fato de ter verificado as 3 primeiras relações entre as grandezas já é suficiente para afirmar que são grandezas diretamente proporcionais. O significado produzido por Alfa no interior desta atividade é corroborado quando ela cria uma segunda parte de sua solução, mostrando, ainda que sem necessidade, as grandezas não são inversamente proporcionais. Ela escreve 25.15=375 e 50.30=1500, o que também pode ser uma justificativa para a sua solução.

Ômega, na Figura 22, diferentemente de Alfa, relaciona todos os dados das colunas como uma série de frações equivalentes à constante de proporcionalidade. Ele demonstra domínio na escrita de um número decimal na forma de uma dízima periódica, mas como de costume, não apresenta a forma como faz seus cálculos. Vemos que tanto para Alfa quanto para Ômega, há um núcleo bem constituído e que a produção de significados para a noção de grandezas diretamente proporcionais foi bem sucedida. Ambos os participantes justificam suas enunciações de maneiras distintas, mas falam em uma mesma direção.

O diálogo a seguir apresenta os comentários tecidos na Situação 2 da Tarefa 4:

Pesquisadora*: aí na situação 2, qual foi o resultado que vocês conseguiram obter?*

Ômega*: diretamente proporcional. A gente dividiu a distância pelo tempo e a gente viu que a constante era 1,6.*

Pesquisadora*: ah... então tá, beleza. Foi aqui que vocês acharam um número decimal? 1,6666...*

Ômega*: foi...*

Pesquisadora*: você também achou a mesma coisa, Alfa?*

Alfa*: achei*

Pesquisadora*: Como é que vocês fizeram isso?*

Alfa*: é porque pra facilitar os cálculos, a gente colocou a distância em cima e o tempo embaixo.*

Pesquisadora*: a distância em cima e o tempo embaixo. Aí a distância 25 sobre 4...*

Alfa*: não, a gente fez 15, que é 15 minutos (que é o tempo em minuto e não em hora).*

Pesquisadora*: Ah, vocês colocaram o tempo em minuto? Ah sim. Eu estava me perguntando de onde saiu esse resultado, mas agora eu entendi. Tá. Aí na 3...*

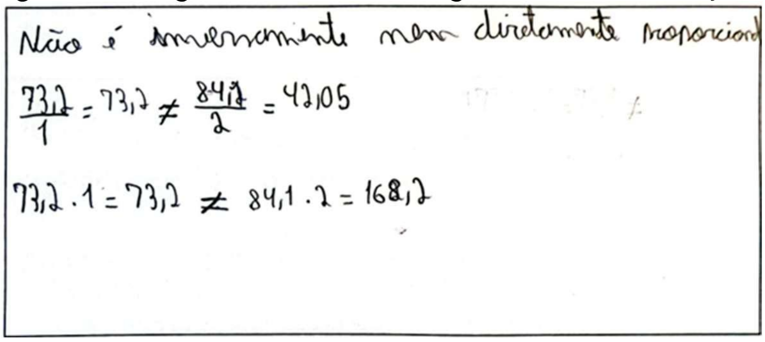
Mais uma vez eles demonstram facilidade em executar a tarefa. Escolhem a forma mais confortável de relacionar as grandezas e transformam a unidade de tempo de hora para minutos, em que podemos ver suas estipulações locais, já que nos registros escritos não sentiram a necessidade de justificá-las. Vemos que a produção de significados continua ocorrendo e como suas enunciações ganham uma estrutura mais elaborada se comparada ao início da Tarefa 3.

Na sequência, concatenaremos as situações 3 e 4 da Tarefa 4 na mesma análise, pois são igualmente casos de grandezas não proporcionais. Vejamos os registros de Alfa e Ômega respectivamente:

Figura 21 - Registro escrito de Alfa - Tarefa 4 - Situação 3

Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Figura 22 - Registro escrito de Ômega - Tarefa 4 - Situação 4

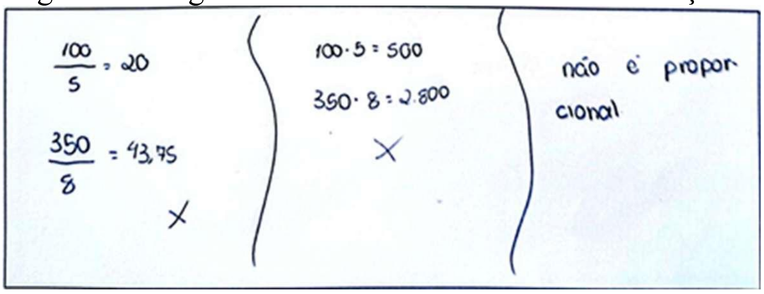


Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Na Figura 23, Alfa não sente a necessidade de justificar com os cálculos o fato da relação idade e altura não serem proporcionais. Enquanto realizavam as tarefas, Alfa e ômega mantinham um diálogo constante entre si e debatiam as soluções. Na Figura 24, Ômega permanece operando da mesma maneira, ou seja, ele informa que as grandezas não são inversamente proporcionais e apresenta os cálculos que demonstram que as variáveis não obedecem nem a relação diretamente e nem a inversamente proporcionais.

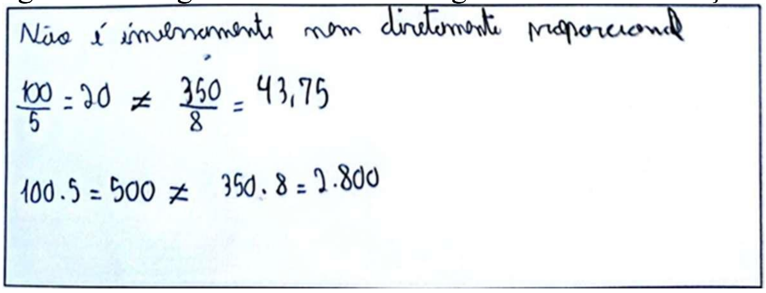
A Situação 4 traz uma tabela de preços de embalagens de água, um contexto bem típico, presente no dia a dia de qualquer cidadão. Vejamos os registros de Alfa e Ômega:

Figura 23- Registro escrito de Alfa - Tarefa 4 - Situação 4



Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Figura 24 - Registro escrito de Ômega - Tarefa 4 - Situação 4


Não é inversamente nem diretamente proporcional

$\frac{100}{5} = 20 \neq \frac{350}{8} = 43{,}75$

$100.5 = 500 \neq 350.8 = 2.800$

Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Concluindo as situações da Tarefa 4 com a última situação, vemos na Figura 25 e Figura 26 que os participantes, cada um na sua individualidade compartilham interlocutores ao produzirem significados. Alfa, na Figura 25, retoma a forma de operar que testa os casos para então concluir que a relação entre o volume e o preço das embalagens de água não são proporcionais. Ômega, de igual modo, mantém o mesmo modelo de apresentação da solução, informando a classificação das grandezas e justificando sua resposta com os cálculos.

Para uma melhor percepção das enunciações dos participantes, vejamos os comentários das situações 3 e 4 no diálogo a seguir:

Alfa*: na 3 a gente só colocou que não é proporcional.*

Pesquisadora*: certo...fizeram os testes de diretamente e inversamente proporcional e não era nenhuma das duas. Coerente isso, gente? O contexto idade e altura?*

Alfa *e* ***Ômega****: uhum*

Pesquisadora*: Beleza, aí a 4...*

Ômega*: também que não é inversamente nem diretamente proporcional, aí fiz os dois (se referindo ao teste dos casos).*

Pesquisadora*: ok, testaram e viram que não era nem um nem outro. Foi tranquilo então né?*

Alfa *e* ***Ômega****: foi.*

Mais uma vez vemos que os participantes produzem enunciações em uma mesma direção e permanecem compartilhando interlocutores. Alfa declara que tanto ela quanto Ômega colocaram apenas que não era proporcional na Situação 3, sendo essa uma percepção apenas dela, visto que, de acordo com os registros escritos, as enunciações estão diferentes, ainda que estejam falando em uma mesma direção. No diálogo também aparentam cansaço quando respondem apenas "uhum", não sentindo a necessidade de se justificarem para além do que escreveram em suas soluções.

A Tarefa 4 trouxe um último item, tratado por Tarefa 4.1 que, no item a, questiona a respeito da relação de proporcionalidade entre as grandezas idade e altura. No item b, traz uma proposta de observação como uma questão a respeito do caso das embalagens de água e seus preços, como segue:

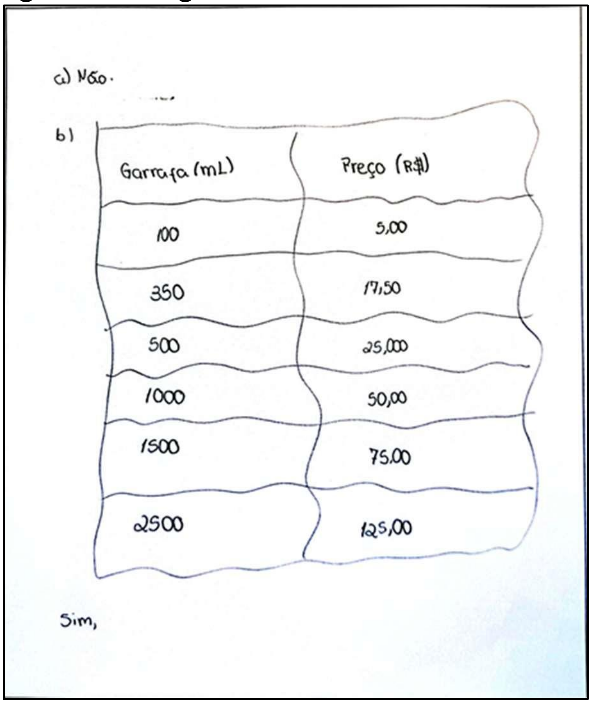
Tarefa 4.1: Outras questões para discussão

(a)Com base na situação 3, é possível afirmar que pode existir uma relação de proporcionalidade entre idade e altura?
(b)Com base na situação 4, suponha que você, sendo o diretor da empresa de água mineral, queira transformar a tabela de preços de acordo com a quantidade de água de modo que a relação preço/conteúdo da garrafa sejam proporcionais, como seria essa tabela? Você acha que a tabela apresentada na situação 4, tem algum objetivo comercial para ela ser como é?

As grandezas não proporcionais, são grandezas que podem aparentemente ter uma relação entre si, porém não obedecem a um padrão matemático estabelecido, como as grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Quando pensamos no ensino destas relações, ainda no Ensino Fundamental, as crianças trazem uma percepção sobre relações entre grandezas. Os estudantes do 6º. ano almejam serem grandes como os alunos do 9º ano, mesmo que muitos alunos do 9º ano tenham o mesmo tamanho dos alunos do 6º ano. Essa reflexão proposta na situação 3, ainda que aparentemente simplória pode ser um proêmio para gerar reflexões supostamente mais úteis como a proposta da Situação 4. No caso do preço das embalagens de água.

A Tarefa 4.1 propõe essa reflexão. Nosso intuito é educar matematicamente um cidadão do século XXI, e para isso, não podemos perder de vista que situações reais precisam permear a todo momento as atividades em sala de aula. Observemos agora os registros da Tarefa 4.1:

Figura 25 - Registro escrito de Alfa - Tarefa4.1


a) Não.

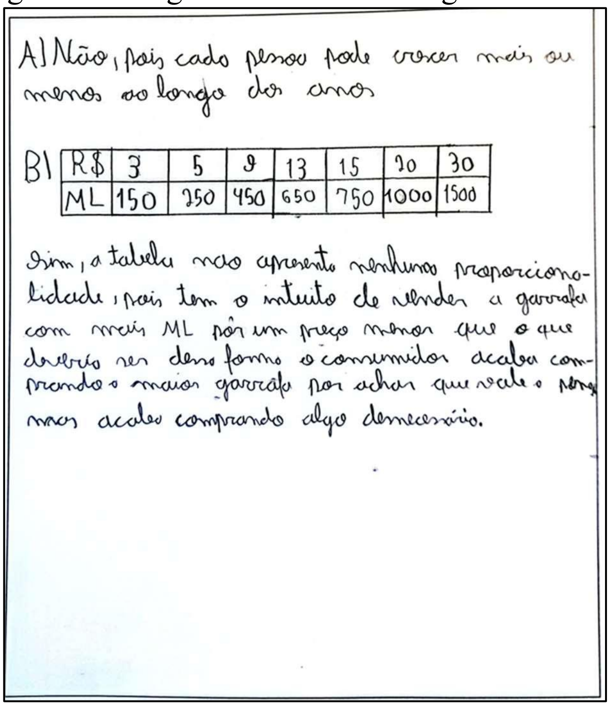
b)

Garrafa (mL)	Preço (R$)
100	5,00
350	17,50
500	25,00
1000	50,00
1500	75,00
2500	125,00

Sim,

Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Figura 26 - Registro escrito de Ômega - Tarefa 4.1


A) Não, pois cada pessoa pode crescer mais ou menos ao longo dos anos

B)

R$	3	5	9	13	15	20	30
ML	150	250	450	650	750	1000	1500

Sim, a tabela não apresenta nenhuma proporcionalidade, pois tem o intuito de vender a garrafa com mais ML por um preço menor que o que deveria ser dessa forma o consumidor acaba comprando a maior garrafa por achar que vale a pena mas acaba comprando algo desnecessário.

Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

A Figura 27 traz o registro de Alfa, que é bem sucinta, respondendo de forma direta "não" e "sim". Ela não sente a necessidade de justificar suas respostas, o que pode ser, de acordo com o MCS, uma crença sobre a relação entre as grandezas idade e altura de uma pessoa, tanto quanto do objetivo comercial para os preços das embalagens de água. Na Figura 28, Ômega realiza suas enunciações de forma detalhada, deixando claro a produção de seus significados. Ele cria uma tabela nos moldes das tabelas apresentadas nas tarefas e elabora um texto muito rico sobre os preços das embalagens de água. Apesar do foco não englobar a educação financeira, Ômega elabora de forma consciente seus argumentos.

Para auxiliar nossa análise sobre as enunciações dos participantes, vejamos o diálogo sobre os comentários das situações acima:

Pesquisadora*: o que vocês responderam?*

Alfa*: eu coloquei que não, porque não tem assim uma proporcionalidade, vamos supor um padrão.*

Ômega*: eu coloquei que não, pois cada pessoa pode crescer mais ou menos ao logo dos anos.*

Pesquisadora: *Beleza, muito bem, ótimo.*

Pesquisadora*: Na letra b, o que vocês colocaram?*

Alfa*: eu coloquei na tabela, a cada 100ml o preço de 5 reais. Aí 350ml 17,50, 500ml 25,00...fui fazendo assim.*

Pesquisadora: *e você, Ômega?*

Ômega*: eu botei que a cada 150ml são 3,00, aí 250ml são 5,00, 450ml 9,00, e fui colocando assim.*

Pesquisadora*: E essa pergunta que ele faz "Você acha que a tabela apresentada na situação 4, tem algum objetivo comercial para ela ser como é?" Vocês chegaram a responder essa questão?*

Ômega*: eu vou ler a minha e vou explicar porque as vezes não dá pra entender. Eu coloquei: sim, a tabela não apresenta nenhuma proporcionalidade, pois tem o intuito de vender a garrafa com mais ml por um preço menor que o que deveria ser. Dessa forma, o consumidor acaba comprando a maior garrafa por achar que vale a pena, mas acaba comprando algo desnecessário. É como se fosse assim, ele foi com a ideia de comprar só 100ml de água. Só que ele foi lá e viu que a garrafa de 500 que era pra tá saindo por 50,00, tá saindo a 30,00, aí acaba comprando a de 30,00 reais e acaba gastando 25,00 reais a mais do que ele normalmente gastaria.*

Pesquisadora*: Legal esse pensamento. Vocês já conheciam essa artimanha do mercado?*

Ômega*: Mais ou menos*

Pesquisadora*: Em alguma coisa que vocês consomem, vocês conseguem perceber isso acontecendo?*

***Alfa**: eu acho que mais em produtos de limpeza assim que aparece.*

***Pesquisadora**: ah sim, aí acaba comprando uma vasilha maior, porque o preço proporcionalmente fica menor quando você compra mais.*

***Alfa**: é*

***Pesquisadora**: Então gente, ótimo, esse foi o nosso trabalho de casa. Vamos para o que temos hoje que é a última tarefa. Vai ser a mesma coisa que fizemos até agora, a mesma dinâmica. Eu vou pedir pra vocês lerem, aí vou pedir pra vocês fazerem só essa primeira aqui. Aí a gente comenta e depois a gente continua. Pode ser? Então vou dar um tempinho, vocês fiquem a vontade e quando acabarem é só falar. Se quiserem fazer perguntas, eu estou aqui.*

Podemos ver que na discussão, Alfa consegue se expressar e justificar sua resposta para o item a da Tarefa 4.1. Alfa e Ômega continuam de acordo com suas ideias, a todo momento compartilhando interlocutores entre si. Um fato interessante é que mesmo sabendo o conceito matemático de proporcionalidade, na hora de se explicar, eles não utilizam as expressões "diretamente ou inversamente proporcional". No item b, Alfa permanece com a mesma postura, respondendo apenas que sim. Ômega por sua vez, prefere ler sua resposta, se sentindo mais a vontade do que enunciar seus pensamentos livremente.

A pesquisadora, antes de fechar a tarefa, abre a discussão perguntando se eles já conheciam essa estratégia do mercado e apenas Alfa se manifesta, exemplificando com produtos de limpeza. Ômega permanece sem se manifestar e assim a aplicação da Tarefa 4 é encerrada.

6.5 ANÁLISE DA TAREFA 5

A tarefa 5 apresenta um texto que discute a interdependência entre duas variáveis. Considerando que os estudantes adquiriram certa experiência em analisar as relações entre as grandezas, vimos como oportuno falar sobre uma regra, também conhecida como fórmula ou lei de formação, que traduzisse a relação entre variáveis.

O item (a) da Tarefa 5 foi solicitado aos estudantes que se possível, encontrem a fórmula que expressa a interdependência entre as variáveis. No item (b), o texto aborda as noções de variável dependente e variável independente e pede que os participantes da pesquisa identifiquem cada uma delas. No total, a tarefa apresenta 12 casos a serem analisados, sendo que dos itens 1 a 8, são apresentadas apenas tabelas de 2 linhas e 7 colunas, enquanto os itens de 9 a 12 são apresentadas situações contextualizadas.

Importante registrar que os itens de 1 a 5 foram feitos e discutidos no quarto e último encontro presencial entre os participantes da pesquisa e a pesquisadora. Os itens de 7 a 12 foram feitos pelos participantes em casa, individualmente, sem a possibilidade de um novo encontro presencial para discussão das respostas. Segue o texto da Tarefa 5:

Tarefa 5 – Interdependência especial entre variáveis

A interdependência entre duas variáveis pode ser, às vezes, apresentada por uma **fórmula** que expressa uma **regra** que associa as duas variáveis. Nas tarefas abaixo, já estudadas anteriormente:

(a) Encontre, se possível, a fórmula que expressa a interdependência entre as variáveis;

(b) Identifique, se possível, a regra que associa as variáveis sabendo que na relação entre as variáveis uma delas é **independente** e a outra é **dependente**, isto é, enquanto para a variável independente pode ser atribuídos valores numéricos arbitrários (quaisquer), a outra variável dependerá desses valores para se encontrar o seu valor numérico. Diga qual é a variável independente e qual é a dependente em cada caso.

(1)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	6	8	10	12

(2)

n	1	3	4	5	6	7
P	1	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7

(3)

t	1	2	3	4	5	6
Q	1	4	9	16	25	36

(4)

u	3	6	9	12	18	30
v	7	14	21	28	42	70

(5)

h	2	3	5	10	15	20
T	75	50	30	15	10	7,5

(6)

x	1	2	3	4	5	6
Z	1	8	27	64	125	216

(7)

y	5	10	20	40	80	160
T	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64

(8)

x	1	2	3	4	5	6
V	2	3	4	5	6	7

(9) Uma lancha de competição, em fase de testes, tem a velocidade e o tempo anotados no seu deslocamento do continente a uma Ilha, avaliada em 5 tentativas, em que se desloca em velocidade constante em um percurso em linha reta. A tabela abaixo mostra os resultados:

Velocidade (km)	30	60	90	120	150
Tempo (minutos)	12	6	4	3	2,4

(10) A tabela abaixo mostra o deslocamento de um avião em velocidade constante de 100 km e a distância percorrida:

Tempo (h)	Distância (Km)
1/4	25
1/2	50
1	100
1,5	150
2	200
2,5	250

(11) Numa escola a professora de educação física realizou a medida da altura de todos os alunos de 1 a 6 anos obtendo a seguinte tabela relacionando a altura média dos alunos em relação a idade:

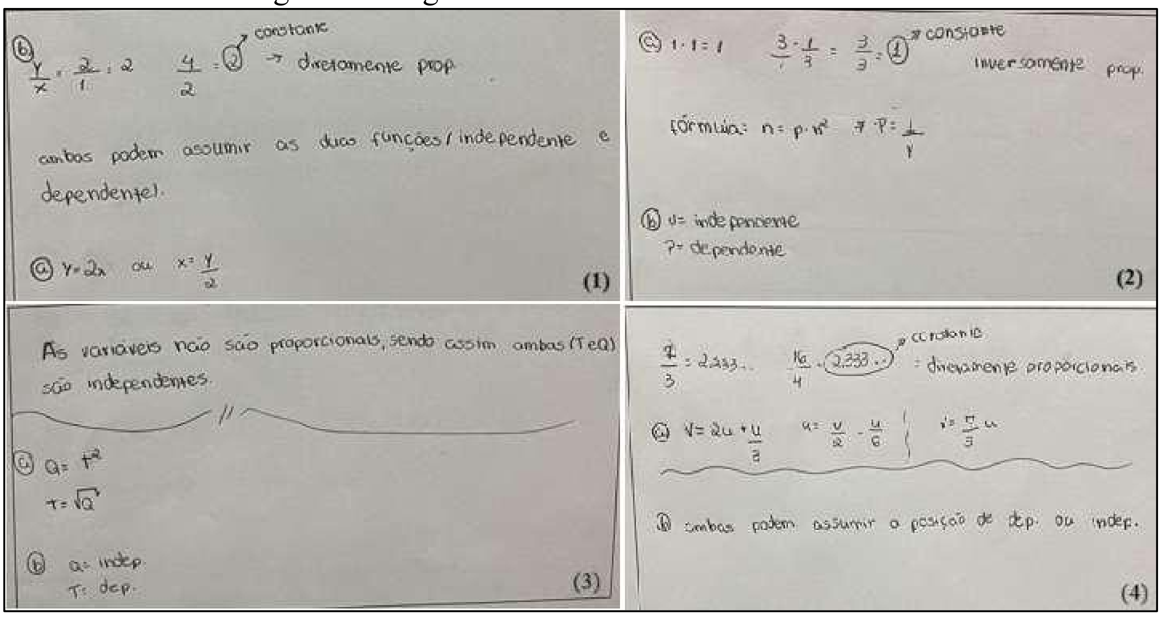
Idade (em anos)	1	2	3	4	5	6
Altura média (em cm)	73,2	84,1	91,1	99,1	105,9	112,20

(12) Uma empresa de água mineral lançou uma nova água gaseificada e com sabor de fruta com a seguinte tabela de preços:

Garrafa (ml)	Preço(R$)
100	5,00
350	8,00
500	10,00
1000	18,00
1500	25,00
2500	40,00

Para esta tarefa, optamos por concatenar as análises dos itens de 1 a 8, pois entendemos que neste momento foi possível fazer uma leitura mais amplas das enunciações dos participantes. Vejamos os registros escritos dos participantes referentes aos itens da Tarefa 5:

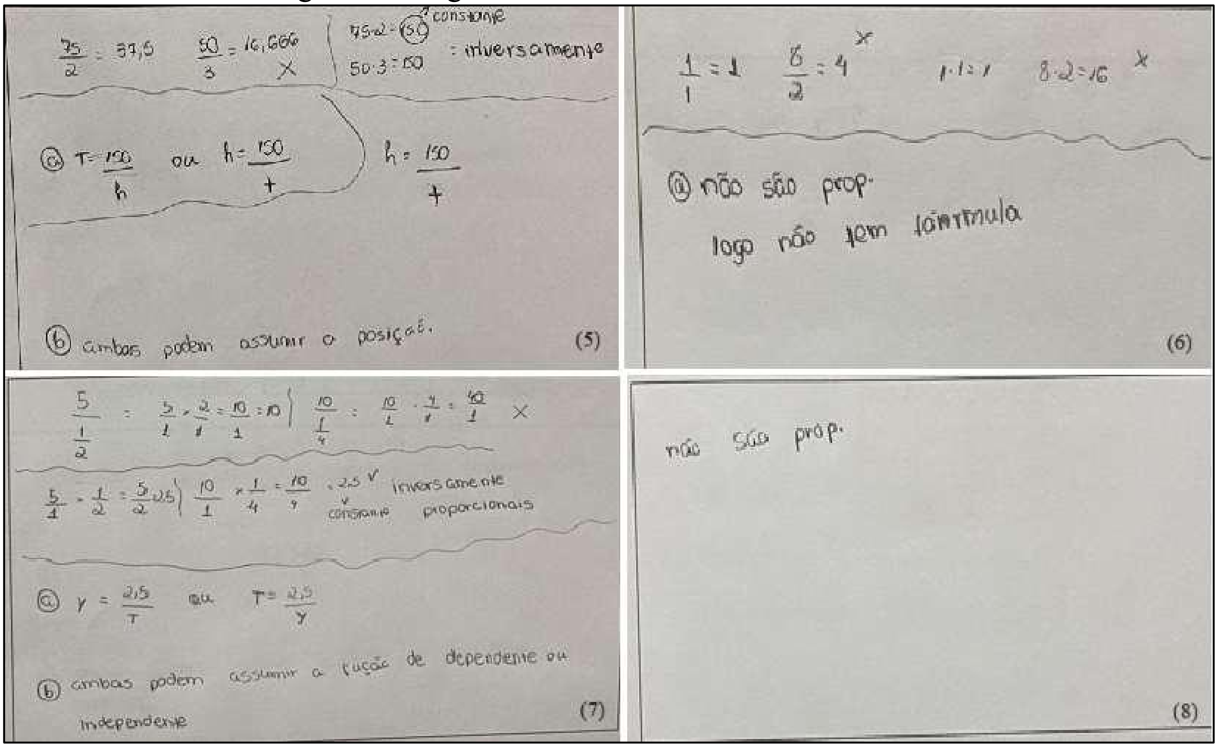
Figura 27: Registro escrito de Alfa - Tarefa 5 - 1 a 4



Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Na Figura 29 temos os registros escritos de Alfa para os itens de (1) a (4) da tarefa 5. No item (1), conforme indicado na figura, Alfa encontra a constante de proporcionalidade e a fórmula que expressa a regra entre as variáveis. Ela também identifica que ambas as variáveis podem assumir o papel de dependente ou independente, e legitima esta afirmação quando escreve $y = 2x$ e $x = \frac{y}{2}$. No item (4), Alfa opera de forma semelhante ao item (1), mas escreve apenas a regra em função de u, além de indicar que as variáveis são diretamente proporcionais. No item (2), parece haver uma mudança da forma de operar quando ela define P como variável dependente e n como a variável independente, embora tenha escrito uma fórmula em função de n e tenha tentado escrever uma fórmula em função de P. No item (3), Alfa afirma que pelo fato das variáveis não serem proporcionais, ambas as variáveis são independentes. Em seguida, ela escreve uma regra em função de cada uma das variáveis, e registra que a variável T é dependente e a variável a é independente. Neste último item analisado, não ficou claro para nós se a constituição de objetos ocorreu, já que a lógica não nos pareceu coerente.

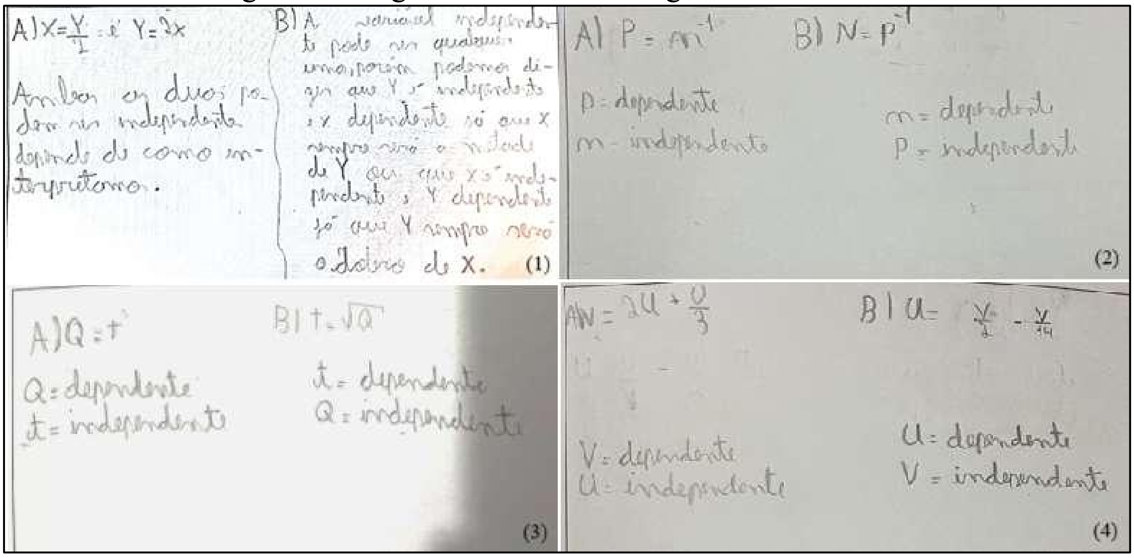
Figura 28: Registro escrito de Alfa - Tarefa 5 - 5 a 8



Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

A Figura 30 apresenta as enunciações de Alfa para os itens de (5) a (8) da Tarefa 5. Os itens identificados por (5) e (7) seguem o mesmo padrão, em que a participante verifica o comportamento das grandezas, identifica o valor da constante de proporcionalidade, escreve a regra em função de cada uma das variáveis e conclui enunciando que ambas as variáveis podem assumir o papel de dependente ou independente. No item (6), conclui que não há uma regra para as variáveis pelo fato de não haver proporcionalidade entre elas. Perceba que ela contradiz o que foi registrado no item (3) da Figura 29, pois encontrou uma fórmula mesmo não sendo um caso de proporcionalidade. Isso nos remete a um caso de limite epistemológico, pois a partir destas afirmações nos itens (3) e (6), nos parece não ter havido uma produção de significados para a noção de interdependência entre as variáveis. No item (8) a participante apenas enunciou que as variáveis não eram proporcionais.

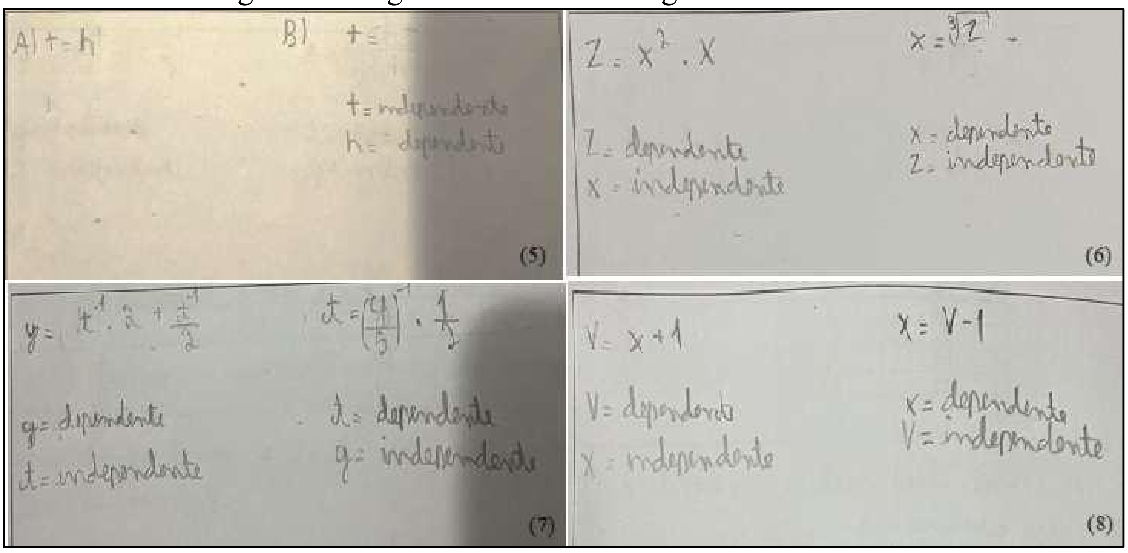
Figura 29: Registro escrito de Ômega - Tarefa 5 - 1 a 4



Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

A Figura 31 apresenta os registros escritos de Ômega para os itens de (1) a (4) da Tarefa 5. No item (1), Ômega apresenta uma justificativa para sua produção de significado quanto a interdependência entre as variáveis: "A variável independente pode ser qualquer uma, porém podemos dizer que y é independente e x dependente só que x sempre será a metade de y ou que x é independente e y dependente só que y sempre será o dobro de x". Nos itens de (2) a (4), Ômega opera sob um mesmo padrão de respostas indicando uma regra em função de cada uma das variáveis e enunciando para cada caso a variável dependente e a independente.

Figura 30: Registro escrito de Ômega - Tarefa 5 - 5 a 8

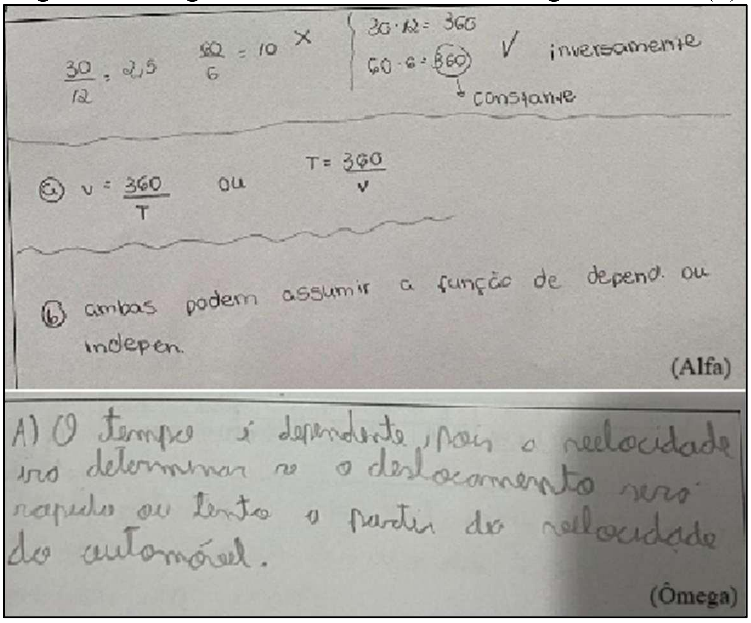


Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

A Figura 32 são os registros escritos de Ômega para os itens de (5) a (8) da tarefa 5. Como pode ser observado, há um mesmo padrão nas enunciações dos itens, com exceção do item (5), que acreditamos ter sido apenas uma distração do participante. Isso nos leva a crer que Ômega produziu significado para a noção de interdependência entre as variáveis, pois há uma lógica estabelecida em sua forma de operar.

A partir de agora vamos detalhar a análise dos itens de 9 a 12, que se diferem dos itens anteriores por trazerem um contexto junto a tabela de variáveis. Vamos aglomerar as respostas dos dois participantes em cada um dos itens.

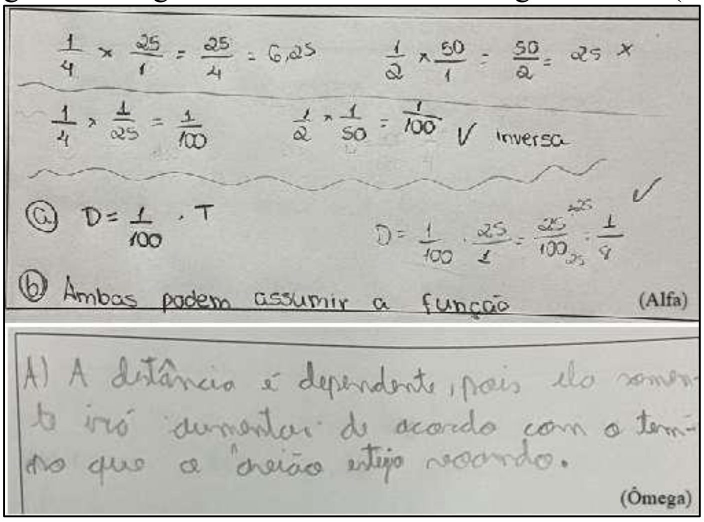
Figura 31: Registro escrito de Alfa e Ômega-Tarefa 5 (9)



Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

A Figura 33 apresenta os registros de Alfa e Ômega para o item 9 da Tarefa 5. Alfa mantem o modo de operar dos itens anteriores, ou seja, classifica as variáveis em inversamente proporcionais, encontra a constante, escreve uma regra para cada uma das variáveis e conclui enunciando que ambas as variáveis podem ser dependentes ou independentes. Ômega, por sua vez, elabora uma reflexão a partir do contexto apresentado, e abandona a relativização da interdependência das variáveis. Vemos que neste momento, Ômega muda sua forma de operar, inclusive não respondendo mais ao que foi solicitado no enunciado, porém vemos em sua enunciação que houve produção de significado.

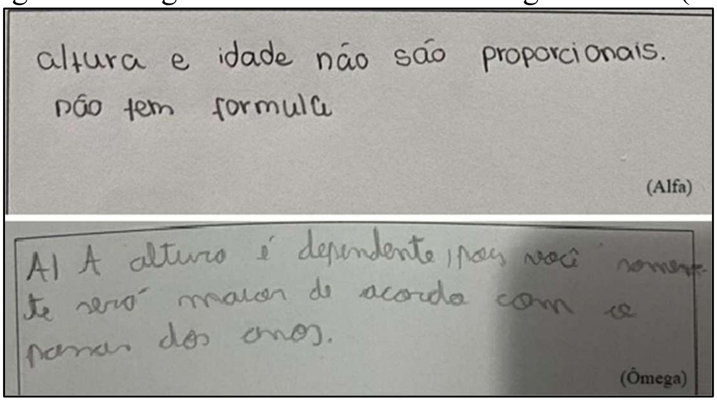
Figura 32: Registro escrito de Alfa e Ômega-Tarefa 5 (10)



Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Na figura 34, nos registros escritos do item 10 da Tarefa 5, vemos que ambos os participantes mantêm a sua forma de operar semelhante ao item 9. Um fato a ser considerando, é que a partir do item 7, os participantes não fizeram mais as tarefas juntos, como estavam sendo feitas presencialmente nas dependências da universidade.

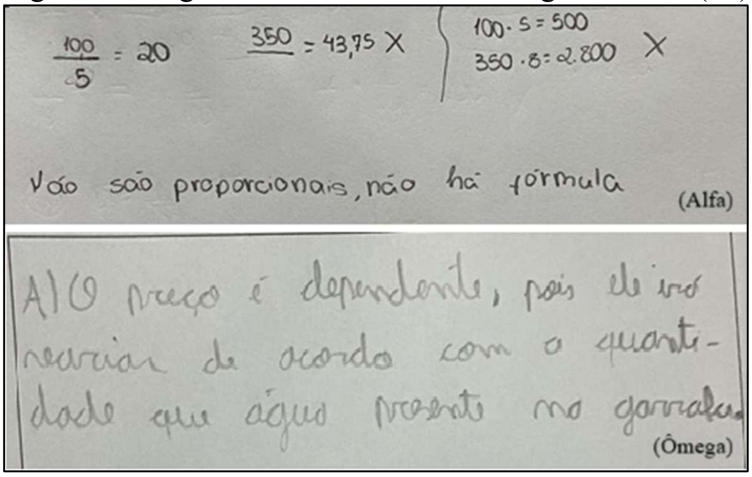
Figura 33: Registro escrito de Alfa e Ômega-Tarefa 5 (11)



Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

Na figura 35, os registros escritos do item 10 da Tarefa 5 apresentam visões bem diferentes entre os participantes. Esse foi o primeiro momento em que Alfa e Ômega não compartilham interlocutores, pois Ômega afirma que a altura de uma pessoa depende de sua idade e Alfa afirma que altura e idade não são grandezas proporcionais. Aqui, as estipulações locais de Alfa, que a fazem afirmar que não há uma fórmula para a relação altura e idade, são coerentes. Neste momento retomamos a análise para os itens (6) e (8) de Alfa e nos questionamos se o que foi enunciado nestes itens, não estaria baseado nesta contextualização. É possível observar a importância de uma história contada, ainda que fictícia, no processo de produção de significados de algumas noções. No que diz respeito as enunciações de Ômega, apesar de não ter encontrado uma fórmula para as variáveis, afirmou que a variável altura é dependente da variável idade. Vale lembra que a situação 3 da tarefa 4, trouxe o mesmo contexto, e lá, Ômega concluiu que estas mesmas grandezas não eram proporcionais, realizando cálculos aritméticos, o que nos faz repensar sobre suas constituições de objetos, lógica e forma de operar.

Figura 34: Registro escrito de Alfa e Ômega-Tarefa 5 (12)



Fonte: Arquivo da aplicação da tarefa da autora

A Figura 36, que traz os registros do item 12 da Tarefa 5, segue a mesma linha das enunciações do item 11. Alfa faz os testes dos casos e conclui que as grandezas não são proporcionais. Não fica claro se ela afirma que não há uma fórmula para esta relação, pelo fato do contexto preço x volume de líquido ser conhecido ou por algum tipo de cálculo. Importante lembrar que nesta mesma tarefa, foram apresentadas grandezas que não eram proporcionais, mas que existia uma relação de interdependência entre elas. Para a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, percebemos que em várias situações os participantes produziram significados, no entanto a noção de interdependência entre grandezas que não se relacionam de forma proporcional, a produção de significados não ficou tão evidente. Ômega operou de maneira análoga ao item 11, afirmando que a grandeza preço é dependente do volume de líquido. Contudo não considerou em sua análise as noções de proporcionalidade ou até mesmo a regra de interdependência entre as grandezas.

Concluindo, a Tarefa 5 nos permitiu observar a produção de significados dos estudantes para a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Ambos os participantes demonstraram em diferentes momentos a capacidade de observar padrões, construir regras/fórmulas e classificar as grandezas em diretamente e inversamente proporcionais e quando não são nem uma das duas. De igual modo apresentaram uma leitura crítica quanto a variáveis dependentes e independentes nos dados e contextos apresentados.

Os resultados obtidos atenderam as nossas expectativas, visto que percebemos certa evolução no desenvolvimento do pensamento proporcional, objeto crucial desta pesquisa. O processo de constituição dos objetos ainda precisa ser amadurecido pelos estudantes, o que é um percurso natural e esperado na aprendizagem. As contradições presentes nas respostas de algumas tarefas sinalizam pontos de atenção para aplicações futuras e constituem oportunidades para discussões mais prolongada sobre o tema.

A nosso ver, as tarefas cumpriram o papel para o qual foram elaboradas, possibilitando que os estudantes fossem além da aplicação mecânica de procedimentos e produzissem significados para a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Essas evidências sustentam a relevância da proposta de pesquisa e nos dão indícios de que o trabalho contribui para um ensino com sentido e significados e oferece subsídios para a prática docente.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo a produção de um conjunto de tarefas destinadas a compor uma proposta de ensino fundamentada em modos de pensar, com a finalidade de desenvolver o pensamento proporcional ao longo do Ensino Fundamental. Coube a nós trabalhar especificamente com a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, tomando como base o Modelo dos Campos Semânticos, adotado como referencial teórico-epistemológico e metodológico.

Como mencionado anteriormente, nossa investigação integra uma sequência de trabalhos, a saber: (i) *Pensamento proporcional na matemática escolar: a noção de razão*, desenvolvido pelo Prof. Me. Kaio Cruz e Silva; (ii) *Pensamento proporcional na matemática escolar: a noção de taxa*, desenvolvida pela Profa. Me. Taynara Schincariol Alves; (iii) *Pensamento proporcional na matemática escolar: a noção de razão*, desenvolvida pela Profa. Maria Eduarda Alvim Pedrosa; e (iv) *Pensamento proporcional na matemática escolar: a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais*, desenvolvido pela Profa. Esp. Sinai Elizabeth Ferreira dos Santos.

Em conjunto, esses trabalhos buscam ampliar a produção de significados dos estudantes, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento proporcional. Dessa forma, as pesquisas se complementam e se fortalecem mutuamente.

Uma das principais propostas deste estudo é um rompimento com o atual sistema de ensino, modelo em que o professor é detentor do conhecimento e se espera que a transmissão desse saber seja por meio de explicações. Ao aluno, cabe agir de forma passiva, assimilando o que lhe é proposto, com poucas oportunidades de se tornar protagonista do próprio processo de produção do conhecimento.

Em contrapartida, nossa abordagem propõem a elaboração de tarefas que atuam como "instrumentos mediadores", no sentido proposto por Vygotsky. Na tentativa de resolver essas tarefas, bem como nas discussões coletivas que emergem em sala, espera-se que reflexões e ações possibilitem a internalização dos modos de produção de significados relacionados à noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

O conjunto de tarefas criado a partir desta perspectiva, buscou diferenciar-se dos exercícios apresentados em livros e materiais didáticos usuais, fundamentando-se em uma proposta metodológica que prevê a interação e a intervenção do professor quando solicitado. A expectativa era que, a partir das tarefas, os alunos conseguissem dizer algo a respeito e, assim, produzissem significados para a noção de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Após a aplicação da pesquisa, constatamos que algumas tarefas não exerceram bem esse papel. A Tarefa 3 foi a que mais nos surpreendeu, pois os estudantes pareciam ter potencial para falar sobre a tarefa, no entanto não o fizeram. A Tarefa 2 também nos levou a refletir sobre sua estrutura, já que os alunos apenas responderam que não tinham nenhuma dúvida a respeito dela, mas também não acrescentaram nada além do que foi perguntado.

Uma última suposição, foi em relação a ordem de aplicação das tarefas, pois entendemos que, se for alterada, é possível novos modos de produção de significados venham a emergir.

Nas análises da aplicação das tarefas, observamos que, durante os encontros, a relação entre a professora e os participantes da pesquisa foi se estabelecendo de forma gradual, mesmo já se conhecendo previamente. Acreditamos que, nesse primeiro momento, o fator confiança também tenha sido determinante para a forma como os estudantes reagiram às tarefas.

Notamos, ainda, que, embora o modelo de tarefa apresentado fosse diferente, os participantes demonstraram em alguns momentos certo estranhamento, o que também pode ter contribuído para que necessitassem da intervenção da professora a fim de dar andamento à execução das tarefas.

Outro fator relevante é o ambiente pensado para o modelo de ensino proposto, ou seja, a sala de aula. Inicialmente pretendíamos aplicar a pesquisa a um pequeno grupo de alunos, no entanto, por motivos operacionais, optamos realiza-la com dois participantes que se voluntariaram.

Para concluir, ao observarmos e analisarmos as enunciações dos participantes da pesquisa, constatamos que, em linhas gerais, os modos de produção de significados foram satisfatórios, não apenas pelos resultados obtidos, mas principalmente por revelarem novas variáveis implicadas no processo de construção do conhecimento. As enunciações, mesmo quando incompletas ou contraditórias, evidenciam o processo de constituição de objetos segundo uma lógica evidenciados pelo modo de operar dos sujeitos. Ainda que limites ou obstáculos epistemológicos surjam, a construção do conhecimento não é linear e pode perpassar por todas essas etapas.

O papel do professor mediador também se mostrou fundamental no processo de aprendizagem, evidenciando a necessidade de uma atuação intencional, fomentando reflexões e contribuindo para a produção de significados. A mediação, nesse sentido, configura-se como um instrumento essencial para a superação dos limites e obstáculos epistemológicos que surgem no processo de construção do conhecimento.

O produto educacional resultou da elaboração do conjunto de tarefas, que será organizado em forma de fichas de trabalho. O texto das tarefas encontra-se anexado a este documento, no apêndice 2, e comporá um bloco de tarefas voltadas ao desenvolvimento do pensamento proporcional.

Assim, consideramos que esta pesquisa pode oferecer contribuições relevantes para a comunidade escolar, sobretudo no que se refere à valorização dos diferentes modos de produção de significados dos estudantes. Ao fomentar práticas pedagógicas que promovam a participação ativa dos discentes, entendemos que o MCS se mostra um referencial consistente na leitura das enunciações e possibilita ao professor compreender e intervir no processo de aprendizagem dos estudantes. Nesse sentido, acreditamos que este trabalho coopera para o fortalecimento de uma educação que valoriza a pluralidade e que se orienta por princípios democráticos.

REFERÊNCIAS

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. Investigação qualitativa em Educação Matemática: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 2013.

DAVIDOV, Vasily V. Problems of developmental instruction: a theorical and experimental psychological study. In: International Perspectives in non-classical psychology. New York: Nova Science Publishers, Inc, 2008.

FERNANDES, Letícia Freitas. Pensamento proporcional nos anos iniciais do ensino fundamental. 2023. Exame de Qualificação (Mestrado profissional em Educação Matemática). Departamento de Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora. 2023.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. Matemática e Realidade: 9º ano. 10. ed. São Paulo: Saraiva Educação S.A., 2022.

LEONTIEV, Alexei N. Actividad, conciencia y personalidad. Mexico: Cartago, 1984.

LAMON, Susan J. Teaching fractions and ratios for understanding: Essential Knowledge and Instruction Strategies for teachers. New York. Routledge Taylor & Francis Group, 2012.

LINS, Romulo C. Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. Revista em Educação Matemática. SBEM - São Paulo, Campinas, SP, Ano 1, n 1, p.75-91, 1993.

LINS, Romulo C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 75-94. (Seminários DEBATES Unesp).

LINS, Romulo C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, Claudia Laus et al (org.). Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p.11-30.

POST, Thomas R; BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P. (Org.). As idéias da álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. p. 89-103.

PAULA, Marília Rios de. Razão como taxa: uma proposta de ensino para a sala de aula de matemática. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Departamento de Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora. 2012.

SILVA, Amarildo Melchiades da. Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática. 2003. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

SILVA, Amarildo M.; BASTOS, Ronaldo R.; OLIVEIRA, Rosana. Educação Matemática Escolar no século XXI: a formação de estudantes e professores da educação básica. In: Programa de Pós-graduação em Educação Matemática: perspectiva de pesquisa e implicações no ensino e na aprendizagem de matemática. Silva, A.M.; Rodrigues, C.K; Cruz, W.J. (orgs.). Juiz de Fora: Editora da UFJF, 2024. p. 92-109.

SILVA, Amarildo M. FRANT, Janete B. CHAVES, Rodolfo. Uma Pesquisa Translacional em Educação Matemática em Perspectiva. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2022.

SILVA, Amarildo M. O Modelo dos Campos Semânticos: Um modelo epistemológico em Educação Matemática. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2022.

SILVA, Kaio Cruz. Pensamento proporcional na matemática escolar: a noção de razão. 2023. Exame de Qualificação (Mestrado profissional em Educação Matemática). Departamento de Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora. 2023.

SILVA, Lilian Aragão. Uma Análise do Observatório da Educação Matemática da Bahia à luz da Teoria Social da Aprendizagem e da Teoria dos Códigos. Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências). - Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana. 2017.

SCHLIEMANN, Analúcia D. et al. Estudos em Psicologia da Educação Matemática. 2 ed. Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1997.

VAN DE WALLE, John A. Matemática no Ensino Fundamental: Formação de Professores e Aplicações em Sala de Aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VYGOTSKY, Levy. S. A formação social da mente. 5.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

VYGOTSKY, Levy. S. A construção do pensamento e da linguagem. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

APÊNDICES

Apêndice 1: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

<u>Termo de Consentimento Livre e Esclarecimento</u>

Pais e/ou responsáveis,

A proposta desta pesquisa é investigar a produção de significados dos estudantes do sexto, sétimo, oitavo e nono ano do ensino fundamental através de um conjunto de tarefas sobre Pensamento Proporcional e situações relacionadas a ele. A participação dos alunos participantes dessa pesquisa é voluntária e as ações pedagógicas serão desenvolvidas através de encontros presenciais. Durante a aplicação das tarefas da pesquisa, os encontros serão gravados, a fim de que seus dados sejam processados posteriormente pelos pesquisadores e devidamente arquivados, respeitando o sigilo dos participantes, que também utilizarão nomes fictícios. Os participantes poderão pedir o esclarecimento que desejarem e/ou deixar a pesquisa a qualquer momento, retirando seu consentimento sem quaisquer consequências, penalizações ou prejuízos. Ao publicar os resultados da pesquisa, é garantido o sigilo. Quaisquer dúvidas em relação à pesquisa poderão ser sanadas pelo telefone (21)979240752 ou e-mail sinaiesantos@gmail.com.

Sinai Elizabeth Ferreira dos Santos

(   ) Autorizo a participação do estudante ___________________________________

(   ) Não autorizo a participação do estudante ________________________________

Assinatura do responsável: ___________________________________

Apêndice 2: Conjunto de tarefas

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA ufjf

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática/PPGEM

Tarefa 1 – Interdependência entre variáveis

Texto para discussão

Em matemática, para o estudo de diferentes problemas, utilizamos a ideia de **variável**. Uma **variável** é um termo que numa relação pode assumir diferentes valores. Ela é representada por uma letra do alfabeto a qual pode ser atribuído diferentes valores numéricos. Por exemplo, suponha que você queira analisar a distância percorrida pelo carro em que você está viajando durante o momento que você partiu (o tempo zero) até duas horas depois. Então a variável em questão seria o tempo, denotado pela letra t, em horas, apresentado na tabela abaixo:

t (em horas)	0	1/4	1/2	1	1,5	2,0

Uma outra variável envolvida é a distância, que pode ser calculada e representada pela letra d, em quilômetros, expressa na tabela:

d (em km)	0	25	50	100	150	200

Mas estamos muito interessados em analisar a relação de *interdependência* que pode existir entre duas variáveis, isto é, quando uma varia a outra também varia segundo um padrão que se repete relacionando-as, como mostra a tabela abaixo com relação ao exemplo anterior:

t	0	1/4	1/2	1	1,5	2,0
d	0	25	50	100	150	200

(a) Você conseguiria dizer o que esta tabela está informando a partir da relação entre as variáveis tempo e distância?

(b) Você consegue exibir um exemplo de duas variáveis que estão em relação de interdependência?

Tarefa 2

Existem interdependências entre variáveis em matemática que são de grande interesse em ser identificadas, veremos dois casos a seguir.

Consideremos duas variáveis x e y de modo que as variáveis são expressas por valores atribuídos a elas conforme mostra a tabela:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

Pode ocorrer duas situações especiais de interdependência entre as duas variáveis que analisaremos como casos:

Primeiro caso: Com relação aos valores atribuídos as variáveis y e x pode ocorrer uma de duas situações:

- Os valores de x aumentam juntamente com os correspondentes valores de y; ou
- Os valores de x diminuem juntamente com os correspondentes valores de y;

de tal forma que a razão $\frac{y}{x}$ é constante, isto é,

$$\frac{y1}{x1} = \frac{y2}{x2} = \frac{y3}{x3} = \frac{y4}{x4} = \frac{y5}{x5} = k$$

Logo,

$$\frac{y}{x} = k \text{ (constante), ou seja, } y = kx.$$

para algum número real k diferente de zero.

Neste caso, diremos que as **variáveis** y e x são **proporcionais ou diretamente proporcionais.**

Segundo caso: Com relação aos valores atribuídos as variáveis y e x pode ocorrer uma de duas situações:

- Os valores de x aumentam quando os correspondentes valores de y diminuem; ou
- Os valores de x diminuem quando os correspondentes valores de y aumentam;

de tal forma que o produto x.y é constante, isto é,

$$x_1 . y_1 = x_2 . y_2 = x_3 . y_3 = x_4 . y_4 = x_5 . y_5 = k$$

Logo,

$$x.y = k, \text{ ou seja, } y = \frac{k}{x}$$

para algum número real k.

Neste caso, diremos que as variáveis y e x são **inversamente proporcionais**.

Existem casos em que existe uma relação entre as variáveis, mas elas **não são** nem diretamente e nem inversamente proporcionais, como veremos a seguir.

O que você pode gostaria esclarecer, discutir e dizer sobre o que apresentamos nesse texto? Anote as suas dúvidas, questões e afirmações no quadro abaixo para estimular uma conversa sobre o texto.

Tarefa 3 - Diretamente ou inversamente proporcionais?

(a) Identifique, nas tabelas abaixo se as variáveis são diretamente ou inversamente proporcionais, ou se não ocorre nenhum dos dois casos? [**Sugestão**: use as informações da tarefa 2 para resolver os itens desta tarefa]

(1)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	6	8	10	12

(2)

n	1	3	4	5	6	7
P	1	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7

(3)

t	1	2	3	4	5	6
Q	1	4	9	16	25	36

(4)

u	3	6	9	12	18	30
v	7	14	21	28	42	70

(5)

h	2	3	5	10	15	20
T	75	50	30	15	10	7,5

(6)

x	1	2	3	4	5	6
Z	1	8	27	64	125	216

(7)

y	5	10	20	40	80	160
T	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64

(8)

x	1	2	3	4	5	6
V	2	3	4	5	6	7

Tarefa 4 – Situações Problemas

Em problemas em que se simula situações reais do dia a dia as variáveis x e y são também chamadas de grandezas (diretamente ou inversamente proporcionais ou, como vimos, pode não ser nem uma coisa nem outra). Uma grandeza em matemática é expressa por um número seguido de uma unidade que informa sobre o quê estamos falando ou nos referindo. Podemos também dizer que grandeza é sinônimo de quantidade cujos valores são dados em números. São exemplos de grandezas: a idade de uma pessoa, seu peso, o número de filhos, a temperatura, a área de uma sala, o volume de um recipiente.

Ao estudar um problema envolvendo grandezas pode acontecer que exista um valor que é sempre o mesmo e a ele chamaremos de **constante**. E pode acontecer que outras grandezas sejam variáveis enquanto a situação analisada acontece, neste caso a grandeza é chamada **variável**. Por exemplo, pode existir um problema que envolva a área e a temperatura de uma sala em um dia. Nesse caso a área da sala é constante ao longo do dia, enquanto a temperatura da sala pode ser variável no mesmo período. Em outro problema, a temperatura no interior de um Freezer pode permanecer constante, enquanto a espessura da camada de gelo no seu interior é variável.

Esses dois exemplos sugerem que para afirmar se uma grandeza é variável ou constante é necessário analisar bem o problema em estudo, pois uma grandeza pode ser variável em determinada situação e uma constante em outra.

O valor de **k**, mencionado nas tarefas 1 e 2 é uma constante importante quando as grandezas são diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais e por isso recebe o nome de **constante de proporcionalidade** ou **fator de proporcionalidade**.

Com essas informações em mente, nas situações abaixo, analise a situação seguindo a seguinte ordem de procedimento:

1º) verifique se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais ou se não são uma coisa nem outra.

2º) Caso seja possível identifique a constante de proporcionalidade.

Situação 1: Uma lancha de competição, em fase de testes, tem a velocidade e o tempo anotados no seu deslocamento do continente a uma Ilha, avaliada em 5 tentativas, em que se desloca em velocidade constante em um percurso em linha reta. A tabela abaixo mostra os resultados:

Velocidade (km)	30	60	90	120	150
Tempo (minutos)	12	6	4	3	2,4

Situação 2: A tabela abaixo mostra o deslocamento de um avião em velocidade constante de 100 km e a distância percorrida:

Tempo (h)	Distância (Km)
1/4	25
1/2	50
1	100
1,5	150
2	200
2,5	250

Situação 3: Numa escola a professora de educação física realizou a medida da altura de todos os alunos de 1 a 6 anos obtendo a seguinte tabela relacionando a altura média dos alunos em relação a idade:

Idade (em anos)	1	2	3	4	5	6
Altura média (em cm)	73,2	84,1	91,1	99,1	105,9	112,20

Situação 4: Uma empresa de água mineral lançou uma nova água gaseificada e com sabor de fruta com a seguinte tabela de preços:

Garrafa (ml)	Preço(R$)
100	5,00
350	8,00
500	10,00
1000	18,00
1500	25,00
2500	40,00

Tarefa 4.1: Outras questões para discussão

(a)Com base na situação 3, é possível afirmar que pode existir uma relação de proporcionalidade entre idade e altura?

(b)Com base na situação 4, suponha que você, sendo o diretor da empresa de água mineral, queira transformar a tabela de preços de acordo com a quantidade de água de modo que a relação preço/conteúdo da garrafa sejam proporcionais, como seria essa tabela? Você acha que a tabela apresentada na situação 4, tem algum objetivo comercial para ela ser como é?

Tarefa 5

Tarefa 5 – Interdependência especial entre variáveis

A interdependência entre duas variáveis pode ser, às vezes, apresentada por uma **fórmula** que expressa uma **regra** que associa as duas variáveis. Nas tarefas abaixo, já estudadas anteriormente:

(a) Encontre, se possível, a fórmula que expressa a interdependência entre as variáveis;

(b) Identifique, se possível, a regra que associa as variáveis sabendo que na relação entre as variáveis uma delas é **independente** e a outra é **dependente**, isto é, enquanto para a variável independente pode ser atribuídos valores numéricos arbitrários (quaisquer), a outra variável dependerá desses valores para se encontrar o seu valor numérico. Diga qual é a variável independente e qual é a dependente em cada caso.

(1)

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4	6	8	10	12

(2)

n	1	3	4	5	6	7
P	1	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7

(3)

t	1	2	3	4	5	6
Q	1	4	9	16	25	36

(4)

u	3	6	9	12	18	30
v	7	14	21	28	42	70

(5)

h	2	3	5	10	15	20
T	75	50	30	15	10	7,5

(6)

x	1	2	3	4	5	6
Z	1	8	27	64	125	216

(7)

y	5	10	20	40	80	160
T	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64

(8)

x	1	2	3	4	5	6
V	2	3	4	5	6	7

(9) Uma lancha de competição, em fase de testes, tem a velocidade e o tempo anotados no seu deslocamento do continente a uma Ilha, avaliada em 5 tentativas, em que se desloca em velocidade constante em um percurso em linha reta. A tabela abaixo mostra os resultados:

Velocidade (km)	30	60	90	120	150
Tempo (minutos)	12	6	4	3	2,4

(10) A tabela abaixo mostra o deslocamento de um avião em velocidade constante de 100 km e a distância percorrida:

Tempo (h)	Distância (Km)
1/4	25
1/2	50
1	100
1,5	150
2	200
2,5	250

(11) Numa escola a professora de educação física realizou a medida da altura de todos os alunos de 1 a 6 anos obtendo a seguinte tabela relacionando a altura média dos alunos em relação a idade:

Idade (em anos)	1	2	3	4	5	6
Altura média (em cm)	73,2	84,1	91,1	99,1	105,9	112,20

(12) Uma empresa de água mineral lançou uma nova água gaseificada e com sabor de fruta com a seguinte tabela de preços:

Garrafa (ml)	Preço(R$)
100	5,00
350	8,00
500	10,00
1000	18,00
1500	25,00
2500	40,00

Apêndice 3: Transcrição completa das tarefas

TRANSCRIÇÃO - APLICAÇÃO DAS TAREFAS DA PESQUISA
(Aplicadas nos dias 07/11/2024, 21/11/2024 e 28/11/2024)

TAREFA 1

Pesquisadora: Boa tarde gente! Hoje nós vamos começar o último bloco dos nossos encontros aqui na universidade. Vamos trabalhar da mesma forma que nos encontros anteriores, tudo bem? Essa são as tarefas que discutiremos hoje (entrega do bloco de folhas a cada um dos participantes). Vou dar um tempo para vocês lerem e tentarem fazer o que está sendo pedido.
Alfa: Pesquisadora, na b, precisa colocar um exemplo do que está pedindo aqui?
Pesquisadora: Isso. Eu queria que vocês tentassem pensar num exemplo de duas variáveis tenha essa relação de interdependência, ou seja, onde uma está associada a outra. Não se preocupem, pois, aqui não tem certo e errado, mas tentem pensar...sei lá, vai, quanto mais eu estudo... maior é minha nota na prova?
Alfa e Ômega sinalizam positivamente com a cabeça
Alfa: mas precisa sem o mesmo valor sempre?
Pesquisadora: não, não precisa ser o mesmo valor não. Não precisa ser redondinho como no exemplo que vocês estão vendo aí não, podem pensar de forma livre, fora da caixinha.
Ômega: acabamos
Pesquisadora: então vamos lá. Mas antes de começarmos com as questões, eu gostaria que a gente pudesse comentar um pouco sobre o texto, quando ele fala sobre o que é variável em matemática. Vocês entenderam o que essa palavrinha, variável, significa? Foi tranquilo para vocês? Vocês conseguiriam dizer em outras palavras o que isso significa?
Alfa: é meio que a letra que a gente vai usar pra simbolizar os valores (fez gestos com as mãos, simbolizando uma sequência da esquerda para a direita)
Pesquisadora: Boa, isso mesmo, perfeito. Então ele diz que a variável vai ser uma letra do alfabeto e aqui nesse exemplo a letra t foi usada para simbolizar o tempo e a letra d a distância, e ele mostrou que conforme o tempo passava a distância ia mudando de acordo com essa tabelinha que está aqui. Então agora vamos lá. Na letra a fala assim: você conseguiria dizer o que esta tabela está informando a partir da relação entre as variáveis tempo e distância? O que vocês colocaram?

Alfa: eu coloquei que a tabela informa que a cada 15 minutos, o carro percorre 25km.

Ômega: eu coloque que a tabela informa a distância percorrida em um determinado tempo, e que a tabela mostra que a cada 15 minutos é percorrido 25 km.

Pesquisadora: Maravilha, perfeito. E na letra b, o que vocês conseguiram falar a respeito? A letra b foi um pouco mais difícil né? Pra exibir um exemplo precisa de um pouco mais de criatividade.

Alfa: é...eu não sei se seria ou se pode ser isso, eu coloquei quanto eu gasto e a dívida.

Alfa mostrou o papel para Pesquisadora.

Pesquisadora: então se eu gasto 2 a dívida é de 2, se eu gasto 4 a dívida é de 8. Ah, então aqui a dívida vai dobrando né... se gasto 6 a dívida é 14, você já está com essa dívida toda? (risos). E você, Ômega?

Ômega: Eu coloquei horas estudando e nota, foi o que eu consegui pensar. Aí eu fiz a tabelinha

Ômega mostrou o papel para Pesquisadora.

Pesquisadora: Nossa, legal hein. Então, as horas que você passa estudando e as notas que você tira. Aqui nessa hora 2/4 é o que? meia hora?

Ômega: isso

Pesquisadora: entendi, aí você tira meio, uma hora tira um e assim sucessivamente. Então se tu estudar 10 horas tu tira 10?

Ômega: sim (risos)

Pesquisadora: então gente, aqui é esse caminho mesmo. Foi tranquilo essa primeira tarefa?

Alfa e Ômega acenam positivamente com a cabeça.

<u>TAREFA 2</u>

Pesquisadora: beleza, então vamos lá para a segunda tarefa. E aí vem aqui a mesma coisa, um textozinho, vou dar um tempo pra vocês lerem, fiquem à vontade, podem conversar um com o outro, tudo bem? E...já para adiantar, na próxima folhinha tem assim: para vocês anotarem se vocês tiverem dúvida ou algum comentário que vocês possam querer fazer a respeito do que está escrito aqui. Se vocês puderem ir escrevendo isso pra gente debater daqui a pouco, vai ser melhor ainda. Tudo bem? Tranquilo?

Alfa e Ômega acenam positivamente com a cabeça.

Alfa: a gente não teve nenhuma dúvida não.

Pesquisadora: não? Foi tranquilo?

Ômega: ahã

Pesquisadora: beleza. Então vamos comentar rapidinho. O que vocês entenderam desse primeiro caso?

Alfa: que elas são diretamente, quando elas crescem, elas crescem sempre numa mesma ... (tenta encontrar uma palavra fazendo gestos com a mão) proporção

Pesquisadora: beleza, então eles crescem sempre obedecendo um mesmo padrão

Ômega: é..., como se multiplicasse o de cima e o de baixo por 2, por 3, por 4...

Pesquisadora: ok, isso é importante a gente frisar, que não é apenas quando eles crescem, quando x cresce y cresce também, mas cresce sempre do jeito que você falou (apontando para Alfa), numa mesma proporção. Então isso já está claro pra vocês. Tranquilo, beleza. Aí no segundo caso já tá um pouco diferente, não aparece uma divisão, o que que muda do primeiro pro segundo caso?

Alfa: no segundo tem essa mesma taxa de crescimento ou de diminuir as prop... fala (direciona para o Ômega)

Ômega: o que?

Pesquisadora (intervindo): o de cima é diretamente, lembra? E o de baixo, como a gente chama?

Alfa: inversamente

Pesquisadora: e aí aqui nesse segundo caso, qual é a diferença? No primeiro a gente faz assim y1 sobre x1, y2 sobre x2, todas essas razões elas são equivalentes. Já no segundo caso, a gente faz do mesmo jeito?

Ômega: Não

Pesquisadora: como é que a gente faz, Ômega?

Ômega: a gente multiplica

Pesquisadora: multiplica um pelo outro, e essa multiplicação de um pelo outro quando elas são iguais, é o que confere, o caso ser inversamente proporcional.

Alfa e **Ômega** acenam positivamente com a cabeça.

Pesquisadora:e em relação a essa letrinha k aí? Tá tudo bem pra vocês? O que seria esse k?

Alfa: seria o resultado

Ômega: seria a letra do resultado da divisão dos dois

Pesquisadora: é importante a gente lembrar que esse k a gente vai chamar de constante de proporcionalidade, que é exatamente esse valorzinho aí que vai se repetir, beleza?

Alfa e **Ômega** acenam positivamente com a cabeça.

Pesquisadora: ótimo. Vamos ler então o penúltimo parágrafo dessa última parte que diz assim: "Existem casos em que existe uma relação entre as variáveis, mas elas **não são** nem diretamente e nem inversamente proporcionais, como veremos a seguir." Aqui a gente não tratou esse último caso como um 3º caso. Mas é importante a gente ter isso em mente, tá? Que vai ter caso em que as variáveis se relacionam de forma diretamente, que a gente chama de diretamente proporcional, vão haver casos em que elas se relacionam de forma inversamente, e vai ter casos em que elas podem não ser nem uma coisa nem outra. Eles se relacionam, elas tem alguma coisa haver mas essas relações que a gente estudou aqui, elas não vão existir. Beleza? Então tá. Então vambora, tarefa 3, que pra animar vocês ´a última do dia. Então olha só, a tarefa 3 está dizendo assim:

TAREFA 3

Pesquisadora: Então ó, se vocês olharem para o número 1, ele chama de x e y, ou seja, ele dá uma letra para as variáveis, como a gente falou lá no primeiro texto, e aqui vem um quadrinho. Vocês precisam olha isso aqui, podem fazer as continhas se vocês quiserem fazer, só vou pedir pra vocês fazerem nesse retângulo aqui, se não der o espaço não tem problema, a gente faz vira a página e faz atrás. Tudo bem? E pra vocês fazerem com bastante vontade, (Pesquisadora distribui algumas guloseimas para Alfa e Ômega) está umas balas pra vocês.

Discussão entre eles

Alfa: as letras que estão aqui são aleatórias?

Pesquisadora: são, aleatórias. Lembra que a gente falou que a variável normalmente é representada por uma letra? Pode ser uma letra qualquer.

Alfa: então, mas a gente pode saber quais são as variáveis? Ou não vai mudar nada?

Pesquisadora: não muda nada, são apenas letras, não tem uma variável definida, entendeu Alfa? Não tem tipo, sei lá, t e q. Pode ser tempo e quantidade? De que? Sei lá! ... Olha só, importante aqui: a sugestão que ele dá pra gente no enunciado, que está até em negrito, "use as informações da tarefa 2 para resolver os itens desta tarefa". Então olha só, o que a tarefa 2 traz pra gente? Na verdade, a tarefa 2 era só pra gente fazer alguns comentários do que fosse importante pra gente, não tinha nenhum exercício propriamente dito pra fazer. Mas o que ele dizia pra gente? Que quando as variáveis aumentam juntas e obedecem a uma razão, como é que a gente obtém essa razão? É o y sobre o x, né? (Alfa acena positivamente com a cabeça) Quando todas essas relações acontecem de forma equivalente, a gente tem uma constante de proporcionalidade, que é o k. então vamos olhar pro primero, que está como o exercício 1 (da tarefa 3). Se a gente colocar aqui 2 sobre 1, isso é equivalente a 4 sobre 2?

Alfa e Ômega acenam com a cabeça e respondem: sim

Pesquisadora: É equivalente a 6 sobre 3? A 8 sobre 4?

Alfa e Ômega acenam com a cabeça e respondem: sim

Pesquisadora: Isso tá obedecendo? Tá?

Alfa acena positivamente com a cabeça, de forma até empolgada

Pesquisadora: então a gente pode dizer que isso é diretamente proporcional?

Alfa e Ômega acenam com a cabeça e respondem: sim

Pesquisadora: Beleza. Bom agora vamos olhar a número 2. Se a gente for pegar o primeiro caso, 1 sobre 1, isso é equivalente a 1/3 sobre 3?

Alfa: deve ser, porque vai dar 1

(Ômega permanece atento olhando para o papel e não responde)

Pesquisadora: então vamos lá, vou fazer no quadro hein. Lá na tarefa 2 ele faz y1 sobre x1, aí ele vai fazendo, isso tem que ser equivalente a y2 sobre x2, aí ele vai fazendo assim até dizer que se todo mundo é igual, isso é equivalente a um k. Tá. Vamos fazer então a mesma coisa no número 2? Só que aqui não é x e y, é n e P. Então eu vou ter que fazer P sobre n. Beleza, o meu primeiro é 1 sobre 1, aqui eu não tenho como saber de nada, eu só tenho uma relação. Agora, 1/3 sobre 3, como é que a gente resolve isso? Eu repito o de cima, né isso?

Ômega (acena positivamente com a cabeça): e multiplica pelo inverso do de baixo.

Pesquisadora: qual é o inverso de 3?

Ômega: 1/3

Pesquisadora: e isso aqui dá 1?

Alfa só presta atenção, Ômega acena negativamente com a cabeça

Pesquisadora: então, a gente já viu que no primeiro caso, não está acontecendo. Então, vocês concordam comigo que o primeiro caso não atende:

Alfa e Ômega acenam positivamente com a cabeça e respondem: sim

Pesquisadora: certo, então o primeiro caso morreu pra mim, vamos para o segundo caso. Será que é o segundo? Não sei, vou fazer, vou verificar se o segundo caso acontece aqui. Como que a gente vê lá na tarefa 2 o funcionamento do segundo caso? Ele faz assim ó: x1 vezes

Y1, vai ser igual ao x2 vezes y2, não é isso? E isso tudo vai se repetir, e se isso for verdade, a gente tem uma constante. Vamos ver se isso vai acontecer então no exercício número 2? Quem é x1 e y1? 1 vezes 1. E agora, 3 vezes 1/3, aqui tá dando 1, agora dá. Agora a gente tem que verificar os outros, né? 4 vezes ¼?

Ômega: dá 1

Pesquisadora: 5 vezes 1/5

Ômega: dá 1

Pesquisadora: Preciso fazer o resto?

Alfa: Não

Pesquisadora: peraí, mas tá todo mundo dando 1? Então quem é o k aqui? ... Existe um k?

Alfa e Ômega: é o 1

Pesquisadora: Então aqui, se tá atendendo ao segundo caso, eles são o que?

Alfa: inversamente

Pesquisadora: então você pode dizer que são inversamente proporcionais. Tudo bem? Agora vamos lá, só pra gente aproveitar um pouquinho o fio da meada. Testei o primeiro caso, não funcionou. Vamos supor que eu tivesse testado o segundo caso, se não funcionasse, o que que está acontecendo?

Alfa: não é proporcional.

Pesquisadora: exatamente, então eles não são proporcionais. Ou seja, não são diretamente nem inversamente proporcionais. É o que eu falei pra vocês aqui, que se a gente pudesse considerar como o terceiro caso, fica a critério de vocês. Se vocês quiserem até deixar isso como sugestão, pode escrever na folha. Ficou mais tranquilo agora?

Alfa e Ômega acenam positivamente com a cabeça e respondem: ficou.

Pesquisadora: Vocês tinham conseguido fazer o primeiro, era no segundo que vocês estavam com dúvida?

Alfa: a gente tava no terceiro.

Pesquisadora: ok.

Discussão entre eles

Alfa: Pesquisadora, quando for dividir, é só dividir 3 por 7, né? (se referindo ao número 4) aqui eles assumiram x/y ou u/v, não se limitando a ordem sugerida no texto da tarefa 2 que era y1/x1. Quando isso acontece, a constante de proporcionalidade muda, ou seja, nesse caso pode ser 3/7 ou 7/3.

Pesquisadora: pode ser também.

Ômega: não precisa, vamos supor o de baixo pelo de cima, ou o de cima pelo de baixo, pode ser de qualquer forma?

Pesquisadora: o importante é vocês fazerem sempre na mesma ordem. Se começa fazendo o de baixo pelo de cima, vai fazendo do mesmo jeito até o final.

Ômega: terminamos

Pesquisadora: vamos comentar então? Na primeira o que vocês fizeram?

Alfa: a gente fez igual ao seu. Deu o mesmo resultado

Pesquisadora: No primeiro vocês testaram logo o primeiro caso mesmo?

Alfa: isso

Pesquisadora: então no primeiro vocês identificaram como o que?

Alfa e Ômega: diretamente

Pesquisadora: e a constante então é igual a quanto?

Alfa: 0,5

Ômega: o meu eu fiz diferente, eu peguei o de baixo pelo de cima, deu 1 (era pra dar 2)

Pesquisadora: beleza, e a número 2?

Ômega: a dois deu inversamente

Pesquisadora: vocês testaram o primeiro caso, não deu certo, aí...

Ômega: não deu, aí quando fez com o segundo deu. Aí Pesquisadora, o que que eu fiz, no diretamente eu coloquei só diretamente, e quando não foi eu coloquei os dois (aqui ele se refere aos casos que não são proporcionais, em que ele deixou indicado que não funcionou nem o "teste" do diretamente e nem o do inversamente).

Pesquisadora: ah sim, que no caso foi o que aconteceu no número 3, pra mostrar que não atendia nem o primeiro e nem o segundo caso. Beleza. Mas vocês concluíram isso depois da explicação ou vocês já tinham conseguido fazer desse jeito?

Alfa: A gente tentou fazer mas a gente não tava conseguindo fazer caso por caso, a gente tava tentando dar uma adivinhada... a gente foi fazendo só a conta

Pesquisadora: Ahhhhh....entendi. Mas então o que vocês acham, é mais fácil fazer tentando adivinhar ou fazer

Alfa: pelas contas (testando pelos casos)

Pesquisadora: pelas contas é mais fácil né

Ômega: eu não sei, eu to na dúvida, eu achei que alguns dava pra fazer sem precisar fazer as contas, dava pra fazer, vamos supor, no caso 4, era só a gente notar que sempre ia, vamos supor, no primeiro número, do 3 pro 6 dobrou, do 7 pro 14 dobrou também. Aí se eu pegasse do 3 pro 9, triplicou.

Pesquisadora: ah sim, então no número 4 do 7 pro 14 foi vezes 2, do 7 pro 21 foi vezes 3...

Ômega: isso

Pesquisadora: foi assim?

Ômega: eu pensei assim, mas eu coloquei daquele jeito (testando os casos) lá.

Pesquisadora: ah tá, entendi. Uma outra coisa que a gente repara é como tá crescendo aqui, 7, 14, 21, 28... se a gente fosse pensar em...

Alfa: na tabuada do 7

Pesquisadora: Boa! Isso aí. Agora o quinto

Alfa: deu inversamente e o k deu 150

Pesquisadora: beleza, muito bem. E o 6?

Ômega: não ocorre...

Pesquisadora: não é nem um nem outro

Ômega: eu testei só dois aí, dá 1 e 16.

Pesquisadora: tá... e o número 7

Ômega: inversamente

Pesquisadora: e o número 8?

Alfa: não são.

Pesquisadora: beleza. Tá. Uma coisa só que eu quero comentar, Ômega, eu achei bacana que você conseguiu reparar e decidiu fazer essa pergunta, se vocês poderiam fazer o y... é ... lá na tarefa 2 tá sempre pra gente fazer y1/x1, e vocês repararam que se a gente fizer x/y, se for diretamente, vai aparecer a mesma constante de proporcionalidade. Vocês acham que muda alguma coisa, de uma coisa pra outra? (não a mesma constante, mas uma mesma constante)

Alfa: não, por mais que as vezes elas sejam diferentes, assim, elas sempre vão ser constantes, e aí são proporcionais

Pesquisadora: e assim, se a gente for parar pra pensar também, o que que faz, se a gente for lá pra primeira tarefa que tem o t e o d, o tempo e a distância, é... parece que o movimento que a gente tá fazendo aqui é o seguinte: o carro vai começar a andar e eu vou começar a contar no relógio o tempo a partir do momento em que o carro começa a andar, né? Eu posso pensar que eu vou olhar pro relógio a partir do momento que o carro andar ou eu posso olhar pros quilômetros, lá pro hodômetro do veículo a partir do que o carro vai andar, né? E nessa observação vai depender de quem tá observando, pode ter gente que está observando a hora e pode ter quem vai observar o hodômetro. E é isso mesmo que você falou Alfa, por mais que deem diferentes, o importante é que essa relação vai sempre acontecer. Beleza?

Eaí? O que vocês acharam? Qual foi a impressão? Isso aqui pra vocês já era conhecido de alguma forma?

Alfa e Ômega: Sim (acenam com a cabeça)

Ômega: essa forma de pensar, eu acho que não

Alfa: é, eu acho que porque a gente vê mais esse negócio de diretamente e inversamente na .....(inaudível) aí faz aquele negócio da setinha assim

Pesquisadora: ah... então vocês também são da setinha, ensinaram isso pra vocês...

Alfa: ahhh eu só sei usar com setinha

Pesquisadora: setinha é tranquilo pra vocês, Alfa?

Alfa: muito

Pesquisadora: então vamos tirar um dia pra vocês me ensinar como faz isso que até hoje eu não sei...rs. Beleza, gente. Então o que eu tinha programado pra hoje foi até esse final, e do mesmo jeito que vocês estão fazendo, vou deixar esse aqui pra vocês fazerem em casa. É uma continuação, tá? Aí a gente vai combinar assim, daqui a 15 dias a gente volta pra cá, aí vamos comentar o que vocês fizerem pra gente fechar o trabalho, tudo bem?

Para casa: tarefa 4 (situação 1, 2, 3 e 4) e tarefa 4.1

TAREFA 4

Pesquisadora: Vamos começar? Vocês leram o texto da tarefa 4, certo? Foi tranquilo

Alfa e **Ômega**: foi

Pesquisadora: o que vocês poderiam dizer com as palavras de vocês?

Alfa: eu acho que é a mesma coisa que a gente já tinha feito, sobre diretamente, inversamente e também das constantes.

Pesquisadora: então vamos lá, vamos comentar sobre a situação1? (leitura da situação 1). E aí vem uma tabela que vocês já viram em outros momentos. Como é que vocês fizeram aqui a situação 1?

Alfa: eu testando... como se fosse uma fórmula né, aquela formulazinha sabe? Se fosse diretamente seria a velocidade pelo tempo, a divisão deles teria que dar sempre o mesmo número. Aí depois eu testei a multiplicação.

Pesquisadora: entendi. Quando você fez pela divisão você achou alguma coisa?

Alfa: não deu iguais, não são proporcionais.

Pesquisadora: não são proporcionais...

Alfa: diretamente.

Pesquisadora: diretamente proporcionais, beleza.

Alfa: aí quando fui fazer pelo inversamente aí a gente percebe que é inversamente proporcional e a constante é 360.

Pesquisadora: 360...ótimo. Você também, Ômega?

Ômega acena positivamente com a cabeça

Pesquisadora: e foi por esse mesmo caminho?

Ômega: sim.

Pesquisadora: aí já ficou mais fácil fazer assim né, de quando a gente fez pela primeira vez.

Alfa e **Ômega** acenam positivamente com a cabeça.

Pesquisadora: aí na situação 2, qual foi o resultado que vocês conseguiram obter?

Ômega: diretamente proporcional. A gente dividiu a distância pelo tempo e a gente viu que a constante era 1,6.

Pesquisadora: ah... então tá, beleza. Foi aqui que vocês acharam um número decimal? 1,6666...

Ômega: foi...

Pesquisadora: você também achou a mesma coisa, Alfa?

Alfa: achei

Pesquisadora: Como é que vocês fizeram isso?

Alfa: é porque pra facilitar os cálculos, a gente colocou a distância em cima e o tempo embaixo.

Pesquisadora: a distância em cima e o tempo embaixo. Aí a distância 25 sobre 4...

Alfa: não, a gente fez 15, que é 15 minutos (que é o tempo em minuto e não em hora).

Pesquisadora: Ah, vocês colocaram o tempo em minuto? Ah sim. Eu estava me perguntando de onde saiu esse resultado, mas agora eu entendi. Tá. Aí na 3...

Alfa: na 3 a gente só colocou que não é proporcional.

Pesquisadora: certo...fizeram os testes de diretamente e inversamente proporcional e n~~ao era nenhuma das duas. Coerente isso, gente? O contexto idade e altura?

Alfa e **Ômega**: uhum

Pesquisadora: Beleza, aí a 4...

Ômega: também que não é inversamente nem diretamente proporcional, aí fiz os dois (se referindo ao teste dos casos).

Pesquisadora: ok, testaram e viram que não era nem um nem outro. Foi tranquilo então né?

Alfa e **Ômega**: foi.

Pesquisadora: o que vocês responderam?

Alfa: eu coloquei que não, porque não tem assim uma proporcionalidade, vamos supor um padrão.

Ômega: eu coloquei que não, pois cada pessoa pode crescer mais ou menos ao logo dos anos.

Pesquisadora: Beleza, muito bem, ótimo.

Pesquisadora: o que vocês colocaram?

Alfa: eu coloquei na tabela, a cada 100ml o preço de 5 reais. Aí 350ml 17,50, 500ml 25,00...fui fazendo assim. Sobre a tabela da situação 4, respondeu apenas "sim"

Pesquisadora: e você, Ômega?

Ômega: eu botei que a cada 150ml são 3,00, aí 250ml são 5,00, 450ml 9,00, e fui colocando assim.

Pesquisadora: E essa pergunta que ele faz "Você acha que a tabela apresentada na situação 4, tem algum objetivo comercial para ela ser como é?" Vocês chegaram a responder essa questão?

Ômega: eu vou ler a minha e vou explicar porque as vezes não dá pra entender. Eu coloquei: sim, a tabela não apresenta nenhuma proporcionalidade, pois tem o intuito de vender a garrafa com mais ml por um preço menor que o que deveria ser. Dessa forma, o consumidor acaba comprando a maior garrafa por achar que vale a pena, mas acaba comprando algo desnecessário. É como se fosse assim, ele foi com a ideia de comprar só 100ml de água. Só que ele foi lá e viu que a garrafa de 500 que era pra tá saindo por 50,00, tá saindo a 30,00, aí acaba comprando a de 30,00 reais e acaba gastando 25,00 reais a mais do que ele normalmente gastaria.

Pesquisadora: Legal esse pensamento. Vocês já conheciam essa artimanha do mercado?

Ômega: Mais ou menos

Pesquisadora: Em alguma coisa que vocês consomem, vocês conseguem perceber isso acontecendo?

Alfa: eu acho que mais em produtos de limpeza assim que aparece.

Pesquisadora: ah sim, aí acaba comprando uma vasilha maior, porque o preço proporcionalmente fica menor quando você compra mais.

Alfa: é

Pesquisadora: Então gente, ótimo, esse foi o nosso trabalho de casa. Vamos para o que temos hoje que é a última tarefa. Vai ser a mesma coisa que fizemos até agora, a mesma dinâmica. Eu vou pedir pra vocês lerem, aí vou pedir pra vocês fazerem só essa primeira aqui. Aí a gente comenta e depois a gente continua. Pode ser? Então vou dar um tempinho, vocês fiquem a vontade e quando acabarem é só falar. Se quiserem fazer perguntas, eu estou aqui.

TAREFA 5

Alfa: Acabamos

Pesquisadora: então vamos lá (leitura). Então na letra a, o que vocês conseguiram fazer?

Alfa: a gente pensou assim: que o y é duas vezes o x, ou também pode falar que o x é igual ao y dividido por dois.

Pesquisadora: ah...legal. Então vocês colocaram essas duas opções?

Alfa: Sim...

Pesquisadora: e tem alguma que vocês preferem trabalhar?

Ômega: eu acho que a de y é igual a dois x (y=2x)

Alfa: é

Pesquisadora: Muito bem. Então ótimo. E aí como ficou essa questão da variável dependente e independente?

Ômega: aí seria meio que a b né?

Pesquisadora: Isso, isso.

Ômega: eu coloquei: "a variável dependente pode ser qualquer uma, porém podemos dizer que y é independente e x dependente já que x sempre será a metade de y ou que x é independente e y dependente já que y sempre será o dobro de x". Depende de como você vai olhar.

Pesquisadora: depende de como você vai olhar. Você teve essa mesma percepção, Alfa?

Alfa: eu botei mais resumido, ambos podem assumir as duas funções independente e dependente

Pesquisadora: Muito bom. Nesse caso aqui, vocês conseguem ver, ou em algum momento isso apareceu pra vocês enquanto vocês pensavam, na constante de proporcionalidade? Ou isso nem passou pela cabeça de vocês?

Alfa: eu fiz a conta que a gente descobriu pra fazer a letra b

Pesquisadora: ah...entendi. Mas isso foi antes ou você fez depois?

Alfa: fiz primeiro.

Pesquisadora: você fez alguma coisa nesse sentido, Ômega?

Ômega: Não, eu fiz direto.

Pesquisadora: Então ótimo meninos, achei que vocês pudessem ter alguma dúvida nessa primeira questão, não tiveram. Então agora uma bateria em sequencia aqui. Se vocês forem olhando aí, é pra fazer a mesma questão, só os valores que vão mudando. Vai do 2 até o 12.

...

Ômega: na 3 a Alfa botou que não são proporcionais

Alfa: coloquei que não são proporcionais, sendo assim seriam independentes

Pesquisadora: as duas seriam independentes, é isso? As duas variáveis seriam independentes?

Alfa: é

Ômega: eu pensei diferente. Eu pensei que Q é igual t ao quadrado ou que t é igual a raiz quadrada de Q e as duas são dependentes ou independentes dependendo.

Pesquisadora: dependendo de como você olha pra cada uma.

Ômega: é

Pesquisadora: Entendeu, Alfa, o que ele falou?

Alfa: Entendi

Pesquisadora: e o que você acha disso?

Alfa: acho que tá certo

Pesquisadora: o que o Ômega percebeu, ele percebeu que existe uma interdependência entre os valores e que o fato de não serem proporcionais, nem diretamente nem inversamente, não exclui o fato de que elas podem ter uma regra entre elas. Você tá entendendo, B?

Alfa: sim

Pesquisadora: e de fato, se ele está achando que uma variável é o quadrado da outra ou uma é a raiz quadrada da outra... Melhorou, B, pra você?

Ômega: Pesquisadora, vai demorar um pouquinho, que esses estão mais difíceis

Pesquisadora: sem problemas. Qualquer coisa a gente faz até a 5, comenta e o restante fica pra casa. Esses são um pouco demorados mesmo.

Ômega: é, porque tem que pensar muito.

...

Ômega: aqui na 5, eu fiz T=hT/h. Pra ver se ela dá certo em todas os casos, eu teria que jogar os valores no T e no h?

Pesquisadora: Ou você joga pra T e vê se o h vai acontecer, ou ao contrário. Mas algumas coisas aqui a gente já pode ver ó: quando você faz hT/h, você pode simplificar o h, aí vai ficar T=T. Com isso você acha que vai dar pra chegar em algum lugar? Antes de você ter de repente esse trabalho.

Ômega: ahhhh tá

Pesquisadora: e você B, fez sentido pra você o que ele fez?

Alfa: depois que ele me explicou, sim

Pesquisadora: e o que ele te explicou?

Alfa: ele me explicou como ele... (fez movimento com as mãos)

Ômega: eu expliquei como eu pensei

Alfa: ele me explicou a fórmula, como ele chegou nisso, não

Pesquisadora: ahhh, mas aí é eu tá, porque a ideia é que você consiga chegar nela

Alfa: mas eu já tentei tudo!!!!

Pesquisadora: Calma, vamos lá. Presta atenção aqui. Na verdade, eu achei que essa dúvida pudesse existir lá no começo, mas vocês estão tendo ela agora, e que bom. Então olha só, quando vocês viram essa tabelinha que está aí no número 5, e é uma tabela igual a dos outros exercícios, só mudou os valores e as letras. O que a gente estava fazendo até então? A gente tinha uma forma de descobrir se elas eram diretamente, inversamente ou se elas não eram proporcionais. Não era isso que a gente estava fazendo? Então olha só, como a gente estava fazendo até aqui, no primeiro caso era pra saber se elas eram diretamente proporcionais e aí a gente fazia y1/x1 e aí verificava. Aqui seria T1/h1, então ficaria 75 está para 2 assim como 50 está para 3, e aqui a gente já conclui que não é verdade. E pra saber se são inversamente proporcionais, como ficaria aqui?

Alfa: todos dão 150 (se referindo ao produto T1.h1, T2.h2,)

Pesquisadora (enquanto escreve no quadro): então a gente já pode colocar aqui que o k que a gente está encontrando é 150. Então se a gente pegar o T.h e igualar a 150 (T.h=150), como é que a gente pode por uma variável em função da outra? E aí vocês mesmos já viram que podemos ter dois caminhos. Ou a gente tem T=150/h ou a gente tem h=150/T. Aqui a independente vai ser a h e a dependente vai ser o T e vice versa. Tá vendo, B, essa aqui é uma forma, a gente consegue encontrar mais facilmente essa regra, se a gente souber se elas diretamente ou inversamente. Reparem que não é assim nada demais, concorda comigo?

Alfa: graças a Deus! rs

Pesquisadora: e aqui a gente parte de algo que vocês já dominam, e que vocês fizeram tudo direitinho e não tiveram nenhuma dúvida. Então daqui dá pra você sair. Agora realmente, quando tiver uma relação que a gente não sabe se ela é diretamente ou inversamente, ou melhor, quando ela não é nenhuma das duas, pra descobrir a regra, a gente teria que pensar um pouco mais, e que foi o que aconteceu por exemplo na questão 3. E o N reparou que o Q é igual ao t ao quadrado. Mas foi uma observação, não foi usado nenhum método pra que ele chegasse até aqui. E de fato essa relação não é nem diretamente e nem inversamente proporcional, mas apesar disso, existe uma relação entre elas. Tudo bem?

...

Ômega: eu só tive um problema com o meu, quando você faz a fórmula usando os valores daquela tabela, mas quando você pega um valor aleatório, nem sempre dá.

Pesquisadora: humm...vamos conversar então. Como é que ficou a 2 pra vocês? **B**, comenta pra mim que eu tô super curiosa pra saber...

Alfa: ficou que n=p.n^2

Pesquisadora: deixa eu escrever isso no quadro. E vocês testaram os valores aqui?

Ômega: sim

Pesquisadora: todos eles

Ômega: sim, só que aí, por exemplo ali se a gente colocar o n igual a 3, vai ficar 3 é igual a p vezes 3 ao quadrado que fica igual a nove. Só que aí p é igual a -6 e não pode ficar assim.

Pesquisadora: Então vamos lá, ficou 3 é igual a p vezes 3 ao quadrado, então p é igual a 1/3.

Ômega: nesse deu certo, mas teve um que não deu.

Pesquisadora: hummm... aí é que tá, a gente tem que começar a pensar o seguinte, porque a regra ela sempre vai ter que dar certo, porque senão ela não é uma regra.

Ômega: a gente pode ver o que acontece...faz assim, tenta o 8, o n no lugar do 8.

Pesquisadora: então vamos lá, 8 é igual a p vezes 8 ao quadrado. P é igual a 8 dividido por 64, p é igual a 1/8.

Ômega: é, esse deu certo, mas teve um que não deu certo.

Pesquisadora: tá. Só uma coisa antes, isso que vocês encontraram $n = p.n^2$, se eu passasse o n^2 pro outro lado, a gente teria $p = \frac{n}{n^2}$, certo? E isso é o mesmo que $p = \frac{1}{n}$, tudo bem?

Ômega: Ah, sim

Pesquisadora: Pronto. Olha, eu vou usar o mesmo pensamento que eu usei ali (se referindo a questão 5). Se a gente for verificar se os valores dessa tabela são diretamente, não vai funcionar. Vocês testaram?

Alfa: sim

Pesquisadora: ótimo, beleza. Quando a gente testa se elas são inversamente proporcionais, isso acontece. E dá uma olhada nisso aqui, gente, vê se o p não é justamente o inverso do n?

Silêncio....

Pesquisadora: o que é o inverso de um número? ... Se eu perguntar pra vocês qual é o inverso de 2? ... O inverso de 2 é ½

Alfa e **Ômega** acenam positivamente com a cabeça.

Pesquisadora: quando a gente olha pras tarefas anteriores, lá na folhinha a gente tem essa explicação. Quando as variáveis são diretamente proporcionais, a gente vai chamar de x e y, quando elas são diretamente, como é que a gente consegue escrever essas variáveis? É assim ó: $y = kx$. E quando elas são inversamente, a gente consegue escrever assim: $y = \frac{k}{x}$ ou isso a gente ainda pode escrever assim né $y = k.\frac{1}{x}$. Olha o inverso do x aparecendo aqui ó. Então aqui a gente tem uma coisa parecida com isso aqui. Agora quando a gente joga qualquer valor aqui (se referindo a tabela do exercício 2), vocês chegaram a deixar o exemplo que não funcionou aí na folha?

Alfa: não foi nessa

Pesquisadora: ah, não foi nessa questão. Mas tudo bem então aqui?

Alfa e **Ômega** acenam positivamente com a cabeça.

Pesquisadora: então vamos passar pra próxima. Então na questão 3, como é que ficou?

Alfa: Q é igual a t ao quadrado ou t é igual a raiz quadrada de Q

Pesquisadora: A 4 agora, como ficou?

Ômega: na 4 a gente colocou que v 2u mais u sobre 3

Pesquisadora: e aqui vocês testaram?

Ômega: a gente testou os valores do quadro e deu certo.

Alfa: eu tenho só uma dúvida, eu to fazendo em todas pra saber se são proporcionais, só que na hora de encontrar a regra, eu não consigo fazer que nem o N.

Pesquisadora: Tudo bem, não fica preocupada com isso. Você conseguiu entender como fizemos ali no número 4?

Alfa: entendi

Pesquisadora: então eu quero que você faça o seguinte, segue esse mesmo modelo. Verifica primeiro se são proporcionais, seja diretamente ou inversamente. Acha a constante de proporcionalidade. E depois usa o que nós já vimos aqui. (se referindo a $y = kx$ ou $y = k.\frac{1}{x}$)

Alfa: tá bom.

Pesquisadora: e na quinta questão? É h e T

Ômega: eu coloquei que T é igual a h vezes T sobre h. Só que aí eu percebi que eu não chego em nada, que eu corto h com h e fica T igual a T.

Pesquisadora: e você **Alfa**?

Alfa: Seria h é igual a 150 dividido por T

Pesquisadora: isso aí

Alfa: ou T é igual a 150 dividido por h.

Pesquisadora: perfeito!

Alfa: aí sobre ser dependente e independente, as duas poderiam ser:

Pesquisadora: Aham. Mas então, na primeira situação, o h depende do T, já aqui, o T depende do h, porque o valor do T vai depender de quanto o h vale.

Alfa: aí eu coloquei que ambos podem assumir a posição.

Pesquisadora: Exatamente. Mais alguma coisa? Podemos encerrar por hoje? Ok, então fica da 6 a 12 pra casa.