

Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

Rodrigo Machado de Paula

**Aspectos Gerais de Gravitação Entrópica e Eletromagnetismo em
Espaços-tempo Não-Comutativos**

Juiz de Fora
2020

Rodrigo Machado de Paula

Aspectos Gerais de Gravitação Entrópica e Eletromagnetismo em
Espaços-tempo Não-Comutativos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de física teórica, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Coorientador: Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M. de Paula, Rodrigo.

Aspectos Gerais de Gravitação Entrópica e Eletromagnetismo em
Espaços-tempo Não-Comutativos / Rodrigo Machado de Paula. – 2020.
117 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes

Coorientador: Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de
Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física, 2020.

1. Tsallis. 2. Kaniadakis 3. Princípio Holográfico. 4. Espaço-tempo
entrópico 5. Não-Comutatividade. C. R. Mendes, Albert, orient. II. M. C.
Abreu, Everton, coorientador. III. Título.

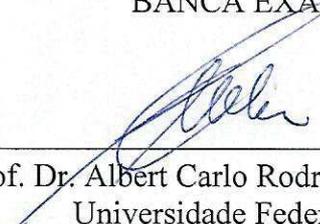
Rodrigo Machado de Paula

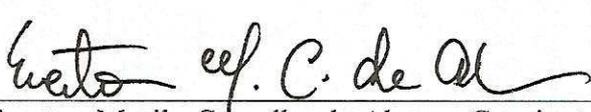
"Aspectos Gerais de Gravitação Entrópica e Eletromagnetismo em Espaços-tempo Não-Comutativos".

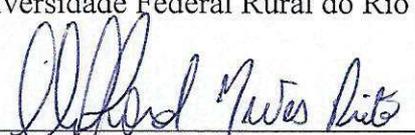
Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial a obtenção do grau de Doutor em Física. Área de Concentração: Física.

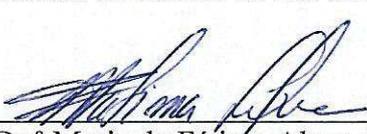
Aprovada em 04 de março de 2020.

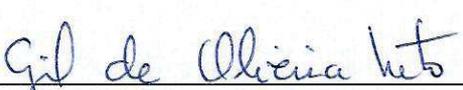
BANCA EXAMINADORA

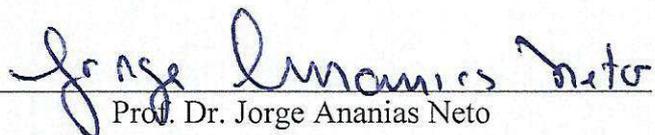

Prof. Dr. Albert Carlo Rodrigues Mendes - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora


Prof. Dr. Everton Murilo Carvalho de Abreu - Coorientador
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro


Prof. Dr. Clifford Neves Pinto
Universidade do Estado do Rio de Janeiro


Prof.ª Dr.ª Maria de Fátima Alves da Silva
Universidade do Estado do Rio de Janeiro


Prof. Dr. Gil de Oliveira Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora


Prof. Dr. Jorge Ananias Neto
Universidade Federal de Juiz de Fora

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Marcy e Rosa, por serem sempre este porto seguro em minha vida e por apoiarem integralmente a realização deste trabalho e aos meus professores, Albert e Everton, pela luz que representaram neste caminho.

“O homem moderno enxerga tão pouco, que chegou à inesperada conclusão que não existe
mistério.”

Murilo Mendes

RESUMO

Este trabalho é fruto, principalmente, da dedicação à duas linhas de pesquisa existentes nos dias atuais: o entendimento do fenômeno espaço-temporal, descrito pela relatividade geral, como um fenômeno termodinâmico conhecido como *gravitação entrópica* e a não-comutatividade do espaço-tempo nas coordenadas espaciais. Dessa forma, foram exploradas as consequências físicas, via método de Faddeev-Jackiw, de teorias eletromagnéticas imersas em um espaço-tempo não-comutativo [1]. Além disso, novas propostas termodinâmicas através das generalizações de entropia de Tsallis e Kaniadakis foram aplicadas em cosmologia e teoria newtoniana modificada (MOND) [2, 3], onde novos resultados foram obtidos. A estatística de Kaniadakis também foi aplicada em [4] para se obter uma nova correção do parâmetro de Immirzi em *Loop Quantum Gravity* (LQG). Todos estes trabalhos são apresentados nesta tese, além das bases teóricas nas quais estas pesquisas teóricas se fundamentaram. No capítulo 5 também é apresentado um trabalho desenvolvido durante o doutoramento ainda não publicado.

Palavras-chave: Tsallis. Kaniadakis. Princípio Holográfico. Não-Comutatividade.

ABSTRACT

This work is mainly the result of dedication to two lines of research existing today: the understanding of the spatio-temporal phenomenon, described by general relativity, as a thermodynamic phenomenon known as entropic gravitation and the noncommutativity of space-time in the spatial coordinates. In this way, the physical consequences of electromagnetic theories immersed in a non-commutative space-time were explored via the Faddeev-Jackiw method [1]. In addition, new thermodynamic proposals via Tsallis and Kaniadakis statistics were applied in cosmology and modified Newtonian theory (MOND) [2, 3], where new results were obtained. Kaniadakis statistics was also applied in [4] to obtain a new correction of the Immirzi parameter in Loop Quantum Gravity (LQG). All of these works are presented in this thesis, in addition to the theoretical bases on which these theoretical researches were based. Chapter 5 also presents a work developed during the PhD that has not yet been published.

Key-words: Tsallis. Kaniadakis. Holographic principle. Noncommutativity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Polímero articulado livre imerso em um banho térmico com temperatura T é puxado para fora de seu estado de equilíbrio (força F). A força entrópica aponta em sentido oposto.	66
Figura 2 – Uma partícula de massa m se aproxima de uma superfície holográfica. A superfície limita a parte emergida do espaço, que contém a partícula, e armazena dados que descrevem a parte do espaço ainda não emergida.	68
Figura 3 – Uma partícula de massa m próxima a uma superfície holográfica esférica. A energia é igualmente distribuída entre os <i>bits</i> ocupados, e é equivalente à massa M que deve emergir dentro da parte do espaço encerrado pela superfície.	70
Figura 4 – Simetria, energia e entropia	75
Figura 5 – A entropia S_q com probabilidades iguais como função do número de estados W (com $k = 1$), para valores típicos de q	78
Figura 6 – A dependência de p da entropia quando $W = 2$, $S_q = [1 - p^q - (1 - p)^q]/(q - 1)$ para valores típicos de q (com $S_1 = -p \ln p - (1 - p) \ln(1 - p)$).	80
Figura 7 – Gráfico da aceleração gravitacional modificada normalizada em função da distância radial normalizada para diferentes valores de q . Na figura temos que $\bar{a} = a/(GM\pi/2l_p^2)$ e $\bar{R} = R/\sqrt{l_p^2/\pi}$	83
Figura 8 – Gráfico em 3D da aceleração gravitacional modificada normalizada em função da distância radial normalizada e para uma variação de q de 0 a 0.9 onde $\bar{a} = a/(GM\pi/2l_p^2)$ e $\bar{R} = R/\sqrt{l_p^2/\pi}$. Podemos perceber que a diminui à medida que q aumenta. A figura apresenta todo o conjunto de curvas (até $q = 0.9$) mostradas na figura 8.	84
Figura 9 – Gráfico em 3D da relação de Tully-Fisher não-extensiva, <i>i. e.</i> , a velocidade de rotação $\bar{v}^2 = v^2/\sqrt{GMa_0/2}$ em função da distância radial $\bar{R} = R/\sqrt{l_p^2/\pi}$ para diferentes valores de q , referente ao comportamento de v^2 como função de q e \bar{R}	87
Figura 10 – Gráfico da aceleração gravitacional modificada (\bar{a}) em função do parâmetro κ para diferentes valores de R . A linha azul corresponde a $R = 1.0$, linha amarela a $R = 2.0$, linha verde correspondendo a $R = 3.0$ e a linha laranja a $R = 4.0$. Na figura temos que $\bar{a} = a/(GM/l_p^2)$	92
Figura 11 – Gráfico da aceleração gravitacional modificada (\bar{a}) em função da distância radial R para diferentes valores de κ . A linha azul corresponde a $\kappa = 0.1$, linha amarela a $\kappa = 0.25$, linha verde correspondendo a $\kappa = 0.4$. Na figura temos que $\bar{a} = a/(GM/l_p^2)$	93

Figura 12 – Gráfico em 3D da aceleração gravitacional modificada (\bar{a}) para uma variação de κ de 0 a 0.66, onde $\bar{a} = a/(GM/l_p^2)$. Podemos notar que \bar{a} decresce conforme κ aumenta. Esta figura mostra todo o conjunto de curvas (até $R = 4$) mostradas na figura 11.	93
Figura 13 – Gráfico da velocidade de rotação modificada de galáxias (\bar{v}^2 em função de κ para diferente valores da distância radial R . A linha azul corresponde a $R = 1.0$, linha amarela a $R = 2.0$, linha verde a $R = 3.0$ e a linha laranja a $R = 4.0$. Na figura temos que $\bar{v}^2 = v^2/\sqrt{GMa_0/l_p^2}$	95
Figura 14 – Gráfico da velocidade de rotação modificada de galáxias (\bar{v}^2 em função de \bar{R} para diferente valores do parâmetro κ . A linha azul corresponde a $\kappa = 0.1$, linha amarela a $\kappa = 0.2$, linha verde a $\kappa = 0.3$, a linha vermelha a $\kappa = 0.4$ e a linha roxa correspondendo a $\kappa = 0.5$. Na figura temos que $\bar{v}^2 = v^2/\sqrt{GMa_0/l_p^2}$	95
Figura 15 – Parâmetro de Immirzi como função de κ . A curva azul (abaixo) se refere à estatística de Kaniadakis e a outra linha (laranja) refere-se á estatística de Tsallis.	101
Figura 16 – Gráfico 3D do parâmetro de Immirzi (Γ), na estatística de Kaniadakis, como função de κ e da área normalizada $A \rightarrow A/l_p^2$	101
Figura 17 – Gráfico em 3D do parâmetro de Immirzi (Γ), tanto na estatística de Kaniadakis quanto na estatística de Tsallis, em função do parâmetro κ , em amarelo, e do parâmetro q , em azul, e da área normalizada $A \rightarrow A/l_p^2$	101
Figura 18 – A função q -exponencial.	112

SUMÁRIO

1	Introdução	12
2	Espaços-Tempo Não-Comutativos	15
2.1	Introdução	15
2.2	Evidências Para um Espaço-Tempo Não-Comutativo	16
2.3	Produto Moyal	17
2.3.1	Propriedades do Produto Moyal	20
2.4	Mapeamento Seiberg-Witten	21
3	Formalismo de Faddeev-Jackiw	24
3.1	Formalismo Simplético	24
3.1.1	Formalismo de Faddeev-Jackiw	24
3.2	Algoritmo de Barcelos-Neto e Wotzasek	26
3.2.1	Caso Contínuo	28
3.2.2	Simetrias de Calibre	28
3.2.3	Contagem dos Graus de Liberdade	29
4	Abordagem via Faddeev-Jackiw da Teoria Eletromagnética em Espaço-Tempo Não-Comutativo	31
4.1	Introdução	31
4.2	Abordagem via Faddeev-Jackiw para a Teoria de Maxwell em um Espaço-Tempo Não-Comutativo	31
4.3	Modelo de Proca Abeliano Não-Comutativo	35
4.4	Quantização via Faddeev-Jackiw e Eletrodinâmica de Podolsky Não-Comutativa	39
4.5	Quantização via Abordagem de Faddeev-Jackiw	42
5	Modelo de Proca Não-Linear em Espaço-Tempo Não-Comutativo	48
5.1	Campo de Proca Abeliano Não-Comutativo e Não-Linear	48
5.2	Quantização via Método de Dirac	50
5.2.1	Abordagem via Sistema Hamiltoniano Vinculado	50
5.3	Análise de Vínculos	53
5.4	Quantização de Sistemas Hamiltonianos Vinculados de Segunda Classe .	54
5.5	Equações de Movimento a Partir dos Parênteses de Dirac	56
5.6	Quantização via Faddeev-Jackiw	57
6	Conversão de Vínculos	61

6.1	Introdução	61
6.2	Primeiro Caso	62
6.3	Segundo Caso	63
7	Princípio Holográfico e Gravitação	65
7.1	Força Entrópica	65
7.1.1	Leis de Newton a Partir do Princípio Holográfico	67
7.1.1.1	Força e Inércia	68
7.1.1.2	Lei de Newton para a Gravidade	70
7.1.1.3	Inércia e Potencial Gravitacional de Newton	71
7.1.1.4	Equação de Poisson para uma distribuição geral de matéria	72
7.1.1.5	Princípio Holográfico e Relatividade Geral	73
8	Teoria Estatística de Tsallis	74
8.1	Introdução	74
8.2	Simetria, Energia e Entropia	74
8.3	Teoria Estatística de Tsallis	76
8.3.1	Propriedades	78
8.3.1.1	Não-negatividade	78
8.3.1.2	Extremos em Probabilidades Iguais	78
8.3.1.3	Expansibilidade	78
8.3.1.4	Não-Aditividade	79
8.3.1.5	Concavidade e Convexidade	79
8.3.1.6	Conexão com a Derivada de Jackson	79
9	Entropia de Tsallis, Aceleração Newtoniana Modificada e Re- lação de Tully-Fisher	81
9.1	Introdução	81
9.2	Aceleração Gravitacional Modificada	82
9.3	Teoria Newtoniana Modificada (MOND) e Relação de Tully-Fisher Não- Extensiva	84
9.4	Equação de Friedmann Modificada	87
10	Considerações Cosmológicas em Estatística de Kaniadakis	89
10.1	Introdução	89
10.2	Estatística de Kaniadakis	89
10.3	MOND e Relação de Tully-Fisher na Estatística de Kaniadakis	92
10.4	Equação de Friedmann Modificada	96
11	Parâmetro de Immirzi em LQG e Estatística de Kaniadakis	98

12	Conclusão	103
13	Apêndice A	107
13.1	Variedade Simplética	107
13.1.1	Variedade Diferenciável	107
13.1.2	Formas Diferenciáveis	107
13.1.3	Estrutura Simplética Sobre uma Variedade Diferenciável	108
13.1.4	Espaço Tangente, Espaço Cotangente e Estrutura Simplética	109
13.1.5	Transformação Simplética	110
13.1.6	Teorema de Darboux	110
14	Apêndice B	111
	REFERÊNCIAS	113

1 Introdução

O grande desafio teórico da física é o da unificação de duas teorias que são os pilares da física moderna: a relatividade geral (RG) e a mecânica quântica (MQ). Gravidade é a força que domina em grandes distâncias, mas, ao mesmo tempo, é extremamente fraca em pequenas escalas. Já a mecânica quântica é a teoria que descreve o universo dos átomos. As tentativas teóricas que envolvem a unificação da gravidade com as outras forças da natureza em escala microscópica têm-se mostrado problemáticas, já que acabam por levar a muitos problemas, paradoxos e resultados sem sentido [5].

De todas as forças da natureza, gravidade é, sem dúvida, a mais universal. Gravidade influencia e é influenciada por qualquer ente físico que possua energia, momento linear ou tensão e pode estar intimamente conectada à sua estrutura espaço-temporal. Além disso, a natureza universal da gravitação também se evidencia por conta da extrema semelhança de derivações e resultados obtidos com as leis da termodinâmica e da hidrodinâmica [6, 7, 8, 9]. Mas, até o momento, não existe uma explicação clara do motivo desta similaridade.

A unificação da RG com as outras forças da natureza, em escala microscópica, parece não ser a abordagem correta para a solução deste problema. Por conta disso, muitos físicos têm procurado outros caminhos. Entre as abordagens encontradas na literatura está a que procura entender a gravitação como um fenômeno com um forte caráter termodinâmico [6], mostrando que as semelhanças entre a relatividade geral e a termodinâmica são muito mais profundas e significativas e que talvez este possa ser o caminho para uma conciliação entre RG e MQ.

Uma série de trabalhos pioneiros de Bekenstein [10] e Hawking [11] mostraram que quantidades como área e massa de um buraco negro estão intimamente associadas à entropia e temperatura, respectivamente. Seguindo esta linha de raciocínio, Jacobson [6] interpretou as equações de campo de Einstein como identidades termodinâmicas, mostrando que estas equações podem ser entendidas como uma equação de estado.

Em um trabalho mais recente, Verlinde [5] nos traz uma derivação heurística da gravitação, tanto Newtoniana quanto relativística, para um espaço-tempo estático. O resultado obtido por Verlinde é de que as leis de Newton podem ser entendidas pelo ponto de vista do conceito de força entrópica, originada por perturbações na informação (armazenada em superfícies holográficas) causadas pelo movimento de corpos massivos quando estes se afastam destas superfícies. Verlinde se utilizou desta ideia em conjunto com o resultado de Unruh e assim obteve a segunda lei de Newton. Na sequência de seu trabalho, Verlinde também deriva a lei de Newton para gravitação utilizando-se do conceito de força entrópica somado ao princípio holográfico e à lei de equipartição de energia. Ao se derivar a relatividade geral a partir das leis termodinâmicas fica claro que

uma revisão do conceito de espaço-tempo em escalas microscópicas se faz necessária. O modelo contínuo da teia espaço-temporal nesta escala começa a parecer uma idealização sem significado físico.

Apresentamos ainda neste trabalho uma extensão da usual teoria de Boltzmann-Gibbs conhecida como teoria estatística de Tsallis [12]: uma formulação de uma entropia não-extensiva onde sua principal característica é a dependência do parâmetro q , que mede o grau de não-extensividade. Uma importante propriedade é a de que quando temos $q \rightarrow 1$ a teoria de Boltzmann-Gibbs é recuperada. Outra extensão presente na literatura é a denominada estatística de Kaniadakis [13], [14], também chamada de κ -estatística que, assim como na estatística de Tsallis, generaliza a usual estatística de Boltzmann-Gibbs introduzindo as funções κ -exponencial e κ -logaritmo.

Além disso, uma série de trabalhos têm sido produzidos com o argumento de que uma estrutura não-comutativa do espaço-tempo no espaço de fase também pode ser esperada. O papel que esta propriedade pode desempenhar na derivação da gravitação entrópica foi considerado em [15]. Mais ainda, tem-se argumentado em outros trabalhos que tal propriedade não-comutativa é crucial na abordagem de problemas em cosmologia quântica [16, 17], em termodinâmica do buraco negro de Schwarzschild [18] e em problemas de singularidade de buracos negros [19, 20].

Outro ponto importante a se destacar é o fato de que a análise de sistemas vinculados tem atraído um grande interesse em física teórica desde os trabalhos de Dirac e Bergmann [21]-[24]. Alguns anos mais tarde, Faddeev e Jackiw [25] obtiveram um método geral para o estudo de sistemas vinculados sem a necessidade da classificação de vínculos como de primeira ou segunda classe. A técnica de Faddeev e Jackiw, também conhecida como método simplético, pode ser usada como um caminho geométrico para se obter os parênteses de Dirac. A vantagem deste método, além da não necessidade de classificação dos vínculos, é a de que algumas ambiguidades podem ser evitadas.

Após o trabalho de Faddeev e Jackiw, Barcelos-Neto e Wotzasek [26, 27] mostraram que o método simplético pode ser estendido em um formalismo iterativo de tal forma que os vínculos possam ser incorporados. O formalismo é computado iterativamente até que se encontre a matriz simplética. Esta matriz pode ser obtida sem a obrigação de eliminar os vínculos ou de encontrar a transformação de Darboux própria, necessária no procedimento original de Faddeev e Jackiw.

Temos ainda uma outra abordagem física que tem como principal objetivo a conciliação entre RG e MQ, *Loop Quantum Gravity* (LQG) [28]. Esta contém em sua teoria operadores quânticos para área e volume que apresentam espectros de valores discretos. Trata-se de uma teoria baseada na quantização canônica do campo clássico. Seu formalismo se utiliza de rede de spins tanto quanto de um espaço de Hilbert. Embora apresente resultados bastante importantes, apresenta dificuldades, tais como a existência,

a princípio, de um parâmetro livre adimensional conhecido como parâmetro de Immirzi (γ) [29]. De forma resumida, podemos dizer que o parâmetro de Immirzi determina o tamanho de um *quantum* de área em unidades de Planck.

O trabalho é organizado da seguinte forma: no capítulo 2 são apresentadas as evidências para a formulação de um espaço-tempo não-comutativo e a construção da álgebra que descreve tal formulação. Em seguida, no capítulo 3, é apresentado um resumo do formalismo de Faddeev e Jackiw e seus desdobramentos citados anteriormente.

No capítulo 4 a abordagem de Faddeev e Jackiw é aplicada para um espaço-tempo não-comutativo nas teorias eletromagnéticas de Maxwell, de Proca e de Podolsky. A teoria de Podolsky em espaço-tempo não-comutativo é um sistema vinculado que não pode ser quantizado diretamente de forma canônica. No capítulo 5, o modelo de Proca é estendido em uma versão não-linear, considerando a ação efetiva para a eletrodinâmica devido às correções quânticas em um *loop*, também considerada em um espaço-tempo não-comutativo. No capítulo 6 é aplicada uma técnica conhecida como conversão de vínculos nos resultados obtidos no capítulo anterior.

No capítulo 7 é apresentado uma revisão do trabalho de Verlinde [5], onde os principais resultados são aqui destacados. No capítulo 8 uma revisão do trabalho de Tsallis também é apresentada.

Prosseguindo com a tese, no capítulo 9 é mostrado que a conexão entre o número de bits e a área da superfície holográfica, estabelecida no trabalho de Verlinde sobre gravitação entrópica, pode depender da teoria termo-estatística escolhida previamente. Utilizando o conceito de Tsallis para a entropia generalizada em conjunto com o formalismo de gravitação entrópica, é derivada uma nova relação entre o número de *bits* e a área da superfície holográfica. Com este resultado, são então derivadas três tipos de acelerações Newtonianas no contexto da teoria estatística de Tsallis: uma teoria MOND (Modified Newtonian Dynamics) e uma equação de Friedmann modificadas de uma nova versão não-extensiva da relação de Tully-Fisher.

No capítulo 10 é realizado um trabalho semelhante ao apresentado no capítulo 9. Desta vez a estatística escolhida previamente se baseia na fórmula de entropia microcanônica de Kaniadakis. Todos os resultados obtidos em 9 são reobtidos do ponto de vista desta estatística. Já no capítulo 11, a estatística de Kaniadakis é aplicada na conexão entre o parâmetro de Immirzi em LQG e a área da superfície perfurada. No capítulo 12 são apresentadas as conclusões referentes aos trabalhos originais apresentados nesta tese.

2 Espaços-Tempo Não-Comutativos

2.1 Introdução

Não-comutatividade é uma propriedade presente em muitas estruturas teóricas da física e da matemática. Expressa, por exemplo, o princípio da incerteza de Heisenberg na Mecânica Quântica que se aplica a qualquer par de variáveis conjugadas. Podemos citar ainda a evidente não-comutatividade das rotações espaciais em três e mais dimensões. Mesmo variáveis comutativas, como as componentes do vetor momento de uma partícula, podem se tornar não-comutativas na presença de um campo magnético.

Podemos então imaginar as medições de posição como sendo não comutativas. A não-comutatividade mais simples que se pode postular é a seguinte relação de comutação entre as coordenadas espaciais [30]

$$[x^i, x^j] = i\theta^{ij}, \quad (2.1)$$

com o parâmetro θ^{ij} definindo a componente de um tensor antissimétrico, de valores constantes, de dimensão (*comprimento*)².

Como os campos em teorias lagrangianas convencionais dependem das coordenadas, postula-se que estas coordenadas apresentam a propriedade descrita pela equação (2.1). Isto nos possibilita seguir o desenvolvimento usual da teoria de campo quântico perturbativo com poucas alterações, definindo-se assim uma grande classe de teorias de campo em espaços não-comutativos. A questão que surge é a de que, postular uma relação de incerteza entre as medições de posição, levará, *a priori*, a uma teoria não-local, com todas as dificuldades inerentes.

Outra questão que surge é a quebra inevitável da invariância de Lorentz, evidenciada pela própria equação (2.1). Embora seja plausível que uma teoria definida com base em tais coordenadas não-comutativas possa ser efetivamente local em escalas de comprimento maiores que a de θ , é razoável esperar que a quebra da invariância de Lorentz seja observada em escalas inferiores.

Nas teorias quânticas, incluindo a gravidade, o espaço-tempo, em distâncias comparáveis à escala de Planck, pode apresentar propriedades diferentes das observadas em escalas maiores. Podemos citar como exemplo a gravitação quântica e o princípio de incerteza, que impede a medição de posições com precisão inferior ao comprimento de Planck: o momento e a energia necessários para fazer tal medição modificariam a geometria do próprio espaço-tempo nessas escalas [31]. Motivados por esta propriedade, podemos então postular o princípio de não-comutatividade expressa pela equação (2.1).

Existem razões para crer que qualquer teoria de gravitação quântica não será local,

no sentido convencional. A não-localidade traz consigo profundas questões conceituais e práticas que não foram bem compreendidas. Pode-se então querer entendê-las, em um primeiro momento, nos exemplos mais simples antes de prosseguir para uma teoria mais realista da gravitação quântica.

Outros motivos justificam o postulado da não-comutatividade. Podemos aprimorar as propriedades de renormalização de uma teoria a curtas distâncias, ou mesmo torná-la finita. Isto, obviamente, não é claro *a priori*, e uma teoria não-comutativa pode ter o mesmo ou pior comportamento em curtas distâncias quando comparada à uma teoria convencional.

2.2 Evidências Para um Espaço-Tempo Não-Comutativo

Nos pioneiros dias da teoria quântica de campos, foi proposto por H.S. Snyder [32], em um artigo publicado em 1947, que a estrutura do espaço-tempo, em pequenas escalas, poderia apresentar propriedades não-comutativas para as coordenadas espaciais e temporal. Esta propriedade poderia induzir um corte no regime ultravioleta. Tal conjectura foi motivada pela necessidade de se controlar divergências indesejáveis que surgiam em teorias como a eletrodinâmica quântica antes das teorias de renormalização. Entretanto, devido ao sucesso do programa de renormalização em teoria quântica de campos, com as previsões da eletrodinâmica quântica em grande concordância com a experiência, a proposta de um espaço-tempo não-comutativo em pequenas escalas foi ignorada.

A ideia por trás do espaço-tempo não-comutativo é inspirada pela mecânica quântica. Um espaço de fase quântico é definido pela substituição das variáveis x^i e p_j por operadores hermitianos \hat{x}^i e \hat{p}_j , com a seguinte relação de comutação, utilizando-se o sistema natural de unidades ($c = 1$ e $\hbar = 1$):

$$[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\delta^i_j. \quad (2.2)$$

A noção de ponto é então substituída pela noção de célula de Planck no espaço de fase quântico, como veremos adiante.

Quem primeiramente procurou descrever com rigor tal espaço quântico foi o matemático alemão von Neumann. Ele chamou este estudo de “geometria sem ponto”, referindo-se ao fato de que, em mecânica quântica, a noção de ponto não tem qualquer sentido, devido ao princípio da incerteza de Heisenberg. Tal raciocínio levou ao desenvolvimento das teorias de álgebras de von Neumann. Deu-se início então ao estudo da “geometria não-comutativa”, que se refere ao estudo de espaços topológicos nos quais as \mathbb{C}^* -álgebras comutativas de funções são substituídas por álgebras não-comutativas. Consequentemente, o estudo das propriedades deste espaço é feito de modo puramente algébrico, abandonando-se assim a noção de ponto.

Da mesma forma que na quantização de um espaço de fase clássico, um espaço-tempo não-comutativo é definido pela substituição das coordenadas x^i por operadores hermitianos \hat{x}^i de uma \mathbb{C}^* -álgebra não-comutativa de “funções sobre o espaço-tempo, as quais obedecem a relação de comutação (2.1)”. Devido à relação de incerteza induzida no espaço-tempo

$$\Delta x^i \Delta x^j \geq \frac{1}{2} |\theta^{ij}|, \quad (2.3)$$

um ponto no espaço-tempo é substituído por uma célula de Planck, de dimensão dada pela área de Planck (l_p^2), pois θ^{ij} tem dimensão óbvia de L^2 .

Relações de incerteza no espaço-tempo têm sido postuladas na seguinte forma [33, 34]:

$$\Delta x^i \Delta x^j = l_p^2, \quad (2.4)$$

onde l_p é o comprimento de Planck do espaço-tempo. No limite de baixas energias, quando $l_p \rightarrow 0$, reobtemos o espaço-tempo clássico, onde, em grandes distâncias, as coordenadas são comutantes.

2.3 Produto Moyal

Consideremos uma álgebra comutativa de funções, com a possibilidade de valores complexos em \mathbb{R}^D , com o produto usual

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \quad (2.5)$$

e vamos supor que todos os campos definidos em \mathbb{R}^D sejam funções de decrescimento rápido no infinito, ou seja, que satisfazem a condição de Schwartz

$$\sup_x (1 + |x|^2)^{k+n_1+\dots+n_D} |\partial_1^{n_1} \dots \partial_D^{n_D} \phi(x)|^2 < \infty, \quad (2.6)$$

para qualquer k e n_i pertencente ao conjunto dos números inteiros positivos ($\partial_i = \partial/\partial x^i$). Toda essa construção implica que toda função $\phi(x)$ que satisfaça a condição de Schwartz pode ser descrita pela sua transformada de Fourier

$$\tilde{\phi}(k) = \int d^D x e^{-ik_i x^i} \phi(x), \quad (2.7)$$

com $\tilde{\phi}(-k) = \overline{\tilde{\phi}(k)}$ sempre que $\phi(x)$ for real.

Como mencionado anteriormente, o espaço-tempo não-comutativo é definido pela substituição das coordenadas comutantes locais $x^i \in \mathbb{R}^D$ pelos operadores hermitianos \hat{x}^i ,

que obedecem as relações de comutação estabelecidas em (2.1). Dessa forma, é gerada uma álgebra não-comutativa de operadores.

A quantização de Weyl fornece uma correspondência um-para-um entre a álgebra de campos em \mathbb{R}^D e esta álgebra de operadores. Dada uma função $\phi(x)$ e seus correspondentes coeficientes de Fourier (2.7), o símbolo de Weyl é então definido da seguinte forma

$$\widehat{W}[\phi] = \frac{1}{2\pi^D} \int d^D k \tilde{\phi}(k) e^{ik_i \widehat{x}^i}, \quad (2.8)$$

em que foi escolhida a prescrição de Weyl de ordenamento simétrico de operadores. Por exemplo, $\widehat{W}[e^{ik_i x^i}] = e^{ik_i \widehat{x}^i}$. Note que os k'_i s são c-números (não são parâmetros grassmannianos). O operador de Weyl $\widehat{W}[\phi]$ é hermitiano se $\phi(x)$ é real. Reescrevendo (2.8) em termos do operador

$$\widehat{T}(k) \equiv e^{ik_i \widehat{x}^i}, \quad (2.9)$$

teremos

$$\widehat{W}[\phi] = \frac{1}{2\pi^D} \int d^D k \widehat{T}(k) \tilde{\phi}(k), \quad (2.10)$$

e como os $\widehat{x}^{i'}$ s são hermitianos, teremos que

$$\widehat{T}^*(k) = \widehat{T}(-k). \quad (2.11)$$

Além disso temos a seguinte relação de comutação

$$[\widehat{x}^i, [\widehat{x}^m, \widehat{x}^n]] = 0, \quad (2.12)$$

e utilizando-se da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorf

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (2.13)$$

em que $[A, B]$ é um c-número, teremos que

$$\begin{aligned} \widehat{T}(k)\widehat{T}(-k) &= e^{ik_i \widehat{x}^i} e^{ik'_j \widehat{x}^j} \\ &= \widehat{T}(k+k') e^{-\frac{1}{2}k_i k'_j \theta^{ij}}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

e podemos também escrever

$$\begin{aligned} \text{tr} \widehat{T}(k) &= \int d^D x \langle \widehat{x}_i | \widehat{T}(k) | \widehat{x}_i \rangle \\ &= (2\pi)^D \delta^D(k_i), \end{aligned} \quad (2.15)$$

e assim, de acordo com as equações (2.11), (2.14) e (2.15), obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \text{tr} \left\{ \widehat{\phi} \widehat{T}^*(k) \right\} &= \text{tr} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k' \widehat{T}(k') \widetilde{\phi}(k') \widehat{T}(-k) \right\}, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^D} \widetilde{\phi}(k), \end{aligned} \quad (2.16)$$

e esta equação servirá de motivação para o produto Moyal. Se substituirmos em (2.16) o operador $\widehat{\phi}$ por $\widehat{\phi}_1 \widehat{\phi}_2$, sendo $\widehat{\phi}_1$ e $\widehat{\phi}_2$ definidos de acordo com a equação (2.8), o campo $\widetilde{\phi}$ estará relacionado a $\widetilde{\phi}_1$ e $\widetilde{\phi}_2$ através de um produto diferente do usual

$$\begin{aligned} (\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k) &= (2\pi)^D \text{tr} \left\{ \widehat{\phi}_1 \widehat{\phi}_2 \widehat{T}^*(k) \right\}, \\ &= \int d^D k' \widetilde{\phi}_1(k') \widetilde{\phi}_2(k - k') e^{-\frac{i}{2} k'_i k_j \theta^{ij}}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

e é importante notar que $(\widetilde{\phi_1 * \phi_2})$ indica a transformada de Fourier de $\phi_1 * \phi_2$.

O produto na equação (2.17) pode ser escrito de uma outra forma. Sabendo-se que

$$\widehat{k}_i |k\rangle = k_i |k\rangle, \quad (2.18)$$

$$\widehat{x}_i |x\rangle = x_i |x\rangle, \quad (2.19)$$

$$\langle k | \phi \rangle = \widetilde{\phi}(k), \quad (2.20)$$

$$\langle x | \phi \rangle = \phi(x), \quad (2.21)$$

$$\langle k | x \rangle = \frac{e^{-ik_i x^i}}{(2\pi)^{D/2}}, \quad (2.22)$$

e utilizando-se das relações (2.18) e a noção de produto tensorial \otimes , temos que

$$(\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k) = \int d^D(k') (\langle k - k' | \otimes \langle k' |) (|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle) e^{-\frac{i}{2} k_i k'_j \theta^{ij}}, \quad (2.23)$$

onde, ao reorganizarmos os termos, teremos

$$(\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k' d^D x d^D y e^{-i(k-k')_i x^i - ik'_j y^j} e^{-\frac{i}{2} \theta^{ij} (-i\partial_i^x) (-i\partial_j^y)} \phi_1(x) \phi_2(y). \quad (2.24)$$

Temos ainda que

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \int d^D k e^{ik_i x^i} (\widetilde{\phi_1 * \phi_2})(k), \quad (2.25)$$

e substituindo a expressão (2.24) em (2.25), e desenvolvendo-se as contas, obtemos

$$(\phi_1 * \phi_2)(x) = \left[e^{\frac{i}{2} \theta^{ij} \partial_i^x \partial_j^y} \phi_1(x) \phi_2(y) \right]_{x=y}, \quad (2.26)$$

e a equação (2.26) é vista como a definição do produto Moyal.

2.3.1 Propriedades do Produto Moyal

A seguir são mostradas algumas propriedades matemáticas do produto Moyal. Notemos que (2.26) pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned}
(\phi_1 * \phi_2)(x) &\equiv \phi_1(x) * \phi_2(x) & (2.27) \\
&= \phi_1(x) \left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}^{\mu} \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}^{\nu} \right) \phi_2(x) \\
&= \phi_1(x) \phi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2} \right)^n \frac{1}{n!} [\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} \phi(x)] \theta^{\mu_1 \nu_1} \theta^{\mu_2 \nu_2} \dots \theta^{\mu_n \nu_n} \\
&\times [\partial_{\nu_1} \partial_{\nu_2} \dots \partial_{\nu_n} \phi_2(x)],
\end{aligned}$$

que exhibe explicitamente a não-localidade do produto Moyal, devido ao número infinito de derivadas. Da expressão (2.27) é possível mostrar que

$$\partial_{\mu}(\phi_1 * \phi_2) = \partial_{\mu} \phi_1 * \phi_2 + \phi_1 * \partial_{\mu} \phi_2, \quad (2.28)$$

mas esta não-localidade desaparece nos termos quadráticos da ação, já que

$$\begin{aligned}
\int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) &= \int d^D x \phi_1(x) \phi_2(x) & (2.29) \\
&= \int d^D x \phi_2(x) \phi_1(x) \\
&= \int d^D x \phi_2(x) * \phi_1(x),
\end{aligned}$$

e além disso, temos que

$$\int d^D x \partial_{\mu} \phi_1(x) * \partial^{\mu} \phi_2(x) = \int d^D x \partial_{\mu} \phi_1(x) \partial^{\mu} \phi_2(x), \quad (2.30)$$

onde é admitido o decaimento rápido dos campos no infinito. Logo, os termos de superfície são nulos. Assim, a influência da não-comutatividade em teorias de campo aparece nos termos de interação. É possível mostrar que

$$\begin{aligned}
(\phi_1 * \phi_2) * \phi_3 &= \phi_1 * (\phi_2 * \phi_3) & (2.31) \\
&= \phi_1 * \phi_2 * \phi_3,
\end{aligned}$$

e ainda

$$\int d^D x \phi_1 * \phi_2 * \phi_3 = \int d^D x \phi_3 * \phi_1 * \phi_2 = \int d^D x \phi_2 * \phi_3 * \phi_1. \quad (2.32)$$

O produto Moyal também pode ser expresso em termos do espaço dos momenta. A forma final é

$$\int d^D x \phi_1 * \phi_2 * \dots * \phi_n = \int \prod_{i=1}^n d^D k_i (2\pi)^D \delta \left(\sum_{i=1}^n k_i \right) \prod_{i=1}^n \tilde{\phi}_i(k_i) e^{-i \sum_{i < j} k_i \wedge k_j}, \quad (2.33)$$

onde introduzimos a notação $\alpha \wedge \beta = \frac{1}{2} \theta^{\mu\nu} \alpha_\mu \beta_\nu$.

Outra propriedade interessante envolve a função delta. Pode ser útil sabermos que

$$F(x) * \delta(x - y) = \delta(x - y) * F(y). \quad (2.34)$$

Utilizando-se da definição de comutador Moyal

$$[A, B]_* = A * B - B * A, \quad (2.35)$$

teremos que

$$\int d^D x \phi_1 * [\phi_2, \phi_3]_* = \int d^D x [\phi_1, \phi_2]_* * \phi_3, \quad (2.36)$$

$$[\phi_1, [\phi_2, \phi_3]_*]_* + [\phi_2, [\phi_3, \phi_1]_*]_* + [\phi_3, [\phi_1, \phi_2]_*]_* = 0, \quad (2.37)$$

$$[\phi_1(x), [\phi_2(x), \delta(x - y)]_*]_* = [\phi_2(y), [\phi_1(y), \delta(x - y)]_*]_*. \quad (2.38)$$

Existem ainda duas propriedades interessantes que envolvem a derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. A primeira nos diz que

$$D_\mu * (\phi_1 * \phi_2) = (D_\mu * \phi_1) * \phi_2 + \phi_1 * (D_\mu * \phi_2), \quad (2.39)$$

e a segunda mostra que

$$D_\mu^x * \delta(x - y) = -D_\mu^y * \delta(x - y). \quad (2.40)$$

Estas propriedades são extremamente úteis, já que uma série de termos de correção surgem em operações onde a não-comutatividade do espaço é considerada.

2.4 Mapeamento Seiberg-Witten

Uma teoria não-comutativa de calibre pode surgir naturalmente da teoria de cordas abertas [35]. Ao mesmo tempo, certos argumentos implicam que esta mesma teoria se

enquadra dentro de uma teoria de calibre convencional, ou seja, esta teoria é capaz de se enquadrar dentro de um espaço-tempo comutativo. Surge então a seguinte questão: existe alguma contradição nestas duas afirmações?

Seiberg and Witten [36] em 1999 propuseram que não somente não há nenhuma contradição como deveríamos ser capazes de escrever um mapeamento explícito de um potencial vetor não-comutativo para um potencial vetor da teoria convencional de Yang-Mills, exibindo assim a equivalência entre as duas classes de teorias.

Pode-se argumentar que grupos de calibre em teorias não-comutativas são diferentes das teorias convencionais de calibre, como fica claro em casos de campos com ordem igual a 1. Entretanto, tal afirmação não se torna um obstáculo para a proposta de mapeamento, já que somente o espaço de configurações físico - a saber, o conjunto de órbitas referentes à transformações de calibre - tem que ser equivalente. Isto implica que o mapa entre as duas leis de transformação de calibre depende não só do parâmetro de não-comutatividade θ , mas também do potencial vetor A_μ .

A proposta então é a de que existe uma relação entre o potencial vetor A_μ com sua lei de transformação de calibre convencional com o parâmetro χ dada por

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \chi + i[A_\mu, \chi], \quad (2.41)$$

e o potencial vetor não comutativo $\hat{A}_\mu(A_\mu)$, com um parâmetro de transformação de calibre $\hat{\chi}(A, \chi)$, com uma invariância de calibre não-comutativa dada por $\hat{\delta} \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\chi} + i\hat{A}_\mu * \hat{\chi} - i\hat{\chi} * \hat{A}_\mu$, tal que

$$\hat{A}(A) + \hat{\delta}_{\hat{\chi}} \hat{A}(A) = \hat{A}(A + \delta_\chi A). \quad (2.42)$$

Esta equação pode ser resolvida em primeira ordem em θ sem muita dificuldade. A solução encontrada é

$$\hat{A}_\mu(A) - A_\mu = -\frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta} \{A_\alpha, \partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu}\}_+ + O(\theta^2), \quad (2.43)$$

com a seguinte relação para $\hat{\chi}$

$$\hat{\chi}(A, \chi) - \chi = \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta} \{\partial_\alpha \chi, A_\beta\}_+ + O(\theta^2), \quad (2.44)$$

onde $\{A, B\}_+ \equiv AB + BA$. A relação correspondente em primeira ordem para o tensor $F_{\mu\nu}$ será

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\theta^{\alpha\beta} \left(2\{F_{\mu\alpha}, F_{\nu\beta}\}_+ - \{A_\alpha, D_\beta F_{\mu\nu} + \partial_\beta F_{\mu\nu}\}_+ \right). \quad (2.45)$$

Este resultado admite uma reinterpretação que define o mapeamento para todas ordens finitas em θ . Considere o problema de se mapear um campo de calibre não-comutativo $\widehat{A}^{(\theta)}$, definido com respeito ao produto Moyal para θ , para um campo de calibre não-comutativo $\widehat{A}^{(\theta+\delta\theta)}$, definido para uma vizinhança de θ . Para primeira ordem em θ , temos que as soluções para a equação (2.42) são novamente as equações (2.43) e (2.44), com o lado direito incluindo o produto Moyal para θ . Dessa forma, estas equações podem ser interpretadas como equações diferenciais que determinam o mapeamento para todas as ordens em θ .

A equação (2.43) pode ser resolvida explicitamente para o caso de campo de calibre de grau 1 com constante F . Neste caso, a equação se reduz a

$$\delta\widehat{F} = -\widehat{F}\delta\theta\widehat{F}, \quad (2.46)$$

onde os índices de Lorentz são contraídos como em multiplicação de matrizes. Esta equação tem como solução (com a condição de contorno F em $\theta = 0$)

$$\widehat{F} = (1 + F\theta)^{-1}F. \quad (2.47)$$

Este resultado pode ser utilizado para relacionar as ações nas teorias de calibre convencional e não-comutativa, em ordem principal em uma expansão com derivadas.

Com estas argumentações e propostas, poderia-se sugerir que toda esta abordagem não-comutativa nada mais é do que uma formulação mais simples de descrever teorias que poderiam ser formuladas como teorias convencionais de calibre, simplesmente aplicando-se a transformação $\widehat{F} \rightarrow F$ na ação. Entretanto, tal afirmação acaba por ignorar a possibilidade de que o mapeamento pode levar configurações de campo, não-singulares em uma descrição, para configurações de campo singulares em outra. De fato, a própria equação (2.47) nos dá um exemplo. Quando $F = -\theta^{-1}$, a descrição não-comutativa aparenta falhar, já que \widehat{F} apresenta um pólo. De modo inverso, F é singular quando $\widehat{F} = \theta^{-1}$.

Além deste, existem outros exemplos nos quais teorias de calibre não-comutativas apresentam diferentes soluções singulares e propriedades físicas em curtas distâncias, comparadas à teoria convencional de calibre e, apesar da relação formal entre as duas teorias, fica claro que a física em geral apresenta diferenças.

3 Formalismo de Faddeev-Jackiw

Neste capítulo apresentaremos o formalismo de Faddeev-Jackiw, construído a partir de uma estrutura simplética para a formulação hamiltoniana de sistemas vinculados. Trata-se de uma abordagem alternativa ao método de Dirac, favorecendo uma abordagem lagrangiana. O espaço de fase de um sistema mecânico exibe uma estrutura simplética natural.

Faddeev e Jackiw demonstraram que a descrição de sistemas vinculados por sua forma canônica, em primeira ordem, pode melhorar consideravelmente a abordagem de Dirac-Bergmann para esta área de pesquisa. Considerando-se variedades simpléticas, a estrutura geométrica, identificada nos parênteses de Dirac, pode ser obtida diretamente da matriz inversa simplética não-singular. Para variedades não-simpléticas, esta 2-forma (matriz) é degenerada e tanto sua inversa quanto os parênteses de Dirac não podem ser obtidos. Esta propriedade singular da matriz simplética caracteriza a existência de vínculos que devem ser considerados com cuidado para que se obtenha resultados consistentes. Nesta seção aplicaremos o formalismo simplético para encontrar os parênteses de Dirac para a teoria de Podolsky não-comutativa.

A seguir mostraremos resumidamente os principais conceitos que fundamentam uma estrutura simplética sobre uma variedade. A principal referência deste capítulo está no trabalho de revisão sobre formalismo simplético em [37], além de algumas partes retiradas de [38].

3.1 Formalismo Simplético

Nesta seção é apresentado o formalismo simplético de Faddeev-Jackiw para sistemas hamiltonianos vinculados [25, 39]. Esta formulação, alternativa ao método de Dirac, dispensa a categorização de vínculos, bem como a construção de estruturas algébricas especiais como o parênteses de Dirac. Em seguida é apresentado o algoritmo proposto por Barcelos-Neto e Wotzaseck [26, 27, 40] como uma sistematização do método simplético.

3.1.1 Formalismo de Faddeev-Jackiw

Considere a 1-forma lagrangiana, escrita nas coordenadas generalizadas do espaço de fase ξ^α

$$Ldt = a_\alpha d\xi^\alpha - V(\xi)dt, \quad \alpha = 1, \dots, M \quad (3.1)$$

A 1-forma lagrangiana pode ser escrita como

$$Ldt = \frac{1}{2}\xi^\alpha f_{\alpha\beta} d\xi^\beta - V(\xi)dt, \quad (3.2)$$

onde $f_{\alpha\beta}$ é a matriz simplética. A 1-forma simplética a é

$$a \equiv \frac{1}{2}\xi^\alpha f_{\alpha\beta} d\xi^\beta, \quad (3.3)$$

e a 2-forma simplética f é

$$f = da = \frac{1}{2}f_{\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta. \quad (3.4)$$

e de forma geral, f não é constante. As equações de movimento são dadas pelas equações de Euler-Lagrange

$$\dot{\xi}^\beta f_{\alpha\beta} = \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha}, \quad (3.5)$$

com

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\beta}. \quad (3.6)$$

e quando a 2-forma f é não-singular, podemos inverter a matriz simplética e obtemos as equações de movimento

$$\dot{\xi}^\alpha = f^{\alpha\beta} \frac{\partial V}{\partial \xi^\beta}, \quad (3.7)$$

onde $f^{\alpha\beta} \equiv (f_{\alpha\beta})^{-1}$. Caso a matriz simplética $f^{\alpha\beta}$ seja singular, de forma que não seja possível obter a matriz invertida $(f_{\alpha\beta})^{-1}$, se torna inviável a determinação das equações de movimento. Neste caso, denominamos a matriz $f_{\alpha\beta}$ de *matriz pré-simplética*. Faz-se então necessário realizar uma transformação de coordenadas. Faddeev e Jackiw argumentam que, baseados no Teorema de Darboux, para qualquer 1-forma $a = a_\alpha \xi^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, N$ sempre é possível fazer uma mudança de variáveis

$$\xi^\alpha \rightarrow (p^j, q^k, z^l), \quad j, k = 1, \dots, M, \quad l = 1, \dots, N - 2M, \quad (3.8)$$

de modo que a toma a forma padrão $a = p_\alpha dq^\alpha$, fora termos de derivada total. Com esta transformação de coordenadas eliminamos $N - 2M$ graus de liberdade no termo “potencial” da lagrangiana.

$$Ldt = p_\alpha dq^\alpha - \Phi(p, q, z)dt, \quad (3.9)$$

e resolvendo as equações

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z^l} \equiv 0, \quad (3.10)$$

eliminamos os vínculos e obtemos, em geral, expressões lineares nas variáveis tipo z . Ao reescrevermos a lagrangiana, substituindo as variáveis tipo z em multiplicadores de Lagrange λ , teremos que

$$L = p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(p, q) - \lambda_l \phi^l(p, q). \quad (3.11)$$

Temos então que os vínculos resultantes do método simplético são

$$\phi^l = 0, \quad (3.12)$$

e ao resolvermos a equação (3.12), reduzimos a lagrangiana ao seu formato original

$$Ldt = b_\alpha(\eta)d\eta^\alpha - W(\eta)dt. \quad (3.13)$$

Porém, a equação (3.13) apresenta um número reduzido de variáveis. Se a nova matriz pré-simplética for inversível, obtemos as equações de movimento através de (3.7). Caso contrário, repete-se o procedimento um número finito de vezes. O problema deste método é que nem sempre é simples encontrar uma transformação de coordenadas que irá reduzir o espaço de fase.

3.2 Algoritmo de Barcelos-Neto e Wotzasek

O algoritmo consiste em encontrar, a partir de uma lagrangiana dita de ordem zero, uma lagrangiana de ordem n (após n interações), na qual seja possível derivar-se a matriz simplética que governa o sistema dinâmico.

Primeiramente, consideramos a lagrangiana (3.1) como uma *lagrangiana de ordem zero* ($L^{(0)}$) e a escrevemos na seguinte forma

$$L^{(0)} = a_\alpha^{(0)} \dot{\xi}^{(0)\alpha} - V^0, \quad (3.14)$$

onde as grandezas são definidas na forma matricial como

$$(\xi^{(0)\alpha}) = (\xi^1 \dots \xi^M), \quad (3.15)$$

$$(a_\alpha^{(0)})^T = (a_1 \dots a_M). \quad (3.16)$$

Em seguida, as quantidades de (3.15) são utilizadas nas equações (3.6) e encontramos assim a matriz pré-simplética de ordem zero $f_{\alpha\beta}^{(0)}$.

Seja agora $P < N$ o posto de uma matriz pré-simplética $f_{\alpha\beta}^{(0)}$. Existem então $N - P$ vetores não-nulos e linearmente independentes chamados **modos-zero** que satisfazem

$$\nu_m^\alpha f_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.17)$$

onde $m = 1, \dots, N - P$. Logo, de acordo com (3.5) temos

$$\nu_m^\alpha \partial_\alpha V = 0, \quad (3.18)$$

que equivale à condição de consistência no formalismo simplético. Caso (3.18) não seja satisfeita, a relação deve ser imposta. O termo $\Omega_m \equiv \nu_m^\alpha \partial_\alpha V$, que não é identicamente nulo, é um vínculo que fixa relações entre as variáveis da teoria. O caso em que a relação (3.18) é identicamente nula leva a uma transformação de calibre e será tratado posteriormente. Procedemos agora considerando que a igualdade em (3.18) não é uma identidade. Consideramos

$$0 = \nu_m^\alpha \partial_\alpha V^{(0)} \equiv \Phi_m^{(0)}, \quad (3.19)$$

de modo que os Φ_m representem as equações de vínculo do sistema. Impomos agora os vínculos na lagrangiana através da técnica dos multiplicadores de Lagrange. Entretanto, estes multiplicadores são inseridos como derivadas temporais de uma função arbitrária. O objetivo é encontrar a lagrangiana de ordem um ($L^{(1)}$), equivalente à (3.11) e definida por

$$L^{(1)} = L^{(0)} - \dot{\lambda}^{m(0)} \Phi_m^{(0)}, \quad (3.20)$$

e com este resultado, repetimos o procedimento apresentado onde agora

$$\begin{aligned} (\xi^{(1)\alpha}) &= (\xi^{(0)\alpha} \quad \lambda^m), \\ (a_\alpha^{(1)})^T &= (a_\alpha^{(0)} \quad \Phi_m), \\ V^{(1)} &= V^{(0)}(\xi^{(0)}) \Big|_{\Phi_m=0}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

e substituindo estas variáveis em (3.6), obtemos a matriz pré-simplética da primeira iteração

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} = \begin{pmatrix} f_{\alpha\beta}^{(0)} & \partial_\alpha \Phi_m^{(0)} \\ -\partial_\alpha \Phi_m^{(0)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

e repetimos então o algoritmo, em um número finito de iterações, até que se obtenha a matriz simplética (inversível). Em seguida, calculamos os parênteses generalizados entre as coordenadas do espaço de fase definido por

$$\{A, B\}^* \equiv \frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha} f^{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \xi^\beta}, \quad (3.23)$$

para quaisquer funções $A(\xi)$ e $B(\xi)$ definidas no espaço de fase.

3.2.1 Caso Contínuo

O formalismo simplético se estende naturalmente para aplicação em teorias de campo. Para o caso contínuo fazemos as seguintes redefinições, sem alteração do algoritmo.

A equação (3.17), que define o modo-zero, fica

$$\int d^3y \nu_m^\alpha(x) f_{\alpha\beta}(x, y) = 0, \quad (3.24)$$

e a condição de consistência (3.18) se torna

$$\int d^3y \nu_m^\alpha(x) \frac{\delta V(y)}{\delta \xi^\alpha} = 0, \quad (3.25)$$

com a lagrangiana sendo descrita em termos da densidade de lagrangiana e a matriz pré-simplética (3.6) fica definida por

$$f_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{\delta a_\beta(x)}{\delta \xi^\alpha(y)} - \frac{\delta a_\alpha(y)}{\delta \xi^\beta(x)}, \quad (3.26)$$

e, finalmente, os parênteses generalizados ficam

$$\{A, B\}^* \equiv \frac{\delta A(x)}{\delta \xi^\alpha(y)} f^{\alpha\beta}(x, y) \frac{\delta B(y)}{\delta \xi^\beta(x)}. \quad (3.27)$$

3.2.2 Simetrias de Calibre

Considere a variação infinitesimal de coordenadas

$$\xi'^\alpha = \xi^\alpha + \delta_\epsilon \xi^\alpha, \quad (3.28)$$

e a variação infinitesimal da ação S , $S\{\xi'\} - S\{\xi\}$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\alpha}(\xi, \dot{\xi}) \delta_\epsilon \xi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}^\alpha}(\xi, \dot{\xi}) \delta_\epsilon \dot{\xi}^\alpha \right] dt, \quad (3.29)$$

onde \mathcal{L} denota a densidade de lagrangiana. Fixando-se a condição de contorno $\delta_\epsilon(t_1) = \delta_\epsilon(t_2) = 0$, temos

$$\delta_\epsilon S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\alpha}(\xi, \dot{\xi}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}^\alpha}(\xi, \dot{\xi}) \right] \delta_\epsilon \xi^\alpha dt. \quad (3.30)$$

Tome agora a lagrangiana L definida por (3.9). Aqui também consideramos que a matriz Hessiana associada a L é singular. Se impusermos $\delta_\epsilon \xi = 0$, o que significa que (3.28) define uma transformação de calibre, obtemos que

$$0 = \left(\frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} \dot{\xi}^\beta - \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} - \frac{da_\alpha}{dt} \right) \delta_\epsilon \xi^\alpha = (f_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta - \partial_\alpha V) \delta_\epsilon \xi^\alpha. \quad (3.31)$$

Relação que é satisfeita caso (i) os dois termos entre parênteses do lado direito sejam iguais, ou se (ii)

$$\delta_\epsilon \xi^\alpha \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} = 0, \quad (3.32)$$

e

$$\delta_\epsilon \xi^\alpha f_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta = 0, \quad (3.33)$$

simultaneamente. O primeiro caso (i) leva às equações de Euler-Lagrange, aqui descartadas por considerarmos $f_{\alpha\beta}$ singular. Comparando (3.32) e (3.33) com (3.17) e (3.18), temos que

$$\delta_\epsilon \xi^\alpha = \nu^\alpha \epsilon, \quad (3.34)$$

onde $\epsilon = \epsilon(t)$ fornece as transformações de coordenadas que deixam a ação invariante. Por essa razão, dizemos que os modos-zero são os geradores de simetrias de calibre do método simplético.

No caso contínuo $\epsilon(t) \rightarrow \epsilon(x, t)$ e

$$\delta_\epsilon \xi^\alpha(x) = \int d^3y \epsilon(y) \nu^\alpha(y) \delta^3(x - y). \quad (3.35)$$

3.2.3 Contagem dos Graus de Liberdade

Em uma teoria que os vínculos são apenas equações que relacionam as variáveis canônicas originais, não há a presença de funções arbitrárias. Após a fixação de calibre, mesmo os vínculos que geram transformações de calibre são reduzidos a relações numéricas entre as variáveis canônicas originais. Assim, chegamos à seguinte fórmula para a contagem de graus de liberdade

$$\begin{aligned} 2 \times (\text{Número de graus de liberdade}) &= (\text{Número de variáveis canônicas independentes}) \\ &= (\text{Número total de variáveis canônicas}) - (\text{Número de equações de vínculos}) \\ &\quad - (\text{Número de vínculos que geram transformações de calibre}) - (\text{Número de variáveis de calibre fixadas}) \end{aligned}$$

Como os vínculos são todos derivados dos modos-zero (e os que levam as transformações de calibre devem ser fixados para se obter equações que descrevem univocamente o estado de um sistema físico), podemos escrever a fórmula da contagem dos graus de liberdade como

$$2 \times (\text{Número de graus de liberdade}) = (\text{Número total de variáveis canônicas}) \\ - (\text{Número de modos-zero}) - (\text{Número de vínculos de calibre})$$

4 Abordagem via Faddeev-Jackiw da Teoria Eletromagnética em Espaço-Tempo Não-Comutativo

4.1 Introdução

Um dos grandes desafios da física teórica, se não o maior, é o de unificar, em uma estrutura única e consistente, mecânica quântica e relatividade geral [33], [41]-[45]. A conciliação entre relatividade especial e mecânica quântica já se encontra realizada através da teoria quântica de campos. A introdução de uma quantidade na escala de Planck como o parâmetro de não-comutatividade θ no espaço-tempo pode ser uma maneira de se introduzir uma propriedade quântica ao espaço-tempo clássico [46], [47]. Entretanto, a maneira de se conciliar relatividade geral com o formalismo quântico é ainda um mistério.

O propósito deste capítulo é investigar este problema de modo alternativo, com a aplicação do método de Faddeev-Jackiw [25] às teorias eletromagnéticas de Maxwell, Proca e Podolsky em um espaço-tempo não-comutativo.

A eletrodinâmica de Podolsky tem como objetivo eliminar divergências que aparecem na eletrodinâmica de Maxwell em curtas distâncias. Consequentemente, na eletrodinâmica de Podolsky, a energia associada a uma partícula puntual é finita [48]. O tratamento da teoria eletrodinâmica de Podolsky em um espaço-tempo não-comutativo foi desenvolvido em [49] e [50], onde foi analisado a invariância de calibre deste modelo. O produto Moyal aqui é introduzido na lagrangiana de Podolsky como no mapeamento de Sieberg-Witten. A versão não-comutativa da eletrodinâmica de Podolsky é um sistema vinculado. A análise via Faddeev-Jackiw deste modelo com derivadas superiores foi descrita em [51]-[55]. Recentemente foi aplicada para a gravitação de Brans-Dycke [56]. Neste capítulo analisamos ambos os cenários. Usamos o método de Faddeev-Jackiw para analisar uma versão não-comutativa da eletrodinâmica de Podolsky com derivadas superiores.

É bem conhecido que teorias com derivadas de ordem superior tem seu espectro “infectado” com estados de norma negativa, os chamados “fantasmas” [57]. Uma maneira de superar tais dificuldades nestas teorias é, por exemplo, fazer com que os fantasmas sejam não-dinâmicos, que funciona muito bem em muitas abordagens como em análises cosmológicas. No nosso caso, temos derivadas de ordem superior tanto na formulação comutativa e não-comutativa do modelo de Podolsky. Entretanto, não é nossa intenção discutir essa específica e espinhosa questão. Será demonstrado que, apesar da possibilidade do surgimento de fantasmas, ambas as formulações são completamente solucionáveis.

4.2 Abordagem via Faddeev-Jackiw para a Teoria de Maxwell em um Espaço-Tempo Não-Comutativo

A ação da eletrodinâmica de Maxwell não-comutativa é [58]

$$S = \int \left(-\frac{1}{4} \widehat{F}_{\mu\nu} * \widehat{F}^{\mu\nu} \right) d^4x, \quad (4.1)$$

onde $*$ denota o produto Moyal. \widehat{A}_μ e $\widehat{F}_{\mu\nu}$ são, respectivamente, o potencial vetor e o tensor eletromagnético descritos em um espaço-tempo não-comutativo. A convenção de soma em índices repetidos é assumido daqui em diante. Utilizando-se o mapeamento de Sieberg-Witten em primeira ordem no parâmetro θ , os campos \widehat{A}_μ podem ser escritos em termos das quantidades comutativas como

$$\widehat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} A_\alpha (\partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu}), \quad (4.2)$$

e o parâmetro $\theta_{\alpha\beta}$ se refere à propriedade não-comutativa do espaço-tempo.

Uma propriedade básica em teoria não-comutativa [35], [59]-[62], é que a integral do produto Moyal de duas quantidades é igual à integral do produto usual das mesmas duas quantidades, podendo a ação (4.1) ser reescrita da seguinte forma

$$S = \int \left(-\frac{1}{4} \widehat{F}_{\mu\nu} \widehat{F}^{\mu\nu} \right) d^4x, \quad (4.3)$$

e introduzindo a Eq. (4.2) na Eq. (4.3), a lagrangiana em (4.1) pode ser escrita como

$$L_{Maxwell} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{8} \theta_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \theta_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} F_{\mu\nu}, \quad (4.4)$$

e esta densidade de lagrangiana pode ser escrita de forma explícita utilizando-se as seguintes relações

$$\begin{cases} A_\mu = (\mathbf{A}, iA_0), \\ E_i = iF_{i4}, \\ B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F^{jk}, \\ \theta_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \theta^{jk}. \end{cases} \quad (4.5)$$

e a lagrangiana acima acaba por tomar a seguinte forma

$$\begin{aligned} L_{Maxwell} &= \frac{1}{2} [(\dot{A}_i - \partial_i A_0)^2 - (\nabla \times \mathbf{A})^2] [1 + \theta \cdot (\nabla \times \mathbf{A})] \\ &\quad - \theta^i (\dot{A}_i - \partial_i A_0) (\dot{A}_j - \partial_j A_0) (\nabla \times \mathbf{A})^j, \end{aligned} \quad (4.6)$$

e da lagrangiana acima podemos mostrar que

$$\pi^0 = 0, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
\pi_i &= (\dot{A}_i - \partial_i A_0)[1 + \theta^j (\nabla \times \mathbf{A})_j] \\
&+ \theta^j (\dot{A}_j - \partial_j A_0) (\nabla \times \mathbf{A})_i \\
&+ \theta_i (\dot{A}_j - \partial_j A_0) (\nabla \times \mathbf{A})_j.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

onde π^α é definido pela seguinte relação

$$\pi^\alpha = \frac{\partial L_{Maxwell}}{\partial \dot{A}^\alpha}. \tag{4.9}$$

Seguindo o método de Faddeev-Jackiw, definimos as primeiras variáveis canônicas $\xi^{(0)} = (A_i, \pi_i, A_0)$. Assim, a lagrangiana de ordem zero fica

$$L_{Maxwell}^{(0)} = \dot{A}^\mu \pi_\mu - V^{(0)}(\xi), \tag{4.10}$$

onde

$$\begin{aligned}
V^{(0)} &= \frac{1}{4} (2\pi_i^2 + F_{ij}^2) + \frac{1}{4} (F_{ij}^2 - 2\pi_i^2) [\theta^k (\nabla \times \mathbf{A})_k] \\
&+ (\pi^j \theta_j) [(\nabla \times \mathbf{A})^i \pi_i] + \pi^i \partial_i A_0,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

e os momentos canônicos associados às variáveis simpléticas são

$$a_{A_i}^{(0)} = \pi_i, \quad a_{\pi_i}^{(0)} = 0 \quad e \quad a_{A_0}^{(0)} = 0, \tag{4.12}$$

e com a matriz de interação dada pela seguinte relação

$$f_{\alpha\beta}^{(0)}(x, y) = \frac{\partial a_\beta^{(0)}(y)}{\partial \xi_\alpha^{(0)}(x)} - \frac{\partial a_\alpha^{(0)}(y)}{\partial \xi_\beta^{(0)}(x)}, \tag{4.13}$$

podemos ver que

$$f_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_i^j & 0 \\ \delta_i^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^{(3)}(x - y), \tag{4.14}$$

que é claramente uma matriz singular com modo-zero $\tilde{v} = (0, 0, \tilde{v}_3(x))$. Com este modo-zero podemos encontrar o primeiro vínculo do sistema, que é

$$\begin{aligned}
\Omega^{(0)} &= \int d^3x \tilde{V}^{A_0}(x) \frac{\delta V^{(0)}(y)}{\delta A_0(x)} = 0, \\
\Omega^{(0)} &= -\partial_i \pi^i(y) = 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Seguindo o método de Faddeev-Jackiw, estendemos o espaço de fase ao incluir este vínculo $\Omega^{(0)}$ na lagrangiana. Então, teremos que

$$L_{Maxwell}^{(1)} = \pi^i \dot{A}_i + \dot{\lambda}(\partial_i \pi^i) - V^{(1)}, \quad (4.16)$$

onde $V^{(1)} = V^{(0)}|_{\Omega^{(0)}=0}$. Dessa forma, o novo potencial canônico será

$$V^{(1)} = \frac{1}{4} (2\pi_i^2 + F_{ij}^2) + \frac{1}{4} (F_{ij}^2 - 2\pi_i^2) [\theta^k (\nabla \times \mathbf{A})_k] + (\pi^j \theta_j) [(\nabla \times \mathbf{A})^i \pi_i], \quad (4.17)$$

e o espaço de fase estendido será $\xi_\alpha^{(1)} = (A_i, \pi_i, \lambda)$. Da equação acima podemos determinar as novas 1-forma canônicas

$$a_{A_i}^{(1)} = \pi_i \quad e \quad a_\lambda^{(1)} = \partial_i \pi^i, \quad (4.18)$$

que nos leva à seguinte matriz

$$f_{\alpha\beta}^{(1)}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_i^j & 0 \\ \delta_i^j & 0 & -\partial_i^x \\ 0 & \partial_i^x & 0 \end{bmatrix} \delta^{(3)}(x - y). \quad (4.19)$$

e esta matriz é singular novamente e não gera novos vínculos, como esperado em teorias de calibre. O novo modo-zero é $\tilde{v}^{(1)} = (0, 0, \tilde{v}_3^{(1)}(x))$.

Com o objetivo de se obter uma matriz simplética regular, adicionamos um termo de fixação de calibre ao potencial simplético. Escolhemos então o calibre de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Logo, a lagrangiana será

$$L_{Maxwell}^{(2)} = \dot{A}_i \pi^i + \dot{\lambda} \partial_i \pi^i + \dot{\eta} \partial_i A^i - V^{(2)}, \quad (4.20)$$

e a matriz simplética toma a seguinte forma

$$f_{\alpha\beta}^{(1)}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_i^j & 0 & \partial_i^x \\ \delta_i^j & 0 & -\partial_i^x & 0 \\ 0 & \partial_i^x & 0 & 0 \\ \partial_i^x & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^{(3)}(x - y), \quad (4.21)$$

que é uma matriz não-singular. A inversa calculada será

$$(f^{(1)})_{\alpha\beta}^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_i^j + \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\nabla^2} & 0 & \frac{\partial_j^x}{\nabla^2} \\ \delta_i^j - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\nabla^2} & 0 & \frac{\partial_i^x}{\nabla^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial_i^x}{\nabla^2} & 0 & \frac{1}{\nabla^2} \\ \frac{\partial_j^x}{\nabla^2} & 0 & -\frac{1}{\nabla^2} & 0 \end{bmatrix} \delta^{(3)}(x - y), \quad (4.22)$$

e com este resultado conseguimos obter o parênteses de Dirac da matriz acima. Estes serão

$$\{A_i(x, t), \dot{A}^j(y, t)\} = \left(\delta_i^j - \frac{\partial_i^x \partial_x^j}{\nabla^2} \right) \delta^{(3)}(x - y), \quad (4.23)$$

que é exatamente o parênteses do campo de calibre eletromagnético no calibre de Coulomb, obtido facilmente pelo método de Faddeev-Jackiw. Podemos ver claramente que a não-comutatividade não altera a expressão do parênteses.

4.3 Modelo de Proca Abeliano Não-Comutativo

Uma forma de se introduzir teorias de calibre é através do procedimento de Stueckelberg [63], onde introduzimos um campo auxiliar conectado ao termo que rompe a invariância de calibre. Na lagrangiana L_{Proca} não-comutativa a expressão fica

$$\begin{aligned} L_{Proca} = & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{8} \theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Theta \right)^2 \\ & - \frac{1}{2} m^2 \theta^{\alpha\beta} \left(A_\alpha + \frac{1}{e} \partial_\alpha \Theta \right) \left[\partial_\beta \left(A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Theta \right) + F_{\beta\mu} \right] \left(A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \Theta \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde Θ é o campo de Stueckelberg. Esta lagrangiana é invariante perante as seguintes transformações

$$\begin{aligned} A_\mu(x) & \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \\ \Theta(x) & \rightarrow \Theta(x) - e \Lambda(x), \end{aligned} \quad (4.25)$$

e pode ser escrita em termos do campo A_μ utilizando-se as relações descritas em (4.5). Dessa forma, teremos então

$$\begin{aligned} L_{Proca} = & \frac{1}{2} \left[(\dot{A}_i - \partial_i A_0)^2 - (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] \left[1 + \theta^j (\nabla \times \mathbf{A})_j \right] \\ & - \theta^i (\partial_i A_0 - \dot{A}_i) (\partial_j A_0 - \dot{A}_j) (\nabla \times \mathbf{A})^j \\ & + \frac{1}{2} m^2 \left[\left(A_i + \frac{1}{e} \partial_i \Theta \right)^2 - \left(A_0 + \frac{1}{e} \partial_0 \Theta \right)^2 \right] \\ & - \frac{1}{2} m^2 \theta^{\alpha\beta} \left(A_\alpha + \frac{1}{e} \partial_\alpha \Theta \right) \cdot \left[\partial_\beta \left(A_i + \frac{1}{e} \partial_i \Theta \right) + F_{\beta i} \right] \left(A_i + \frac{1}{e} \partial_i \Theta \right) \\ & + \frac{1}{2} m^2 \theta^{\alpha\beta} \left(A_\alpha + \frac{1}{e} \partial_\alpha \Theta \right) \cdot \left[\partial_\beta \left(A_0 + \frac{1}{e} \partial_0 \Theta \right) + F_{\beta 0} \right] \left(A_0 + \frac{1}{e} \partial_0 \Theta \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

e utilizando-se da definição dos momentos canônicos conjugados

$$\pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial(\dot{A}^\mu)}, \quad P_\Theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}}, \quad (4.27)$$

em conjunto com a equação (4.26), obtemos

$$\pi_0 = 0, \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \pi_i &= (\dot{A}_i - \partial_i A_0)(1 + \theta^j (\nabla \times \mathbf{A})_j) \\ &+ (\theta^j \partial_j A_0 - \theta^k \dot{\mathbf{A}}_k) B_i - (\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{B} \cdot \nabla A_0) \theta_i \\ &- \frac{1}{2} m^2 \theta_{ji} \left(A^j + \frac{1}{e} \partial^j \Theta \right) \left(A_0 + \frac{1}{e} \dot{\Theta} \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} P_\Theta &= -\frac{m^2}{e} \left(A_0 + \frac{\dot{\Theta}}{e} \right) + \frac{m^2}{2e} \theta^{\alpha\beta} \left(A_\alpha + \frac{1}{e} \partial_\alpha \Theta \right) \\ &\times \left[\partial_\beta \left(A_0 + \frac{1}{e} \dot{\Theta} \right) + F_{\beta 0} \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Para aplicação do método de Faddeev-Jackiw, a lagrangiana (4.26) é reescrita na seguinte forma

$$L_{Proca}^{(0)} = a_\alpha^{(0)} \xi^{(0)\alpha} - V^{(0)}, \quad (4.31)$$

e assim teremos

$$L_{Proca}^{(0)} = \pi^i \dot{A}_i + P_\Theta \dot{\Theta} - V^{(0)}, \quad (4.32)$$

onde o potencial $V^{(0)}$ simplético é

$$\begin{aligned} V^{(0)} &= \frac{e^2}{m^2} P_\Theta^2 - e A_0 P_\Theta + \frac{1}{4} (2\pi^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2) \\ &+ \frac{1}{4} [(\nabla \times \mathbf{A})^2 - 2\pi^2] [\theta^k (\nabla \times \mathbf{A})_k] \\ &+ (\pi^j \theta_j) (\nabla \times \mathbf{A})_k \pi^k + \pi^k \partial_k A_0 - \frac{m^2}{2} \left(A_i + \frac{1}{e} \partial_i \Theta \right)^2 \\ &+ \frac{m^2}{2} \pi_i \theta^{ij} \left(A_j + \frac{1}{e} \partial_j \Theta \right) \left(e \frac{P_\Theta}{m^2} \right) + \frac{m^2}{2} \theta^{\alpha\beta} \left(A_\alpha + \frac{1}{e} \partial_\alpha \Theta \right) \\ &\times \left[\partial_\beta \left(A_i + \frac{1}{e} \partial_i \Theta \right)^2 + F_{\beta 0} \left(A_i + \frac{1}{e} \partial_i \Theta \right) \pi^i \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

e as variáveis simpléticas são

$$\xi^{(0)} = (A_i, \pi_i, A_0, \Theta, P_\Theta), \quad (4.34)$$

com seus respectivos momentos canônicos

$$a_{A_i}^{(0)} = \pi_i \quad e \quad a_{P_\Theta}^{(0)} = P_\Theta, \quad (4.35)$$

e, conseqüentemente, a matriz de interação se apresenta na seguinte forma

$$f_{\alpha\beta}^{(0)}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_i^j & 0 & 0 & 0 \\ \delta_i^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \delta^{(3)}(x - y). \quad (4.36)$$

A matriz acima apresenta o modo-zero $v^{(0)} = (0, 0, v_3^{(0)}(x), 0, 0)$. Com este modo-zero obtemos o primeiro vínculo deste modelo que é

$$\Omega^{(0)} = -\partial_i \pi^i - eP_\Theta, \quad (4.37)$$

e introduzimos este vínculo na lagrangiana. Dessa forma, teremos

$$L_{Proca}^{(1)} = \pi^i \dot{A}_i + \dot{\lambda}(\partial_i \pi^i + eP_\Theta) - V^{(1)}, \quad (4.38)$$

e, conseqüentemente, os novos momentos canônicos serão

$$a_{A_i}^{(1)} = \pi_i, \quad a_\Theta^{(1)} = P_\Theta, \quad a_\lambda^{(1)} = \partial_i \pi^i - eP_\Theta, \quad (4.39)$$

com o novo potencial simplético definido pela expressão

$$V^{(1)} = V^{(0)}|_{\Omega^{(0)}=0}, \quad (4.40)$$

e a expressão completa de $V^{(1)}$ fica

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= \frac{e^2}{m^2} P_\Theta^2 + \frac{1}{4} (2\pi^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2) + \frac{1}{4} [(\nabla \times \mathbf{A})^2 - 2\pi^2] [\theta^k (\nabla \times \mathbf{A})_k] \\ &+ (\pi^j \theta_j) (\nabla \times \mathbf{A})_k \pi^k + \pi^k \partial_k A_0 - \frac{m^2}{2} \left(A_i + \frac{1}{e} \partial_i \Theta \right)^2 \\ &+ \frac{m^2}{2} \pi_i \theta^{ij} \left(A_j + \frac{1}{e} \partial_j \Theta \right) \left(e \frac{P_\Theta}{m^2} \right) + \frac{m^2}{2} \theta^{\alpha\beta} \left(A_\alpha + \frac{1}{e} \partial_\alpha \Theta \right) \\ &\times \left[\partial_\beta \left(A_i + \frac{1}{e} \partial_i \Theta \right)^2 + F_{\beta 0} \left(A_i + \frac{1}{e} \partial_i \Theta \right) \pi^i \right], \end{aligned} \quad (4.41)$$

e dessa forma, novo espaço de fase passa a ser descrito pelas seguintes variáveis canônicas

$$\xi^{(1)} = (A_i, \pi_i, A_0, \Theta, P_\Theta, \lambda), \quad (4.42)$$

e a nova matriz simplética será

$$f_{\alpha\beta}^{(1)}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_i^j & 0 & 0 & 0 \\ \delta_i^j & 0 & 0 & 0 & -\partial_j \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & -\partial_j & 0 & -e & 0 \end{bmatrix} \delta^{(3)}(x - y). \quad (4.43)$$

sendo o modo-zero desta matriz expresso por

$$\tilde{v}^{(1)} = (\partial_\alpha(x), 0, -e\alpha(x), 0, \alpha(x)), \quad (4.44)$$

e não são gerados novos vínculos. Dessa forma, precisamos eliminar alguns graus de liberdade para que obtenhamos os parênteses de Dirac. Esta é uma das principais características de uma teoria de calibre. Escolhemos o calibre de Coulomb

$$\chi = \partial_i A^i + \frac{m^2}{e} \Theta = 0, \quad (4.45)$$

e obtemos a lagrangiana de ordem 2

$$\mathcal{L}_{Proca}^{(2)} = \pi^i \dot{A}_i + (\partial_i \pi^i) \dot{\lambda} + \left(\partial_i A^i + \frac{m^2}{e} \Theta \right) \dot{\chi} - V^{(2)}, \quad (4.46)$$

onde os novos momentos canônicos serão

$$a_{A_i}^{(2)} = \pi_i, \quad a_{\Theta}^{(2)} = P_{\Theta}, \quad a_{\lambda}^{(2)} = \partial_i \pi^i - e P_{\Theta}, \quad a_{\chi}^{(2)} = \partial_i A^i + \frac{m^2}{e} \Theta, \quad (4.47)$$

com a nova matriz de interação

$$f_{\alpha\beta}^{(2)}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta_i^j & 0 & 0 & 0 & -\partial_j^x \\ \delta_i^j & 0 & 0 & 0 & -\partial_j^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{m^2}{e} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e & 0 \\ 0 & -\partial_j^x & 0 & -e & 0 & 0 \\ \partial_j^x & 0 & -\frac{m^2}{e} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^{(3)}(x - y), \quad (4.48)$$

e finalmente, através da matriz inversa obtida a partir de $f_{\alpha\beta}^{(2)}(x, y)$, identificamos

$$\{A_i(x), \pi^j(y)\} = \left(\delta_i^j - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\nabla^2} \right) \delta^{(3)}(x - y), \quad (4.49)$$

$$\{\Theta(x), P_{\Theta}(y)\} = \left(1 + \frac{m^2}{\nabla^2} \right) \delta^{(3)}(x - y),$$

que são os os parênteses de Dirac obtidos via método de Faddeev-Jackiw.

4.4 Quantização via Faddeev-Jackiw e Eletrodinâmica de Podolsky Não-Comutativa

A ação para a eletrodinâmica de Podolsky em um espaço-tempo não-comutativo é dada por

$$S = \int \left(-\frac{1}{4} \widehat{F}_{\mu\nu} * \widehat{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} a^2 \partial_\lambda \widehat{F}^{\lambda\nu} * \partial^\mu \widehat{F}_{\mu\nu} \right) d^4x, \quad (4.50)$$

onde, como dito anteriormente, $*$ representa o produto Moyal. A notação \widehat{F} indica objetos imersos em um espaço-tempo não-comutativo e \widehat{A}_μ e $\widehat{F}_{\mu\nu}$ representam, respectivamente, o potencial vetor e tensor eletromagnético não-comutativos. O termo a representa $1/m$ que é o inverso de massa do campo \widehat{A}_μ . Utilizaremos a métrica com assinatura $(-, +, +, +)$ e a convenção de soma em índices repetidos continua sendo assumida.

O produto de dois objetos, que se multiplicam através do produto Moyal em uma integral, pode ser substituído por uma multiplicação comum. Logo, a ação (4.50) pode ser escrita como

$$S = \int \left(-\frac{1}{4} \widehat{F}_{\mu\nu} \widehat{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} a^2 \partial_\lambda \widehat{F}^{\lambda\nu} \partial^\mu \widehat{F}_{\mu\nu} \right) d^4x, \quad (4.51)$$

e esta ação descreve a teoria de Podolsky em um espaço-tempo não-comutativo.

Para se explicitar os termos não-comutativos neste modelo, ou seja, os termos que contém θ , utilizamos o bem conhecido mapeamento de Seiberg-Witten [36], que em primeira ordem em θ se apresenta na forma

$$\widehat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} A_\alpha (\partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu}) \quad (4.52)$$

e conseqüentemente

$$\widehat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \theta^{\rho\sigma} (F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} - A_\rho \partial_\sigma F_{\mu\nu}). \quad (4.53)$$

Sob o mapeamento de SW (Seiberg-Witten), na ordem mais baixa não-trivial, a dualidade e/ou as relações de equivalência são mantidas inalteradas. Além disso, o mapeamento SW não distingue invariâncias de calibre diferentes. Substituindo a equação (4.53) em (4.51), obtemos a densidade de lagrangiana não-comutativa de Podolsky com os mesmos graus de liberdade, mas com termos adicionais devidos ao parâmetro de não-comutatividade em primeira ordem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Pod} = & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{8} \theta_{\rho\sigma} (4F^{\mu\rho} F^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} - F_{\rho\sigma} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \\ & + \frac{1}{2} a^2 \partial_\lambda F^{\lambda\nu} [\partial^\mu F_{\mu\nu} + 2\theta^{\rho\sigma} \partial^\mu (F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} - A_\rho \partial_\sigma F_{\mu\nu})], \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde podemos notar rapidamente que para $\theta^{\mu\nu} = 0$ recuperamos o modelo comutativo.

Podemos reescrever a lagrangiana (4.54) em termos dos campos eletromagnéticos fundamentais, usando as relações de (4.5). Teremos então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Pod} &= \frac{1}{2}(E^2 - B^2) + \frac{1}{2}a^2 [(\nabla \cdot \mathbf{E})^2 - (\dot{\mathbf{E}} - (\nabla \times \mathbf{B})^2)] \\ &- \left[(\theta^j E_j)(B_k E^k) - (\theta^i B_i) E^2 \right] + \frac{1}{2}(B^2 - E^2)\theta_j (\nabla \times \mathbf{A})^j \\ &+ a^2 \left[(\theta^j \dot{\mathbf{B}}_j) E^i + (\theta^k \mathbf{B}_k) \dot{E}^i \right] (\nabla \times \mathbf{B})_i \\ &- a^2 \left[\theta^j (\nabla \times \mathbf{B})_j \partial_0 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) - \theta^k (\mathbf{A} \times \nabla)_k \mathbf{E} \right]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Para se obter as equações de movimento em modelos com derivada superior, temos a seguinte forma generalizada

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{Pod}}{\partial A_\lambda} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{Pod}}{\partial (\partial_\mu A_\lambda)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{Pod}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda)} - \partial_\alpha \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}_{Pod}}{\partial (\partial_\alpha \partial_\mu \partial_\nu A_\lambda)} = 0, \quad (4.56)$$

de modo tal que as equações de movimento para o modelo de Podolsky não-comutativo se apresentam da seguinte maneira

$$\begin{aligned} (1 + a^2 \partial_\mu \partial^\mu) \partial_\rho F^{\rho\lambda} &+ \frac{1}{2} \partial_\rho \left[\theta^{\mu[\rho} F^{\lambda]\nu} F_{\nu\mu} + \theta^{\mu[\rho} F^{\lambda]\nu} F_{\mu\nu} + \theta^{\beta\alpha} F_\beta^{[\rho} F^{\lambda]\alpha} \right] \\ &- \frac{1}{4} \partial_\rho \left[\theta^{\beta\alpha} F^{\rho\lambda} F_{\beta\alpha} + \theta^{\rho\lambda} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] \\ &+ \partial_\rho \left\{ a^2 \left[\theta^{\beta[\rho} \partial^{\alpha]} F^\lambda{}_\alpha \partial^\mu F_{\mu\beta} + \theta^{\alpha[\rho} \partial^\lambda] F_{\nu\alpha} \partial_\beta F^{\beta\nu} + \theta^{\rho\lambda} \partial_\alpha F^\alpha{}_\nu \partial_\beta F^{\beta\nu} \right] \right\} \\ &+ \partial_\rho \partial_\sigma \left[a^2 F^\sigma{}_\beta \theta^{\beta[\rho} \partial_\alpha F^{\lambda]\alpha} + \theta^{\beta\sigma} \partial_\alpha F^{\alpha[\lambda} \partial^{\rho]} A_\beta \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Assim, analisando a equação (4.54), podemos calcular os momentos relativos ao espaço de fase descrito pelos seguintes pares: (A_μ, ρ^μ) , (\dot{A}_μ, π^μ) e (\ddot{A}_μ, χ^μ) , ou seja, pares formados pelas variáveis canônicas e seus respectivos momentos no espaço de fase. Os momentos para modelos com derivada superior são dados por

$$\begin{aligned} \rho^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\mu} - 2\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \dot{A}_\mu)} + 3\partial_0 \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \ddot{A}_\mu)} \\ &+ 3\partial_i \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \partial_j \dot{A}_\mu)} + \partial_0 \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\mu}, \\ \pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{A}_\mu} - 3\partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \ddot{A}_\mu)} - \partial_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_\mu}, \\ \chi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{\dot{A}}}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Pelo fato de \mathcal{L}_{Pod} não depender de \ddot{A}_μ , o momento relativo a esta variável é nulo. Dessa forma teremos

$$\begin{aligned}
\chi^\mu &= 0, \\
\pi^0 &= 0, \\
\pi^k &= a^2 \partial_\alpha F^{\alpha k} + a^2 \theta^{ij} \partial^\alpha (F_{\alpha i} F_j^k - A_i \partial_j F_\alpha^k) \\
&\quad + a^2 \theta^{kj} (\partial_\alpha F^{\alpha i}) F_{ij} + a^2 \theta^{ij} \partial_j (A_i \partial_\alpha F^{\alpha k}), \\
\rho^0 &= a^2 \partial_i (\partial_\alpha F^{\alpha i}) + a^2 \theta^{ij} \partial_k \partial^\alpha (F_{\alpha i} F_j^k - A_i \partial_j F_\alpha^k) \\
&\quad + a^2 \theta^{ij} \partial_i (\partial_\alpha F^{\alpha k} F_{kj}) + a^2 \theta^{ij} \partial_k \partial_j (A_i \partial_\alpha F^{\alpha k}), \\
\rho^k &= -F^{0k} \left(1 - \frac{1}{2} \theta^{ij} F_{ij} \right) + 2a^2 \partial^k \partial_i F^{i0} - a^2 \partial_0 (\partial_\alpha F^{\alpha k}) - \theta^{kj} F_{0i} F_j^i \\
&\quad - \theta^{ij} F_{0i} F_j^k - a^2 \theta^{kj} (\partial_\alpha F^{\alpha i} \partial_j F_{0i} - \partial_i (\partial_0 F^{0i} F_{0j}) - \partial^i (\partial_l F^{l0} F_{ji})) \\
&\quad - a^2 \theta^{kj} (\partial_i (\partial_l F^{li} F_{0j}) - \partial_0 (\partial_\alpha F^{\alpha i} F_{ij})) \\
&\quad - \theta^{ij} \partial_j (\partial_0 F^{0k} F_{0i} + \partial_l F^{lk} \partial_0 A_i - \partial_l F^{l0} \partial^k A_i - \partial_l F^{lk} F_{0i} + \partial_l F^{lk} \dot{A}_i) \\
&\quad - \theta^{ij} \partial^k (F_{li} \partial^l F_{0j} - \partial^l A_i \partial_j F_{l0} - 3 \partial_j (A_i \partial_l F^{l0})) \\
&\quad - \theta^{ij} \partial_0 (\partial^\alpha (F_{\alpha i} F_j^k - A_i \partial_j F_\alpha^k) + 3 \partial_j (A_i \partial_0 F^{0k})).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

A densidade de hamiltoniana canônica é dada por

$$\mathcal{H}_{Pod} = \pi^i \dot{A}_i + \rho^0 \dot{A}_0 + \rho^i \dot{A}_i - \mathcal{L}_{Pod}, \tag{4.60}$$

onde os momentos canônicos são dados por (4.59) e a lagrangiana \mathcal{L}_{Pod} é dada por (4.55). Para o caso em questão (modelos com derivada superior), o espaço de fase é dado por $(A_0, A_n, \dot{A}_0, \dot{A}_n, \rho_0, \rho_n, \pi_0, \pi_n)$. Dessa forma, substituindo-se estes valores na equação (4.60), teremos

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{Pod} &= \rho^\mu \dot{A}_\mu - \frac{\pi^2}{2a^2} (1 - \theta^{ij} \partial_j A_i) - \pi^i \partial_i \dot{A}^0 + \pi_j \partial_i F^{ij} \\
&\quad + \frac{1}{4} (2F^{0i} F_{0i} + F^{ij} F_{ij}) \left(1 - \frac{1}{2} \theta^{ij} F_{ij} \right) + \frac{1}{2} \theta^{ij} (F_{0i} F_{0k} F_j^k + F_i^k F_{k0} F_{0j} + F_{kl} F_i^k F_j^l) \\
&\quad - \frac{1}{2} a^2 (\partial^i \dot{A}_i - \partial_i^2 A_0)^2 - a^2 \theta^{ij} [\partial_\mu F^{\mu 0} \partial^k (F_{ki} F_{0j} - A_i \partial_j F_{k0})] \\
&\quad + \theta^{ij} [\pi^k \partial^\mu (F_{\mu i} F_{kj} - A_i \partial_j F_{\mu k})],
\end{aligned} \tag{4.61}$$

onde, por questões de simplicidade, foi mantido na expressão acima o tensor eletromagnético F_{ij} . Na próxima seção será discutida a quantização da lagrangiana (4.55) através do formalismo de Faddeev-Jackiw.

4.5 Quantização via Abordagem de Faddeev-Jackiw

A lagrangiana em (4.55) obviamente apresenta termos de ordem superior. Assim, para se construir uma ação efetiva com campos locais, teremos que utilizar as aproximações em ordem finita. Isto significa que escolhemos uma solução particular da equação de movimento e computamos a correspondente aproximação de Ostrogradski no espaço-tempo plano para se trabalhar com estes termos [64]-[66]. Dessa forma, temos que introduzir dois novos conjuntos de pares canônicos, $\Gamma^\mu \equiv (\dot{A}^\mu, \pi^\mu)$ e $(\phi^\mu \equiv \dot{\check{A}}^\mu, \chi^\mu)$. Assim, podemos escrever

$$(\rho^\mu, A^\mu), \quad (\pi^\mu, \Gamma^\mu) \quad e \quad (\phi^\mu, \chi^\mu). \quad (4.62)$$

e utilizando-se os pares de (4.62), podemos reescrever a lagrangiana (4.55) em primeira ordem na forma

$$\widehat{\mathcal{L}} = \pi_\mu \dot{\Gamma}^\mu + \rho_\mu \dot{A}^\mu - \widehat{V}^{(0)}, \quad (4.63)$$

onde $\widehat{V}^{(0)}$ é o potencial simplético e os momentos canônicos são dados por (4.59). Utilizando-se as Eqs. (4.63) e (4.55), a expressão do potencial simplético fica

$$\begin{aligned} \widehat{V}^{(0)} &= \rho_\mu \Gamma^\mu - \frac{1}{2a^2} \pi^2 (1 - \theta^{ij} \partial_j A_i) - a^2 (\partial_k \Gamma^k - \nabla^2 A_0)^2 \\ &- \pi^j (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_j \\ &+ \pi^i \partial_i \Gamma_0 [1 - \theta^j (\nabla \times \mathbf{A})_j] \left[\frac{1}{2} (\Gamma - \nabla A_0)_j^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \\ &- (\theta^i \Gamma_i - \theta^j \partial_j A_0) [\Gamma^k (\nabla \times \mathbf{A})_k - \nabla A_0 (\nabla \times \mathbf{A})^2] \\ &+ a^2 \theta^{ij} \left\{ \partial^\mu \partial_\mu A^0 - (\partial_q \Gamma^q) \partial^l [\epsilon_{lik} (\nabla \times \mathbf{A})^k (\Gamma_j + \partial_j A_0) - A_i \partial_j (\Gamma_l - \partial_l A_0)] \right\} \\ &- \theta^{ij} \pi^l \pi_i \epsilon_{ljk} (\nabla \times \mathbf{A})^k - \theta^{ij} \pi^n [(\Gamma_i - \partial_i A_0) (\partial_n \Gamma_j - \partial_j \Gamma_n)] \\ &- \theta^{ij} \pi^n [\epsilon_{kil} (\nabla \times \mathbf{A})^l \partial^k (\epsilon_{njm} (\nabla \times \mathbf{A})^m)] \\ &+ \theta^{ij} \pi^l [\Gamma_i \partial_j (\Gamma_l - \partial_l A_0) + \epsilon_{mlk} \partial^m A_i \partial_j (\nabla \times \mathbf{A})^k] + \theta^{ij} \pi^k A_i \partial_j \pi_k, \end{aligned} \quad (4.64)$$

e, a partir da lagrangiana (4.63), teremos que as variáveis simpléticas originais são dadas por

$$\zeta_\alpha^{(0)} = (A_k, \rho_k, A_0, \rho_0, \Gamma_k, \pi_k, \Gamma_0), \quad (4.65)$$

onde não escrevemos π_0 pois este momento não aparece na lagrangiana (4.63). Assim, dando prosseguimento ao método de Faddeev-Jackiw, podemos identificar na lagrangiana (4.63) as 1-formas canônicas não nulas

$$A_k a_k^{(0)} = -\rho_k, \quad A_0 a_0^{(0)} = \rho_0 \quad e \quad \Gamma_k a_k^{(0)} = -\pi_k. \quad (4.66)$$

Seguindo o formalismo simplético, calculamos a matriz $f_{ab}(x, y)$. Utilizando-se dos resultados acima, obtemos que

$$f_{ab}(x, y) = \begin{bmatrix} A_{ij} & O_{4 \times 3} \\ O_{3 \times 4} & B_{ij} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

onde

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

e a matriz (4.67) é singular. Dessa forma, o próximo passo é identificar o autovetor com autovalor zero. Este autovetor nada mais é que

$$v = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v^7) \quad (4.69)$$

onde v^7 é uma função arbitrária associada a Γ . Aplicando-se a relação de consistência, para que se obtenha novos vínculos, obtém-se

$$\int d^3y v^7(x) \frac{\delta \widehat{V}^{(0)}(y)}{\delta \Gamma_0(x)} = \rho_0 + \partial_i \pi^i = 0, \quad (4.70)$$

que é claramente um vínculo, que pode ser denotado por

$$\Omega^{(0)}(x) \equiv \rho_0 + \partial_i \pi^i \approx 0, \quad (4.71)$$

onde

$$\begin{aligned} \pi^k &= a^2 \partial_\alpha F^{\alpha k} + a^2 \theta^{ij} \partial^\alpha (F_{\alpha i} F_j^k - A_i \partial_j F_\alpha^k) \\ &+ a^2 \theta^{kj} (\partial_\alpha F^{\alpha i}) F_{ij} + a^2 \theta^{ij} \partial_j (A_i \partial_\alpha F^{\alpha k}), \\ \rho^0 &= a^2 \partial_i (\partial_\alpha F^{\alpha i}) + a^2 \theta^{ij} \partial_k \partial^\alpha (F_{\alpha i} F_j^k - A_i \partial_j F_\alpha^k) \\ &+ a^2 \theta^{ij} \partial_i (\partial_\alpha F^{\alpha k} F_{kj}) + a^2 \theta^{ij} \partial_k \partial_j (A_i \partial_\alpha F^{\alpha k}). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Dando prosseguimento ao método de Faddeev-Jackiw, precisamos introduzir este vínculo na lagrangiana (4.63) com o auxílio de um multiplicador de Lagrange. Ficamos então com a seguinte expressão

$$\widehat{\mathcal{L}}^{(1)} = \pi_\mu \dot{\Gamma}^\mu + \rho_\mu \dot{A}^\mu + \dot{\lambda} (\rho_0 + \partial_j \pi^j) - \widehat{V}^{(1)}, \quad (4.73)$$

e as novas variáveis simpléticas são

$$\zeta_\alpha^{(1)} = (A_k, \rho_k, A_0, \rho_0, \Gamma_k, \pi_k, \lambda), \quad (4.74)$$

com o novo potencial simplético é obtido pela relação

$$\widehat{V}^{(1)} = \widehat{V}^{(0)}|_{\Omega^{(0)}(x)=0}, \quad (4.75)$$

e assim, da Eq. (4.64), teremos

$$\begin{aligned} \widehat{V}^{(1)} &= \rho_i \Gamma^i - \frac{1}{2a^2} \pi^2 (1 - \theta^{ij} \partial_j A_i) - \frac{a^2}{2} (\partial_k \Gamma^k - \nabla^2 A_0)^2 \\ &- \pi^j (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_j \\ &+ \pi^i \partial_i \Gamma_0 [1 - \theta^j (\nabla \times \mathbf{A})_j] \left[\frac{1}{2} (\Gamma - \nabla A_0)_j^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \\ &- (\theta^i \Gamma_i - \theta^j \partial_j A_0) [\Gamma^k (\nabla \times \mathbf{A})_k - \nabla A_0 (\nabla \times \mathbf{A})^2] \\ &+ a^2 \theta^{ij} \left\{ \partial^\mu \partial_\mu A^0 - (\partial_q \Gamma^q) \partial^l [\epsilon_{lik} (\nabla \times \mathbf{A})^k (\Gamma_j - \partial_j A_0) - A_i \partial_j (\Gamma_l - \partial_l A_0)] \right\} \\ &- \theta^{ij} \pi^l \pi_i \epsilon_{ljk} (\nabla \times \mathbf{A})^k - \theta^{ij} \pi^n [(\Gamma_i - \partial_i A_0) (\partial_n \Gamma_j - \partial_j \Gamma_n)] \\ &- \theta^{ij} \pi^n [\epsilon_{kil} (\nabla \times \mathbf{A})^l \partial^k (\epsilon_{njm} (\nabla \times \mathbf{A})^m)] \\ &+ \theta^{ij} \pi^l [\Gamma_i \partial_j (\Gamma_l - \partial_l A_0) + \epsilon_{mlk} \partial^m A_i \partial_j (\nabla \times \mathbf{A})^k] + \theta^{ij} \pi^k A_i \partial_j \pi_k, \end{aligned} \quad (4.76)$$

e com este resultado, temos que os novos vetores serão

$$A_k a_k^{(1)} = -\rho_k, \quad A_0 a_0^{(1)} = \rho_0, \quad \Gamma a_k^{(1)} = -\pi_k, \quad \lambda a^{(1)} = \rho_0 + \partial_i \pi^i. \quad (4.77)$$

e a nova matriz $f_{ab}^{(1)}(x, y)$ será

$$f_{ab}^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{ij} & D_j \\ -D_j & C_{ij} \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

que ainda é uma matriz singular, onde

$$D_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & -\partial_j \\ 0 & -\partial_j & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.79)$$

e A_{ij} é dado pela expressão em (4.68). Da matriz expressa em (4.78), podemos identificar os modos-zero que possuem autovalores não nulos:

$$\widehat{v}^{(1)} = (0 \ 0 \ v_3^{(1)} \ 0 \ v_5^{(1)} \ 0 \ v_7^{(1)}), \quad (4.80)$$

e utilizando-se agora a condição de consistência, teremos

$$\int d^3y \left[v_3^{(1)} \frac{\delta}{\delta A_0(x)} + v_5^{(1)} \frac{\delta}{\delta \Gamma^i(x)} \right] \widehat{V}^{(1)}(y), \quad (4.81)$$

onde obtemos o novo vínculo $\Omega^{(1)}$

$$\Omega^{(1)} \equiv \partial_i \rho^i(x) = 0, \quad (4.82)$$

onde usamos o fato de $v_i^{(1)5} - \partial_i v^{(1)3} = 0$. O próximo passo é introduzir este vínculo na lagrangiana com o auxílio de um multiplicador de Lagrange. Assim teremos

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi_\mu \dot{\Gamma}^\mu + \rho_\mu \dot{A}^\mu + \dot{\lambda}(\rho_0 + \partial_i \pi^i) + \dot{\eta}(\partial_j \rho^j) - V^{(2)}, \quad (4.83)$$

onde

$$\widehat{V}^{(2)} = \widehat{V}^{(1)}|_{\Omega^{(1)}(x)=0}, \quad (4.84)$$

e esta última relação nos leva aos seguintes resultados

$${}^{A_k} a_k^{(2)} = -\rho_k, \quad {}^{A_0} a_0^{(2)} = \rho_0, \quad \Gamma a_k^{(2)} = -\pi_k, \quad \lambda a^{(2)} = \rho_0 + \partial_i \pi^i, \quad \eta a^{(2)} = \partial_i \rho^i, \quad (4.85)$$

e as seguintes novas variáveis simpléticas

$$\zeta_\alpha^{(2)} = (A_k, \rho_k, A_0, \rho_0, \Gamma_k, \pi_k, \lambda, \eta), \quad (4.86)$$

e assim podemos obter a nova matriz simplética $f_{ab}^{(2)}(x, y)$, que será

$$f_{ab}^{(2)} = \begin{bmatrix} A_{ij} & E_{j,x} \\ -E_{i,y} & F_{ij} \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

onde

$$E_{j,x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad F_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & -\partial_j & 0 \\ 0 & -\partial_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.88)$$

e A_{ij} é dado por (4.68). A matriz (4.87) é novamente singular e apresenta dois modos-zero, que são

$$\widehat{v} = (\widehat{v}_i^{(1)} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \widehat{v}_i^{(8)}), \quad (4.89)$$

e

$$\widetilde{v} = (0 \ 0 \ \widetilde{v}_i^{(3)} \ 0 \ \widetilde{v}_i^{(5)} \ 0 \ \widetilde{v}_i^{(7)} \ 0). \quad (4.90)$$

O próximo passo será aplicar novamente a condição de consistência para se obter um novo vínculo. Entretanto, o modo-zero \hat{v} gera novamente o vínculo $\partial_i \rho^i = 0$. Ou seja, novos vínculos não são gerados, mas a matriz simplética ainda se mantém singular. De acordo com o formalismo simplético, o modelo proposto exibe uma simetria e o gerador de simetria é o respectivo modo-zero.

Da lagrangiana (4.55) é fácil perceber que o último termo quebra a usual invariância de calibre da eletrodinâmica $\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon$. De acordo com os resultados obtidos até aqui, a eletrodinâmica de Podolsky em um espaço-tempo não-comutativo é invariante sob alguma transformação de calibre, mas não pelas transformações usuais. Em [49] foi encontrado, através do método de Noether, uma invariância de calibre lagrangiana dual em relação à lagrangiana (4.63).

Assim, temos que escolher um calibre conveniente. Precisamos corrigir os graus de liberdade do calibre. Como no caso comutativo, escolheremos o calibre de Coulomb generalizado

$$(1 + \partial_\mu \partial^\mu a^2)(\partial_i A^i) = 0, \quad A_0 = 0. \quad (4.91)$$

Fixamos o calibre em $\mathcal{L}^{(2)}$ e obtemos a lagrangiana $\mathcal{L}^{(3)}$

$$\mathcal{L}^{(3)} = \pi_\mu \dot{\Gamma}^\mu + \rho_\mu \dot{A}^\mu + \dot{\lambda}(\rho_0 + \partial_i \pi^i) + \dot{\eta}(\partial_j \rho^j) + \dot{\chi}(1 - a^2(\partial_\mu \partial^\mu)^2 \nabla^2) \partial_k A^k - \widehat{V}^{(3)}, \quad (4.92)$$

onde $\widehat{V}^{(3)}$ é dado por

$$\begin{aligned} \widehat{V}^{(3)} &= \rho_i \Gamma^i - \frac{1}{2} \Gamma^2 - \frac{a^2}{2} (\partial_k \Gamma^k)^2 - \frac{1}{2a^2} \pi^2 (1 - \theta^{ij} \partial_j A_i) - \pi^j (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_j \\ &+ \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 - \theta_j (\nabla \times \mathbf{A})^j \left[\frac{1}{2} \Gamma^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{A})^2 \right] - (\theta_i \Gamma^i) [\Gamma^j (\nabla \times \mathbf{A})_j] \\ &- a^2 \theta^{ij} [\epsilon_{lik} \partial_m \Gamma^m (\partial^l (\nabla \times \mathbf{A})^k) (\Gamma_j + A^l \partial_j \Gamma_l)] - \epsilon_{ljk} \theta^{ij} \pi^l \pi_i (\nabla \times \mathbf{A})^k \\ &- \theta^{ij} \pi^n [\Gamma_i (\partial_n \Gamma_j - \partial_j \Gamma_n) + \epsilon_{kil} \epsilon_{njm} (\nabla \times \mathbf{A})^l \partial^k (\nabla \times \mathbf{A})^m] \\ &+ \theta^{ij} \pi^k \Gamma_i \partial_j \Gamma_k + \epsilon_{mlk} \theta^{ij} \pi^l \partial^m A_i \partial_j (\nabla \times \mathbf{A})^k + \theta^{ij} \pi^k A_i \partial_j \pi_k. \end{aligned} \quad (4.93)$$

e a partir da lagrangiana (4.92) podemos identificar os seguintes vetores

$$\begin{aligned} A_k a_k^{(3)} &= -\rho_k, \quad A_0 a_0^{(3)} = \rho_0, \quad \Gamma a_k^{(3)} = -\pi_k, \\ \lambda a^{(3)} &= \rho_0 + \partial_i \pi^i, \quad \eta a^{(3)} = \partial_i \rho^i, \quad \chi a^{(3)} = \nabla_p^2 (\partial_j A^j), \end{aligned} \quad (4.94)$$

e finalmente obtemos a matriz não-singular

$$f_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nabla_p^2 \partial_j^x \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_j^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_{ij} & 0 & \partial_i^x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \partial_j^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_i^y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nabla_p^2 \partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta^{(3)}(x-y), \quad (4.95)$$

e após um longo trabalho algébrico, encontramos a matriz inversa de $f_{ij}^{(3)}$ e assim podemos obter facilmente os parênteses de Dirac da teoria, que são

$$\begin{aligned} \{A_i(x), \rho^j(y)\}_{DB} &= \delta_i^j \delta^{(3)}(x, y) - \nabla^2 \partial_i \partial^j G(x, y) \\ \{\Gamma_i(x), \pi^j(y)\}_{DB} &= \delta_i^j \delta^{(3)}(x, y), \end{aligned} \quad (4.96)$$

onde $G(x, y)$ é a função de Green

$$\nabla^2 G(x, y) = \delta^{(3)}(x, y), \quad (4.97)$$

e a partir dos parênteses generalizados em (4.96) pode-se proceder à quantização canônica.

5 Modelo de Proca Não-Linear em Espaço-Tempo Não-Comutativo

5.1 Campo de Proca Abeliano Não-Comutativo e Não-Linear

A ação efetiva para a eletrodinâmica devido às correções quânticas em um *loop* foi originalmente calculada por Heisenberg e Euler [67], [68] e é válida para frequências $\nu \ll m_e c^2/h$. Schwinger, em [69], apresenta uma formulação invariante de calibre desta ação. Como consequência, temos a seguinte expressão para a densidade de lagrangiana efetiva em primeira ordem

$$L = -\frac{1}{4}F + \frac{\mu}{4}F^2 + \frac{7\mu}{16}G^2, \quad (5.1)$$

onde

$$\mu = \frac{8}{45}\alpha^2 \left(\frac{\hbar}{m_e c}\right)^3 \frac{1}{m_e c^2} \approx 1.67 \times 10^{-31} \text{cm}^3/\text{erg} \quad (5.2)$$

e $\alpha \approx \frac{1}{137}$ representa a constante de estrutura fina. $F_{\mu\nu}$ se refere ao tensor eletromagnético, enquanto os seguintes invariantes são construídos a partir de $F_{\mu\nu}$, a saber

$$\begin{aligned} F &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \\ G &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

sendo $\eta_{\mu\nu\alpha\beta}$ o tensor antissimétrico de Levi-Civita, com

$$\eta_{0123} = 1, \quad (5.4)$$

e ainda

$$\eta^{0123} = -1. \quad (5.5)$$

Nossa proposta de trabalho é avaliar as consequências físicas se considerarmos a densidade de lagrangiana (5.1) imersa em um espaço-tempo não-comutativo, acrescido do termo de massa $\frac{1}{2}m^2\hat{A}_\mu * \hat{A}^\mu$, já escrito em sua versão não-comutativa. A densidade de lagrangiana (5.1) fica então reescrita na seguinte forma

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} &= -\frac{1}{4}\hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} + \frac{\mu}{4}\hat{F}_{\alpha\beta} * \hat{F}^{\alpha\beta} * \hat{F}_{\mu\nu} * \hat{F}^{\mu\nu} + \frac{7\mu}{16}\hat{G} * \hat{G} \\ &+ \frac{1}{2}m^2\hat{A}_\mu * \hat{A}^\mu, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde \hat{A}_μ , $\hat{F}_{\mu\nu}$ e \hat{G} representam o potencial vetor, o tensor eletromagnético e o invariante definido em (5.3), respectivamente, em suas versões não-comutativas. Estes tensores devem ser escritos em termos de suas quantidades correspondentes comutativas. Em primeira ordem no parâmetro $\theta_{\alpha\beta}$, que caracteriza a não-comutatividade do espaço-tempo, as expressões correspondentes ficam [70]

$$\widehat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}A_\alpha(\partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu}), \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \widehat{A}_\nu - \partial_\nu \widehat{A}_\mu - i\widehat{A}_\mu * \widehat{A}_\nu + i\widehat{A}_\nu * \widehat{A}_\mu \\ &= F_{\mu\nu} + \theta^{\alpha\beta}(F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta} - A_\alpha\partial_\beta F_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

A integral sobre o produto Moyal de duas quantidades é igual à mesma integral com o produto usual entre estas mesmas quantidades. Dessa forma, podemos escrever a ação com a lagrangiana (5.6), levando em conta as relações (5.7) e (5.8), da seguinte forma

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{8}\theta_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}F^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{7\mu}{16}G^2 + \frac{1}{2}m^2 [A_\mu A^\mu - \theta^{\alpha\beta}A_\alpha(\partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu})A^\mu] \right), \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde o tensor eletromagnético comutativo é dado por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Através das definições expressas em (4.5), podemos obter a expressão da lagrangiana não-comutativa em primeira ordem, em termos de seus campos físicos e do quadri-potencial vetor. O resultado será

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(E^2 + B^2)(1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \cdot \vec{E})(\vec{E} \cdot \vec{B}) + \mu(E^2 - B^2)^2 + 7\mu(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \\ &\quad + \frac{m^2}{2}(A_0 A^0 + A_j A^j) + \frac{3}{4}m^2 A_j A^j (\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - \frac{3}{4}m^2 (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{\theta} \cdot \vec{A}) \\ &\quad - \frac{m^2}{4}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\nabla}(A_0 A^0) - \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{E} A^0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

As equações de Euler-Lagrange para o campo de Proca não-comutativo e não linear são então obtidas a partir de (5.9). O resultado é

$$\begin{aligned} \partial_\rho F^{\rho\gamma} &+ \theta_{\rho\sigma}\partial_\mu(F^{\mu\rho}F^{\gamma\sigma}) + \theta^{\gamma\sigma}\partial_\mu(F^{\mu\nu}F_{\nu\sigma}) - \theta^{\rho\sigma}\partial_\rho(F^{\gamma\nu}F_{\nu\sigma}) + \frac{1}{4}\theta^{\gamma\rho}\partial_\rho(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\ &+ \frac{1}{2}\theta^{\rho\sigma}\partial_\nu(F^{\gamma\nu}F_{\rho\sigma}) + 2\mu\partial_\nu(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\nu}) - \frac{7\mu}{4}\eta^{\mu\nu\alpha\gamma}\partial_\alpha(GF_{\mu\nu}) + m^2 A^\gamma \\ &- \frac{m^2}{2}\theta^{\gamma\beta}(\partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu})A^\mu + m^2\theta^{\alpha\beta}\partial_\beta(A_\alpha A^\gamma) - \frac{m^2}{2}\theta^{\alpha\gamma}(\partial_\mu A_\alpha)A^\mu \\ &- \frac{m^2}{2}\theta^{\alpha\beta}A_\alpha(\partial_\beta A^\gamma + F_{\beta}{}^\gamma) = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde na última linha a condição de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ foi considerada. Substituindo (4.5) em (5.11), as equações de movimento ficam expressas em dois conjuntos de equações. Para o caso em que $\gamma = 0$ obtém-se

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (5.12)$$

onde

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{E} + (\vec{\theta} \cdot \vec{B})\vec{E} - (\vec{\theta} \cdot \vec{E})\vec{B} - (\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{\theta} + 4\mu(E^2 - B^2)\vec{E} \\ &+ 14\mu(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B} - \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A})A^0,\end{aligned}\quad (5.13)$$

e o termo de fonte ρ é dado por

$$\rho = m^2 \left[A_0 + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})A_0 + \frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{E} \right], \quad (5.14)$$

e fazendo $\gamma = i$, onde $i = 1, 2, 3$, o resultado que se obtém é

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\vec{J}, \quad (5.15)$$

sendo

$$\vec{J} = m^2 \left[\vec{A} - \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{\theta})A_0 + \frac{3}{2}(\vec{\theta} \cdot \vec{B})\vec{A} - \frac{3}{4}(\vec{\theta} \cdot \vec{A})\vec{B} - \frac{3}{4}(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{\theta} \right], \quad (5.16)$$

e ainda

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{B} + (\vec{\theta} \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{\theta} \cdot \vec{E})\vec{E} - \frac{1}{2}(E^2 - B^2)\vec{\theta} + 4\mu(E^2 - B^2)\vec{B} - 14\mu(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{E} \\ &- m^2 \left(\frac{1}{4}A_0^2 + \frac{3}{4}A_j^2 \right) \vec{\theta} + \frac{3}{4}m^2 \vec{A}(\vec{\theta} \cdot \vec{A}).\end{aligned}\quad (5.17)$$

com o conjunto de equações livre de fontes dado por

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (5.18)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.19)$$

obtido através da relação $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, onde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ e $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o tensor de Levi-Civita.

5.2 Quantização via Método de Dirac

5.2.1 Abordagem via Sistema Hamiltoniano Vinculado

Nesta seção será analisado o comportamento dinâmico do campo de Proca não-comutativo e não-linear no contexto de sistemas hamiltonianos vinculados, via formalismo de Dirac [71]. Utilizando-se da definição do momento canonicamente conjugado π^γ

$$\pi^\gamma = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_\gamma)}, \quad (5.20)$$

obtemos para o momento π^0

$$\pi^0 = 0, \quad (5.21)$$

e para o momento conjugado espacial π^i

$$\begin{aligned} \vec{\pi} &= -\vec{E} - (\vec{\theta} \cdot \vec{B})\vec{E} + (\vec{\theta} \cdot \vec{E})\vec{B} + (\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{\theta} - 4\mu(E^2 - B^2)\vec{E} - 14\mu(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B} \\ &+ \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A})A^0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

sendo que o resultado em (5.21) já mostra o primeiro vínculo da teoria, a saber

$$\phi_1 \approx 0, \quad (5.23)$$

onde $\phi_1 \equiv \pi^0$. Comparando-se o resultado de (5.13) com (5.22), podemos notar que

$$\vec{\pi} = -\vec{D}, \quad (5.24)$$

e ao multiplicarmos π^i por θ_i , teremos para $\vec{\theta} \cdot \vec{E}$ a seguinte expressão, em primeira ordem

$$\vec{\theta} \cdot \vec{E} = -(\vec{\theta} \cdot \vec{\pi}) + O(\theta^2, \theta\mu), \quad (5.25)$$

e calculando-se o produto escalar de (5.22) com o vetor \vec{B} e utilizando o resultado de (5.25), obtemos a seguinte expressão para $\vec{E} \cdot \vec{B}$

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{B} &= -(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) - B^2(\vec{\theta} \cdot \vec{\pi}) + \frac{m^2}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} A^0 + 4\mu(E^2 - B^2)(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) \\ &+ 14\mu B^2(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) + O(\theta^2, \mu^2, \theta\mu), \end{aligned} \quad (5.26)$$

e, conseqüentemente, a expressão de $(\vec{E} \cdot \vec{B})^2$, em primeira ordem, se apresentará na forma

$$\begin{aligned} (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 &= (\vec{\pi} \cdot \vec{B})^2 + 2B^2(\vec{\pi} \cdot \vec{B})(\vec{\theta} \cdot \vec{\pi}) - m^2(\vec{\pi} \cdot \vec{B})(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} A^0 \\ &- 8\mu(E^2 - B^2)(\vec{\pi} \cdot \vec{B})^2 - 28\mu B^2(\vec{\pi} \cdot \vec{B})^2 + O(\theta^2, \mu^2, \theta\mu). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Substituindo as expressões (5.25), (5.26) e (5.27) no resultado para o valor de π^2 , calculado a partir de (5.22), teremos

$$\begin{aligned} 8\mu E^4 &+ \left[1 + 2(\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - 8\mu B^2\right] E^2 - \pi^2 - 4(\vec{\theta} \cdot \vec{\pi})(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) \\ &+ 28\mu(\vec{\pi} \cdot \vec{B})^2 + m^2(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A^0 = 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Neste momento precisamos obter uma expressão do campo físico \vec{E} em termos do momento conjugado $\vec{\pi}$, $\vec{\theta}$ e \vec{B} , ou seja, queremos obter uma expressão hamiltoniana não dependente de derivadas temporais, contidas na expressão de E^i . Podemos ver que (5.28) nada mais é do que uma equação de segundo grau em E^2 . Dessa forma, teremos duas

soluções diferentes para E^2 . A questão que surge então é: qual seria a solução correta? Existe uma solução correta ou devemos utilizar ambas soluções?

Primeiramente, vamos calcular as duas soluções para E^2 , diferenciando-as pelos índices $+$ e $-$. As duas soluções encontradas foram

$$\begin{aligned} E_+^2 &= \pi^2 + 2\mu B^4 - B^2(\vec{\theta} \cdot \vec{B}) + 4(\vec{\theta} \cdot \vec{\pi})(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) - 28\mu(\vec{\pi} \cdot \vec{B})^2 \\ &- m^2(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A^0 + O(\theta^2, \mu^2, \theta\mu), \end{aligned} \quad (5.29)$$

e ainda

$$\begin{aligned} E_-^2 &= B^2 - \pi^2 - 2\mu B^4 + B^2(\vec{\theta} \cdot \vec{B}) - 4(\vec{\theta} \cdot \vec{\pi})(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) + 28\mu(\vec{\pi} \cdot \vec{B})^2 \\ &+ m^2(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A^0 - \frac{\mu^{-1}}{8} - \frac{\mu^{-1}}{4}(\vec{\theta} \cdot \vec{B}) + O(\theta^2, \mu^2, \theta\mu). \end{aligned} \quad (5.30)$$

A forma como utilizaremos estas duas soluções será mostrada a seguir. Para isso precisamos calcular a hamiltoniana, dada pela seguinte transformação de Legendre

$$H = \int d^3x \left[\pi^i \partial_0 A_i - L \right], \quad (5.31)$$

que, através da relação $\partial_0 A_i = -E_i + \partial_i A_0$, pode ser escrita como

$$H = \int d^3x [\pi^i \partial_i A_0 - \pi^i E_i - L], \quad (5.32)$$

e ao se calcular o produto escalar $\vec{\pi} \cdot \vec{E}$ a partir de (5.22), obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \vec{\pi} \cdot \vec{E} &= -E^2 - E^2(\vec{\theta} \cdot \vec{B}) + 2(\vec{E} \cdot \vec{B})(\vec{\theta} \cdot \vec{E}) - 4\mu(E^2 - B^2)E^2 \\ &- 14\mu(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 + \frac{m^2}{2}((\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{E} A^0), \end{aligned} \quad (5.33)$$

e ainda substituindo a expressão da lagrangiana (5.10) em (5.32), e considerando ainda o resultado de (5.33), obtemos

$$\begin{aligned} H_0 &= \int d^3x \left(\frac{1}{2}(E^2 + B^2)(1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B}) - (\vec{\theta} \cdot \vec{E})(\vec{E} \cdot \vec{B}) + 4\mu(E^2 - B^2)E^2 + 7\mu(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \right. \\ &- \mu(E^2 - B^2)^2 - \frac{m^2}{2}A_0 A^0 - \frac{m^2}{2}A_j A^j \left(1 + \frac{3}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B} \right) + \frac{m^2}{4}(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\nabla}(A_0 A^0) \\ &+ \left. \frac{3}{4}m^2(\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{\theta} \cdot \vec{A}) + \pi^i \partial_i A_0 \right), \end{aligned} \quad (5.34)$$

e no limite em que $\mu \rightarrow 0$, recuperamos a hamiltoniana obtida por Darabi em [70], escrita em termos dos campos físicos \vec{E} e \vec{B} , mais o termo $\pi^i \partial_i A_0$. Então, um caminho para se analisar a forma correta de se substituir E^2 em (5.34) é avaliar, no limite em que $\mu \rightarrow 0$, qual a forma que recupera a hamiltoniana obtida anteriormente por Darabi em [70], considerando-se as correções em θ . Após a análise, concluiu-se que a forma correta de se utilizar as soluções de E^2 é através da substituição de:

→ E_+^2 em termos com μ e termos livres de θ e μ .

→ E_-^2 em termos com θ .

Dessa forma, obtemos a seguinte expressão para a hamiltoniana

$$\begin{aligned}
H_0 &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\vec{\pi}^2 + B^2) + \frac{1}{2}(\vec{B}^2 - \vec{\pi}^2)(\vec{\theta} \cdot \vec{B}) + (\vec{\pi} \cdot \vec{\theta})(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) - 7\mu(\vec{\pi} \cdot \vec{B})^2 + 3\mu\pi^4 \right. \\
&- 2\mu B^2 \pi^2 - \frac{m^2}{2} A^0 A_0 - \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A^0 - \frac{m^2}{2} \vec{A}^2 (1 + \frac{3}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{B}) - \frac{m^2}{4} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} A^0 A_0) \\
&+ \left. \frac{3}{4} m^2 (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{\theta} \cdot \vec{A}) - \pi^i \partial_i A^0 \right] + O(\theta^2, \mu^2, \theta\mu), \tag{5.35}
\end{aligned}$$

onde, no limite em que $\mu \rightarrow 0$, recuperamos a hamiltoniana obtida em [70] por Darabi.

5.3 Análise de Vínculos

O próximo passo então é o de analisar a condição de consistência para o vínculo primário obtido em (5.21)

$$\phi_1 = \pi^0, \tag{5.36}$$

e por se tratar de um vínculo, temos que $\dot{\phi}_1 = 0$. Esta condição implica que

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1(x), H_0(y)\} = 0, \tag{5.37}$$

e assim a condição de consistência (5.37) fornece

$$\dot{\phi}_1 = \partial_i \pi^i + m^2 A^0 + \frac{m^2}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) A^0 - \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} = 0, \tag{5.38}$$

ou seja, obtemos um novo vínculo ϕ_2 dado pela seguinte expressão

$$\phi_2 = \partial_i \pi^i + m^2 A^0 + \frac{m^2}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) A^0 - \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi}, \tag{5.39}$$

e ao substituirmos a expressão de $\vec{\pi}$, equação (5.22), em (5.39), obtemos novamente a forma da lei de Gauss generalizada obtida já em (5.12). Em seguida, construímos a hamiltoniana estendida H_E através da adição do vínculo primário ϕ_1 , multiplicado por um coeficiente arbitrário $u(x)$, à hamiltoniana original H_0 , ou seja

$$H_E = H_0 + \int d^3x u(x) \phi_1(x), \tag{5.40}$$

e a condição de consistência é então empregada para o segundo vínculo, ou seja

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2(x), H_E(y)\}, \tag{5.41}$$

e dessa forma, teremos que

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_2 &= m^2 \partial_j \left[A^j (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B}) - \frac{1}{4} \theta^j (\vec{A} \cdot \vec{B}) - \frac{3}{4} B^j (\vec{\theta} \cdot \vec{A}) \right] \\
&- \frac{m^2}{2} \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) \right] u(x) - m^2 u(x), \\
&= 0, \tag{5.42}
\end{aligned}$$

e esta condição de consistência não gera um novo vínculo. Podemos apenas determinar a expressão do coeficiente $u(x)$, dado por

$$u(x) = \partial_j \left[A^j (1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B}) - \frac{1}{4} \theta^j (\vec{A} \cdot \vec{B}) - \frac{3}{4} B^j (\vec{\theta} \cdot \vec{A}) \right] - \frac{1}{2} [\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})] \partial_j A^j, \quad (5.43)$$

onde utilizamos a expansão $\frac{1}{1+\epsilon} \approx (1 - \epsilon)$ devido à baixa magnitude dos termos com o parâmetro θ . Podemos ver que os vínculos obtidos nesta teoria são de segunda classe, já que

$$\{\phi_1(x), \phi_1(y)\} = 0, \quad (5.44)$$

$$\{\phi_2(x), \phi_2(y)\} = 0. \quad (5.45)$$

e ainda

$$\{\phi_1(x), \phi_2(y)\} = m^2 \left[1 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) \right] (y) \delta^3(x - y). \quad (5.46)$$

É de suma importância a distinção entre vínculos de primeira e segunda classe. Os vínculos de primeira classe são definidos como aqueles que apresentam valor nulo do parênteses de Poisson para todos os vínculos, ou seja, vínculos que comutam com todos os outros vínculos e entre si. Esta condição indica a presença de alguns graus de liberdade de calibre no formalismo de Dirac. Por outro lado, os vínculos de segunda classe apresentam pelo menos um parênteses de Poisson não nulo de um vínculo com outro, como em (5.46). Na seção a seguir, desenvolveremos a quantização para vínculos de segunda classe no formalismo de Dirac.

5.4 Quantização de Sistemas Hamiltonianos Vinculados de Segunda Classe

A quantização de teorias que apresentam sistemas hamiltonianos vinculados de segunda classe apresentam menos ambiguidades do que sistemas com vínculos de primeira classe. Para o caso de vínculos de segunda classe, podemos construir novos parênteses canônicos fundamentais, conhecidos como parênteses de Dirac, segundo o formalismo que leva seu nome. Este procedimento faz com que possamos identificar todos os vínculos como sendo fortemente iguais a zero. Os parênteses de Dirac são definidos pela seguinte transformação

$$\begin{aligned} \{A(x, t), B(y, t)\}_{DB} &= \{A(x, t), B(y, t)\} \\ &- \int \{A(x, t), \phi_i(z, t)\} C_{ij}^{-1}(z, w) \{\phi_j(w, t), B(y, t)\} d^3z d^3w \end{aligned} \quad (5.47)$$

onde a matriz C_{ij} é dada por $C_{ij} = \{\phi_i(x), \phi_j(y)\}$. Dessa forma teremos

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & m^2 [1 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})] \\ -m^2 [1 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})] & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y) \quad (5.48)$$

Mas, o que de fato precisamos obter, de acordo com (5.47), é a matriz inversa C_{ij}^{-1} . Esta matriz é tal que satisfaça a seguinte relação

$$\int d^3z C_{ik}(x, z)C_{kj}^{-1}(z, y) = \delta_{ij}\delta^3(x - y). \quad (5.49)$$

e dessa forma, a matriz inversa C_{ij}^{-1} será

$$C_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & m^{-2}[1 + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})]^{-1} \\ -m^{-2}[1 + \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})]^{-1} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \quad (5.50)$$

e podemos agora obter os novos parênteses da teoria de acordo com (5.49). Teremos dessa forma

$$\{\pi^0(x), A^0(y)\}_{DB} = 0, \quad (5.51)$$

$$\{\pi^0(x), A_i(y)\}_{DB} = 0, \quad (5.52)$$

$$\{\pi^\mu(x), \pi_\nu(y)\}_{DB} = 0, \quad (5.53)$$

$$\{A_0(x), A^0(y)\}_{DB} = 0, \quad (5.54)$$

$$\{A_j(x), A^k(y)\}_{DB} = 0, \quad (5.55)$$

$$\{\pi^i(x), A_j(y)\}_{DB} = -\delta_j^i \delta^3(x - y), \quad (5.56)$$

$$\{\pi^i(x), B^j(y)\}_{DB} = -\epsilon^{ijk} \partial_j^{(y)} \delta^3(x - y), \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \{A^0(x), A_j(y)\}_{DB} &= m^{-2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})\right)^{(x)} \partial_j^{(x)} \delta^3(x - y) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A})_j^{(x)} \delta^3(x - y) + O(\theta^2), \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \{A^0(x), B^i(y)\}_{DB} &= \epsilon^{ijk} \partial_j^{(y)} [m^{-2} \left(1 - \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})\right)^{(x)} \partial_k^{(x)} \delta^3(x - y) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\vec{\theta} \times \vec{A})_k^{(x)} \delta^3(x - y)] + O(\theta^2), \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \{\pi^i(x), A^0(y)\}_{DB} &= \frac{1}{2}\epsilon^{pqi} (A^0\theta_q\partial_p)^{(y)} \delta^3(x-y) \\ &- \frac{1}{2}(\vec{\pi} \times \vec{\theta})_{(y)}^i \delta^3(x-y) + O(\theta^2), \end{aligned} \quad (5.60)$$

que são os parênteses fundamentais da teoria obtidos via método de Dirac.

5.5 Equações de Movimento a Partir dos Parênteses de Dirac

Para obtermos as equações de movimento a partir dos parênteses de Dirac, devemos primeiro determinar o que aqui chamaremos de hamiltoniana física H_{ph} . Para obtermos esta hamiltoniana, poderemos considerar, como já comentado anteriormente, os vínculos fortemente iguais à zero. Podemos escrever a hamiltoniana H_0 (5.34) em termos do vínculo ϕ_2 :

$$\begin{aligned} H_0 &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\pi^2 + B^2) + \frac{1}{2}(B^2 - \pi^2)(\vec{\theta} \cdot \vec{B}) + (\vec{\pi} \cdot \vec{\theta})(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) - 7\mu(\vec{\pi} \cdot \vec{B})^2 + 3\mu\pi^4 \right. \\ &- 2\mu B^2\pi^2 - \frac{m^2}{2}A^0A^0 - \frac{m^2}{2}A_jA^j \left(1 + \frac{3}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B} \right) + \frac{3}{4}m^2(\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{\theta} \cdot \vec{A}) \\ &\left. - \frac{m^2}{4}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})A^0A^0 + A^0\phi_2 \right], \end{aligned} \quad (5.61)$$

e a hamiltoniana estendida H_E (5.40) pode ser expressa como

$$H_E = H_0 + \int d^3x u(x)\phi_1 = H_{ph} + \int d^3x [u(x)\phi_1 + A^0\phi_2], \quad (5.62)$$

onde H_{ph} é dado por

$$\begin{aligned} H_{ph} &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\pi^2 + B^2) + \frac{1}{2}(B^2 - \pi^2)(\vec{\theta} \cdot \vec{B}) + (\vec{\pi} \cdot \vec{\theta})(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) - 7\mu(\vec{\pi} \cdot \vec{B})^2 + 3\mu\pi^4 \right. \\ &- 2\mu B^2\pi^2 - \frac{m^2}{2}A^0A^0 - \frac{m^2}{2}A_jA^j \left(1 + \frac{3}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B} \right) + \frac{3}{4}m^2(\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{\theta} \cdot \vec{A}) \\ &\left. - \frac{m^2}{4}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})A^0A^0 \right]. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Com os parênteses fundamentais de Dirac determinados, em conjunto com a hamiltoniana física, as equações de movimento agora podem ser determinadas pelo seguinte parênteses

$$\dot{A} = \{A, H_{ph}\}_{DB}, \quad (5.64)$$

e assim podemos calcular a evolução dinâmica das variáveis hamiltonianas π_i e A_i . Aplicando-se então a Eq. (5.64) teremos

$$\dot{A}_i = \partial_0 A_i = \{A_i(x), H_{ph}(y)\}_{DB}, \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned}\dot{A}_i &= \pi_i(1 - \vec{\theta} \cdot \vec{B}) + \theta_i(\vec{B} \cdot \vec{\pi}) + B_i(\vec{\theta} \cdot \vec{\pi}) - 14\mu(\vec{B} \cdot \vec{\pi})B_i + 12\mu\pi^2\pi_i \\ &- 4\mu B^2\pi_i - \partial_i \left[A^0 - \frac{1}{2}\vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})A^0 \right] - \frac{m^2}{2}A^0(\vec{\theta} \times \vec{A})_i,\end{aligned}\quad (5.66)$$

$$\dot{\pi}_i = \partial_0\pi_i = \{\pi_i(x), H_{ph}(y)\}_{DB}, \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\pi}} &= -\vec{\nabla} \times [\vec{B}(1 + \vec{\theta} \cdot \vec{B}) - \frac{1}{2}(E^2 - B^2)\vec{\theta} + (\vec{\theta} \cdot \vec{E})\vec{E} - 14\mu(\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{E}] \\ &+ 4\mu(E^2 - B^2)\vec{B} - \frac{3m^2}{4}A_j A^j \vec{\theta} + \frac{3m^2}{4}(\vec{\theta} \cdot \vec{A})\vec{A} - \frac{m^2}{4}(A^0 A^0)\vec{\theta} \\ &+ m^2\vec{A} \left(1 + \frac{3}{2}\vec{\theta} \cdot \vec{B} \right) - \frac{3m^2}{4}(\vec{\theta} \cdot \vec{A})\vec{B} - \frac{3m^2}{4}(\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{\theta} \\ &- \frac{m^2}{2}(\vec{E} \times \vec{\theta})_i A^0.\end{aligned}\quad (5.68)$$

Substituindo a expressão de π_i , equação (5.22), em (5.68) e considerando ainda $\vec{\pi} = -\vec{D}$ e as expressões dos vetores \vec{J} (5.16) e \vec{H} (5.17), obtemos

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\vec{J}, \quad (5.69)$$

ou seja, a lei de Ampère generalizada. Isto mostra que a equação de movimento para π_i na teoria não-comutativa e não linear obtida pelo formalismo de Dirac está em acordo com as equações de Maxwell.

5.6 Quantização via Fadeev-Jackiw

Esta seção tem como objetivo calcular os parênteses fundamentais da teoria através do formalismo de Faddeev-Jackiw. Seguindo esta metodologia, reescrevemos a lagrangiana contida na expressão da ação em (5.9), em primeira ordem, em termos do momento conjugado π^i :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \pi^i \partial_0 A_i - \left[(\partial_i \pi^i) A^0 + \frac{1}{2} \pi^i \pi_i - \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A^0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \theta^{lp} \pi^i \pi_l F_{ip} \right. \\ &+ \frac{1}{2} \theta^{lm} F^{ij} F_{il} F_{jm} + \frac{1}{4} \theta^{lp} F_{lp} \pi^i \pi_i - \mu \pi^j \pi_j \pi^i \pi_i - \frac{\mu}{4} F^{ij} F_{ij} F^{ab} F_{ab} - 7\mu \pi_m B^m \pi_s B^s \\ &\left. - \frac{m^2}{2} A^0 A_0 + \frac{m^2}{2} A^j A_j - \frac{m^2}{4} \theta^{ai} A_a \partial_i (A^0 A^0) + \frac{m^2}{2} \theta^{ab} A_a (\partial_b A_j + F_{bj}) A^j \right],\end{aligned}\quad (5.70)$$

e a eq. (5.70) é a linearização em $\partial_0 A_i$ de \mathcal{L} . Assim, temos \mathcal{L} na forma

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi^i \partial_0 A_i - V^{(0)}, \quad (5.71)$$

onde $V^{(0)}$ na expressão acima é dado por

$$\begin{aligned}
V^{(0)} = & (\partial_i \pi^i) A^0 + \frac{1}{2} \pi^i \pi_i - \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A^0 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \theta^{lp} \pi^i \pi_l F_{ip} \\
& + \frac{1}{2} \theta^{lm} F^{ij} F_{il} F_{jm} + \frac{1}{4} \theta^{lp} F_{lp} \pi^i \pi_i - \mu \pi^j \pi_j \pi^i \pi_i - \frac{\mu}{4} F^{ij} F_{ij} F^{ab} F_{ab} - 7 \mu \pi_m B^m \pi_s B^s \\
& - \frac{m^2}{2} A^0 A_0 + \frac{m^2}{2} A^j A_j - \frac{m^2}{4} \theta^{ai} A_a \partial_i (A^0 A^0) + \frac{m^2}{2} \theta^{ab} A_a (\partial_b A_j + F_{bj}) A^j, \quad (5.72)
\end{aligned}$$

e dessa forma, as primeiras variáveis canônicas simpléticas q^α , para o caso em questão, serão

$$q_{(0)}^\alpha = (A^j, \pi^j, A^0). \quad (5.73)$$

Seguindo a metodologia, teremos que os momentos $a_{(0)}^\beta$, conjugados às variáveis simpléticas, e tendo em vista (5.72), serão respectivamente

$$a_\beta^{(0)} = (\pi^i, 0, 0), \quad (5.74)$$

e o próximo passo é calcular a matriz simplética $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ definida por

$$f_{\alpha\beta}^{(0)}(x, y) = \frac{\partial a_\beta^{(0)}(y)}{\partial q_{(0)}^\alpha(x)} - \frac{\partial a_\alpha^{(0)}(y)}{\partial q_{(0)}^\beta(x)}, \quad (5.75)$$

e assim, a primeira matriz simplética $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ será:

$$f_{\alpha\beta}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i & 0 \\ \delta_j^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \quad (5.76)$$

e esta matriz é singular, já que $\det f_{\alpha\beta}^{(0)} = 0$. Seguindo a metodologia, precisamos determinar um modo zero não trivial de $f_{\alpha\beta}^{(0)}$, podendo este ser nada mais que

$$\nu_{(0)} = (0 \ 0 \ 1), \quad (5.77)$$

e com o modo zero não trivial, podemos calcular o primeiro vínculo da teoria obtido pela abordagem de Faddeev-Jackiw, através da seguinte relação

$$\int d^3 y \nu_{(0)}^j \frac{\delta V^{(0)}(x)}{\delta q^j(y)} = 0, \quad (5.78)$$

e desenvolvendo-se a relação (5.78), obtemos para a lagrangiana em questão

$$\int d^3 y \frac{\delta V^{(0)}(x)}{\delta A^0(y)} = 0, \quad (5.79)$$

ou seja, temos que

$$\frac{\delta V^{(0)}(x)}{\delta A^0(y)} = \left(\partial_i \pi^i - \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} + m^2 A^0 + \frac{m^2}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) A^0 \right) (x) \delta^3(x-y), \quad (5.80)$$

e, conseqüentemente, obtemos o primeiro vínculo da teoria, a saber

$$\Omega_1 = \partial_i \pi^i - \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} + m^2 A^0 + \frac{m^2}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) A^0 = 0. \quad (5.81)$$

Precisamos agora estender o espaço de fase, introduzindo-se o vínculo Ω_1 na lagrangiana. Dessa forma, teremos

$$L^{(1)} = \pi^i \dot{A}_i + \Omega_1 \dot{\beta} - V^{(1)}, \quad (5.82)$$

onde $V^{(1)}$ nada mais é do que

$$V^{(1)} = V^{(0)}|_{\Omega_1=0}, \quad (5.83)$$

e a expressão de $V^{(1)}$ fica então bem determinada, e pode ser expressa como

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= \frac{1}{2} \pi^i \pi_i + \frac{m^2}{2} A^0 A_0 + \frac{m^2}{4} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) (A^0 A_0) + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \theta^{lp} \pi^i \pi_l F_{ip} \\ &+ \frac{1}{2} \theta^{lm} F^{ij} F_{il} F_{jm} + \frac{1}{4} \theta^{lp} F_{lp} \pi^i \pi_i - \mu \pi^j \pi_j \pi^i \pi_i - \frac{\mu}{4} F^{ij} F_{ij} F^{ab} F_{ab} - 7 \mu \pi_m B^m \pi_s B^s \\ &+ \frac{m^2}{2} A^j A_j + \frac{m^2}{2} \theta^{ab} A_a (\partial_b A_j + F_{bj}) A^j, \end{aligned} \quad (5.84)$$

onde as novas variáveis canônicas simpléticas serão

$$q_{(1)}^\alpha = (A^j, \pi^j, A^0, \beta), \quad (5.85)$$

com seus respectivos momentos conjugados simpléticos, de acordo com (5.82)

$$a_\beta^{(1)} = (\pi^i, 0, 0, \Omega_1), \quad (5.86)$$

e dessa forma, calculamos então a nova matriz simplética $f_{\alpha\beta}^{(1)}$

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i & 0 & f_{14}^{(1)} \\ \delta_j^i & 0 & 0 & f_{24}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & f_{34}^{(1)} \\ f_{41}^{(1)} & f_{42}^{(1)} & f_{43}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y), \quad (5.87)$$

onde

$$f_{14}^{(1)} = \left(-\frac{m^2}{2} \epsilon^{pqj} \pi_p \theta_q + \frac{m^2}{2} A^0 \partial_p \epsilon^{pqj} \theta_q \right) (x), \quad (5.88)$$

$$f_{24}^{(1)} = \left(\partial^j - \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A})^j \right) (x), \quad (5.89)$$

$$f_{34}^{(1)} = \left(m^2 + \frac{m^2}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) \right) (x), \quad (5.90)$$

$$f_{41}^{(1)} = -f_{14}^{(1)}; \quad f_{42}^{(1)} = -f_{24}^{(1)}; \quad f_{43}^{(1)} = -f_{34}^{(1)}, \quad (5.91)$$

e a matriz $f_{\alpha\beta}^{(1)}$ possui determinante diferente de zero. Logo, esta matriz possui uma matriz inversa $f_{(1)}^{-1}$ tal que

$$\int d^3z f_{il}(x, z) f_{lj}^{-1}(z, y) = \delta_{ij} \delta^3(x - y), \quad (5.92)$$

e a matriz inversa nos fornece os parênteses de Dirac. Os resultados não nulos são

$$\left\{ \pi^i(x), A_j(y) \right\}_{DB} = -\delta_j^i \delta^3(x - y), \quad (5.93)$$

$$\begin{aligned} \left\{ A^i(x), A^0(y) \right\}_{DB} &= -m^{-2} \left[1 - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) \right] (y) \partial^i(x) \delta^3(x - y) \\ &+ \frac{1}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A})^i(x) \delta^3(x - y), \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\left\{ \pi^i(x), A^0(y) \right\}_{DB} = \left[-\frac{1}{2} (\vec{\pi} \times \vec{\theta})^i + \frac{1}{2} A^0 \epsilon^{pqj} \theta_q \partial_p \right] (y) \delta^3(x - y) + O(\theta^2), \quad (5.95)$$

e podemos notar que os parênteses não nulos obtidos via Faddeev-Jackiw são idênticos aos parênteses obtidos via formalismo de Dirac, o que é um resultado mais que esperado.

6 Conversão de Vínculos

6.1 Introdução

Como mencionado em [72], sistemas hamiltonianos com vínculos de segunda classe têm sido objetos de estudos há algum tempo. Normalmente estes vínculos são relacionados simplesmente à redução dos graus de liberdade. Podem assim ser removidos da teoria através da aplicação da metodologia de Dirac, como já apresentado neste trabalho anteriormente. Por outro lado, vínculos de primeira classe implicam a presença de invariância de calibre.

Neste capítulo mostraremos a conversão de um sistema hamiltoniano com vínculos de segunda classe em um sistema hamiltoniano com vínculos de primeira classe. Esta conversão mostra que, além do papel de redução dos graus de liberdade, estes vínculos de segunda classe podem indicar a presença de simetrias subjacentes [73], [74].

Encontramos na literatura dois métodos possíveis de conversão. O primeiro é conhecido como método de Batalin-Fradkin [73], formulado a partir da extensão do espaço de fase da teoria original. Outro método é conhecido como *gauge unfixing* [74], ou, em uma tradução livre, “afrouxamento de calibre”. Este método é formulado dentro do espaço de fase original da teoria, a partir da construção de um certo operador de projeção que define a teoria de calibre. Em um sistema hamiltoniano de segunda classe, este operador não é único. Pode ser construído de diferentes maneiras. Cada uma delas apresenta uma teoria de calibre, todas equivalentes ao sistema original de segunda classe.

Neste trabalho apresentaremos a conversão via *gauge unfixing*, em duas formas possíveis, do modelo de Proca não-linear e não-comutativo, que vem sendo estudada ao longo deste trabalho. Este modelo apresenta vínculos de segunda classe. A seguir serão desenvolvidas duas conversões para dois operadores de projeção diferentes.

A hamiltoniana a partir do qual desenvolveremos as conversões é a obtida anteriormente em (5.35)

$$\begin{aligned}
 H &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}(\vec{\pi}^2 + B^2) + \frac{1}{2}(\vec{B}^2 - \vec{\pi}^2)(\vec{\theta} \cdot \vec{B}) + (\vec{\pi} \cdot \vec{\theta})(\vec{\pi} \cdot \vec{B}) - 7\mu(\vec{\pi} \cdot \vec{B})^2 + 3\mu\pi^4 \right. \\
 &- 2\mu B^2 \pi^2 - \frac{m^2}{2} A^0 A_0 - \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A^0 - \frac{m^2}{2} \vec{A}^2 (1 + \frac{3}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{B}) \\
 &\left. - \frac{m^2}{4} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} A^0 A_0) + \frac{3}{4} m^2 (\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{\theta} \cdot \vec{A}) - \pi^i \partial_i A^0 \right] + O(\theta^2, \mu^2, \theta\mu),
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

e esta hamiltoniana, como podemos ver em (5.46), apresenta os seguintes vínculos de segunda classe

$$\phi_1 = \pi^0, \tag{6.2}$$

e ainda

$$\phi_2 = \partial_i \pi_i + m^2 A^0 + \frac{m^2}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) A^0 - \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi}. \quad (6.3)$$

De acordo com (5.44), estes vínculos são de primeira classe quando comutados entre si. Se eliminarmos um destes vínculos e restar apenas um, teremos uma teoria com vínculo de primeira classe. Como o modelo de Proca em estudo apresenta dois vínculos de segunda classe, quando comutados um com o outro, temos duas possibilidades de conversão através do método *gauge unfixing*. A seguir mostraremos os dois casos possíveis.

6.2 Primeiro Caso

Em um primeiro momento consideraremos a seguinte situação: o vínculo ϕ_1 será o vínculo gerador da conversão enquanto ϕ_2 será o vínculo descartado, ou seja, não consideraremos mais $\phi_2 \approx 0$. A dinâmica do sistema será agora relevante em uma nova superfície vinculada Σ_1 definida somente por $\phi_1 \cong 0$. Para que tenhamos teorias de calibre com transformações geradas por ϕ_1 , quantidades físicas relevantes precisam ser invariantes de calibre. Para que tenhamos observáveis invariantes, definimos então o seguinte operador de projeção

$$\mathbf{P} =: e^{-\int d^3x \phi_2 \hat{\phi}_1} :, \quad (6.4)$$

onde, para qualquer funcional B do espaço de fase, temos que $\hat{\phi}B \equiv \{\phi, B\}$. Ao se aplicar o operador (6.4), é adotado o seguinte ordenamento: quando \mathbf{P} atua em qualquer B , ϕ_2 deve estar sempre fora do parênteses de Poisson. Teremos então a seguinte quantidade invariante de calibre

$$\begin{aligned} \tilde{B}(y) &= H + \int d^3x \phi_2(x) \{\phi_1(x), B(y)\} \\ &+ \frac{1}{2!} \int d^3x d^3z \phi_2(x) \phi_2(z) \{\phi_1(x), \{\phi_1(z), B(y)\}\} + \dots - \dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ao aplicarmos o operador (6.4) à hamiltoniana (6.1), precisaremos dos seguintes resultados

$$\{H(y), \phi_1(x)\} = \left[-m^2 A^0 - \frac{m^2}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) + \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} \right] (x), \quad (6.6)$$

$$\{\{H(y), \phi_1(x)\}, \phi_1(z)\} = m^2 \delta^3(x - z), \quad (6.7)$$

$$\{\{\{H(y), \phi_1(x)\}, \phi_1(z)\}, \phi_1(w)\} = 0, \quad (6.8)$$

e assim, a seguinte hamiltoniana é obtida

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_1 &= H + \int d^3x [m^4 A_0 A^0 - 2m^2 A^0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) + \frac{m^4}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})(A^0 A_0) \\
&+ m^4 (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} A^0 - \frac{m^2}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})(\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) - \frac{m^4}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) A^0 \\
&+ m^2 (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi})^2 - \frac{m^2}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})(\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) A^0 \\
&+ \frac{m^2}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi})^2 - m^6 A_0 A^0 + m^4 A^0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) + \frac{m^4}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A})(\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi}) A^0 \\
&+ \frac{m^4}{2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\pi})(\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot \vec{\pi} - \frac{m^6}{2} A_0 A^0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \cdot \vec{A}) - \frac{m^6}{2} A^0 (\vec{\theta} \cdot \vec{A}) \cdot \vec{\pi}],
\end{aligned} \tag{6.9}$$

onde, agora, esta hamiltoniana apresenta somente um único vínculo, a saber, o vínculo ϕ_1 de primeira classe.

6.3 Segundo Caso

Agora consideraremos a seguinte situação: ϕ_1 sendo o vínculo descartado e ϕ_2 o vínculo gerador. Assim, o operador projeção \mathbf{P} fica escrito da seguinte forma

$$\mathbf{P} =: e^{-\int d^3x \phi_1 \widehat{\phi}_2} :. \tag{6.10}$$

Ao aplicarmos este operador à hamiltoniana (6.1), precisaremos dos seguintes resultados

$$\begin{aligned}
\{H(y), \phi_2(x)\} &= -m^2 (\vec{\pi} \times \vec{\theta}) \cdot \vec{\nabla} A^0 - \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\
&- m^2 \partial_j \left[A^j \left(1 + \frac{3}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{B} \right) \right] + \frac{3m^2}{4} \partial_j [\theta^j (\vec{A} \cdot \vec{B})] + \frac{3m^2}{4} \partial_j [B^j (\vec{\theta} \cdot \vec{A})],
\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
\{\{H(y), \phi_2(x)\}, \phi_2(z)\} &= \left[-\frac{m^2}{2} \epsilon^{pmj} [(\vec{\nabla} \times \vec{B})_p \theta_m]^{(x)} \partial_j^{(z)} - \frac{3m^2}{2} [\partial^j (\vec{\theta} \cdot \vec{B})]^{(x)} \partial_j^{(z)} \right. \\
&+ \frac{m^4}{2} \partial_j^{(x)} (\vec{\theta} \times \vec{A})_{(z)}^j + \frac{3m^2}{4} [\partial_l \theta^l B^j]^{(x)} \partial_j^{(z)} \\
&+ \left. \frac{3m^2}{4} [\partial_l B^l \theta^j]^{(x)} \partial_j^{(z)} \right] \delta^3(x-z),
\end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\{\{\{H(y), \phi_2(x)\}, \phi_2(z)\}, \phi_2(w)\} = \frac{m^4}{2} \epsilon^{jpq} \theta_p^{(z)} \partial_j^{(x)} \partial_q^{(w)} \delta^3(x-z) \delta^3(z-w) \tag{6.13}$$

$$\{\{\{\{H(y), \phi_2(x)\}, \phi_2(z)\}, \phi_2(w)\}, \phi_2(v)\} = 0, \tag{6.14}$$

e aplicando-se o operador \mathbf{P} definido em (6.10), teremos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_2 &= H + \int d^3x \phi_1(x) \{H(y), \phi_2(x)\} \\
&+ \frac{1}{2!} \int d^3x d^3z \phi_1(x) \phi_1(z) \{ \{H(y), \phi_2(x)\}, \phi_2(z) \} \\
&+ \frac{1}{3!} \int d^3x d^3z d^3w \phi_1(x) \phi_1(z) \phi_1(w) \{ \{ \{H(y), \phi_2(x)\}, \phi_2(z) \}, \phi_2(w) \} \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{6.15}$$

e a nova hamiltoniana será expressa como

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_2 &= H + \int d^3x \left[-m^2 \pi^0 (\vec{\pi} \times \vec{\theta}) \cdot \vec{\nabla} A^0 - \frac{m^2}{2} (\vec{\theta} \times \vec{A}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \pi^0 \right. \\
&- m^2 \partial_j \left[A^j \left(1 + \frac{3}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{B} \right) \right] + \frac{3m^2}{4} \partial_j \left[\theta^j (\vec{A} \cdot \vec{B}) \right] + \frac{3m^2}{4} \left[B^j (\vec{\theta} \cdot \vec{A}) \right] \\
&+ \frac{m^2}{4} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot (\vec{\theta} \times \vec{\nabla} \pi^0) \pi^0 + \frac{3m^2}{4} \left[\vec{\nabla} \pi^0 \cdot \vec{\nabla} (\vec{\theta} \cdot \vec{B}) \right] \pi^0 + \frac{m^4}{4} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\theta} \times \vec{A}) (\pi^0)^2 \\
&- \left. \frac{3m^2}{8} \left[\vec{\theta} \cdot \vec{\nabla} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \pi^0) \right] \pi^0 - \frac{3m^2}{8} \left[\vec{B} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\theta} \cdot \vec{\nabla} \pi^0) \right] \pi^0 \right].
\end{aligned} \tag{6.16}$$

sendo ϕ_2 o único vínculo desta hamiltoniana, ou seja, um vínculo de primeira classe já que $\{\phi_2, \phi_2\} = 0$.

7 Princípio Holográfico e Gravitação

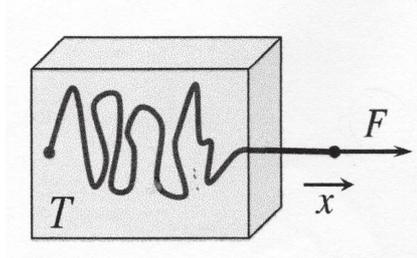
Um dos grandes desafios da física teórica nos dias atuais, se não o maior, é o de unificar a gravitação com mecânica quântica. É conhecido que tentativas de unificação destas duas teorias, em níveis microscópicos, levam a muitos problemas, paradoxos e dúvidas. Talvez esta abordagem não seja a correta. Dessa forma, inspirado pelas semelhanças entre gravitação e as leis termodinâmicas, Verlinde [5] propôs uma outra abordagem para a solução deste enigma, através do entendimento da força gravitacional como sendo uma *força entrópica*, de tal forma que a ideia fundamental necessária para se derivar gravitação é a informação. Mais precisamente, é a quantidade de informação associada com a matéria e sua localização, independente da forma da dinâmica microscópica, medida em termos de entropia. Variações na entropia quando a matéria é deslocada originam uma força entrópica, que pode ser interpretada como sendo gravidade, como proposto por Verlinde em [5]. A hipótese mais importante será a de que a informação está associada com uma parte do espaço através do *princípio holográfico*, que basicamente diz que toda informação contida em um volume do espaço pode estar armazenada em uma superfície plana em duas dimensões. Uma forte evidência a favor desta hipótese são os trabalhos de Bekenstein [10] e Hawking [11, 75]. O resultado mais interessante e promissor desta abordagem é que ela mostra que a gravitação pode ser derivada de princípios bastante gerais que são independentes dos detalhes específicos da teoria microscópica.

7.1 Força Entrópica

Uma força entrópica é uma força macroscópica efetiva originada em um sistema, com muitos graus de liberdade, através da tendência estatística do aumento da entropia. A equação de força é expressa em termos de diferenças na entropia e é independente dos detalhes da dinâmica microscópica. Neste caso, não existe um campo fundamental associado à força entrópica. Talvez o exemplo mais conhecido de uma força entrópica é a elasticidade de uma molécula de um polímero. Uma única molécula de um polímero pode ser construída através da junção de muitos monômeros de comprimento fixo, aonde cada monômero pode girar livremente em torno dos pontos de ligação e direcionar seu eixo principal em qualquer direção espacial. Cada uma dessas configurações apresenta a mesma energia. Existem muito mais estados quando a molécula é curta comparada à quantidade de estados possíveis quando a molécula é esticada. A tendência estatística de retornar a um estado de máxima entropia origina uma força macroscópica, neste caso, a força elástica.

Através do uso de uma pinça, podemos puxar uma das extremidades do polímero e trazê-lo para uma posição fora do equilíbrio, através de uma força externa \vec{F} (figura 1). Por conveniência, consideremos a outra extremidade fixa na origem de um sistema de

Figura 1 – Polímero articulado livre imerso em um banho térmico com temperatura T é puxado para fora de seu estado de equilíbrio (força F). A força entrópica aponta em sentido oposto.



Fonte: Verlinde, 2010.

coordenadas e puxamos a outra extremidade ao longo do eixo x . Dessa forma, a entropia deste sistema pode ser escrita na seguinte forma

$$S(E, x) = k_B \ln \Omega(E, x), \quad (7.1)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann e $\Omega(E, x)$ se refere ao volume do espaço de configurações de todo o sistema como uma função da energia total E do banho térmico e a posição x da extremidade movida. A dependência em x é de natureza totalmente configuracional: não há nenhuma contribuição para a energia E que dependa de x . No ensemble canônico, a força F é introduzida na função partição da seguinte forma

$$Z(T, F) = \int dE dx \Omega(E, x) e^{-(E+Fx)/k_B T}, \quad (7.2)$$

ou seja, como uma variável externa devido ao comprimento x do polímero. A força F necessária para manter o polímero com um comprimento fixo x , para uma dada temperatura T , pode ser deduzida das seguintes equações:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}, \quad (7.3)$$

$$\frac{F}{T} = \frac{\partial S}{\partial x}, \quad (7.4)$$

e através da análise do balanço de forças, a força externa F deve ser igual, em módulo, à força entrópica, que tenta restaurar o polímero para a sua posição de equilíbrio. Uma força entrópica se caracteriza pelo fato de apontar sempre no sentido de um aumento da entropia e de ser proporcional à temperatura. Para o polímero, pode se mostrar que a força obedece à lei de Hooke

$$F_{polimero} \approx -constante \cdot k_B T \langle x \rangle, \quad (7.5)$$

e este exemplo deixa claro que em um nível microscópico uma força entrópica pode ser conservativa, pelo menos quando a temperatura é mantida constante. A energia potencial correspondente não apresenta significado microscópico nenhum, entretanto, é emergente.

É interessante estudar o balanço de energia e entropia quando permitimos que o polímero retorne à sua posição de equilíbrio gradualmente, ao mesmo tempo em que se permita que a força realize trabalho sobre um sistema externo. Pela conservação da energia, este trabalho deve ser igual à energia extraída do banho térmico. Dessa forma, a entropia do banho térmico será reduzida. Para um banho térmico infinito, este valor deve ser o quanto aumenta a entropia do polímero. Assim, nessa situação, a entropia total se mantém constante. Esta situação pode ser estudada de forma mais detalhada no *ensemble* microcanônico, pois na energia total é contabilizada a energia do banho térmico. Para a determinação da força entrópica, mais uma vez introduzimos uma força externa F e examinamos o balanço de forças. Consideramos que o *ensemble* microcanônico é dado por $\Omega(E + Fx, x)$ e impomos que a entropia seja extrema. Isto resulta em

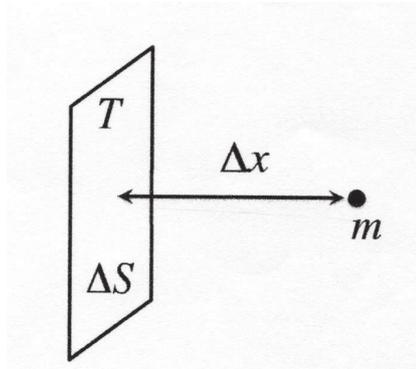
$$\frac{d}{dx}S(E + Fx, x) = 0, \quad (7.6)$$

e pode-se verificar facilmente que esta equação leva às mesmas equações (7.3) e (7.4). Entretanto, no *ensemble* microcanônico a temperatura, em geral, é dependente da posição e a força é dependente da energia. O termo Fx pode ser entendido como a energia adicionada ao sistema devido ao esticamento do polímero, que o afasta da sua posição de equilíbrio. Esta equação então nos diz que a energia total é reduzida quando o polímero retorna lentamente para sua posição de equilíbrio, mas que a entropia, em uma primeira aproximação, se mantém constante.

7.1.1 Leis de Newton a Partir do Princípio Holográfico

Para a derivação das leis de Newton através do princípio holográfico, Verlinde [5] argumenta que o espaço pode ser entendido como um estratagema, um meio, introduzido para descrever posições e movimentos de partículas. Dessa forma o espaço nada mais é que um local de armazenagem de informação associada à matéria. Para que possamos recuperar a noção de gravidade, faz-se necessário que esta informação seja armazenada em superfícies planas, ou *telas holográficas*, que nada mais são do que as unidades que surgem a partir da discretização da superfície holográfica. Verlinde então nomeia cada unidade como um *bit*. Dado que a quantidade máxima de informação permitida é finita para cada parte do espaço, é impossível localizar uma partícula com precisão infinita em um ponto de um espaço contínuo. De fato, pontos e coordenadas surgem como conceitos derivados, e não fundamentais. Se assumirmos que a informação é armazenada em pontos de um espaço discretizado (como em um modelo de redes), sem a possibilidade de duplicação desta informação, não obteríamos uma descrição holográfica e nem se conseguiria recuperar

Figura 2 – Uma partícula de massa m se aproxima de uma superfície holográfica. A superfície limita a parte emergida do espaço, que contém a partícula, e armazena dados que descrevem a parte do espaço ainda não emergida.



Fonte: Verlinde, 2010.

a gravitação. Dessa forma, como já dito anteriormente, Verlinde postula que a informação é armazenada em superfícies que separam os pontos do espaço. Assim, tais superfícies tornam-se o local natural para se armazenar informação sobre partículas que se movem de um ponto a outro, ou em termos da superfície que separa estes pontos, de um lado para outro. De um lado teremos espaço e a partícula e do outro nada. Este conceito é conhecido como *espaço emergente*, e é um conceito radicalmente diferente do conceito de espaço do ponto de vista da Relatividade Geral. É assumido que a teoria microscópica tenha uma noção de tempo bem definida e que sua dinâmica seja invariante na translação temporal. Isto permite que se possa definir energia e, através da aplicação de técnicas de física estatística, temperatura. Em conjunto com entropia associada à quantidade de informação, estas hipóteses formam os ingredientes básicos para o desenvolvimento desta teoria.

7.1.1.1 Força e Inércia

Inspirado pela derivação de Bekenstein [10] para a fórmula da entropia de um buraco negro, Verlinde propõe uma abordagem semelhante não mais nas proximidades da área de um buraco negro, mas em um espaço plano não relativístico. Verlinde considera uma pequena área de uma superfície holográfica e uma partícula de massa m que se aproxima desta superfície do lado do qual o espaço já foi emergido (figura 2). Eventualmente a partícula se funde com os graus de liberdade sobre a superfície, mas antes que isso aconteça, a partícula influencia a quantidade de informação que é armazenada na superfície. Motivado pelo argumento de Bekenstein, Verlinde postula que a mudança na entropia associada com a informação na superfície vale

$$\Delta S = 2\pi k_B, \quad (7.7)$$

quando

$$\Delta x = \frac{\hbar}{mc}, \quad (7.8)$$

e dessa forma, Verlinde então reescreve a fórmula para a variação da entropia de forma um pouco mais geral, assumindo que a mudança na entropia próxima à superfície holográfica é linear com o deslocamento Δx

$$\Delta S = 2\pi k_B \frac{mc}{\hbar} \Delta x. \quad (7.9)$$

Para entender porque ΔS também é proporcional à massa m , considere a situação em que uma partícula é dividida em duas ou mais sub-partículas. Cada sub-partícula carrega então sua própria mudança na entropia associada após um deslocamento Δx . Como entropia e massa são ambas aditivas, é natural então concluir que uma variação na entropia seja proporcional à massa. Mas como surge a força nesse contexto? Segundo Verlinde, utilizando-se da analogia de um processo de osmose através de uma membrana semi-permeável, quando uma partícula tem uma justificativa entrópica para estar de um lado da membrana e a membrana apresenta uma certa temperatura, sobre a partícula atuará uma força efetiva tal que

$$F \Delta x = T \Delta S, \quad (7.10)$$

e esta é a força entrópica. Dessa forma, para que se tenha uma força não nula, faz-se necessário uma temperatura diferente de zero. Da segunda lei de Newton, sabemos que uma força não nula leva à uma aceleração diferente de zero. Mas é bem sabido que aceleração e temperatura estão intimamente relacionadas pela radiação de Unruh. Como demonstrado, um observador em um referencial acelerado experimentará uma temperatura tal que

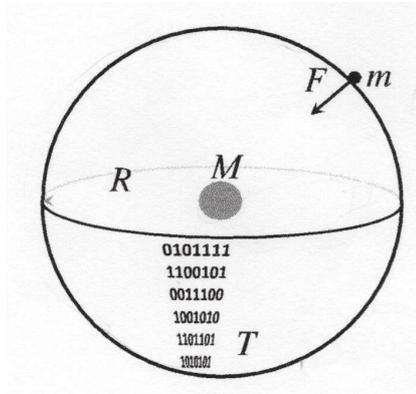
$$k_B T = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar a}{c}, \quad (7.11)$$

onde o parâmetro a representa a aceleração. Verlinde então assume que esta é a temperatura associada à superfície holográfica. Combinando a Eq. (7.11) com as Eqs. (7.9) e (7.10), obtém-se a segunda lei de Newton

$$F = ma. \quad (7.12)$$

Segundo Verlinde, a equação (7.11) pode ser entendida como sendo a temperatura T necessária para que se cause uma aceleração igual a a , contrária à forma usual, em que a temperatura é causada pela aceleração.

Figura 3 – Uma partícula de massa m próxima a uma superfície holográfica esférica. A energia é igualmente distribuída entre os *bits* ocupados, e é equivalente à massa M que deve emergir dentro da parte do espaço encerrado pela superfície.



Fonte: Verlinde, 2010.

7.1.1.2 Lei de Newton para a Gravidade

Para se derivar a lei de Newton para a gravitação, Verlinde considera uma superfície holográfica esférica, onde no centro desta esfera encontra-se o objeto de massa M . Logo, o número total de *bits* é proporcional à área A da esfera holográfica. Representando o número total de *bits* por N , Verlinde então escreve que

$$N = \frac{Ac^3}{G\hbar}, \quad (7.13)$$

onde é introduzida uma nova constante: G . Como veremos mais a frente, esta constante será identificada com a constante gravitacional de Newton, mas como ressaltado por Verlinde, até este momento não foi assumida a existência de uma força gravitacional. Então, a única hipótese feita até aqui é a que diz que o número de *bits* é proporcional à área A . Verlinde então assume que a energia, seja ela de qualquer natureza, é igualmente dividida entre todos os *bits*. Logo a temperatura deste sistema é determinada pela lei de equipartição

$$E = \frac{1}{2}Nk_B T, \quad (7.14)$$

como a energia média por *bit*. Verlinde então associa esta energia a

$$E = Mc^2, \quad (7.15)$$

onde M representa a massa que deve emergir na parte do espaço circundada pela superfície holográfica. (veja a figura 3). Ainda que consideremos que a massa não seja diretamente visível no espaço emergido, sua presença é notada através de sua energia. De (7.14) temos que

$$T = \frac{2E}{Nk_B}, \quad (7.16)$$

e substituindo o resultado de (7.15) na equação acima, teremos

$$T = \frac{2Mc^2}{Nk_B}, \quad (7.17)$$

e da expressão de N em (7.13) podemos reescrever que

$$T = \frac{2Mc^2}{4\pi R^2} \frac{G\hbar}{c^3 k_B}, \quad (7.18)$$

onde usamos $A = 4\pi R^2$. De (7.10) temos que T pode ser substituído por $F(\Delta x/\Delta S)$. Logo, de acordo com (7.7) e (7.8)

$$F \frac{\hbar}{mc} = \frac{2Mc^2}{4\pi R^2} \frac{G\hbar}{c^3 k_B} 2\pi k_B, \quad (7.19)$$

e ao cancelarmos os termos, teremos a conhecida lei de Newton para a gravitação

$$F = G \frac{Mm}{R^2}. \quad (7.20)$$

Como ressaltado por Verlinde, a lei de gravitação de Newton foi recuperada a partir de princípios básicos desta teoria e joga uma nova luz sobre as origens desta força: trata-se de uma força de natureza entrópica! Este talvez seja o principal resultado obtido por Verlinde. Se verdade, tal resultado pode levar a profundas consequências sobre a natureza do espaço-tempo.

7.1.1.3 Inércia e Potencial Gravitacional de Newton

Em um segundo momento, Verlinde [5] mostra que até este ponto, a discussão se deu de forma quase estática, ou seja, nada até então foi afirmado sobre como o espaço se conecta em diferentes instantes. Para isso Verlinde reconsidera o caso em que uma partícula de massa m se aproxima da tela holográfica. Esta massa deve surgir com os graus de liberdade microscópicos sobre a tela, e dessa forma a massa será feita dos mesmos *bits* que estão na tela. Como cada *bit* contém $\frac{1}{2}k_B T$ de energia, o número n de *bits* será determinado por

$$mc^2 = \frac{1}{2}nk_B T, \quad (7.21)$$

e inserindo esta relação na Eq. (7.9) e utilizando a Eq. (7.11), a variação da entropia pode ser expressa em termos da aceleração como

$$\frac{\Delta S}{n} = k_B \frac{a\Delta x}{2c^2}, \quad (7.22)$$

e dessa forma, Verlinde conclui que a aceleração está relacionada intimamente a um gradiente de entropia. Ou seja *inércia é uma consequência do fato de que uma partícula em repouso continuará em repouso porque, neste caso, o gradiente de entropia é nulo*. Dessa forma, Verlinde introduz o potencial newtoniano ϕ e escreve a aceleração como um gradiente

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi, \quad (7.23)$$

e isso permite expressar a variação na entropia de forma concisa

$$\frac{\Delta S}{n} = -k_B \frac{\Delta\phi}{2c^2}, \quad (7.24)$$

e o potencial newtoniano passa a ter um importante papel nesta teoria, como argumentado por Verlinde: ele matém o controle do esgotamento da entropia por *bit*. Além disso, o potencial newtoniano estipula uma direção preferencial no espaço, determinada por $\vec{\nabla}\phi$.

7.1.1.4 Equação de Poisson para uma distribuição geral de matéria

Nesta parte de seu trabalho, Verlinde propõe uma superfície holográfica equipotencial fechada, contendo em seu interior uma distribuição de matéria dada por $\rho(x)$, com potencial newtoniano igual a ϕ_0 . As partículas testes encontram-se todas do lado de fora da superfície holográfica fechada. Para explicar a força que atua sobre as partículas testes, novamente determinamos o trabalho realizado pela força e mostramos que este trabalho pode ser naturalmente escrito em termos da variação da entropia multiplicado pela temperatura. No caso de simetria esférica, a temperatura sobre a superfície holográfica equipotencial é constante. Já para este caso, nada neste sentido pode ser afirmado. Entretanto, Verlinde argumenta que localmente podemos definir uma temperatura e entropia por unidade de área. Verlinde então define a temperatura localmente da seguinte forma: posicionando-se uma partícula teste próxima da superfície holográfica equipotencial e medindo sua aceleração. Com este raciocínio, Verlinde define a temperatura como:

$$k_B T = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar |\vec{\nabla}\phi|}{c}, \quad (7.25)$$

e aqui a derivada é feita no sentido da direção normal que aponta para fora da superfície holográfica. Verlinde ressalta que ϕ é introduzido como uma espécie de recurso para se descrever a aceleração local, mas nada foi dito sobre se ϕ satisfaz alguma equação que o relaciona com a distribuição de massa $\rho(x)$. O próximo passo é a determinação da densidade de *bits* sobre a superfície holográfica. Novamente Verlinde assume que esses *bits* se distribuem de maneira uniforme. Logo a equação (7.13) é generalizada da seguinte forma

$$dN = \frac{c^3}{G\hbar} dA, \quad (7.26)$$

sendo que neste ponto, é imposto o análogo da relação de equipartição proposta em (7.14). Esta relação assumirá a forma de uma expressão de integral para a energia tal que

$$E = \frac{1}{2} k_B \int_S T dN, \quad (7.27)$$

e substituindo o valor de E por $Mc^2 = \int_V \rho(\vec{r}) c^2 d^3x$ e o valor de $k_B T$ pela expressão (7.25), teremos que

$$\int_V \rho(\vec{r}) c^2 d^3x = \frac{1}{4\pi G} \int_S \vec{\nabla} \phi \cdot dA, \quad (7.28)$$

onde V é o volume encerrado pela superfície holográfica. Esta última expressão nada mais é que a lei de Gauss para o campo gravitacional newtoniano. Segundo Verlinde, esta relação deve ser válida para qualquer superfície holográfica fechada equipotencial. Quando um *bit* de massa é adicionado à região encerrada pela superfície S , por exemplo, colocando-se uma partícula com massa próxima à superfície holográfica e em seguida “empurrando-a” para dentro, a massa total M deve variar de acordo com esta adição. Essa condição só pode ser satisfeita de forma geral se o potencial ϕ satisfizer a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r}), \quad (7.29)$$

ou seja, através de uma identificação natural para temperatura e densidade de informação sobre a superfície holográfica, Verlinde destaca que as leis de gravitação newtoniana surgem de uma maneira direta e natural.

7.1.1.5 Princípio Holográfico e Relatividade Geral

Neste mesmo trabalho [5], Verlinde continua a desenvolver suas ideias que relacionam entropia e gravitação. Através de um estudo bastante interessante, Verlinde também demonstra que o princípio de equivalência e a equação de Einstein podem ser obtidas e entendidas a partir desta abordagem entrópica. Este estudo, infelizmente, se encontra além das possibilidades deste trabalho, mas vale a pena ressaltar que tal investimento teórico já foi realizado. Outra excelente referência é o trabalho de Ted Jacobson [6] onde este obtém as equações de Einstein não a partir do conceito de métrica, mas como um fenômeno entrópico. Dessa forma, conclui Jacobson, a equação de Einstein para a Relatividade Geral passa a ser entendida como uma equação de estado.

8 Teoria Estatística de Tsallis

8.1 Introdução

Ao longo da história, uma série de debates aconteceram entre os físicos referente às interpretações e controvérsias sobre os fundamentos da mecânica estatística. Tal situação acabou por gerar posições contraditórias sobre o tema na comunidade científica [76]. Em 1902, três décadas após Ludwig Boltzmann ter publicado seu primeiro trabalho completo sobre mecânica estatística, Josiah Willard Gibbs, no prefácio de seu *Princípios Elementares em Mecânica Estatística* [77], escreve: “*Certainly, one is building on an insecure foundation...*” ¹. Ainda nos dias de hoje, não é simples se sentir realmente confortável em relação aos fundamentos da mecânica estatística obtidos a partir de seus primeiros princípios, segundo Tsallis [12]. Motivado por este pensamento, Tsallis então propõe uma generalização desta teoria física, generalização tal que veio a ser chamada de *Mecânica Estatística Não-Extensiva*. A principal característica que diferencia esta teoria em relação à teoria de Boltzmann-Gibbs é a inserção do parâmetro de não extensividade q . Quando $q = 1$, a estatística de Boltzmann-Gibbs é recuperada, reestabelecendo-se as características de aditividade e extensividade peculiares à esta teoria.

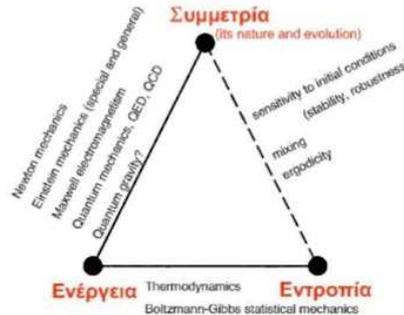
Segundo Tsallis, juntamente com o conceito geométrico de *simetria*, nada mais básico que *energia* e *entropia* merecem o título de *pilares* da física moderna. Ambas as definições são extremamente sutis. De qualquer maneira, *energia* se refere às *possibilidades* enquanto *entropia* se refere às *probabilidades* destas possibilidades. Talvez um dos conceitos físicos mais intrigantes e motivadores para a comunidade científica seja o conceito de *entropia* e sua conexão com calor, informação e o próprio tempo. Esta última conexão talvez seja a mais óbvia e, por isso mesmo, a mais difícil de se apropriar de forma plena. Antes que o leitor desqualifique esta afirmação, pense como seria o Universo se a entropia não fosse como ela se apresenta para nós? Somos capazes de imaginar um Universo não entrópico? Acredito que não. Motivado por esta questão, passaremos ao próximo tópico, onde Tsallis [12] discute as relações que existem entre *simetria*, *energia* e *entropia* e em que estágio de entendimento destas relações nos encontramos.

8.2 Simetria, Energia e Entropia

Neste ponto, vamos focar sobre algumas conexões entre três conceitos chave da física: *simetria*, *energia* e *entropia* (Figura 4). De acordo com Platão, *simetria* se encontra em *Topos Ouranos* (céu), aonde se encontram todos os ramos da matemática - a ciência das estruturas. Em contraste, *energia* e *entropia* se encontram em *Physis* (natureza). *Energia* se refere às possibilidades do sistema enquanto *entropia* se refere às *probabilidades*

¹ “*Certamente, está se construindo (a teoria mecânica estatística) sobre fundamentos incertos...*”

Figura 4 – Simetria, energia e entropia



Fonte: Tsallis, 2009.

destas possibilidades. É correto dizer que energia trata de um conceito físico bastante sutil. Entropia é baseada nos “ingredientes” da energia, e dessa forma está, epistemologicamente falando, um passo além. Provavelmente, por conta desta característica, é que o conceito de entropia tenha surgido, na história da física, bem depois do surgimento do conceito de energia.

As conexões entre simetria e energia são bem conhecidas. A invariância de Galileu para as equações de Newton na mecânica clássica desempenha um papel fundamental. A energia se expressa de forma cinética para uma partícula pontual, dada por $p^2/2m$, onde p representa o momento linear da partícula e m a massa. Esta energia, embora apresente uma única forma, não é universal, pois depende do valor de m . Se substituirmos a invariância de Galileu pela invariância de Lorentz, a forma da energia muda drasticamente para $(p^2c^2 + m_0^2c^4)^{1/2}$, onde c representa a velocidade da luz no vácuo e m_0 a massa de repouso. Em outras palavras, a mudança na simetria está longe de ser inócua: simplesmente faz com que a física do sistema mude da mecânica newtoniana clássica para relatividade especial. O eletromagnetismo de Maxwell também está profundamente relacionado à esta mesma invariância de Lorentz, tanto quanto à invariância de calibre. Esta última desempenha um papel fundamental também em eletrodinâmica clássica e quântica e teoria quântica de campos. Ou seja, as profundas conexões entre simetria e energia são bastante conhecidas na física contemporânea. Mudanças em uma são seguidas por mudanças na outra.

E o que dizer sobre as conexões entre energia e entropia? Bem, estas também são bastante conhecidas. Elas naturalmente surgem em termodinâmica na forma de possibilidades e caminhos de transformação de trabalho em calor e vice-versa. Tais fenômenos são bem conhecidos da mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs.

Mas o que dizer das possíveis conexões entre simetria e entropia? Este assunto vem se mantendo imutável ao longo da história, provavelmente por conta da aparente característica universal que a fórmula de entropia de Boltzmann-Gibbs apresenta, dependendo de apenas uma constante universal, k_B , a constante de Boltzmann. Esta característica

faz parecer que a entropia física deva ser *universal* e, obviamente, corretamente representada pela fórmula da entropia de Boltzmann-Gibbs (e suas formas análogas: contínuas ou quânticas). Tsallis argumenta que talvez esta afirmação possa não ser verdadeira e procura mostrar em seu livro [12] que muitos tipos de entropia podem ser fisicamente e matematicamente significativos. Mais ainda, Tsallis afirma que conceitos dinâmicos como a dependência temporal da sensibilidade às condições iniciais, mistura, níveis de ocupação, podem causar fortes efeitos de tal maneira que, em alguns casos, a forma da entropia deva ser modificada. A entropia de Boltzmann-Gibbs ainda terá uma posição privilegiada. Será ainda a forma funcional correta para a entropia nos casos em que a dinâmica não-linear microscópica é controlada por expoentes de Lyapunov *positivos*, que evidenciam uma forte característica caótica do sistema. Se o sistema é tal que tal propriedade não se apresenta (por exemplo, quando o expoente máximo de Lyapunov se anula), então a forma funcional da entropia física do sistema, aparentemente, se apresenta de forma diferente da tradicional forma de Boltzmann-Gibbs.

8.3 Teoria Estatística de Tsallis

A primeira forma funcional para entropia foi proposta por Boltzmann [78, 79] nos anos de 1870 e refinada alguns anos mais tarde por Gibbs [77] para sistemas mais gerais. Para um conjunto com W estados, cada qual com sua probabilidade p_i , a entropia de Boltzmann-Gibbs, S_{BG} , é escrita como

$$S_{BG} = -k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln(p_i), \quad (8.1)$$

com a condição

$$\sum_{i=1}^W p_i = 1, \quad (8.2)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. Para o caso em que as probabilidades de cada estado são iguais, ($p_i = 1/W$) a equação (8.1) se torna

$$S_{BG} = k_B \ln(W), \quad (8.3)$$

expressão esta esculpida no túmulo de Boltzmann em Viena por sugestão de Planck. Uma propriedade importante de (8.1) é a *aditividade*. Se um sistema for composto de dois subsistemas A e B , com o número de estados denotados respectivamente por W_A e W_B , tal que as probabilidades de cada estado sejam independentes, ou seja, $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B (\forall (i, j))$, então a entropia S_{BG} é *aditiva*, ou seja:

$$S_{BG}(A + B) = S_{BG}(A) + S_{BG}(B). \quad (8.4)$$

Segundo Tsallis, não existe nenhum procedimento lógico-dedutivo, nenhuma regra, para a generalização de qualquer teoria física. Tais generalizações ocorrem através de *metáforas*.² Tsallis então apresenta sua *metáfora* para uma possível generalização da teoria estatística de Boltzmann-Gibbs. Utilizando-se das seguintes definições (ver Apêndice B)

$$y = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{(1-q)}} \equiv e_q^x, (e_1^x = e^x). \quad (8.5)$$

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q x, (x > 0; \ln_1 = \ln x), \quad (8.6)$$

Tsallis então postula sua generalização para a teoria estatística de Boltzmann e Gibbs, substituindo $\ln(W)$ de (8.3) por:

$$S_q = k_B \ln_q(W), \quad (8.7)$$

para o caso de probabilidades iguais p_i para cada estado do conjunto $\{p_i\}$ de W . De forma mais geral, Tsallis escreve a forma funcional generalizada da entropia da seguinte forma

$$S_q = k_B \langle \ln_q(1/p_i) \rangle, \quad (8.8)$$

utilizando-se da seguinte relação

$$\langle \ln_q(1/p_i) \rangle = - \sum_{i=1}^W p_i \ln_q(p_i), \quad (8.9)$$

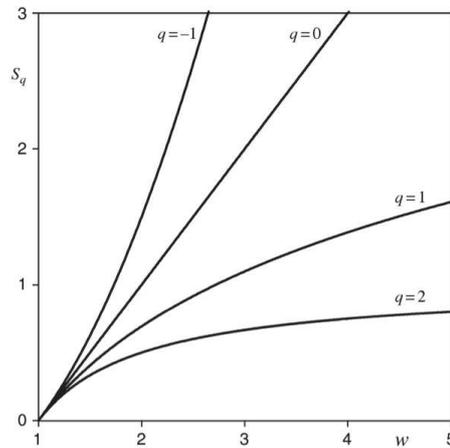
e substituindo a equação (14.14) nesta expressão, obtemos

$$S_q = k_B \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{q - 1}. \quad (8.10)$$

Esta é precisamente a forma postulada em [80] como uma possível generalização para a mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (figura 5). Esta forma generalizada já havia aparecido na literatura em aplicações para cibernética e teoria de controle. Tal formulação foi redescoberta de forma independente em [80], quando proposta pela primeira vez como ponto de partida para a generalização da mecânica estatística.

² Na opinião do autor desta tese, tal afirmação parece ser um tanto quanto pobre. *Intuição* talvez seja a palavra-chave. Segundo Einstein, “*A imaginação é mais importante que o conhecimento*”. Esta frase talvez tenha muito mais significado quando o assunto for generalização de teorias.

Figura 5 – A entropia S_q com probabilidades iguais como função do número de estados W (com $k = 1$), para valores típicos de q .



Fonte: Tsallis, 2009.

8.3.1 Propriedades

8.3.1.1 Não-negatividade

Se existe certeza sobre o estado de um sistema, então uma das probabilidades será igual a 1 e todas as outras se anulam. Consequentemente, a entropia S_q se anula para todo q . Se não existe certeza, então pelo menos duas probabilidades são menores que 1 (e maiores que zero). Dessa forma, $1/p_i > 1$, assim $\ln_q(1/p_i) > 0, \forall i$ (figura 6). Consequentemente, analisando-se a equação (8.8), imediatamente se segue que $S_q > 0$ para todo q .

8.3.1.2 Extremos em Probabilidades Iguais

Pela mesma razão que para o caso da entropia de Boltzmann-Gibbs, para os casos em que as probabilidades p_i são iguais, S_q deve ser um extremo. Quando $q > 0$, S_q é *máximo* e quando $q < 0$, S_q é *mínimo* [12]. Para o caso $q = 0$, temos que a entropia S_q se torna constante. Neste caso, S_0 é

$$S_0 = k(W - 1) \quad (\forall \{p_i\}). \quad (8.11)$$

8.3.1.3 Expansibilidade

Podemos concluir diretamente que S_q é *expansível*, ou seja

$$S_q(p_1, p_2, \dots, p_W, 0) = S_q(p_1, p_2, \dots, p_W). \quad (8.12)$$

Esta propriedade é facilmente verificável a partir da definição (8.10) se $q > 0$. Para os casos em que $q < 0$, a soma em (8.10) se dá somente para os termos em que a probabilidade do estado é positiva, definição estabelecida por Tsallis em [12].

8.3.1.4 Não-Aditividade

Se A e B são dois subsistemas *independentes*, ou seja, se a probabilidade conjunta satisfaz $p_{ij}^{A+B} = p_i^A p_j^B (\forall (ij))$, então

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B)}{k_B}. \quad (8.13)$$

É devido a esta propriedade que, para $q \neq 1$, S_q é designada como *não-aditiva*. Entretanto, modificações drásticas acontecem quando dois subsistemas A e B são correlacionados de maneira especial. Como mostrado por Tsallis em [12], um valor de q deve existir tal que, estritamente ou assintoticamente ($N \rightarrow \infty$), $S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B)$. Em outras palavras, a entropia não-aditiva S_q pode ser extensiva para $q \neq 1$.

Dada a não-negatividade de S_q , segue-se que, para sistemas *independentes*, $S_q(A+B) \geq S_q(A) + S_q(B)$, se $q < 1$, e $S_q(A+B) \leq S_q(A) + S_q(B)$ para $q > 1$. Consistentemente, os casos $q < 1$ e $q > 1$ são chamados na literatura de *super-aditivo* e *sub-aditivo*, respectivamente.

8.3.1.5 Concavidade e Convexidade

A derivada segunda da função contínua $x(1-x^{q-1})/(q-1)$ é *negativa* (*positiva*) para $q > 0$ ($q < 0$). Consequentemente, para $q > 0$, temos que

$$\frac{p_i''[1-(p_i'')^{q-1}]}{q-1} > \lambda \frac{p_i[1-(p_i)^{q-1}]}{q-1} + (1-\lambda) \frac{p_i'[1-(p_i')^{q-1}]}{q-1} \quad (\forall i, 0 < \lambda < 1). \quad (8.14)$$

Aplicando-se $\sum_{i=1}^W$ em ambos os lados desta desigualdade, obtém-se imediatamente que

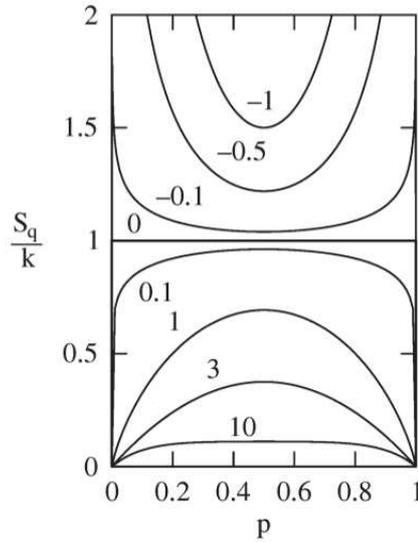
$$S_q(p_i'') > \lambda S_q(p_i) + (1-\lambda) S_q(p_i') \quad (q > 0). \quad (8.15)$$

Estas desigualdades são invertidas para $q < 0$. Dessa forma, fica provado que S_q é *côncava* (*convexa*) para $q > 0$ ($q < 0$). Um corolário imediato é que para o caso de probabilidades iguais para todos os estados, corresponderá a um *máximo* para $q > 0$, enquanto que para $q < 0$ corresponderá a um *mínimo*. (figura 7)

8.3.1.6 Conexão com a Derivada de Jackson

Há cerca de um século atrás, o matemático Jackson generalizou o conceito de derivada de uma função genérica $f(x)$. Ele introduziu um operador diferencial D_q tal que

Figura 6 – A dependência de p da entropia quando $W = 2$, $S_q = [1 - p^q - (1 - p)^q]/(q - 1)$ para valores típicos de q (com $S_1 = -p \ln p - (1 - p) \ln(1 - p)$).



Fonte: Tsallis, 2009.

$$D_q f(x) \equiv \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}, \quad (8.16)$$

e verifica-se imediatamente que $D_1 f(x) = df(x)/dx$. Para $q \neq 1$, este operador substitui a usual (infinitesimal) operação *translação* sobre a abcissa x da função $f(x)$ por uma operação *dilatação*.

Abe destacou uma importante propriedade deste operador [81]. Da mesma forma que podemos verificar facilmente que

$$S_{BG} = -\frac{d}{dx} \sum_{i=1}^W p_i^x \Big|_{x=1}, \quad (8.17)$$

podemos verificar que

$$S_q = -D_q \sum_{i=1}^W p_i^x \Big|_{x=1}. \quad (8.18)$$

Tsallis considera então esta uma propriedade inspiradora [12], onde a usual operação translação infinitesimal é substituída por uma operação finita que, neste caso, é básica para uma invariância de escala. Desde que o postulado da entropia S_q foi inspirado em geometria multifractal, pode-se dizer que esta propriedade é bastante bem-vinda.

9 Entropia de Tsallis, Aceleração Newtoniana Modificada e Relação de Tully-Fisher

9.1 Introdução

O recente formalismo desenvolvido por Verlinde [5], apresentado no capítulo 7, deriva a aceleração gravitacional através do princípio holográfico e da bem conhecida lei de equipartição de energia. A principal ideia por trás desta conjuntura é a de que gravitação pode ser considerada universal e independente dos detalhes da micro-estrutura espaço-temporal. Temos ainda uma importante extensão da teoria de Boltzmann-Gibbs proposta por Tsallis [12, 80] também apresentada nesta tese no capítulo 8, onde uma nova forma de entropia é apresentada. Dessa forma, um dos principais objetivos do trabalho apresentado neste capítulo é o de redefinir o número de bits, especificado no trabalho de Verlinde, de forma que este número seja compatível com a entropia de Tsallis, tanto quanto com a lei de entropia de área de Beckenstein-Hawking. As consequências sobre as propriedades físicas desta abordagem serão discutidas ao longo deste capítulo.

Com o intuito de facilitar a leitura deste trabalho, vamos reescrever alguns resultados já apresentados nos capítulos anteriores, dedicados à uma revisão dos trabalhos de Verlinde e Tsallis. Primeiramente, reescrevemos a expressão que relaciona o número de *bits* N com a área da superfície holográfica A , dada por

$$N = \frac{A}{l_p^2}, \quad (9.1)$$

onde l_p representa o comprimento de Planck.

Temos também a relação de Unruh, que define a temperatura observada por um observador comovente a um sistema com aceleração própria constante a , dada por

$$k_B T = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar a}{c}. \quad (9.2)$$

No cenário da estatística de Tsallis, é possível derivar uma versão não-extensiva da lei de equipartição de energia [82]. Como resultado, foi obtido que

$$E_q = \frac{1}{5 - 3q} N k_B T, \quad (9.3)$$

e com este resultado foi derivado em [83] uma nova expressão para a constante gravitacional, através do formalismo de Verlinde em um cenário de uma estatística não-extensiva, denominada constante gravitacional efetiva (G_q), tal que

$$G_q = \frac{5 - 3q}{2} G, \quad (9.4)$$

onde G é a constante gravitacional de Newton e q o parâmetro de não-extensividade.

Além disso, temos a expressão da entropia de Tsallis para o caso em que todos os estados acessíveis apresentam a mesma probabilidade de ocorrência. Esta entropia é dada por

$$S_q = k_B \frac{W^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad (9.5)$$

onde W é o número de micro-estados acessíveis do sistema.

9.2 Aceleração Gravitacional Modificada

Iniciaremos nossa proposta considerando inicialmente a estatística de Boltzmann-Gibbs. Da equação (9.1) escrevemos uma relação generalizada entre o número de *bits* N e a área da superfície holográfica, tal que

$$N = \frac{A}{Q}, \quad (9.6)$$

onde Q representa, em princípio, um parâmetro. Vamos considerar o número de micro-estados W dado por

$$W = c_1^N, \quad (9.7)$$

onde c_1 é o número de graus de liberdade internos da superfície holográfica. Em uma estatística de Boltzmann-Gibbs, a entropia S é dada por $S = k_B \ln(W)$. Utilizando a equação (9.7), teremos

$$S = k_B N \ln(c_1), \quad (9.8)$$

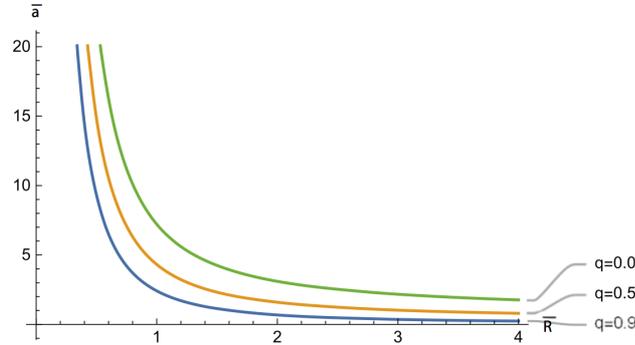
e através da fórmula de Beckenstein-Hawking, que diz que $S = k_B A / 4l_p^2$, podemos obter o número de bits N como função da área A e mostrar que

$$N = \frac{A}{4l_p^2 \ln(c_1)} = \frac{A}{Q}, \quad (9.9)$$

onde $Q \equiv 4l_p^2 \ln(c_1)$. Se definirmos $4 \ln(c_1) = 1$ então recuperamos a definição usual do número de bits, dado por (9.1). É importante observar que, no contexto da estatística de Boltzmann-Gibbs, o parâmetro Q é uma constante, ou seja, não depende da área da superfície holográfica.

A generalização da entropia de Boltzmann-Gibbs e, conseqüentemente, a obtenção de uma relação mais geral para o número de *bits* descrita pela equação (9.6), é bastante direta. Para se alcançar este objetivo, utilizaremos a fórmula da entropia proposta por

Figura 7 – Gráfico da aceleração gravitacional modificada normalizada em função da distância radial normalizada para diferentes valores de q . Na figura temos que $\bar{a} = a/(GM\pi/2l_p^2)$ e $\bar{R} = R/\sqrt{l_p^2/\pi}$.



Tsallis em um *ensemble* microcanônico (como feito já de forma similar em [84] e [85]). Então, utilizando-se da equação (9.7) em conjunto com (9.5), obtemos que

$$k_B \frac{c_1^{N(1-q)} - 1}{1-q} = k_B \frac{A}{4l_p^2} \quad (9.10)$$

$$\rightarrow N = \frac{\ln \left[1 + (1-q)A/4l_p^2 \right]}{(1-q)\ln(c_1)}.$$

Podemos recuperar a fórmula usual para o número de *bits*, equação (9.1), no limite $q \rightarrow 1$ se usarmos $\ln(c_1) = 1/4$ na equação (9.10). Um resultado similar para o valor de c_1 foi obtido por Padmanabhan em [86]. Dessa forma, podemos generalizar a equação (9.9) no contexto da estatística de Tsallis. Como resultado obtemos

$$N = \frac{\ln \left[1 + (1-q)A/4l_p^2 \right]}{(1-q)^{\frac{1}{4}}}, \quad (9.11)$$

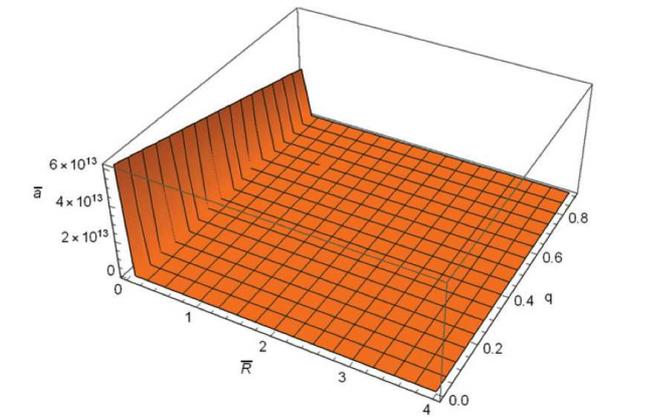
e vale ressaltar que, para um dado valor de A , o número de bits N na equação (9.11) é agora uma função do parâmetro de não-extensividade q .

Utilizando-se da generalização do número de bits, equação (9.11), em conjunto com as equações (9.3) e (9.2) e definindo-se $E_q = Mc^2$, podemos obter uma aceleração gravitacional absoluta modificada no contexto da estatística de Tsallis, tal que

$$a = GM \frac{\pi}{2l_p^2} \frac{(5-3q)(1-q)}{\ln \left[1 + (1-q)A/4l_p^2 \right]}, \quad (9.12)$$

$$= GM \frac{\pi}{2l_p^2} \frac{(5-3q)(1-q)}{\ln \left[1 + (1-q)\pi R^2/l_p^2 \right]},$$

Figura 8 – Gráfico em 3D da aceleração gravitacional modificada normalizada em função da distância radial normalizada e para uma variação de q de 0 a 0.9 onde $\bar{a} = a/(GM\pi/2l_p^2)$ e $\bar{R} = R/\sqrt{l_p^2/\pi}$. Podemos perceber que a diminui à medida que q aumenta. A figura apresenta todo o conjunto de curvas (atá $q = 0.9$) mostradas na figura 8.



onde consideramos que A , a área da superfície holográfica, é igual a $4\pi R^2$. Podemos ver que no limite $q \rightarrow 1$ reobtemos $a = GM/R^2$. Na figura 8 é construído o gráfico em duas dimensões que mostra a aceleração gravitacional modificada normalizada, (equação (9.12)), como função da distância radial normalizada \bar{R} para três diferentes valores de q . Na figura 9 temos o correspondente gráfico em três dimensões, ou seja, o conjunto de curvas obtido na figura 8 para valores contínuos de q .

Das figuras 8 e 9 podemos observar claramente que o valor absoluto da aceleração gravitacional decai à medida que o valor do parâmetro q aumenta. Este é um novo resultado [2]. Baseando-se somente na equação (9.12), um observador poderia concluir que o parâmetro de não-extensividade q é o parâmetro que define a forma como objetos massivos se atraem mutuamente.

9.3 Teoria Newtoniana Modificada (MOND) e Relação de Tully-Fisher Não-Extensiva

A grande virtude da teoria MOND (Modified Newtonian Dynamics) [87, 88, 89], se deve, principalmente, à capacidade de explicar grande parte das rotações de galáxias. Esta teoria reproduz muito bem a conhecida relação de Tully-Fisher [90]. Dessa forma, a teoria MOND pode ser uma alternativa ao modelo de matéria escura. Entretanto, esta teoria apresenta problemas de previsão dos padrões de temperatura de aglomerados de galáxias (*galaxie clusters*) quando confrontados com os dados observados em cosmologia. Além disso, se podemos afirmar que a relação usual de Tully-Fisher nada mais é do que o limite de $q \rightarrow 1$ da sua versão não-extensiva, o que seria esta versão não-extensiva? É o que pretendemos explicar nos parágrafos seguintes.

De forma resumida, MOND é basicamente uma modificação da segunda lei de

Newton onde a força pode ser escrita como

$$F = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)a, \quad (9.13)$$

onde a_0 é uma constante que será definida pouco mais adiante. $\mu(x) \approx 1$ para $x \gg 1$ e $\mu(x) \approx x$ para $x \ll 1$. Por simplicidade, é comum assumir que a variação de $\mu(x)$ entre os limites assintóticos acontece de maneira abrupta em $x = 1$ ou $a = a_0$.

No que se refere ao movimento rotacional de galáxias, temos que a relação usual de Tully-Fisher é dada por $v^2 = \sqrt{GMa_0}$, onde a_0 , a constante da teoria MOND, vale $a_0 \approx 1.2 \cdot 10^{-8} \text{ cm/s}^2$.

Em [91] a teoria MOND foi obtida através da abordagem de Verlinde para gravitação entrópica. Basicamente foi considerado que a fração de bits com energia zero é dada por

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{T}{T_c}, \quad (9.14)$$

onde N representa o número total de *bits*, N_0 o número de bits com energia zero e T_c a temperatura crítica. Para $T \geq T_c$ temos $N_0 = 0$. Consequentemente, no regime MOND, o número de *bits* \bar{N} com energia diferente de zero para uma temperatura $T < T_c$ é

$$\bar{N} = N - N_0 = N \frac{T}{T_c}, \quad (9.15)$$

e substituindo o número de *bits* \bar{N} com energia diferente de zero de (9.15) em (9.3) e considerando $E_q = Mc^2$, teremos que

$$Mc^2 = \frac{1}{5 - 3q} N \frac{T}{T_c} k_B T, \quad (9.16)$$

e utilizando as equações (9.11) e (9.2) em (9.16), obtemos

$$a \left(\frac{a}{a_0} \right) = GM \frac{\pi}{2l_p^2} \frac{(5 - 3q)(1 - q)}{\ln \left[1 + (1 - q)A/4l_p^2 \right]}, \quad (9.17)$$

e, consequentemente, temos que

$$a = \sqrt{GMa_0 \frac{\pi}{2l_p^2} \frac{(5 - 3q)(1 - q)}{\ln \left[1 + (1 - q)\pi R^2/l_p^2 \right]}}, \quad (9.18)$$

onde a_0 é dado por $a_0 = 2\pi c k_B T_c / \hbar$ e consideramos $A = 4\pi R^2$ na equação (9.17). Dessa forma, obtemos uma fórmula para aceleração em teoria MOND no contexto da estatística de Tsallis em (9.18). Vamos então analisar as consequências físicas deste último resultado em detalhes.

Para se recuperar a estatística de Boltzmann-Gibbs, tomamos o limite $q \rightarrow 1$. Assim teremos que

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(5 - 3q)(1 - q)}{\ln \left[1 + (1 - q)\pi R^2 / l_p^2 \right]} = \frac{2l_p^2}{\pi R^2}, \quad (9.19)$$

e, substituindo este resultado em (9.18), teremos

$$\lim_{q \rightarrow 1} a = \frac{\sqrt{GMa_0}}{R}, \quad (9.20)$$

que nada mais é que a relação de Tully-Fisher dividida por R . Dessa forma

$$\lim_{q \rightarrow 1} a = \frac{v^2}{R}, \quad (9.21)$$

que é um resultado esperado já que confirma a primeira hipótese MOND. Logo, podemos concluir deste último resultado que a aceleração dada por (9.18) é a aceleração de rotação da galáxia onde, no limite de Boltzmann-Gibbs, é a aceleração centrípeta da galáxia. Então, podemos escrever

$$\frac{v_{NE}^2}{R} = \sqrt{GMa_0 \frac{\pi}{2l_p^2} \frac{(5 - 3q)(1 - q)}{\ln \left[1 + (1 - q)\pi R^2 / l_p^2 \right]}}, \quad (9.22)$$

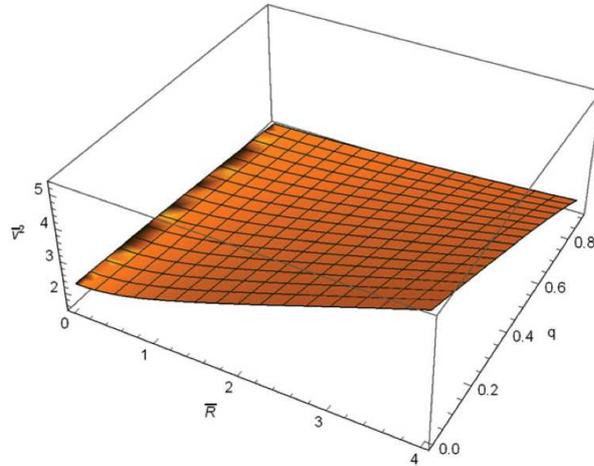
ou seja

$$v_{NE}^2 = \sqrt{GMa_0 \frac{\pi R^2}{2l_p^2} \frac{(5 - 3q)(1 - q)}{\ln \left[1 + (1 - q)\pi R^2 / l_p^2 \right]}}, \quad (9.23)$$

que pode ser entendido como a versão não-extensiva da relação de Tully-Fisher. No limite de Boltzmann-Gibbs, utilizando-se a Eq. (9.19), teremos que $v^2 = \sqrt{GMa_0}$. É importante notar que em (9.23) a relação de Tully-Fisher não-extensiva é dependente de R . Esta dependência não é uma propriedade dada pela teoria MOND, mas sim pela versão não-extensiva. Este é um novo resultado na literatura [2]. Acreditamos que podemos utilizar a Eq. (9.23) para obter intervalos válidos para o valor de q .

Observações astronômicas relativamente recentes têm demonstrado que, para galáxias em forma de disco, a quarta potência da velocidade de estrelas com movimento circular em torno do núcleo da galáxia, $v_{núcleo}^4$, é proporcional à luminosidade L da própria galáxia, apresentando uma precisão com mais de duas ordens de magnitude em L . Em outras palavras, $v_{núcleo}^4 \propto L$. Como L é proporcional à massa M da galáxia, podemos concluir que $v_{núcleo}^4 \propto M$, ou seja, obedece à relação de Tully-Fisher. Entretanto, existe uma dependência sobre a distância da estrela até o centro da galáxia, como exigido pela lei Newtoniana $v_{núcleo}^2 = GM/r$ em movimentos circulares. Com o objetivo de se corrigir este desvio da lei de Newton, astrônomos supõem que existam halos em torno da galáxia

Figura 9 – Gráfico em 3D da relação de Tully-Fisher não-extensiva, *i. e.*, a velocidade de rotação $\bar{v}^2 = v^2/\sqrt{GMa_0/2}$ em função da distância radial $\bar{R} = R/\sqrt{l_p^2/\pi}$ para diferentes valores de q , referente ao comportamento de v^2 como função de q e \bar{R} .



preenchidos com matéria escura e distribuídos de tal forma que satisfazem a relação de Tully-Fisher para cada situação específica. Podemos ver claramente um cenário diferente na versão não-extensiva da relação de Tully-Fisher expressa em (9.23), onde a velocidade de rotação depende da distância R . A investigação das consequências da matéria escura que a equação (9.23) pode trazer é outra pesquisa em andamento. Nas figura 10 podemos ver claramente que a versão não-extensiva da relação de Tully-Fisher possui dependência em R , ao contrário da versão usual. Podemos notar que a velocidade de rotação (v^2) aumenta conforme R também aumenta e q diminui. Próximo ao limite da estatística usual de Boltzmann-Gibbs, a velocidade diminui conforme R e q aumentam simultaneamente.

9.4 Equação de Friedmann Modificada

A equação (9.12) representa a expressão termodinâmica para a aceleração Newtoniana. Dessa forma

$$\ddot{R} = \ddot{a}(t)r = -GM \frac{\pi}{2l_p^2} \frac{(5 - 3q)(1 - q)}{\ln \left[1 + (1 - q)\pi a^2 r^2 / l_p^2 \right]}, \quad (9.24)$$

onde R é o raio físico da superfície holográfica, que pode ser escrito como $R(t, r) = a(t)r$, onde $a(t)$ é o fator de escala da métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e r representa a coordenada radial comoviente. Baseado em [92], a aceleração em (9.24) resulta da massa ativa gravitacional, conhecida como massa de Tolman-Komar [93, 94] dada por

$$M = \frac{4\pi}{3} a^3 r^3 \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right), \quad (9.25)$$

que é proporcional à função de escala. Substituindo-se a equação (9.25) em (9.24), obtemos a equação modificada de Friedmann no contexto da estatística de Tsallis, expressa por

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{2\pi^2}{3l_p^2} a^2 r^2 G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \frac{(5-3q)(1-q)}{\ln \left[1 + (1-q)\pi a^2 r^2 / l_p^2 \right]}, \quad (9.26)$$

onde, ao calcularmos o limite de $q \rightarrow 1$ em (9.26), obtemos a equação de Friedmann usual

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right), \quad (9.27)$$

e neste ponto, é importante mencionar que, para que se reproduza a equação usual de Friedmann no limite de $q \rightarrow 1$, é necessário introduzir o sinal negativo no lado direito da equação (9.24). Além disso, as equações não-extensivas de Friedmann obtidas em [95] e [96] foram construídas pela substituição da constante gravitacional usual pela constante gravitacional efetiva definida em (9.4). Em [95, 96], o número de bits, definido pela equação (9.1), não foi modificado.

A coordenada radial comovente r em (9.26) pode ser eliminada, utilizando-se o raio dinâmico de horizonte aparente [97, 98] definido por

$$R = ar = \frac{c}{\sqrt{H^2 + \frac{k}{a^2}}}, \quad (9.28)$$

onde $H = \dot{a}/a$ representa o parâmetro de Hubble e k denota a curvatura do espaço, com $k = 0, 1, -1$, correspondendo à curvatura de um universo plano, fechado e aberto, respectivamente. Logo, substituindo a equação (9.28) em (9.26) e considerando-se ainda o fato de que \ddot{a}/a pode ser escrito como $\ddot{a}/a = \dot{H} + H^2$, obtemos

$$\begin{aligned} & \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) (\dot{H} + H^2) \ln \left[1 + \frac{\pi c^2}{l_p^2} \frac{1}{(H^2 + \frac{k}{a^2})} (1-q) \right] = \\ & -\frac{2\pi^2 c^2}{3l_p^2} (5-3q)(1-q) G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right), \end{aligned} \quad (9.29)$$

que nos mostra uma equação diferencial extremamente não linear para o parâmetro de Hubble como função de q .

10 Considerações Cosmológicas em Estatística de Kaniadakis

10.1 Introdução

Como no trabalho apresentado no capítulo anterior, apresentaremos a seguir uma análise do trabalho de Verlinde, uma teoria MOND e uma equação de Friedmann modificadas considerando-se a estatística de Kaniadakis [13]. No limite em que o parâmetro κ , que caracteriza a estatística de Kaniadakis, tende a zero, recuperamos a usual estatística de Boltzmann-Gibbs. Também será apresentado uma versão da relação de Tully-Fisher no contexto de Kaniadakis.

10.2 Estatística de Kaniadakis

No cenário de uma estatística de Kaniadakis, é possível derivar o teorema *kappa* de equipartição de energia [99], que pode ser expreso como

$$E_\kappa = \frac{1}{2} N \frac{\left(1 + \frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right)}{\left(1 + \frac{3}{2}\kappa\right) 2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right)} k_B T, \quad (10.1)$$

onde intervalo para possíveis valores de κ é $0 \leq \kappa < 2/3$. Para $\kappa = 2/3$ (valor crítico), a expressão da lei de equipartição, equação (10.1), diverge devido à função Gama. Para $\kappa = 0$, a lei de equipartição de energia clássica é recuperada.

Podemos aplicar no formalismo de Verlinde a expressão (10.1) para obtermos a versão κ da aceleração gravitacional entrópica. Podemos então escrever uma fórmula para a aceleração entrópica modificada. Como resultado obtém-se

$$a = G_\kappa \frac{M}{r^2}, \quad (10.2)$$

onde G_κ representa uma constante gravitacional efetiva, escrita como

$$G_\kappa = \frac{\left(1 + \frac{3}{2}\kappa\right) 2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right)}{\left(1 + \frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right)} G, \quad (10.3)$$

e no limite em que $\kappa \rightarrow 0$ recuperamos o valor clássico da constante gravitacional G .

A bem conhecida estatística de Kaniadakis, de forma análoga à estatística de Tsallis, generaliza a tradicional estatística de Boltzmann-Gibbs ao introduzir as funções κ -*exponencial* e κ -*logaritmo*, cujas definições são, respectivamente

$$e_\kappa(f) = \left(\sqrt{1 + \kappa^2 f^2} + \kappa f\right)^{\frac{1}{\kappa}}, \quad (10.4)$$

$$\ln_\kappa(f) = \frac{f^\kappa - f^{-\kappa}}{2\kappa}, \quad (10.5)$$

e as seguintes propriedades são satisfeitas

$$\ln_{\kappa}(\exp_{\kappa}(f)) = \exp_{\kappa}(\ln_{\kappa}(f)) \equiv f, \quad (10.6)$$

e das equações (10.4) e (10.5), podemos notar que o parâmetro κ altera as definições usuais das funções exponencial e logaritmo. A entropia de Kaniadakis pode ser escrita como

$$S_{\kappa} = -k_B \sum_i^W \frac{p_i^{1+\kappa} - p_i^{1-\kappa}}{2\kappa}, \quad (10.7)$$

que recupera a entropia de Boltzmann-Gibbs no limite em que $\kappa \rightarrow 0$. É importante neste momento comentar que a entropia de Kaniadakis satisfaz as propriedades de concavidade, aditividade e extensividade. Além disso, a estatística de Kaniadakis tem se mostrado bem sucedida quando aplicada em muitos fenômenos experimentais, tais como raios cósmicos [14], efeitos cósmicos [100], plasma de quark-gluons [101], modelos cinéticos que descrevem um gás de átomos e fótons interagentes [102] e modelos financeiros [103]. Formulações não-extensivas de gravidade entrópica vêm sendo desenvolvidas através dos últimos anos [104, 105, 106].

Utilizando o modelo microcanônico, onde todos os estados apresentam probabilidades iguais de ocorrência, a entropia de Kaniadakis toma a seguinte forma [13, 14]

$$S_{\kappa} = k_B \frac{W^{\kappa} - W^{-\kappa}}{2\kappa}, \quad (10.8)$$

onde no limite $\kappa \rightarrow 0$ é recuperada a entropia de Boltzmann.

Iniciaremos nossa proposta considerando inicialmente a estatística de Boltzmann. Da equação (9.1), escrevemos novamente uma relação generalizada entre o número de bits e a área da superfície holográfica, a saber

$$N = \frac{A}{Q} \quad (10.9)$$

onde Q representa, em princípio, um parâmetro. Da mesma forma que no trabalho apresentado no capítulo anterior, vamos considerar o número de micro-estados W dado por

$$W = c_1^N, \quad (10.10)$$

onde c_1 é o número de graus de liberdade internos da superfície holográfica. Em uma estatística de Boltzmann-Gibbs, a entropia S é dada por $S = k_B \ln(W)$. Utilizando a equação (10.10), teremos

$$S = k_B N \ln(c_1). \quad (10.11)$$

Como realizado anteriormente, podemos ainda, através da fórmula de Beckenstein-Hawking, que diz que $S = k_B A / 4l_p^2$, obter o número de bits N como função da área A e mostrar que

$$N = \frac{A}{4l_p^2 \ln(c_1)} = \frac{A}{Q}, \quad (10.12)$$

onde $Q \equiv 4l_p^2 \ln(c_1)$. Se definirmos $4 \ln(c_1) = 1$ então recuperamos a definição usual do número de bits, dado por (9.1). Mais uma vez, é importante observar que, no contexto da estatística de Boltzmann-Gibbs, o parâmetro Q é uma constante, ou seja, não depende da área da superfície holográfica.

A generalização da entropia de Boltzmann-Gibbs e, conseqüentemente, a obtenção de uma relação mais geral para o número de bits descrita pela Eq. (9.6) é bastante direta. Para se alcançar este objetivo utilizaremos a fórmula de entropia proposta por Kaniadakis em um *ensemble* microcanônico (como feito já de forma similar em [84] e [85]). Então, utilizando-se da Eq. (10.10) em conjunto com (10.8), obtemos que

$$k_B \frac{c_1^{N\kappa} - c_1^{-N\kappa}}{2\kappa} = k_B \frac{A}{4l_p^2}, \quad (10.13)$$

$$\rightarrow N = \frac{\ln \left[\frac{\kappa A}{4l_p^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2 A^2}{16l_p^4} + 1} \right]}{\kappa \ln(c_1)}, \quad (10.14)$$

e podemos recuperar a fórmula usual para o número de bits, Eq. (9.1), no limite $\kappa \rightarrow 0$ se usarmos $\ln(c_1) = 1/4$ na equação (10.14). Dessa forma, podemos generalizar a equação (10.12) no contexto da estatística de Kaniadakis. Como resultado obtemos

$$N = \frac{4 \ln \left[\frac{\kappa A}{4l_p^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2 A^2}{16l_p^4} + 1} \right]}{\kappa}, \quad (10.15)$$

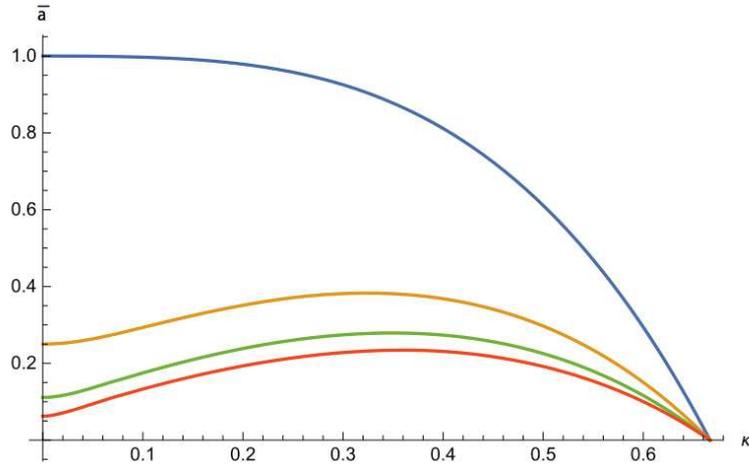
e novamente vale ressaltar que, para um dado valor de A , o número de bits N na equação (10.15) é agora uma função do parâmetro κ .

Utilizando-se da generalização do número de bits, equação (10.15), em conjunto com as equações (10.1) e (9.2) e definindo-se $E_\kappa = M c^2$, podemos obter uma aceleração gravitacional absoluta modificada no contexto da estatística de Kaniadakis, onde

$$a = GM \frac{\pi \left(1 + \frac{3}{2}\right) 2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right)}{l_p^2 \left(1 + \frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right)} \frac{\kappa}{\ln \left[\frac{\kappa \pi R^2}{l_p^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2 \pi^2 R^4}{l_p^4} + 1} \right]}, \quad (10.16)$$

onde consideramos que A , a área da superfície holográfica, é igual a $4\pi R^2$. Podemos ver que no limite $\kappa \rightarrow 0$ reobtemos $a = GM/R^2$. Na figura 10 é construído o gráfico em duas

Figura 10 – Gráfico da aceleração gravitacional modificada (\bar{a}) em função do parâmetro κ para diferentes valores de R . A linha azul corresponde a $R = 1.0$, linha amarela a $R = 2.0$, linha verde correspondendo a $R = 3.0$ e a linha laranja a $R = 4.0$. Na figura temos que $\bar{a} = a/(GM/l_p^2)$.



Fonte: Legenda da foto.

dimensões que mostra a aceleração gravitacional modificada normalizada, Eq. (9.12), como função do parâmetro κ para diferentes valores de R . Já a figura 11 apresenta valores da aceleração gravitacional modificada em função da distância radial normalizada \bar{R} para três diferentes valores de κ . Na figura 12 temos o correspondente gráfico em três dimensões, ou seja, o conjunto de curvas obtido na figura 11 para valores contínuos de κ .

Das figuras 11, 12 e 13 podemos observar claramente que o valor absoluto da aceleração gravitacional decai à medida que o valor do parâmetro κ aumenta. Baseando-se somente na equação (10.16), um observador poderia concluir que o parâmetro κ é o parâmetro que define a forma como objetos massivos se atraem mutuamente.

10.3 MOND e Relação de Tully-Fisher na Estatística de Kaniadakis

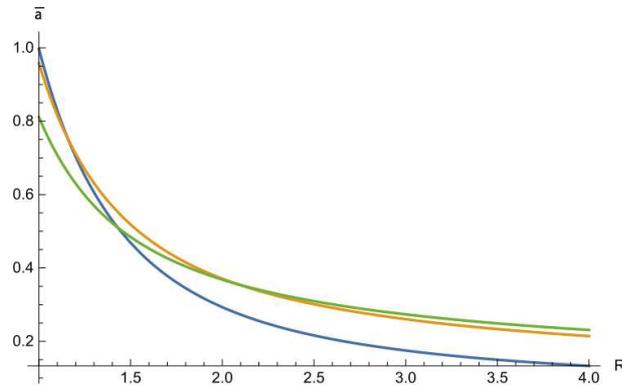
Como já mencionado anteriormente, em [91] a teoria MOND foi obtida através da abordagem de Verlinde para gravitação entrópica. A proposta aqui consiste em aplicar a mesma metodologia desenvolvida no capítulo 8 para a entropia generalizada de Kaniadakis.

Podemos então escrever uma expressão para a lei de equipartição de energia, considerando a Eq. (9.15) para $T < T_c$, representada por

$$Mc^2 = \frac{1}{2}(N - N_0)k_B T, \quad (10.17)$$

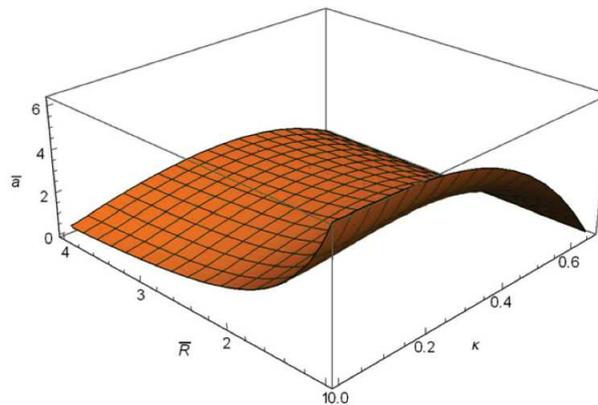
e de (9.15) podemos escrever que

Figura 11 – Gráfico da aceleração gravitacional modificada (\bar{a}) em função da distância radial R para diferentes valores de κ . A linha azul corresponde a $\kappa = 0.1$, linha amarela a $\kappa = 0.25$, linha verde correspondendo a $\kappa = 0.4$. Na figura temos que $\bar{a} = a/(GM/l_p^2)$.



Fonte: Legenda da foto.

Figura 12 – Gráfico em 3D da aceleração gravitacional modificada (\bar{a}) para uma variação de κ de 0 a 0.66, onde $\bar{a} = a/(GM/l_p^2)$. Podemos notar que \bar{a} decresce conforme κ aumenta. Esta figura mostra todo o conjunto de curvas (até $R = 4$) mostradas na figura 11.



$$Mc^2 = \frac{1}{2} N \frac{T}{T_c} k_B T, \quad (10.18)$$

e a Eq. (10.1) pode ser escrita como

$$Mc^2 = \frac{N}{2} \frac{\left(1 + \frac{\kappa}{2}\right)}{\left(1 + \frac{3}{2}\kappa\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right)}{2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right)} \frac{1}{k_B T_c} (k_B T)^2, \quad (10.19)$$

onde, ao utilizarmos a expressão de temperatura Unruh (9.2), teremos

$$Mc^2 = \frac{N}{2} \frac{\left(1 + \frac{\kappa}{2}\right)}{\left(1 + \frac{3}{2}\kappa\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right)}{2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right)} \frac{1}{k_B T_c} \frac{1}{4\pi^2} \frac{\hbar^2 a^2}{c^2}. \quad (10.20)$$

De [91] temos ainda que

$$T_c = \frac{\hbar a_0}{2\pi c k_B}, \quad (10.21)$$

e substituindo a Eq. (10.15) em (10.20) teremos que

$$Mc^2 = \frac{1}{\pi\kappa} \frac{\ln \left[\frac{\kappa A}{4l_p^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2 A^2}{16l_p^4} + 1} \right]}{\kappa} \frac{\left(1 + \frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right) \hbar a^2}{\left(1 + \frac{3}{2}\kappa\right) 2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right) a_0 c} \quad (10.22)$$

$$\Rightarrow a \left(\frac{a}{a_0} \right) = GM \frac{\pi \left(1 + \frac{3}{2}\right) 2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right)}{l_p^2 \left(1 + \frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right)} \frac{\kappa}{\ln \left[\frac{\kappa\pi R^2}{l_p^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2\pi^2 R^4}{l_p^4} + 1} \right]}, \quad (10.23)$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{GM a_0 \frac{\pi \left(1 + \frac{3}{2}\right) 2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right)}{l_p^2 \left(1 + \frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right)} \frac{\kappa}{\ln \left[\frac{\kappa\pi R^2}{l_p^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2\pi^2 R^4}{l_p^4} + 1} \right]}}, \quad (10.24)$$

onde $G = c^3 l_p^2 / \hbar$, a_0 é dado pela Eq. (10.21) e consideramos $A = 4\pi R^2$ na equação (10.23). Dessa forma, obtemos uma fórmula para aceleração em teoria MOND no contexto da estatística de Kaniadakis em (10.24), *i.e.*, para o caso em que $\mu(x) \approx x$. Vamos então analisar as consequências físicas deste último resultado em detalhes. Usando o limite em que $\kappa \rightarrow 0$ em (10.24), obtemos que

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} a = \frac{\sqrt{GM a_0}}{R}, \quad (10.25)$$

que nada mais é que a relação de Tully-Fisher dividida por R . Dessa forma

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} a = \frac{v^2}{R}, \quad (10.26)$$

que é um resultado esperado, já que confirma a primeira hipótese MOND. Logo, podemos concluir deste último resultado que a aceleração dada por (10.24) é a aceleração de rotação da galáxia onde, no limite de Boltzmann-Gibbs, é a aceleração centrípeta da galáxia. Então, podemos escrever

$$v_\kappa^2 = R \sqrt{GM a_0 \frac{\pi \left(1 + \frac{3}{2}\right) 2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right)}{l_p^2 \left(1 + \frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right)} \frac{\kappa}{\ln \left[\frac{\kappa\pi R^2}{l_p^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2\pi^2 R^4}{l_p^4} + 1} \right]}}, \quad (10.27)$$

que pode ser entendido como a versão de Kaniadakis para a relação de Tully-Fisher. No limite de Boltzmann-Gibbs, utilizando-se a equação (10.27), teremos que $v^2 = \sqrt{GM a_0}$. É importante notar que em (10.27), a relação κ de Tully-Fisher é dependente de R . Esta dependência não é uma propriedade dada pela teoria MOND, mas sim pela versão κ . Vale destacar que não estamos propondo a exata lei da teoria MOND. Obtemos uma forma

Figura 13 – Gráfico da velocidade de rotação modificada de galáxias (\bar{v}^2 em função de κ para diferente valores da distância radial R . A linha azul corresponde a $R = 1.0$, linha amarela a $R = 2.0$, linha verde a $R = 3.0$ e a linha laranja a $R = 4.0$. Na figura temos que $\bar{v}^2 = v^2/\sqrt{GMa_0/l_p^2}$.

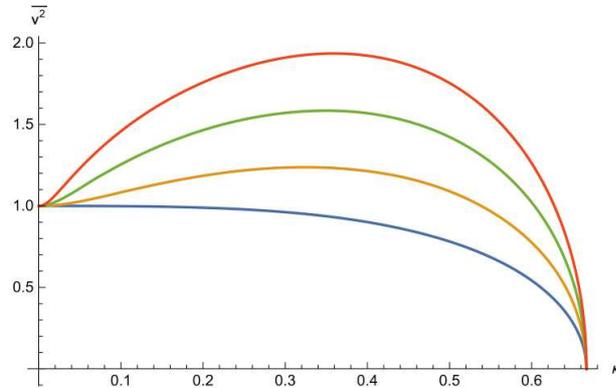
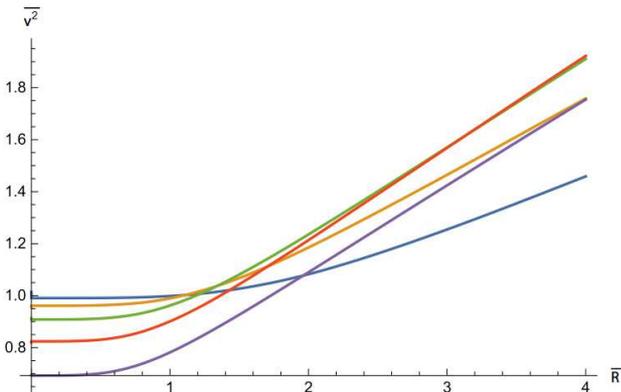


Figura 14 – Gráfico da velocidade de rotação modificada de galáxias (\bar{v}^2 em função de \bar{R} para diferente valores do parâmetro κ . A linha azul corresponde a $\kappa = 0.1$, linha amarela a $\kappa = 0.2$, linha verde a $\kappa = 0.3$, a linha vermelha a $\kappa = 0.4$ e a linha roxa correspondendo a $\kappa = 0.5$. Na figura temos que $\bar{v}^2 = v^2/\sqrt{GMa_0/l_p^2}$.



própria para se construir a relação de Tully-Fisher. Este é um novo resultado na literatura [13]. Acreditamos que podemos utilizar a equação (10.27) para obter intervalos válidos para o valor de κ .

Na figura 13 podemos ver claramente que a versão κ da relação de Tully-Fisher possui dependência em R , ao contrário da versão usual. Podemos notar que a velocidade de rotação (v^2) aumenta conforme R também aumenta e κ apresenta valores inferiores. Próximo ao limite da estatística usual de Boltzmann-Gibbs, a velocidade diminui conforme R e κ aumentam simultaneamente. É importante ressaltar que, qualquer que seja o valor de R , quando $\kappa = 0$, a velocidade de rotação apresenta o mesmo valor renormalizado, igual a 1. De fato, $v^2 = \sqrt{GMa_0/l_p^2}$ para $\kappa = 0$ e para qualquer valor de R . Na figura 14, apresentamos valores de \bar{v}^2 como funções de $\bar{R} = R/l_p^2$, *i.e.*, uma curva para cada valor

definido de κ .

10.4 Equação de Friedmann Modificada

A equação (10.16) representa a expressão termodinâmica para a aceleração newtoniana. Dessa forma,

$$\ddot{R} = \ddot{a}(t)r = GM \frac{\pi \left(1 + \frac{3}{2}\right) 2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right)}{l_p^2 \left(1 + \frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right)} \frac{\kappa}{\ln \left[\frac{\kappa\pi R^2}{l_p^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2\pi^2 R^4}{l_p^4} + 1} \right]}, \quad (10.28)$$

$$\ddot{a}(t) = \frac{GM}{r} \frac{\pi \left(1 + \frac{3}{2}\right) 2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right)}{l_p^2 \left(1 + \frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right)} \frac{\kappa}{\ln \left[\frac{\kappa\pi a^2(t)r^2}{l_p^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2\pi^2 a^4(t)r^4}{l_p^4} + 1} \right]}, \quad (10.29)$$

onde R é o raio físico da superfície holográfica, que pode ser escrito como $R(t, r) = a(t)r$, onde $a(t)$ é o fator de escala da métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e r representa a coordenada radial comovente. Baseado em [107], a aceleração em (10.29) resulta da massa ativa gravitacional de Tolman-Komar [93, 94] dada por

$$M = \frac{4\pi}{3} a^3 r^3 \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right), \quad (10.30)$$

que é proporcional à função de escala. Substituindo a Eq. (10.30) em (10.29), obtemos a equação modificada de Friedmann no contexto da estatística de Kaniadakis, expressa por

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{4\pi G}{3} \frac{\pi}{l_p^2} a^2 r^2 \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \frac{\left(1 + \frac{3}{2}\right) 2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right)}{\left(1 + \frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right)} \\ &\times \frac{\kappa}{\ln \left[\frac{\kappa\pi a^2(t)r^2}{l_p^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2\pi^2 a^4(t)r^4}{l_p^4} + 1} \right]}, \end{aligned} \quad (10.31)$$

onde calculando o limite em que $\kappa \rightarrow 0$ em (10.31), obtemos a equação de Friedmann usual

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right). \quad (10.32)$$

A coordenada radial comovente r em (10.31) pode ser eliminada, utilizando o raio dinâmico de horizonte aparente [98] definido por

$$r = \frac{c}{H}, \quad (10.33)$$

e substituindo a equação (10.33) em (10.31) e considerando ainda o fato de que \ddot{a}/a pode ser escrito como $\ddot{a}/a = \dot{H} + H^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{H} + H^2 &= \frac{4\pi G}{3} \frac{\pi c^2 a^2}{l_p^2 H^2} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \frac{\left(1 + \frac{3}{2}\right) 2\kappa \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{4}\right)}{\left(1 + \frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} - \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{4}\right)} \quad (10.34) \\ &\times \frac{\kappa}{\ln \left[\frac{\kappa \pi c^2 a^2}{l_p^2 H^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2 \pi^2 c^4 a^4}{l_p^4 H^4} + 1} \right]} \end{aligned}$$

que nos mostra uma equação diferencial extremamente não linear para o parâmetro de Hubble como função de κ . Se expandirmos o denominador do lado direito da equação (10.34) e eliminamos termos de l_p^n onde $n > 2$, temos que

$$\dot{H} + H^2 = \frac{4\pi G_\kappa}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right), \quad (10.35)$$

onde a constante gravitacional efetiva G_κ é dada por (10.3).

11 Parâmetro de Immirzi em LQG e Estatística de Kaniadakis

O parâmetro de Immirzi corresponde ao conjunto de parâmetros únicos de transformações canônicas relacionadas às variáveis canônicas da teoria clássica. A saber, para todo γ , as equações clássicas de movimento da relatividade geral são irrefutáveis. No nível quântico, podemos dizer que γ corresponde à ambiguidade de quantização da teoria. Existe uma teoria quântica real para cada γ real e positivo [84]. Isto pode ser computado pela contagem do número de micro-estados em LQG. A geometria quântica de uma seção transversal do horizonte de eventos de um buraco negro em LQG é descrita pela topologia de uma dupla esfera com defeitos, chamados de “perfurações”, do inglês *punctured*, que carregam números quânticos de “spin” dotados pelos limites da rede de spin que representam a geometria quântica de **bulk**. Uma forma de se calcular o parâmetro de Immirzi, solucionando-se o problema mencionado anteriormente, pode ser através da lei de entropia de área de Beckenstein-Hawking [108] onde, nos procedimentos usuais adotados, considera que esta lei de entropia tem sua origem na entropia de Boltzmann-Gibbs. No trabalho apresentado neste capítulo, será proposta uma modificação no método mencionado anteriormente de modo tal que a entropia de Beckenstein-Hawking será uma consequência da estatística de Kaniadakis [13].

O espaço de Hilbert da LQG é formado pela rede de spins. No caso da gravidade, redes de spins são diagramas cujas bordas são caracterizadas por representações do grupo de calibre $SU(2)$. Se a superfície for intersectada por uma borda de uma rede de spin caracterizada pelo número quântico j , então a área quântica do buraco negro é dada por

$$a(j) = 8\pi l_p^2 \gamma \sqrt{j(j+1)}, \quad (11.1)$$

onde γ representa o parâmetro de Immirzi e j , o número quântico de spin j_1, \dots, j_N das N perfurações, pode assumir valores como $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, *i.e.*, a representação do grupo $SU(2)$. Estes j 's representam as bordas das redes de spin. Da Eq. (11.1) podemos concluir que a área do horizonte de eventos de um buraco negro pode ser formada por um grande número de bordas de rede de spin que perfuram a superfície.

A entropia de Kaniadakis pode ser escrita como

$$S_\kappa = -k_B \sum_i^W \frac{p_i^{1+\kappa} - p_i^{1-\kappa}}{2\kappa}, \quad (11.2)$$

que recupera a entropia de Boltzmann-Gibbs no limite em que $\kappa \rightarrow 0$. Utilizando o modelo microcanônico, onde todos os estados apresentam probabilidades iguais de ocorrência, a entropia de Kaniadakis toma a seguinte forma [13, 14]

$$S_\kappa = k_B \frac{W^\kappa - W^{-\kappa}}{2\kappa}. \quad (11.3)$$

Com o objetivo de obtermos uma nova expressão para o parâmetro de Immirzi, consideraremos primeiramente a estatística de Boltzmann-Gibbs. O número de configurações (micro-estados) em uma superfície perfurada é dado por

$$W = \prod_{n=1}^N (2j_n + 1), \quad (11.4)$$

onde o termo $(2j_n + 1)$ na Eq. (11.4) representa a multiplicidade do estado j . Podemos mostrar que as configurações mais importantes que contribuem na Eq. (11.4) são aquelas nas quais o valor mais baixo de spin domina. Denotando-se o valor mínimo de spin como j_{min} , então da Eq. (11.4) teremos

$$W = (2j_{min} + 1)^N, \quad (11.5)$$

e da Eq. (11.1) podemos obter o número de perfurações em uma superfície de área A , dado por

$$N = \frac{A}{a(j_{min})} = \frac{A}{8\pi l_p^2 \gamma \sqrt{j_{min}(j_{min} + 1)}}. \quad (11.6)$$

Na estatística de Boltzmann, a entropia é dada por $S = k_B \ln W$. Logo, substituindo (11.5) nesta expressão, temos que

$$S = k_B N \ln (2j_{min} + 1), \quad (11.7)$$

e igualando a lei de entropia de Beckenstein-Hawking, que diz que $S_{BH} = k_B A / l_p^2$, à Eq. (11.7) e utilizando-se ainda da Eq. (11.6) e de que $j_{min} = 1/2$ (a contribuição mais importante do ponto de vista estatístico, já que o spin $1/2$ denota a mais baixa representação não trivial de $SU(2)$), obtemos o seguinte parâmetro de Immirzi

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\pi \sqrt{3}}. \quad (11.8)$$

Podemos generalizar o procedimento anterior e, conseqüentemente, obter uma relação mais geral para o parâmetro de Immirzi. Para alcançarmos este objetivo (e podemos ver abordagens semelhantes descritas em [84, 85]), usaremos a entropia de Kaniadakis do modelo microcanônico. Utilizando de (11.5) e da entropia de Kaniadakis (11.3), obtemos

$$k_B \frac{(2j_{min} + 1)^{N\kappa} - (2j_{min} + 1)^{-N\kappa}}{2\kappa} = k_B \frac{A}{4l_p^2}, \quad (11.9)$$

$$\rightarrow N = \frac{\ln \left[\frac{\kappa A}{4l_p^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2 A^2}{16l_p^4} + 1} \right]}{\kappa \ln (2j_{min} + 1)}, \quad (11.10)$$

e substituindo $j_{min} = 1/2$ na Eq. (11.10), então o número de perfurações é dado por

$$N = \frac{\ln \left[\frac{\kappa A}{4l_p^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2 A^2}{16l_p^4} + 1} \right]}{\kappa \ln 2}, \quad (11.11)$$

e é importante notar que, para um dado valor de A , o número de perfurações N em (11.11) é agora uma função do parâmetro κ . Das equações (11.6) e (11.11), podemos derivar a versão de Kaniadakis do parâmetro de Immirzi, dado por

$$\gamma_\kappa = \frac{\ln 2}{\pi\sqrt{3}} \frac{\frac{\kappa A}{4l_p^2}}{\ln \left[\frac{\kappa A}{4l_p^2} + \sqrt{1 + \frac{\kappa^2 A^2}{16l_p^4}} \right]}, \quad (11.12)$$

e desta equação podemos observar que, no limite em que $\kappa \rightarrow 0$, recuperamos o parâmetro de Immirzi $\gamma = \ln 2 / (\pi\sqrt{3})$. Na figura 16 é apresentado um gráfico da equação (11.12) como função de κ . Na mesma figura também é mostrado o parâmetro de Immirzi derivado no contexto da estatística de Tsallis, obtido por Majhi [84], e escrito como

$$\begin{aligned} \gamma_q &= \frac{\ln 2}{\pi\sqrt{3}} \frac{\frac{(1-q)A}{4l_p^2}}{\ln \left[1 + (1-q) \frac{A}{4l_p^2} \right]}, \\ &= \frac{\ln 2}{\pi\sqrt{3}} \frac{\frac{\kappa A}{4l_p^2}}{\ln \left[1 - \frac{\kappa A}{4l_p^2} \right]}, \end{aligned} \quad (11.13)$$

e para se comparar as equações (11.12) e (11.13), utilizamos na equação (11.13) a relação [109]

$$\kappa = q - 1, \quad (11.14)$$

onde q representa o parâmetro não-extensivo de Tsallis. Foi considerado também que $A = 10^6 l_p^2$ nas equações (11.12) e (11.13) para o gráfico apresentado na figura 15.

Da figura 15 podemos observar que a diferença entre as abordagens de Tsallis e Kaniadakis para o cálculo generalizado do parâmetro de Immirzi é mais perceptível para valores de κ superiores (onde $A = 10^6$). Na figura 16 podemos ver o comportamento de γ em relação à variável A . A figura 17 apresenta uma versão 3D da figura 15. Destes resultados, concluímos que utilizando a estatística de Kaniadakis, os valores de γ são reais e positivos, conforme os resultados de [84] em estatística de Tsallis em LQG. Da figura 16 podemos concluir também que o crescimento é mais lento do que do ponto de vista da formulação de Tsallis para o caso de um buraco negro descrito pelo formalismo de LQG. Isto se deve ao fato de γ aumentar sua magnitude conforme o acoplamento entre o horizonte e o *bulk* se torna mais intenso, analisado do ponto de vista da estatística de Kaniadakis.

Figura 15 – Parâmetro de Immirzi como função de κ . A curva azul (abaixo) se refere à estatística de Kaniadakis e a outra linha (laranja) refere-se à estatística de Tsallis.

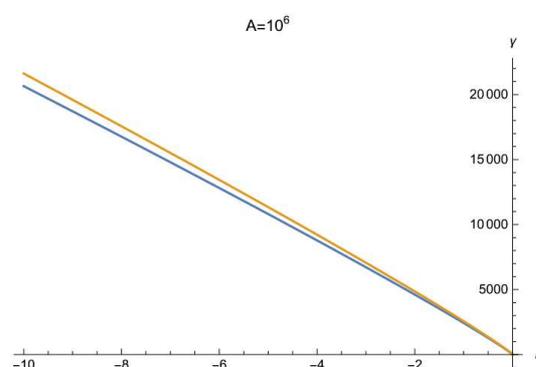


Figura 16 – Gráfico 3D do parâmetro de Immirzi (Γ), na estatística de Kaniadakis, como função de κ e da área normalizada $A \rightarrow A/l_p^2$.

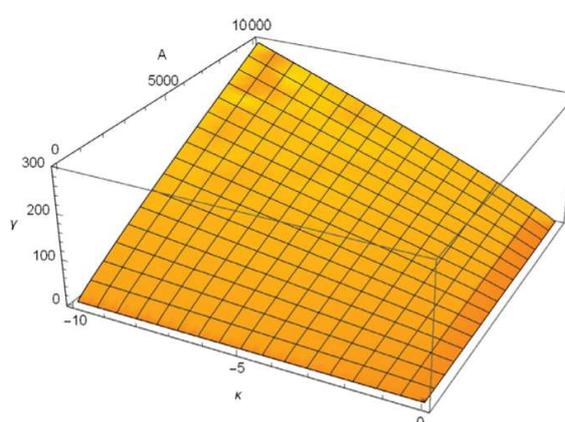
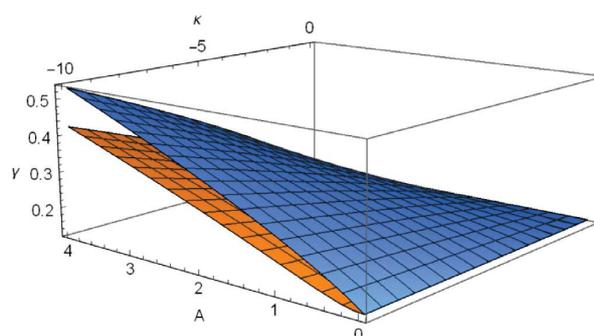


Figura 17 – Gráfico em 3D do parâmetro de Immirzi (Γ), tanto na estatística de Kaniadakis quanto na estatística de Tsallis, em função do parâmetro κ , em amarelo, e do parâmetro q , em azul, e da área normalizada $A \rightarrow A/l_p^2$.



Em [84] o autor demonstra que o parâmetro q é uma função de A . Já que o parâmetro q caracteriza o efeito de acoplamento entre o horizonte e o *bulk*, esta força de acoplamento é determinada por A . Da equação (11.12), mostramos que o parâmetro κ também é uma função de A . Em [109], os autores mostraram que, embora as abordagens de Tsallis e Kaniadakis apresentem comportamentos semelhantes, o limite astrofísico fornece diferentes limites nos dois casos. Nas figuras 15 e 17 podemos notar exatamente esta diferença já que apresentamos ambos comportamentos do parâmetro de Immirzi no contexto da LQG quando formulada por ambas estatísticas.

12 Conclusão

A principal motivação deste trabalho é a de mostrar novas abordagens e ideias sobre o problema teórico existente entre relatividade geral e mecânica quântica, apresentando propostas onde a similaridade entre R.G. e termodinâmica é explorada. Nos capítulos 1 e 2 são apresentadas evidências para um espaço-tempo não comutativo e o formalismo de Faddeev-Jackiw, respectivamente, que fundamentam os trabalhos apresentados nos três capítulos seguintes. Nos capítulos 7 e 8 são apresentados revisões dos trabalhos de Verlinde e de Tsallis, onde os conceitos são utilizados nos trabalhos apresentados posteriormente.

O estudo de teorias em espaços-tempo não-comutativos têm motivado um grande número de trabalhos nos últimos anos e a meta mínima é a tentativa de se entender a física na ordem das escalas de Planck como, por exemplo, a física do Universo primordial. Em outras palavras, introduzir propriedades não-comutativas em física clássica ou quântica significa introduzir um parâmetro na escala de Planck com dimensão de área que pode ser constante ou não. No trabalho apresentado no capítulo 4, o parâmetro de não-comutatividade é constante, o que constitui a chamada não-comutatividade canônica.

Embora teorias de espaços-tempo não-comutativos estejam sendo intensamente exploradas, é natural que ainda existam algumas lacunas que não foram totalmente investigadas como, por exemplo, alguns aspectos da abordagem de Dirac-Bergmann para a análise de sistemas vinculados. Esta é exatamente a questão que é investigada no trabalho apresentado no capítulo 4, já que o conteúdo que envolve invariância de calibre está diretamente conectado à análise de sistemas vinculados. Uma alternativa à abordagem de Dirac-Bergmann é a bem conhecida técnica de Faddeev-Jackiw, que, em um passo intermediário, obtém os parênteses de Dirac do sistema.

Outro aspecto interessante que não foi suficientemente explorado até agora são as teorias com derivadas de ordem superior em espaços-tempo não-comutativos. No capítulo 4 analisamos ambos os aspectos, a saber, a versão não-comutativa do eletromagnetismo de Poldosky que envolve derivadas superiores através da abordagem via técnica de Faddeev-Jackiw.

O principal resultado alcançado no capítulo 4 foi o de se obter os parênteses de Dirac do eletromagnetismo de Poldosky descrito em um espaço-tempo não comutativo utilizando-se do método de Faddeev-Jackiw. Por se tratar de um sistema vinculado, os parênteses de Dirac da eletrodinâmica de Podolsky não-comutativa não podem ser obtidos via método canônico por conta das inconsistências que aparecem quando tentamos promover as quantidades clássicas a operadores. O método de Faddeev-Jackiw tem se mostrado um caminho econômico para se tratar lagrangianas com derivadas de ordem superior. Para começar, revisamos os principais aspectos do formalismo de Faddeev-Jackiw tanto quanto a eletrodinâmica de Poldosky em espaço-tempo não-comutativo. Em seguida,

aplicamos o método de Faddeev-Jackiw sobre a eletrodinâmica não-comutativa de Poldosky e, após algum trabalho algébrico, obtemos os parêntese de Dirac deste modelo, sendo este o principal resultado do trabalho.

Acreditamos que a relevância destes resultados está baseada no fato de que agora temos um novo ponto de vista no que se refere à sistemas vinculados descritos em espaços-tempo não-comutativos e, conseqüentemente, o método de Faddeev-Jackiw sob a luz de teorias em espaços-tempo não-comutativos. Em muitos casos, o procedimento via técnica de Faddeev-Jackiw se apresenta como uma alternativa econômica para se trabalhar com sistemas vinculados como apresentado no capítulo 4.

No capítulo 5 é desenvolvido a análise de vínculos para um sistema de Proca não-linear e não-comutativo. Um ponto a se destacar sobre este trabalho foi a obtenção de duas expressões para o valor do módulo do campo elétrico ao quadrado. Surge então a seguinte questão: qual das duas expressões representa a resposta correta? Ao realizarmos a transformação de Legendre de um sistema Lagrangeano para um sistema hamiltoniano, devemos recuperar as equações de movimento previamente obtidas. Dessa forma, ficou evidenciado que as duas soluções são necessárias e devem ser aplicadas segundo o procedimento descrito. Assim, os parênteses da teoria foram obtidos com sucesso, tanto via abordagem de Dirac-Bergmann quanto via método de Faddeev-Jackiw.

No capítulo 6 foi aplicada a técnica conhecida como *conversão de vínculos* ao sistema físico apresentado no capítulo anterior, o modelo de Proca não-linear e não comutativo. Foram obtidos vínculos de segunda classe segundo a metodologia de Dirac-Bergman. Ao tratarmos teorias de segunda classe como teorias de primeira classe, através da conversão de vínculos, podemos estudar esta teoria utilizando-se de técnicas bem estabelecidas como BRST, quantização de Dirac, etc. Após a fixação do calibre, a nova teoria obtida retorna ao modelo antigo, não invariante de calibre, para um calibre específico. Mas outros calibres ainda podem ser escolhidos, que podem levar a novos desdobramentos físicos importantes. É bem conhecido que estes calibres são todos equivalentes. Além desta liberdade de escolha do calibre, temos também a liberdade de escolha do operador projeção adequado e, assim, podemos obter a teoria de calibre conveniente.

Já no capítulo 7 foi apresentada uma revisão da teoria para gravitação de Verlinde, onde são apresentados novos conceitos como o *Princípio Holográfico* e *Espaço Emergente*. Segundo Verlinde, gravidade apresenta muitas evidências que a caracterizam como um fenômeno emergente. As similaridades com outros conhecidos fenômenos emergentes, como termodinâmica e hidrodinâmica, têm sido relacionadas na maioria das vezes somente como uma analogia sugestiva.

Inspirados pelo trabalho de Verlinde, nos capítulos 9 e 10 é realizada a escolha de que o número de micro-estados acessíveis W de uma superfície holográfica seja definido por $W = c_1^N$, onde c_1 é o número de graus de liberdade internos e N o número de bits. Dessa

forma derivamos uma relação não-trivial para o número de bits como uma função da área da superfície holográfica, utilizando-se de duas importantes estatísticas não gaussianas: no capítulo 9 é utilizada a entropia de Tsallis, apresentada anteriormente no capítulo 8, e no capítulo 10 é desenvolvido o mesmo trabalho com a generalização da entropia de Kaniadakis. Se considerarmos que a entropia da superfície holográfica apresenta uma forma idêntica à de um buraco negro, ou seja, $S = k_B A / 4l_p^2$, este novo número de bits leva à uma modificação interessante da aceleração Newtoniana, da teoria MOND e da equação de Friedmann. Este trabalho mostra claramente que quando o número de bits é diretamente proporcional à área da superfície holográfica, então a estatística de Boltzmann-Gibbs está por trás da teoria previamente escolhida.

A versão não-extensiva da aceleração de rotação de galáxias é derivada no capítulo 9, após obtermos a versão não-extensiva da relação de Tully-Fisher, que relaciona a velocidade de rotação das galáxias com sua massa. Embora na relação usual de Tully-Fisher não apareça uma dependência da distância da estrela ao centro da galáxia, sua versão não-extensiva apresenta tal dependência. No limite da estatística de Boltzmann-Gibbs, aplicada nesta versão não-extensiva da relação de Tully-Fisher, a expressão usual desta relação é recuperada. Podemos nos perguntar se a versão não-extensiva da relação de Tully-Fisher, ou seja, o formato dependente de q , pode trazer alguma luz à questão da matéria escura.

A versão de Kaniadakis da aceleração de rotação de galáxias também foi derivada no capítulo 10, após obtermos a versão κ da relação de Tully-Fisher, que relaciona a velocidade de rotação das galáxias com sua massa. Embora na relação usual de Tully-Fisher não apareça uma dependência da distância da estrela ao centro da galáxia, a versão de Kaniadakis também apresenta tal dependência, tal como na abordagem via entropia de Tsallis para o mesmo problema. Consequentemente, as mesmas conclusões obtidas no trabalho anterior se aplicam para a estatística de Kaniadakis.

No capítulo 11 investigamos o efeito da estatística de Kaniadakis no contexto da LQG, mais especificamente no contexto do parâmetro de Immirzi. A princípio, o parâmetro de Immirzi é arbitrário e uma maneira de se determiná-lo é através da entropia de Beckenstein-Hawking. Do ponto de vista analítico, derivamos a partir da estatística de Kaniadakis o parâmetro de Immirzi, Eq. (11.12), como uma função do parâmetro κ e da área da superfície perfurada. No limite em que $\kappa \rightarrow 0$, onde a entropia de Boltzmann deve ser recuperada, reobtemos o parâmetro de Immirzi $\gamma = \ln 2 / (\pi\sqrt{3})$. Em seguida, comparamos nosso resultado com aquele obtido da estatística de Tsallis, equação (11.13). Podemos observar da figura 16 que o parâmetro de Immirzi, derivado tanto quanto da estatística de Tsallis quanto da estatística de Kaniadakis, apresentam comportamentos semelhantes. Dessa forma, nosso resultado, em conjunto com outros resultados na literatura [104, 99], pode possivelmente indicar se podemos considerar a estatística de Tsallis tanto quanto a estatística de Kaniadakis como teorias viáveis no intuito de estender a teoria de

Boltzmann-Gibbs. É bem conhecido que existem muito mais entropias generalizadas na literatura.

13 Apêndice A

13.1 Variedade Simplética

13.1.1 Variedade Diferenciável

Definição: *Seja M um conjunto e U um subconjunto aberto de M . Uma variedade diferenciável C^k , com $k \geq 1$, de dimensão n , é um conjunto de M munido de um conjunto de homeomorfismos $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$, onde V_i é algum subconjunto aberto de \mathfrak{R}^n , tal que*

$$\cup_i U_i = M \quad (13.1)$$

$$U_i \cap U_j \neq \emptyset \rightarrow \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \quad (13.2)$$

O par (U_i, ϕ_i) é chamado de carta e a coleção de todas as cartas é chamado de atlas.

Pode-se dizer, a grosso modo, que uma variedade é um conjunto de pontos que podem ser relacionados a um sistema de coordenadas, mais um conjunto de regras que dizem como esses pontos se relacionam com seus vizinhos. Em uma variedade diferenciável C^k , essas regras são funções que contêm derivadas parciais contínuas até a k – ésima ordem. No que se segue, é assumido que todos os objetos são de classe C^∞ .

13.1.2 Formas Diferenciáveis

Definição: *Uma forma exterior de grau 1 (ou **1-forma**) é uma função linear $w : M \rightarrow \mathfrak{R}$, i.e.,*

$$w(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) = \lambda_1 w(\xi_1) + \lambda_2 w(\xi_2), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{R} \text{ e } \xi_1, \xi_2 \in T_x M. \quad (13.3)$$

Definição: *Uma forma exterior de grau 2 (ou **2-forma**) é uma função bilinear $w^2 : M \times M \rightarrow \mathfrak{R}$ e antissimétrica*

$$w^2(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \xi_3) = \lambda_1 w^2(\xi_1, \xi_3) + \lambda_2 w^2(\xi_2, \xi_3), \quad (13.4)$$

$$w^2(\xi_1, \xi_2) = -w^2(\xi_2, \xi_1) \quad , \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{R} \text{ e } \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in M. \quad (13.5)$$

Definição: *O **produto exterior** entre duas 1-formas, denotado por $w_1 \wedge w_2$, em um par de vetores $\xi_1, \xi_2 \in T_x M$, é a área orientada da imagem do paralelogramo de lados $w(\xi_1)$ e $w(\xi_2)$ no plano formado por w_1 e w_2 :*

$$(w(\xi_1) \wedge w(\xi_2))(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} w_1(\xi_1) & w_2(\xi_1) \\ w_1(\xi_2) & w_2(\xi_2) \end{vmatrix} = w_1(\xi_1)w_2(\xi_2) - w_1(\xi_2)w_2(\xi_1) \quad (13.6)$$

Definição: Seja $x^i = (x^1, \dots, x^n)$ um sistema de coordenadas local e w uma 1-forma, escrita localmente como $w = a_i dx^i$, onde os diferenciais dx^1, \dots, dx^n formam uma base para o espaço de 1-formas em x^i , ambos objetos em M . A **derivada exterior** de w , denotada por dw , é definida por

$$dw = da_i \wedge dx^i. \quad (13.7)$$

Analogamente define-se a derivada exterior da 2-forma $w^2 \equiv \frac{1}{2}a_{ij}dx^i \wedge dx^j$ por

$$dw^2 \equiv \frac{1}{2}da_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j. \quad (13.8)$$

Por fim, temos que uma k -forma w é dita fechada se $dw = 0$.

13.1.3 Estrutura Simplética Sobre uma Variedade Diferenciável

Definição: Seja M^{2n} uma variedade diferenciável de dimensão par. Uma estrutura simplética sobre M^{2n} é uma 2-forma diferencial (forma exterior de grau 2) w^2 fechada não-degenerada sobre M^{2n} tal que

$$dw^2 = 0 \text{ e ainda } \forall \xi \neq 0 \exists \eta : w^2(\xi, \eta) \neq 0 \quad (\xi, \eta \in TM_x) \quad (13.9)$$

O par (M^{2n}, w^2) é chamado de *variedade simplética*. Para $n = 1$ o par (\mathbb{R}^2, w^2) representa nada mais que (*plano, área*).

Em uma variedade simplética, tanto quanto em uma variedade riemanniana, existe um natural isomorfismo entre campos vetoriais e 1-forma (forma exterior de grau 1). Um campo vetorial sobre uma variedade simplética, construído a partir de uma derivação de uma função, é chamado de campo vetorial hamiltoniano. Um campo vetorial sobre uma variedade determina um fluxo de fase (*phase flow*), ou seja, um grupo de parâmetro 1 de difeomorfismos. O fluxo de fase de um campo vetorial hamiltoniano sobre uma variedade simplética preserva a estrutura simplética do espaço de fases.

Os campos vetoriais sobre uma variedade formam uma álgebra de Lie, bem como os campos vetoriais hamiltonianos sobre uma variedade simplética. A operação nesta álgebra é chamada de Parênteses de Poisson.

13.1.4 Espaço Tangente, Espaço Cotangente e Estrutura Simplética

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n . O **espaço tangente** a M no ponto x , denotado por $T_x M$, é o conjunto de todos os vetores tangentes a M em x . Para se descrever tal espaço com mais precisão, define-se:

Seja $x \in M$. Um vetor tangente a M em x é um mapa ξ_x , de C^∞ em \mathfrak{R} tal que

$$\xi_x[af + bg] = a\xi_x[f] + b\xi_x[g], \quad (13.10)$$

$$\xi_x[fg] = f(x)\xi_x[g] + g(x)\xi_x[f] \quad (13.11)$$

para $f, g \in C^\infty$, $a, b \in \mathfrak{R}$.

Considere a mesma variedade diferenciável M de dimensão n . Uma 1-forma sobre o espaço tangente a M no ponto x é chamado de um *vetor cotangente* a M em x . O conjunto de todos os vetores cotangentes a M em x forma um espaço vetorial de dimensão n , dual ao espaço tangente $T_x M$. Este espaço vetorial, formado por vetores cotangentes, será denotado por $T_x^* M$ e designado como o *espaço cotangente* a M em x .

A união de espaços cotangentes à variedade em todos os seus pontos é chamada de *grupo cotangente* de M e é denotado por $T^* M$. O conjunto $T^* M$ apresenta uma estrutura natural de uma variedade diferenciável de dimensão $2n$. Um ponto de $T^* M$ é uma 1-forma diferenciável sobre o espaço tangente a M em algum ponto x de M . Se q é uma escolha de n coordenadas locais para pontos em M , então tal forma diferenciável é dada por suas n componentes p . Em conjunto, os $2n$ números p e q formam uma coleção de coordenadas locais para pontos em $T^* M$.

Existe uma projeção $f : T^* M \rightarrow M$ (mapeamento de toda 1-forma sobre $T_x M$ para o ponto x). A projeção f é diferenciável e sobrejetiva. A pré-imagem de um ponto $x \in M$ sob a projeção é o espaço cotangente $T_x^* M$.

Como já mencionado anteriormente, o grupo cotangente $T^* M$ apresenta, de forma natural, uma estrutura simplética. Nas coordenadas locais descritas acima, essa estrutura simplética é dada pela fórmula

$$w^2 = d\vec{p} \wedge d\vec{q} = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n \quad (13.12)$$

Podemos ainda ressaltar que a transformação de Legendre não depende do sistema de coordenadas. Ela leva uma função $L : TM \rightarrow \mathfrak{R}$ sobre o grupo tangente para uma função $H : T^* M \rightarrow \mathfrak{R}$ sobre o grupo cotangente.

13.1.5 Transformação Simplética

Considere a transformação linear de um espaço simplético $S : M^{2n} \rightarrow M^{2n}$. Seja $p_i : (p_1, \dots, p_n)$, $q^i : (q^1, \dots, q^n)$ um sistema de coordenadas simplético. Neste sistema de coordenadas, podemos representar a transformação S por uma matriz $n \times n$.

Teorema- Uma transformação é simplética se, e somente se, sua matriz S nas coordenadas simpléticas (q^i, p^i) satisfazem a relação

$$S^{-1}fS = f, \quad (13.13)$$

onde

$$f = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ -\delta_i^j & 0 \end{pmatrix} \quad (13.14)$$

A matriz f é chamada de **matriz simplética canônica**.

13.1.6 Teorema de Darboux

A seguir é apresentado o Teorema de Darboux sem demonstração.

Teorema- Seja (M^{2n}, w^2) uma variedade simplética e $x \in M^{2n}$ um ponto. Existe então um sistema de coordenadas simpléticas locais $\zeta = (q^i, p^i)$, com $i = 1, \dots, n$, centrado em x tal que a forma w^2 é escrita na forma

$$w^2 = dq^i \wedge dp^i. \quad (13.15)$$

14 Apêndice B

A equação diferencial ordinária mais simples que pode ser considerada é

$$\frac{dy}{dx} = 0, (y(0) = 1). \quad (14.1)$$

Sua solução é

$$y = 1, \quad (14.2)$$

com a seguinte curva simétrica em relação ao eixo da bissetriz dos eixos x e y

$$x = 1. \quad (14.3)$$

A segunda equação diferencial mais simples que podemos imaginar é

$$\frac{dy}{dx} = 1, (y(0) = 1). \quad (14.4)$$

Sua solução é

$$y = 1 + x, \quad (14.5)$$

com a função inversa dada por

$$y = x - 1. \quad (14.6)$$

Agora consideremos a seguinte equação

$$\frac{dy}{dx} = y, (y(0) = 1), \quad (14.7)$$

cuja solução é

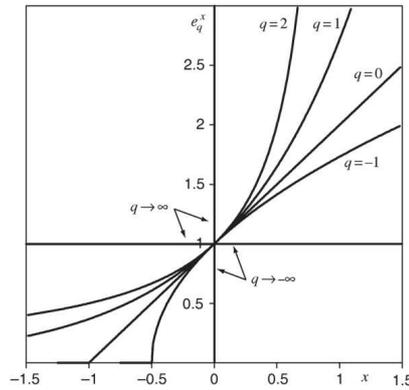
$$y = e^x. \quad (14.8)$$

Sua função inversa será

$$y = \ln x, \quad (14.9)$$

e, obviamente, satisfaz a seguinte propriedade

$$\ln(x_A x_B) = \ln x_A + \ln x_B. \quad (14.10)$$

Figura 18 – A função q -exponencial.

Fonte: Tsallis, 2009.

É possível unificar estas três equações diferenciais (14.1), (14.4) e (14.7)? De fato, sim. Basta considerar

$$\frac{dy}{dx} = a + by, (y(0) = 1), \quad (14.11)$$

e manipular os parâmetros a e b . E ainda, é possível unificar estas três equações com um parâmetro somente? Sim, mas a equação torna-se *não-linear*. Considere a seguinte equação

$$\frac{dy}{dx} = y^q, (y(0) = 1; q \in \mathbb{R}). \quad (14.12)$$

Sua solução é

$$y = [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}} \equiv e_q^x, (e_1^x = e^x). \quad (14.13)$$

Sua função inversa será

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q x, (x > 0; \ln_1 = \ln x), \quad (14.14)$$

e satisfaz a seguinte propriedade

$$\ln_q(x_A x_B) = \ln_q x_A + \ln_q x_B + (1 - q)(\ln_q x_A)(\ln_q x_B). \quad (14.15)$$

É possível verificar imediatamente que para $q \rightarrow -\infty$, $q = 0$ e $q = 1$, recuperamos precisamente as equações (14.1), (14.4) e (14.7), respectivamente. A partir deste ponto, Tsallis então passa a se referir às equações (14.13) e (14.14) como q -exponencial (figura 18) e q -logaritmo, respectivamente.

REFERÊNCIAS

- [1] ABREU, E. M. C.; FERNANDES, R. L.; NETO, J. A.; MENDES, A. C. R.; DE PAULA, R.; *Int. Jour. of Mod. Phys. A*, **33**, 1850163 (2018).
- [2] ABREU, E. M. C.; NETO, J. A.; MENDES, A. C. R.; BONILLA, A.; DE PAULA, R.; *EPL*, **124**, 30003 (2018).
- [3] ABREU, E. M. C.; NETO, J. A.; MENDES, A. C. R.; BONILLA, A.; DE PAULA, R.; *EPL*, **124**, 30005 (2018).
- [4] ABREU, E. M. C.; NETO, J. A.; MENDES, A. C. R.; DE PAULA, R.; *Chaos, Solitons and Fractals*, **118**, 307 (2019).
- [5] VERLINDE, E.; arXiv:1001.0785v1, (2010).
- [6] JACOBSON, T.; *Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State*, arXiv:gr-qc/9504004v2, (1995).
- [7] BARDEEN, J. M.; CARTER, B.; HAWKING, S. W.; *Comm. in Math. Phys.* **2**, **31**, 161 (1973).
- [8] PARANJAPE, A.; SARKAR, S.; PADMANABHAN, T.; arXiv:hep-th/0607240v2 (2006).
- [9] PADMANABHAN, T.; arXiv:gr-qc/0209088v2 (2003).
- [10] BEKENSTEIN, J.D.; *Phy. Rev. D*, **7**, 2333, (1973).
- [11] HAWKING, S.W.; *Phys. Rev. Letters*, **26**, 1344, (1971).
- [12] TSALLIS, C.; *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics - Approaching a Complex World*, Springer Science+Business Media, LLC, 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA.
- [13] KANIADAKIS, G.; *Physica A*, **296**, 405, (2001); *Phys. Rev. E*, **66**, 056125, (2002); **72**, 036108, (2005).
- [14] KANIADAKIS, G.; SCARFONE, A. M.; *Physica A*, **305**, 69, (2002).
- [15] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; *Class. Quant. Grav.*, **28**, 125007, (2011).
- [16] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; *Phys. Rev. D*, **78**, 023516, (2008).
- [17] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; *Int. J. Mod. Phys. A*, **24**, 2741, (2009).
- [18] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; *Phys. Rev. D*, **80**, 124038, (2009).
- [19] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; *Rap. Comm. Phys. Rev. D*, **82**, 041502 (2010).

- [20] BASTOS, C.; BERTOLAMI, O.; DIAS, N. C.; PRATA, J. N.; *Non-Canonical Phase-Space Noncommutativity and the Kantowski-Sachs singularity for Black-Holes*, arXiv:1012.5523 [hep-th].
- [21] DIRAC, P. A. M.; *Can. J. Math.* **2**, 129, (1950).
- [22] DIRAC, P. A. M.; *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School of Science, Monograph Series (Yeshiva University, New York, 1964).
- [23] ANDERSON, J. L.; BERGMANN, P. G.; *Phys. Rev.* **83**, 1018 (1951).
- [24] BERGMAN, P. G.; GOLDBERG, I.; *Phys. Rev.* **98**, 531 (1955).
- [25] FADDEEV, L. D.; JACKIW, R.; *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 1692 (1988).
- [26] BARCELOS-NETO, J.; WOTZASEK, C.; *Int. J. Mod. Phys., A* **7**, 4981 (1992).
- [27] BARCELOS-NETO, J.; WOTZASEK, C.; *Mod. Phys. Lett., A* **7**, 1737 (1992).
- [28] ASHTEKAR, A.; BAEZ, J.; KRASNOV, K.; *Adv. Theor. Math. Phys.*; **1**, 4 (2000).
- [29] IMMIRZI, G.; *Nucl. Phys. B*, **57**, 65 (1997).
- [30] OLIVEIRA, W.; *Notas de aula, UFJF, Departamento de física* (1999).
- [31] DEWITT, B.; *Gravitation*, editado por L. Witten (Wiley, New York), pp 266-381 (1962).
- [32] SNYDER, H. S.; *Phys. Rev.* **71**, 38 (1947).
- [33] DOPLICHER, S.; FREDENHAGEN, K.; ROBERTS, J.E.; *Phys. Lett. B* **331**, 39 (1994).
- [34] YONEGA, T.; *Progr. Theor. Phys.* 103 (2000) 1081 [hep-th/0004074].
- [35] DOUGLAS, M. R.; NEKRASOV, N. A.; *Reviews of Modern Physics*, **73**, 977 (2001).
- [36] SEIBERG, N.; WITTEN, E.; *J. High Energy Phys.* **09**, 032 (1999).
- [37] GALVÃO JR., M. S.; *Gravitação canônica no formalismo simplético*, Dissertação de Mestrado, UFES, (2016)
- [38] citar formalismo simplético, livro texto
- [39] JACKIW, R.; *(Constrained) quantization without tears*. In 2nd Workshop on Constraint Theory and Quantization Methods Montepulciano, Italy, June 28-July 1, 1993.
- [40] WOTZASEK, C.; *Annals Phys.*, **243** 76, (1995).
- [41] DOPLICHER, S.; FREDENHAGEN, K.; ROBERTS, J.E.; *Commun. Math. Phys.*, **172**, 187 (1995).
- [42] NEVES, M. J.; ABREU, E. M. C.; *Europhys. Lett.* **114**, 21001 (2016).
- [43] NEVES, M. J.; ABREU, E. M. C.; *Nucl. Phys. B* **884**, 741 (2014).
- [44] NEVES, M. J.; ABREU, E. M. C.; *Int. J. Mod. Phys. A* **28**, 1350017 (2013).

- [45] NEVES, M. J.; ABREU, E. M. C.; *Int. J. Mod. Phys. A* **27**, 1250109 (2012).
- [46] DERIGLAZOV, A. A.; *Phys. Lett. B* **555**, 83 (2003).
- [47] NEVES, M. J.; ABREU, E. M. C.; NIKOOFARD, V.; arXiv:1501.01912 [hep-th].
- [48] PODOLSKY, B.; *Phys. Rev.* **62**, 68 (1942).
- [49] ABREU, E. M. C.; FERNANDES, R. L.; MENDES, A. C. R.; NETO, J. A.; NEVES, M. J.; *Mod. Phys. Lett. A* **32**, 1750019 (2016).
- [50] ABREU, E. M. C.; FERNANDES, R. L.; MENDES, A. C. R.; NETO, J. A.; *Int. J. Mod. Phys. A* **31**, 1650150 (2016).
- [51] BUFALO, R.; PIMENTEL, B. M.; *Eur. Phys. J. C* **74**, 2993 (2014).
- [52] ABREU, E. M. C.; MENDES, A. C. R.; NEVES, C.; OLIVEIRA, W.; WOTZASEK, C.; XAVIER, L. M. V. *Mod. Phys. Lett. A* **25**, 1115 (2010).
- [53] ABREU, E. M. C.; MENDES, A. C. R.; NEVES, C.; OLIVEIRA, W.; SILVA, R. C. N.; *J. High. Energy Phys* **1306**, 093 (2013).
- [54] ABREU, E. M. C.; NETO, J. A.; MENDES, A. C. R.; NEVES, C.; OLIVEIRA, W.; *Ann. Phys.* **524**, 434 (2012).
- [55] ABREU, E. M. C.; MENDES, A. C. R.; NEVES, C.; OLIVEIRA, W.; SILVA, R. C. N.; WOTZASEK, C.; *Phys. Lett. A* **374**, 3603 (2010).
- [56] RODRIGUES, D. C.; GALÃO, M.; PINTO-NETO, N.; arXiv:1808.06751 [gr-qc].
- [57] HAWKING, S. W.; *Who's afraid of (higher derivative) ghosts?* Quantum Field Theory and Quantum Statistics, eds. I. A. Batalin, C. J. Ishan e G. A. Vilkovisky (Adam Hilger, Bristol, 1987).
- [58] KRUGLOV, S. I.; *J. Phys. A* **43**, 245403 (2010).
- [59] SZABO, R. J.; *Gen. Relativ. Gravit.* **42**, 76 (2010).
- [60] SZABO, R. J.; *Class. Quantum Grav.* **23**, R199 (2006).
- [61] SZABO, R. J.; *Phys. Rep.* **378**, 207 (2003).
- [62] BANERJEE, R.; CHAKRABORTY, B.; GHOSH, S.; MUKHERJEE, P.; SAMANTA, S.; *Found. Phys.* **39**, 1297 (2009).
- [63] RUEGG, H.; RUIZ-ALTABA, M.; arXiv:0304245v2 [hep-th] (2003).
- [64] OSTROGRADSKI, M.; *Mem. Acad. St. Petesburg VI* **4**, 385 (1850).
- [65] WEISS, R.; *Proc. R. Soc. A* **169**, 102 (1938).
- [66] CHANG, J. S.; *Proc. Camb. Philos Soc.* **44**, 76 (1948).
- [67] HEISENBERG, W.; EULER, H.; *Z.Phys.* **98**, 714 (1936).
- [68] NOVELLO, M.; KLIPPERT R.; SALIM J. M.; *Semiclassical electrodynamics in the early universe* (2000)

- [69] SCHWINGER, J.; *Phys. Rev.* **76**, 749 (1949).
- [70] DARABI, F.; NADERI F.; arXiv:1101.1573v2 [hep-th] (2011)
- [71] DIRAC, P. A. M.; *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, (1964).
- [72] VYTHEESWARAN, A. S.; *Int. J. of Mod. Phys. A*, **13**, 5, 765 (1998).
- [73] BATALIN, I. A.; FRADKIN, E. S.; *Phys. Lett. B* **180**, 157 (1986).
- [74] MITRA, P.; RAJAMARAN, R.; *Ann. Phys.* **203**, 137, 157 (1990).
- [75] HAWKING, S.W.; *Particle Creation By Black-Holes*, Commun Math. Phys., **43**, 199-220, 1975.
- [76] NICOLIS, G.; DAEMS, D.; *Chaos* **8**, 311 (1998).
- [77] GIBBS, J. W.; *Elementary Principles in Statistical Mechanics - Developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics*, C. Scribner's Sons, New York, 1902; Yale University Press, New Haven, 1948; OX Bow Press, Woodbridge, Connecticut, 1981.
- [78] BOLTZMANN, L.; *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gas molekülen [Further Studies on Thermal Equilibrium Between Gas Molecules]*, Wien, Ber., **66**, 275, 1872.
- [79] BOLTZMANN, L.; *Über die Beziehung eines allgemeine mechanischen Satzes zum zweiten Hauptsatze der Warmetheorie*, Sitzungsberitche, K. Akademie der Wissenschaften in Wien, Math. - Naturwissenschaften **75**, 67 (1877); English Translation (*On the Relation of General Mechanical Theorem to the Second law of Thermodynamics*) in S. Brush, *Kinetic Theory*, Vol. **2**; *Irreversible Processes*, 188, Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [80] TSALLIS, C.; *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*, J. Stat. Phys. **52**, 479, 1998.
- [81] ABE S.; *Stability of Tsallis entropy and instabilities of Renyi and normalized Tsallis entropies*, Phys. Rev. E, **66**, 046134, 2002.
- [82] PLASTINO, A. R.; LIMA, J. A. S.; *Phys. Lett. A*, **260**, 46 (1999).
- [83] ABREU, E. M. C.; NETO, J. A.; MENDES, A. C. R.; OLIVEIRA, W.; *New bounds for Tsallis parameter in a noncommutative phase-space entropic gravity and nonextensive Friedmann equations*, arXiv:1204, v2, 2005.
- [84] MAJHI, A.; *Phys. Lett. B*, **775**, 32 (2017).
- [85] SAGUIA, A.; SARANDY, M. S.; *Phys. Lett. A*, **374**, 3384 (2010)
- [86] PADMANABHAN, T.; *Mod. Phys. Lett. A*, **25**, 1129 (2010).
- [87] MILGROM, M.; *Astrophys. J.* **270**, 371 (1983).
- [88] MILGROM, M.; *Astrophys. J.* **270**, 365 (1983).

- [89] MILGROM, M.; *Astrophys. J.* **270**, 384 (1983).
- [90] TULLY, R. B.; FISHER, J. R.; *Astron. Astrophys.*, **54**, 661 (1977).
- [91] NETO, J. A.; *Int. J. Theor. Phys.*, **50**, 3552 (2011).
- [92] PADMANABHAN, T.; **Class. Quantum Grav.**, **21**, 4485 (2004).
- [93] TOLMAN, R. C.; *Phys. Rev.*, **35**, 875 (1930).
- [94] KOMAR, A.; *Phys. Rev.*, **113**, 934 (1959).
- [95] BARBOZA JR, E. M.; NUNES, R. C.; ABREU, E. M. C.; NETO, J. A.; *Physica A*, **436**, 301 (2015).
- [96] NUNES, R. C.; BARBOZA JR, E. M.; ABREU, E. M. C.; NETO, J. A.; *JCAP*, **08**, 051 (2016).
- [97] SHEYKHI, A.; HENDI, S. H.; *Phys. Rev. D*, **84**, 04423 (2011).
- [98] KOMATSU, N.; *Eur. Phys. J. C*, **77**, 229 (2017).
- [99] ABREU, E. M. C.; NETO, J. A.; BARBOZA JR.,E. M.; NUNES, R. C.; *Europhys. Lett.*, **114**, 55001 (2016).
- [100] ABREU, E. M. C.; NETO, J. A.; BARBOZA JR.,E. M.; NUNES, R. C.; *Physica A*, **441**, 141 (2016).
- [101] TEWELDEBERBHAN, A. M.; MILLER H. G.; TEGEN, R.; *Int. J. Mod. Phys. E*, **12**, 669 (2003).
- [102] ROSSANI, A.; SCARFONE, A. M.; *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 4955 (2004).
- [103] RAJAONARISON, D.; BOLDUC, D.; JAYET, H.; *Econ. Lett.*, **86**, 13 (2005).
- [104] ABREU E. M. C., NETO J. A., MENDES A. C. R.; BONILLA A., *EPL*, **124**, 30005 (2018).
- [105] MORADPOUR H.; BONILLA A.; ABREU E. M. C.; NETO J. A.; *Phys. Rev. D.*, **96**, 123504 (2017).
- [106] ZADEH M., SHEYKHI A., MORADPOUR H.; and BAMBAAH K.; *Eur. Phys. J. C*, **78**, 940, (2018).
- [107] PADMANABHAN, T.; *Class. Quant. Grav.* **21**, 4485 (2004).
- [108] DREYER, O.; *Phys. Rev. Lett.* 90(8), 081301-1, (2003).
- [109] BENTO, E. P.; SILVA, J. R. P.; SILVA, R.; *Phys. A*, **392**, 666 (2013).
- [110] WALD, R. M.; *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago 60637 (1984).
- [111] GREINER, W.; NEISE, L.; STOCKER, H.; *Thermodynamic and statistical mechanics*, Springer-Verlag New York, Inc. (1995).
- [112] BOMBELLI, L.; KOUL, R. K.; LEE, J.; SORKIN, R. D.; *Phys. Rev. D* **34**, 373 (1986).